

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Тверской государственный университет»

А.А. ГОЛУБЕВ, В.Ю. СУЕТИН

# **ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ**

Учебное пособие

ТВЕРЬ 2007

УДК 517(075.8)  
ББК В161я73-1  
Г 62

*Рецензенты:*

*Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры  
информатики и прикладной математики Тверского  
государственного технического университета  
В.В. Григорьева*

*Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры  
компьютерной безопасности и математических методов управления  
Тверского государственного университета  
И.А. Шаповалова*

**Голубев А.А., Суетин В.Ю.**

Г 62 Введение в анализ: Учеб. пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т., 2007. –  
160 с.

Подробно рассмотрены основные положения первой части курса математического анализа «Введение в анализ». Предназначено для студентов математических факультетов.

УДК 517(075.8)  
ББК В161я73-1

Печатается по решению научно-методического совета Тверского государственного университета.

© Голубев А.А., Суетин В.Ю., 2007  
© Тверской государственный  
университет, 2007

*Памяти Геннадия Аркадьевича Смирнова,  
чьи лекции легли в основу этой работы,  
п о с в я щ а е т с я*

## **Предисловие**

Математический анализ является одной из важнейших частей современной математики. На его изучение отводятся два учебных года, и полный курс дисциплины составляет, как правило, несколько томов. Однако имеется необходимость в сжатом изложении основных разделов и тем математического анализа, что особенно важно при подготовке к текущим и государственным экзаменам.

Предлагаемое учебное пособие призвано помочь студентам математического факультета в этой подготовке. В нем не только освещаются все пункты экзаменационной программы по данной дисциплине за первый семестр первого курса, но и даются ответы на дополнительные вопросы, которые часто возникают у экзаменаторов при прослушивании ответов студентов.

В пособии рассматриваются основные положения математического анализа, с которыми знакомятся студенты первого курса математического факультета, изучающие данную дисциплину в первом семестре. Пособие включает предисловие, введение, шесть глав, разбитых на параграфы, заключение, глоссарий, содержащий основные определения и формулировки важнейших теорем, указатель основных обозначений, программу лекций по математическому анализу (первый семестр первого курса), список литературы.

Пособие ориентировано на студентов математических факультетов и окажется особенно полезным при подготовке к экзамену. Рекомендуем при работе с материалом:

- 1) прочесть параграф первый раз, понять, о чем идет речь, разобраться с неясными моментами;
- 2) отметить для себя ключевые приемы доказательств;
- 3) попытаться пересказать материал параграфа, подглядывая в отмеченные ключевые приемы;
- 4) воспроизвести изученное и письменно, и устно без подглядывания.

Заметим, что пункт 1) очень важен, так как если вы оставите непонятым какой-то факт, это проявится на экзамене и повлечет лавину дополнительных вопросов со стороны экзаменатора.

При написании учебного пособия мы использовали лекции, прочитанные прекрасным педагогом Геннадием Аркадьевичем Смирновым в последние годы его жизни. Структурно выверенные, изложенные понятным и четким языком, эти лекции явились для нас образцом педагогической деятельности.

## Введение

Математический анализ является тем базисом, на котором строятся многие разделы современной математики: на изучаемых здесь идеях основаны теория вероятностей, теория функций, функциональный анализ, теория аппроксимации, приложения математических методов в экономике и т.п. С XVII века при решении различных задач техники и естествознания разрабатываются методы, основанные на понятии переменной величины и функциональной зависимости. Именно функции являются предметом изучения математического анализа.

Центральными для анализа являются понятия бесконечно малой величины и предельного перехода. На основе этих понятий появились дифференциальное и интегральное исчисление, теория рядов, без которых было бы невозможным современное развитие науки и техники.

Восприятие бесконечно малых величин и возможности оперирования ими явилось качественным скачком в развитии математики как науки. Появившись в античности в парадоксах (апориях) Зенона, эти величины обрели математическую форму лишь в XVII веке в работах Исаака Ньютона (1644–1727) и Готфрида Лейбница (1266–1716) по теории производной и интеграла. Обсчет траекторий полета пушечного ядра породил в XVIII веке потребность изучения сумм бесконечного числа слагаемых, и в работах Жана Фурье (1768–1830) возник новый мощный математический аппарат – теория тригонометрических рядов.

Современный научный работник или инженер должны в достаточной степени хорошо владеть как классическими, так и современными математическими методами исследования, которые могут применяться в его области. Для того чтобы иметь возможность с успехом применять математические методы при изучении того или иного вопроса нужно, прежде всего, иметь необходимые знания, уметь правильно обращаться с математическим аппаратом, знать границы допустимого использования рассматриваемой модели. Свободное владение математическими методами, знания и интуиция приобретаются, накапливаются и развиваются в процессе систематических занятий, в результате длительной и настойчивой работы. Тот, кто последовательно овладевает математическим аппаратом, кто последовательно получает твёрдые и точные знания математических фактов, будет уверенно двигаться дальше, и математика станет послушным инструментом в его руках.

20	<p>Логарифмическая функция, её непрерывность. Степенная функция с иррациональным показателем. Некоторые важные пределы: <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1</math>, <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a</math>, <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1</math>, <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha</math>. Непрерывность элементарных функций. Классификация элементарных функций.</p>	2
21	<p>Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших. Символика Ландау: <math>O(f)</math>, <math>o(f)</math>.</p>	2
	<p>Всего: 52 часа</p>	

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баранова О.Е., Суетин В.Ю. *Краткий курс действительного и комплексного анализа*. Тверь, 2006.
2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. *Математический анализ*: В 2 т. М., 1987.
3. Кудрявцев Л.Д. *Курс математического анализа*: В 3 т. М., 1988.
4. Никольский С.М. *Курс математического анализа*: В 2 т. М., 1973.
5. Смирнов Г.А. *Лекции по математическому анализу*. Тверь, 1987–1990 (рукопись).
6. Фихтенгольц Г.И. *Основы математического анализа*: В 2 т. М., 1956.
7. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*: В 3 т. М., 1969.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Предисловие</b> .....	3
<b>Введение</b> .....	4
<b>Глава I. Введение в математический анализ. Действительные числа</b> .....	5
§1. Понятие множества .....	5
§2. Операции над множествами .....	6
§3. Символика в математической логике .....	7
§4. Аксиоматика множества действительных чисел .....	10
§5. Следствия из аксиоматики множества действительных чисел... ..	11
§6. Геометрическая интерпретация множества $\mathbf{R}$ . Плотность множеств $\mathbf{Q}$ , $\mathbf{I}$ и $\mathbf{R}$ . Понятие модуля действительного числа ....	15
§7. Метод математической индукции. Неравенство Бернулли .....	17
§8. Ограниченные числовые множества. Верхняя и нижняя грани числовых множеств .....	18
§9. Существование граней у ограниченного множества .....	21
§10. Арифметические операции над множествами. Арифметические свойства верхних и нижних граней .....	22
<b>Глава II. Общие сведения о функциях</b> .....	23
§1. Понятие функции .....	23
§2. Функции действительного переменного .....	27
§3. Функции ограниченные, монотонные, чётные и нечётные, периодические .....	29
<b>Глава III. Метрические пространства</b> .....	32
§1. Определение и примеры метрических пространств .....	32
§2. Последовательности точек. Предел последовательности точек метрического пространства .....	35
§3. Свойства сходящихся последовательностей .....	40
<b>Глава IV. Числовые последовательности</b> .....	43
§1. Бесконечно малые последовательности .....	43
§2. Бесконечно большие последовательности .....	45
§3. Предел суммы, произведения и частного сходящихся последовательностей .....	47

§4. Переход к пределу в неравенствах .....	50
§5. Предел монотонной ограниченной последовательности .....	52
§6. Число $e$ .....	53
§7. Принцип Кантора стягивающихся отрезков .....	54
§8. Теорема Больцано–Вейерштрасса .....	55
§9. Обобщение некоторых результатов на пространство $\mathbf{R}^m$ .....	56
§10. Фундаментальные последовательности точек метрических пространств .....	59
§11. Множество комплексных чисел $\mathbf{C}$ .....	62
<b>Глава V. Предел функции</b> .....	<b>64</b>
§1. Предельные точки множества. Замкнутые и открытые множества .....	64
§2. Предел функции по Коши (на языке $\varepsilon$ и $\delta$ ).....	68
§3. Предел функции по Гейне (на языке последовательностей).....	70
§4. Свойства предела функции.....	71
§5. Переход к пределу в неравенствах.....	73
§6. Критерий Коши существования предела функции.....	75
§7. Частичный предел функции по множеству.....	76
§8. Предел функции на бесконечности. Бесконечный предел.....	79
§9. Предел монотонной ограниченной функции.....	84
§10. Два замечательных предела.....	87
§11. Раскрытие неопределённостей .....	89
<b>Глава VI. Непрерывные функции</b> .....	<b>90</b>
§1. Определения непрерывности функции в точке и на множестве. Односторонняя непрерывность функции в точке .....	90
§2. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва функций действительного переменного .....	94
§3. Локальные свойства непрерывных функций.....	96
§4. Теорема Больцано–Коши о промежуточных значениях непрерывной функции действительного переменного.....	99
§5. Обратная функция для функции действительного переменного .....	102
§6. Обратные тригонометрические функции.....	105
§7. Степень с рациональным показателем. Степенная функция с рациональным показателем.....	108
§8. Степень с иррациональным показателем.....	112

§9. Показательная и логарифмическая функции .....	116
§10. Степенная функция с иррациональным показателем $y = x^\alpha$ , $\alpha \in \mathbf{I}$ .....	117
§11. Показательно-степенная функция.....	118
§12. Некоторые важные пределы .....	120
§13. Элементарные функции и их непрерывность.....	121
§14. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших функций .....	121
§15. Символика Ландау.....	124
<b>Заключение</b> .....	130
<b>Глоссарий</b> .....	131
<b>Указатель основных обозначений</b> .....	149
<b>Программа лекций по математическому анализу     (1-й курс, 1-й семестр)</b> .....	152
<b>Список литературы</b> .....	155

*Для заметок*

---

ГОЛУБЕВ Александр Анатольевич  
СУЕТИН Валерий Юрьевич

## **ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ**

*Учебное пособие*

Редактор Л.В. Тарасова  
Технический редактор Н.М. Петрив  
Подписано в печать 25.12.2007. Формат 60 × 84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Усл. печ. л. 10,0. Тираж 100 экз. Заказ № 639.  
Тверской государственный университет  
Редакционно-издательское управление  
Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.  
Тел. РИУ: (4822) 35-60-63.