Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тверской государственный университет»

М.А. Акивис, А.М. Шелехов

МНОГОМЕРНЫЕ ТРИ-ТКАНИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Монография

Тверь 2010

УДК 514.763.7
ББК В151.62
А 39

Акивис М.А., Шелехов А.М.
А 39 Многомерные три-ткани и их приложения: Монография. — Тверь: Твер. гос. ун-т, 2010. — 308 с., ил. 75.

ISBN 978-5-7609-0577-2

Книга включает теорию многомерных три-тканей, ее приложения к теории гладких квазигрупп и луп, теории $(n+1)$-тканей, теории тканей, образованных слоения разных размерностей, к некоторым вопросам теоретической физики. Каждая глава сопровождается набором задач и примечаниями исторического характера.

Книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по дифференциальной геометрии и ее приложениям, а также для научных работников и преподавателей.

УДК 514.763.7
ББК В151.62

ISBN 978-5-7609-0577-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Термином k-ткань в геометрии обозначают совокупность k гладких слоений. Два-ткани или сети кривых, — известный и хорошо изученный объект в классической дифференциальной геометрии. Им посвящено большое количество работ, в которых рассматривались их метрические, аффинные и проективные свойства. В 1927 году появились статьи уже известного в то время геометра В. Бляшке и его ученика Т. Томсена (см. [Бл-2], [Тм-1]), посвященные новому вопросу дифференциальной геометрии — геометрии три-тканей. В их работах три-ткани рассматривались с точностью до локальных диффеоморфизмов. Это наиболее широкое отношение эквивалентности, при котором сохраняется лишь инцидентность точек и линий, образующих три-ткань.

Объясним подробнее. Рассмотрим в некоторой области X двумерного арифметического пространства слоение λ гладких кривых. Очевидно, существует такой локальный диффереоморфизм области X в область X' аффинной плоскости, при котором слоение λ перейдет в семейство параллельных прямых в X'. Сеть, образованная двумя слоениями гладких кривых в области X, также может быть переведена подходящим локальным диффеоморфизмом в два семейства параллельных прямых. Таким образом, одно или два гладких слоения кривых являются локально тривиальными объектами, если отношение эквивалентности — локальный диффеоморфизм.

Рассмотрим теперь в области X три-ткань W, образованную тремя гладкими слоениями кривых, находящимися в общем положении. Такой объект уже не является локально тривиальным, так как обладает локальным инвариантом. Действительно, пусть D — произвольная точка области X. Проведем через нее три линии ткани W и возьмем на одной из этих линий точку B, достаточно близкую к точке D. Проводя линии ткани W, построим последовательно точки C, F, H, E, G, см. рис. 1. Точки G и H, вообще говоря, не лежат на одной линии третьего семейства три-ткани W, т. е. изображенная на рис. 1 шестиугольная конфигурация (или, короче, фигура) не замыкается. Но существуют три-ткани, на которых замыкаются *все* шестиугольные фигуры в некоторой окрестности точки A, т. е. для них точки G и H всегда лежат на одной линии третьего семейства. Такие три-ткани называются *шестиугольными* или *тканями H*. Например, шестиугольную три-ткань образуют три семейства параллельных прямых на аффинной плоскости.

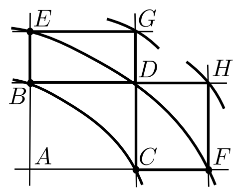

Рис. 1

Замечательно, что верно и обратное: всякая шестиугольная три-ткань на плоскости локально диффеоморфна три-ткани, образованной тремя семействами параллельных прямых. Это впервые доказал Томсен в [Тм-1], см. также книгу [Бл-1], с. 19.

Три-тканям посвящено большое число работ В. Бляшке, его учеников и сотрудников, опубликованных в 30-х и 40-х годах, а также книга «Геометрия тканей» (1938), написанная Бляшке совместно с Г. Болом ([ББ-1]). В своих работах Бляшке отмечает связь теории тканей со многими разделами геометрии, в частности, с проективной геометрией. На проективной плоскости P^2 естественно рассматривать три-ткани, образованные тремя однопараметрическими семействами прямых. Пусть W — такая три-ткань. Обозначим составляющие ее семейства λ_α, а огибающие семейств — через X_α, $\alpha = 1, 2, 3$. Через произвольную точку p некоторой области D плоскости P^2 проходит по одной прямой из каждого семейства λ_α (рис. 2).

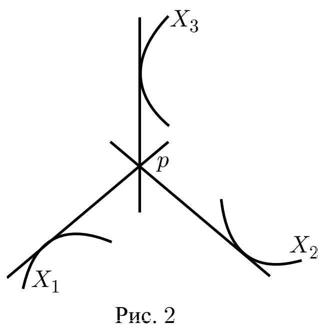

Рис. 2

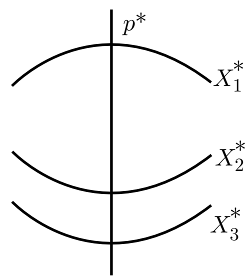

Рис. 3

При коррелятивном преобразовании $K : P^2 \to P^{2*}$ семейства λ_α переходят в три линии X^*_α на двойственной плоскости P^{2*}, а точке p соответствует прямая p^* (рис. 3). Прямые исходной три-ткани W при корреляции K перейдут в пучки прямых на плоскости P^{2*}, центры которых лежат на линиях X^*_α. При этом имеет место замечательный факт: для того, чтобы прямолинейная три-ткань W была шестиугольной, необходимо и достаточно, чтобы все три линии X^*_α принадлежали одной и той же кривой третьего порядка. Эта известная теорема Графа–Зауэра вытекает из теоремы Шаля о плоских кривых третьего порядка (см. [Бл-1], с. 26).

Уже в первых работах, посвященных три-тканям, обнаружилась связь этого раздела геометрии с алгеброй. В 1928 г. была опубликована работа К. Рейдемейстера [Р-1], а в 1932 г. — работа Х. Кнессера [Кн-1], в которых было показано, как с помощью произвольной конечной группы G построить так называемую *полную* три-ткань, обладающую всеми инцидентностными свойствами три-ткани. А именно, рассмотрим декартов квадрат $X = G \times G$, элементы которого — пары (x, y) — назовем *точками полной три-ткани.* Подмножества точек вида (x, b), (a, y) и $\{(x, y) \mid x \cdot y = c\}$ множества X, где a, b, c — постоянные, а x, y — переменные элементы группы G, назовем *линиями* этой ткани. Очевидно, что через каждую точку полной три-ткани проходят три линии, принадлежащие различным семействам, а всякие две линии, принадлежащие разным семействам, пересекаются только в одной точке. Теория полных тканей развивается подобно теории абстрактных проективных плоскостей, см. [Пи-1], только вместо конфигураций Дезарга и Паппа, рассматриваемых на проективных плоскостях, здесь возникают иные конфигурации, которые теперь называют *фигурами Рейдемейстера* и *Томсена* (подробности см. в главе 2).

Позднее Бол в работе [Бол-3] заметил, что полные три-ткани можно строить с помощью группоидов более общего вида, чем группы, а именно, с помощью *квазигрупп.* Он рассмотрел на полной три-ткани некоторые новые конфигурации, которые теперь называют *фигурами Бола* (см. главу 2), и установил, что они связаны с условиями «ослабленной» ассоциативности в квазигруппе.

Оказалось, что если на двумерной геометрической три-ткани, образованной тремя семействами гладких кривых, замыкаются все достаточно малые конфигурации какого-либо одного типа (Рейдемейстера, Томсена или Бола), то эта ткань эквивалентна параллельной ткани. Таким образом, на плоскости все типы тканей, определяемые замыканием конфигураций какого-либо одного типа, эквивалентны. Это обстоятельство стимулировало изучение многомерных три-тканей, для которых указанные классы являются различными.

Другим стимулом для изучения многомерных три-тканей послужила их связь с различными алгебраическими структурами, в первую очередь с квазигруппами. По сути, три-ткань и квазигруппа — алгебраическая и геометрическая интерпретации одного и того же объекта — функции двух переменных. Теория квазигрупп и луп была построена В.Д. Белоусовым, см. [Б-2]–[Б-5]. Значение этой теории, а, следовательно, и теории три-тканей, существенно возросло после того, как многочисленные неассоциативные структуры были обнаружены в различных разделах физики, см., например, [Са-1], [Бат-1], [Кв], [Не-1], [НеС-1], [Мих-1]. В 1953 году появилась статья А.И. Мальцева [М-1], в которой было положено начало систематическим исследованиям аналитических квазигрупп и луп, близких в том или ином смысле к группам Ли, но, вообще говоря, не ассоциативным. Их исследование возможно как алгебраическими, так и геометрическими методами. Как увидит читатель, мощные методы современной дифференциальной геометрии позволяют глубоко проникнуть в структуру таких объектов, описать их свойства, провести классификацию и т. п.

Первые работы по теории многомерных три-тканей, образованных слоениями одинаковой размерности, принадлежат Болу, который рассмотрел три-ткани на четырехмерном многообразии, и С.С. Черну, который ввел дифференциальные инварианты многомерной три-ткани, образованной на $2r$-мерном многообразии тремя r-мерными слоениями, см. [Бол-1], [Ч-1].

После этих работ долгое время не появлялось публикаций, посвященных теории многомерных три-тканей. Их изучение было продолжено лишь с конца 60-х годов. В 1969 году появилась статья М.А. Акивиса [А-2], за которой последовала большая серия работ, как его самого, так и его учеников. Примерно с этого времени под руководством Акивиса в Московском институте стали и сплавов начинает работать геометрический семинар, на котором обсуждаются важнейшие проблемы теории тканей.

Благодаря усилиям другого автора этой книги — А.М. Шелехова с 1981 года в издательстве Калининского государственного педагогического института (ныне Тверской государственный университет) начинает регулярно выходить сборник статей «Ткани и квазигруппы». В результате авторы накопили большой материал по теории многомерных три-тканей. В предлагаемой монографии излагаются основные вопросы этой теории и некоторые ее приложения.

Чтобы книга не получилась тяжеловесной, мы приводим часть результатов без доказательства, о некоторых сообщаем лишь в библиографических примечаниях.

Книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов университетов и педагогических институтов, специализирующихся по дифференциальной геометрии, а также для научных работников и преподавателей. Предполагается, что читатель знаком с основами современной дифференциальной геометрии, в частности, с тензорными методами, методом внешних форм и подвижного репера Эли Картана, которые являются основными в этой теории. Поэтому многие понятия дифференциальной геометрии мы только кратко поясняем в тексте, а иногда приводим и без пояснений. В качестве справочной литературы рекомендуем книги [KH-1], [Ст-1], [B-1], [Ka-1].

Все рассматриваемые в книге функции, векторные и тензорные поля, дифференциальные формы предполагаются достаточное количество раз дифференцируемыми. Все переменные предполагаются вещественными (хотя во многих случаях это не исключает возможности перехода к комплексным переменным). Поэтому, например, для обозначения полной линейной группы мы используем символ $\mathbf{GL}(n)$, а не $\mathbf{GL}(n,R)$ или $\mathbf{G}L(n,C)$, как это принято.

Книга состоит из восьми глав; параграфы и формулы нумеруются отдельно в каждой главе. Каждая глава сопровождается набором задач и примечаниями исторического характера. К тексту книги прилагается достаточно полный список литературы, указатель обозначений и предметный указатель.

В главе 1 дано определение многомерной три-ткани W на гладком многообразии размерности $2r$ и рассмотрены связанные с ней основные геометрические понятия. Найдены структурные уравнения три-ткани, определены ее тензоры кручения и кривизны, рассмотрены их свойства. В терминах этих тензоров охарактеризованы групповые и параллелизуемые ткани. Исследованы свойства связности Черна и других связностей, инвариантно присоединенных к три-ткани. Введены понятия подткани, нормальной подткани, фактор-ткани, указаны тензорные условия их существования.

В главе 2 уравнение три-ткани W рассматривается как бинарная операция — координатная квазигруппа этой ткани. В терминах координатной квазигруппы описаны условия замыкания различных конфигураций на полной три-ткани и введены классы тканей, на которых замыкаются конфигурации какого-либо одного вида. Показано,что каждый из таких классов характеризуется определенным тождеством в координатных лупах ткани.

Для гладкой локальной лупы $Q(\cdot)$ вводится понятие W-алгебры (алгебры Акивиса), обобщающее понятие алгебры Ли. С три-тканью W связано расслоение W-алгебр, которое эту ткань определяет однозначно.

Вводится понятие канонических координат локальной аналитической лупы, и с их помощью для последней обобщаются некоторые свойства групп Ли. Показано, что подтканям ткани W соответствуют подквазигруппы соответствующей размерности координатной квазигруппы этой ткани.

В главе 3 рассматриваются трансверсально-геодезические и изоклинные три-ткани, найдены их структурные уравнения и тензорные характеристики. Первые характеризуются тем, что их координатные лупы обладают максимальным количеством одномерных подлуп. Шестиугольные три-ткани образуют собственный подкласс в этом классе тканей, и для них указанные подлупы являются группами. Доказано, что изоклинная и одновременно трансверсально-геодезическая три-ткань эквивалентна грассмановой ткани (порождаемой на многообразии прямых проективного пространства тройкой гиперповерхностей). Грассманова ткань является *алгебраической* (порождающие ее гиперповерхности принадлежат одной кубике), если и только если она одновременно изоклинная и шестиугольная. Эти утверждения дают решение проблем грассманизуемости и алгебраизуемости для многомерных три-тканей. Показано, что три-ткани над коммутативными ассоциативными унитальными алгебрами есть изоклинные ткани с нулевым тензором кручения.

В главе 4 рассматриваются два важнейших собственных подкласса шестиугольных тканей — ткани Бола и Муфанг, в координатных лупах которых выполняются тождества Бола или Муфанг соответственно. Найдены структурные уравнения и дана тензорная характеристика таких тканей. Показано, что на базе третьего слоения тканей Бола существует структура симметрического пространства, описаны свойства последнего. Доказано, что W-алгебра ткани Бола является алгеброй Бола. Описан класс изоклинных тканей Бола и проведена классификация шестимерных тканей Бола.

Ткани Муфанг образуют собственный подкласс в классе тканей Бола и для них тензор кривизны выражается через тензор кручения. Показано, что касательная W-алгебра тканей Муфанг является алгеброй Мальцева. Доказывается, что произвольная ткань Муфанг может быть реализована как G-ткань на некоторой группе Ли. Найдены уравнения негрупповой ткани Муфанг минимальной размерности.

В главе 5 рассматриваются ткани с замкнутой G-структурой. Доказывается, что ткани параллелизуемые, групповые, Муфанг, Бола и шестиугольные обладают замкнутой G-структурой классов 1, 2, 2, 3 и 4 соответственно. Эти классы тканей характеризуются тем, что канонические разложения их координатных луп определяются джетами соответствующих порядков.

Далее рассматриваются тождества в координатных лупах ткани W, приводящие замкнутости определяемой ею G-структуры. Показано, что таковыми является все тождества со словами длины 4, содержащие от одного до четырех переменных. Вводится понятие тождества порядка k с одной переменной и указываются условия, при которых они приводят к замкнутости G-структуры, определяемой тканью W.

В главе 6 найдена аналитическая характеристика тканей, допускающих группу автоморфизмов; описаны автоморфизмы грассмановых тканей. Найдены структурные уравнения ткани, допускающей транзитивную группу автоморфизмов, описаны ее свойства. Найдено уравнение криволинейной три-ткани, допускающей однопараметрическое семейство автоморфизмов.

В главе 7 вводятся тензоры, принадлежащие четвертой дифференциальной окрестности ткани и определяющие главную часть ассоциантов координатной лупы ткани. С их помощью описывается касательная W_4 алгебра ткани. Рассмотрены ткани E, в координатных лупах которых выполняется тождество эластичности, ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. Предложен подход к классификации криволинейных тканей, описано строение тканей, у которых равна нулю одна из ковариантных производных кривизны. Дана тензорная характеристика тканей, определяемых линейным дифференциальным уравнением первого порядка и уравнением Риккати.

В главе 8 результаты теории многомерных три-тканей переносятся на d-ткани коразмерности r. Особое внимание уделено проблемам грассманизуемости и алгебраизуемости, а также проблеме ранга d-ткани.

Е.В. Ферапонтов и Г.А. Толстихина любезно согласились написать добавления, посвященные соответственно приложениям теории три-тканей к некоторым задачам математической физики и к теории тканей, образованных слоениями разных размерностей.

В заключение выражаем сердечную признательность В.В. Гольдбергу, с которым мы обсуждали различные аспекты этой книги в процессе работы над ней, В.Ф. Кириченко и В.В. Тимошенко, которые внимательно прочитали рукопись и сделали много полезных замечаний, а также Л.В. Гольдштейн, В.Б. Лазаревой и Л.М. Пиджаковой за большую помощь в подготовке рукописи к печати и Е.В. Корнетовой за тщательное изготовление рисунков.

Глава 1

ТРИ-ТКАНИ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

§ 1.1. *G*-структуры, расслоения и слоения

1. Пусть X — дифференцируемое n-мерное многообразие класса C^s, $s \geqslant 3$, p — его произвольная точка, $T_p \equiv T_p(X)$ — касательное пространство к X в точке p. Обозначим символами x^u $(u, v, w, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$ локальные координаты в некоторой окрестности U точки p, символом $\dfrac{\partial}{\partial x^u}$ и dx^u — натуральный базис векторных полей и соответствующий кобазис дифференциальных форм на U. Для произвольного репера $e_u = \widetilde{x}^v_u \dfrac{\partial}{\partial x^v}$ двойственный базис образуют дифференциальные формы

$$\omega^u = x^u_v dx^v, \tag{1.1}$$

где $\widetilde{x}^v_u$ и x^u_v — взаимно обратные матрицы. Базис и кобазис связаны условием $\omega^u(e_v) = \delta^u_v$, где δ^u_v — символ Кронекера.

Обозначим $\mathcal{R}_p(X)$ множество всех реперов в касательном пространстве T_p. Объединение $\mathcal{R}(X) = \bigcup\limits_{p \in X} \mathcal{R}_p(X)$ называется *расслоением реперов* на многообразии X. Оно представляет собой многообразие класса C^{s-1} размерности $n + n^2$ $(n = \dim X)$ с локальными координатами x^u, x^u_v, которые называются соответственно главными и вторичными параметрами.

Формы ω^u, определяемые равенством (1.1), зависят только от дифференциалов главных параметров и определены на расслоении реперов многообразия X. Дифференцируя их внешним образом, получим внешние квадратичные уравнения

$$d\omega^u = \omega^v \wedge \omega^u_v, \tag{1.2}$$

где d — символ внешнего дифференцирования, $\wedge$ — символ внешнего умножения. Формы ω^u_v содержат, кроме дифференциалов главных параметров, еще и дифференциалы вторичных параметров, определяющих положение репера e_u в касательном пространстве T_p. Фиксируя точку p на X, т. е. полагая $\omega^u = 0$, получим формы $\pi^u_v = \omega^u_v\big|_{\omega^w=0}$, определяющие инфинитезимальное перемещение репера в пространстве T_p:

$$\delta e_u = \pi^v_u e_v. \tag{1.3}$$

Здесь δ обозначает дифференцирование по вторичным параметрам x^u_v, а формы π^u_v являются инвариантными формами полной линейной группы $\mathbf{GL}(n)$, которая действует в пространстве T_p. Они удовлетворяют структурным уравнениям этой группы:

$$\delta\pi^u_v = \pi^w_v \wedge \pi^u_w. \tag{1.4}$$

На многообразии $\mathcal{R}(X)$ уравнениям (1.4) отвечают соотношения более общего вида:

$$d\omega^u_v = \omega^w_v \wedge \omega^u_w + \omega^w \wedge \omega^u_{vw}, \tag{1.5}$$

переходящие в уравнения (1.4) при $\omega^w = 0$. Уравнения (1.5) получаются из уравнений (1.2) с помощью стандартной процедуры дифференциального продолжения, т. е. внешнего дифференцирования и применения леммы Картана.

Заметим, что формы ω^u, ω^u_v, ω^u_{vw} допускают глобальное определение на расслоениях реперов соответствующего порядка (см., например, [Лп-2]). Но для дальнейшего это несущественно, так как рассматриваемые в книге проблемы имеют, в основном, локальный характер.

Далее важное значение будет иметь понятие G-структуры. Пусть G — некоторая ρ-мерная подгруппа полной линейной группы $\mathbf{GL}(n)$, $\rho \leqslant n^2$. G-структурой X_G на многообразии X называется подрасслоение расслоения реперов с тем же базовым многообразием X и структурной группой G.

Например, сечение $X \to \mathcal{R}(X)$ задает в каждом касательном пространстве T_p к многообразию X один репер. Тем самым на X определена G-структура со структурной группой $G \equiv e$. Она называется *е-структурой*.

Если в качестве структурной группы G взять ортогональную группу $\mathbf{O}(n)$, то соответствующая $\mathbf{O}(n)$-структура называется *римановой структурой* на многообразии X.

Пусть на X задано r-мерное распределение Δ, и пусть G — группа линейных преобразований пространства T_p, оставляющих инвариантным подпространство Δ_p. Соответствующая G-структура X_G называется *пфаффовой структурой*. Другие примеры G-структур можно найти в [Ст-1], а также далее в этой книге.

Найдем структурные уравнения G-структуры самого общего вида. Обозначим инвариантные формы группы Ли G через θ^α. Они удовлетворяют известным структурным уравнениям Маурера–Картана:
$$d\theta^\alpha = c^\alpha_{\beta\gamma}\theta^\beta \wedge \theta^\gamma, \tag{1.6}$$
где $\alpha, \beta, \gamma, ... = 1, 2, ..., \rho$, $c^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурный тензор группы G. Он кососимметричен по нижним индексам β и γ и удовлетворяет тождеству Якоби:
$$c^\varepsilon_{\beta\gamma}c^\alpha_{\varepsilon\delta} + c^\varepsilon_{\gamma\delta}c^\alpha_{\varepsilon\beta} + c^\varepsilon_{\delta\beta}c^\alpha_{\varepsilon\gamma} = 0.$$
Так как группа G является подгруппой группы $\mathbf{GL}(n)$, то инвариантные формы π^u_v последней выражаются через инвариантные формы θ^α группы G:
$$\pi^u_v = c^u_{v\alpha}\theta^\alpha, \tag{1.7}$$
причем коэффициенты $c^u_{v\alpha}$ должны быть постоянными. Соотношения (1.7) выполняются при фиксированных главных параметрах, т. е. при $\omega^w = 0$. Ввиду этого на X_G выполняются уравнения
$$\omega^u_v = c^u_{v\alpha}\sigma^\alpha + \widetilde{a}^u_{vw}\omega^w, \tag{1.8}$$
где σ^α — некоторые новые дифференциальные формы, удовлетворяющие условию $\sigma^\alpha\big|_{\omega^w=0} = \theta^\alpha$. Подставляя разложение (1.8) в (1.2), получим *структурные уравнения G-структуры X_G*:
$$d\omega^u = c^u_{v\alpha}\omega^v \wedge \sigma^\alpha + a^u_{vw}\omega^v \wedge \omega^w. \tag{1.9}$$
Величины $a^u_{vw} = \widetilde{a}^u_{[vw]}$ образуют *первый структурный объект* рассматриваемой G-структуры.

2. Расслоения реперов и G-структуры представляют собой частные виды структуры более общего типа, называемой расслоением.

Расслоением класса C^s называется тройка $\lambda = (X, B, \pi)$, где X и B — многообразия класса C^s размерностей n и r соответственно, а $\pi\colon X \to B$ — проекция X на B. При этом:

а) для каждой точки b из B множество $\pi^{-1}(b)$ из X является $(n - r)$-мерным подмногообразием в X, диффеоморфным некоторому многообразию F, называемому *типовым слоем*;

б) для каждого b из B существует окрестность U_b в B такая, что подмногообразие $\pi^{-1}(U_b)$ диффеоморфно прямому произведению $U_b \times F$. Это означает, что расслоение является локально тривиальным.

Многообразие X называется *пространством расслоения* λ или его *тотальным пространством*, B — его *базой*, $\pi^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} F_b$ — *слоем* этого расслоения. Через каждую точку p на X проходит единственный слой F_b расслоения λ, причем $b = \pi(p)$.

Простейшим расслоением является *стандартное тривиальное расслоение*, т. е. тройка $(B \times F,\ B,\ \pi)$, где π — естественная проекция $B \times F \to B$. На расслоении реперов $\mathcal{R}(X)$ и на G-структуре X_G базой будет многообразие X, а структурной группой — группа $\mathbf{GL}(n)$ или, соответственно, группа G. Еще один пример — *касательное расслоение* $T(X) = \bigcup\limits_{p\in X} T_p$, в котором слоем является касательное пространство T_p. Другие примеры можно найти в [КН-1] и [Ст-1].

В касательном пространстве T_p произвольной точки p n-мерного тотального пространства X расслоения $\lambda = (X, B, \pi)$ определено подпространство T'_p коразмерности r, касательное к слою F_b, проходящему через точку p. В некоторой окрестности U точки p выберем локальный репер $e_i, e_a\, (i, j = 1, 2, ..., r;\ a = r+1, r+2, ..., n)$ так, чтобы векторы e_a лежали в T'_p. Соответствующий сопряженный корепер образован формами ω^i, ω^a, также локально определенными в окрестности U, причем $\omega^i(e_a) = 0$, т. е. слои F_b расслоения λ представляют собой интегральные многообразия системы пфаффовых уравнений $\omega^i = 0$. Эта система вполне интегрируема, так как через каждую точку b из U проходит единственный слой F_b. Поэтому, согласно известной теореме Фробениуса (см. [Ва-1]), внешние дифференциалы форм ω^i выражаются через эти же формы:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j. \tag{1.10}$$

Обратно: всякая система форм ω^i, определенных в U и удовлетворяющих уравнениям вида (1.10), задает в U расслоение коразмерности r. Заметим, что формы ω^i заданы на расслоении реперов $\mathcal{R}(B)$ базы B расслоения λ, а уравнения (1.10) будут структурными уравнениями базы.

В адаптированных локальных координатах расслоение λ задается уравнениями

$$F^i(x^u) = c^i = \text{const}, \quad \operatorname{rank}\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^u}\right) = r, \quad i = 1, ..., r, \quad u = 1, ..., n.$$

Дифференцируя, найдем соответствующие формы ω^i:

$$\omega^i = dF^i = \frac{\partial F^i}{\partial x^u}\, dx^u.$$

Уравнения (1.10) в этом случае примут вид $d\omega^i = 0$.

Говорят, что на C^s-многообразии X задано *слоение λ коразмерности r*, если:

а) через каждую точку p из X проходит C^s-подмногообразие (слой) коразмерности r;

б) у каждой точки p из X существует такая окрестность U, в которой слои образуют тривиальное расслоение с $(n - r)$-мерной базой. Таким образом, локально всякое слоение является расслоением, хотя в целом таковым быть не обязано.

Слоение, вообще говоря, не имеет базы. Например, иррациональная обмотка тора образует слоение, но не расслоение, так как для нее базы не существует. Однако в достаточно малой окрестности слоение определяет расслоение, базой которого служит многообразие слоев. Поэтому можно говорить о локальной базе слоения. Допуская некоторую вольность речи, эту локальную базу мы будем называть просто базой слоения.

§ 1.2. Три-ткань на гладком многообразии

1. Определение. Пусть X — C^s-гладкое многобразие размерности $2r$, $r \geqslant 1$, $s \geqslant 3$. Говорят, что на X задана три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, если:

а) на X заданы три слоения λ_α коразмерности r;

б) в каждой точке p многообразия X три проходящих через нее слоя находятся в общем положении, т. е. каждые два из трех касательных к этим слоям пространств трансверсальны (имеют нулевое пересечение).

У каждой точки p три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ [1] существует окрестность U, в которой слоения λ_α являются расслоениями. Поэтому с локальной точки зрения можно считать, что три-ткань образована тремя расслоениями. Их базы обозначим X_α.

Пример 0. Рассмотрим в аффинном пространстве A^{2r} три семейства параллельных r-мерных плоскостей, находящихся в общем положении. Они образуют три-ткань, которая называется *параллельной тканью*. Обозначим ее символом W_0.

Пример 1. Пусть X_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ — три гладкие гиперповерхности в проективном пространстве P^{r+1}, p — некоторая прямая, пересекающая их (но не касающаяся) в точках x, y и z соответственно. На грассмановом многообразии $G(1, r+1)$ прямых пространства P^{r+1}

[1] Так мы пишем для краткости вместо слов «у каждой точки p многообразия X, несущего три-ткань W».

($\dim G(1, r+1) = 2r$) в окрестности прямой p возникает три-ткань, слоями которой служат связки прямых с вершинами, лежащими на поверхностях X_α. Такая три-ткань называется *грассмановой* и обозначается GW. Грассманова три-ткань определена существенно локально, так как только о достаточно близких к p прямых можно утверждать, что они, как и прямая p, трансверсальны поверхностям X_α. Подробно грассмановы ткани изучаются в § 3 главы 3.

Пример 2. Грассманова три-ткань называется *алгебраической* и обозначается AW, если определяющие ее гиперповерхности X_α принадлежат одной и той же кубической гиперповерхности. Отметим следующие специальные случаи: 2а) поверхности X_α являются гиперплоскостями; 2б) X_1 — гиперплоскость, X_2 и X_3 принадлежат одной гиперповерхности второго порядка.

На три-ткани W можно ввести естественную систему локальных координат. Как уже отмечалось, слоения λ_α общего положения, образующие три-ткань, определяют расслоения в некоторой окрестности U точки p многообразия X. Поэтому можно считать, что окрестность U диффеоморфна прямому произведению баз каких-либо двух ее расслоений, например, $U \sim X_1 \times X_2$. Тогда любая точка p из U получает координаты $p(x^i, y^j)$, где x^i и y^j — локальные координаты на базах X_1 и X_2 соответственно (индексы i, j, k, ℓ, m и т. д. здесь и всюду далее пробегают значения от 1 до r.) Таким образом, слои первого и второго слоений ткани W задаются в окрестности U уравнениями $x^i = \mathrm{const}$ и $y^i = \mathrm{const}$. Третье слоение ткани W задается уравнениями $f^i(x^1, ..., x^r, y^1, ..., y^r) = \mathrm{const}$, или, короче, $f^i(x^j, y^k) = c^i$, где f^i — гладкие функции. Так как слои ткани находятся в общем положении, то в каждой точке области U выполнены условия:

$$\det\Big(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\Big) \neq 0, \quad \det\Big(\frac{\partial f^i}{\partial y^k}\Big) \neq 0. \tag{1.11}$$

Векторнозначную функцию $f^i(x^j, y^k)$ называют *функцией ткани* W, а уравнение

$$z^i = f^i(x^j, y^k), \tag{1.12}$$

или, короче, $z = f(x, y)$ — уравнением этой ткани. Геометрический смысл уравнения (1.12) состоит в том, что оно связывает параметры x, y и z трех слоев ткани, проходящих через точку $p(x^i, y^j)$ области U.

Заметим, что если в качестве базовых взять другие два слоения — λ_1 и λ_3, или λ_3 и λ_2, то уравнение ткани запишется в виде $y = f^{-1}(x, z)$ или $x = {}^{-1}f(z, y)$ соответственно.

Функции f^i, заданные в разных координатных окрестностях, естественно согласованы на пересечениях, однако отсюда не следует, что существует глобально определенная функция ткани.

Пример 3. Пусть $G(\cdot)$ — группа Ли размерности r, X — прямое произведение $G \times G$. Через произвольную точку (a, b) из X проходят три слоя: $\{(x, y)\colon x = a\}$, $\{(x, y)\colon y = b\}$ и $\{(x, y)\colon x \cdot y = a \cdot b\}$, которые, очевидно, находятся в общем положении. Поэтому слоения $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$ и $x \cdot y = \mathrm{const}$ образуют на X три-ткань, которую называют *групповой тканью* и обозначают $W(G)$. Уравнение этой ткани имеет вид $z = x \cdot y$.

2. Уравнение (1.12) три-ткани определено не однозначно, а с точностью до *локальных диффеоморфизмов* вида

$$\widetilde{x} = J_1(x), \quad \widetilde{y} = J_2(y), \quad \widetilde{z} = J_3(z), \tag{1.13}$$

означающих преобразование локальных координат на базах X_α слоений λ_α. Но уравнениям (1.13) можно придать и другой смысл. Рассмотрим наряду с тканью $W = (X, \lambda_\alpha)$ еще и три-ткань $\widetilde{W} = (\widetilde{X}, \widetilde{\lambda}_\alpha)$ той же размерности. Обозначим локальные координаты на базах $\widetilde{X}_\alpha$ слоений $\widetilde{\lambda}_\alpha$ через $\widetilde{x}^i$, $\widetilde{y}^i$, $\widetilde{z}^i$ и запишем уравнение ткани $\widetilde{W}$ в виде $\widetilde{z}^i = \widetilde{f}^i(\widetilde{x}^j, \widetilde{y}^k)$, или

$$\widetilde{z} = \widetilde{f}(\widetilde{x}, \widetilde{y}). \tag{1.14}$$

Тогда уравнения (1.13) задают локально биективные отображения слоений λ_α на $\widetilde{\lambda}_\alpha$. Если при этом отображении сохраняется инцидентность, т. е. всякие три слоя ткани W, проходящие через одну точку, переходят в три слоя ткани $\widetilde{W}$, также проходящие через одну точку, то функции f и $\widetilde{f}$ связаны соотношением

$$\widetilde{f}(J_1(x), J_2(y)) = J_3(f(x, y)) \tag{1.15}$$

(«образ произведения равен произведению образов»).

Определение. Две три-ткани W и $\widetilde{W}$ одинаковой размерности называются *эквивалентными*, если существует тройка $J = (J_1, J_2, J_3)$ локальных диффеоморфизмов $J_\alpha\colon X_\alpha \to \widetilde{X}_\alpha$ таких, что функции f и $\widetilde{f}$ этих тканей удовлетворяют условию (1.15).

В теории квазигрупп тройка биекций J_α, удовлетворяющих условию (1.15), называется *изотопией.* К этому понятию мы вернемся в гл. 2.

В частности, три-ткани, эквивалентные рассмотреным выше параллельной, грассмановой и алгебраической тканям, называются соответственно *параллелизуемыми, грассманизуемыми* и *алгебраизуемыми.* Параллелизуемые ткани называют также *регулярными.*

Тройка локальных диффеоморфизмов вида (1.13) порождает локальный диффеоморфизм $\varphi\colon X \to \widetilde{X}$, при котором точка $p(x, y)$ переходит в точку $\widetilde{p}(J_1(x), J_2(y))$. Справедливо и обратное: всякий локальный диффеоморфизм $\varphi\colon X \to \widetilde{X}$, при котором слои ткани W переходят в соответствующие слои ткани $\widetilde{W}$ и сохраняется инцидентность слоев, порождает тройку отображений вида (1.13), действующих на базах расслоений ткани W.

3. Подмногообразие $\widetilde{X}$ размерности 2ρ многообразия X, несущего три-ткань W, называется *трансверсальным многообразием* или *трансверсальной поверхностью* этой ткани, если у каждой точки p из $\widetilde{X}$ существует такая окрестность U в X, в которой многообразие $\widetilde{X}$ пересекает каждый слой ткани W, имеющий с $\widetilde{X}$ хотя бы одну общую точку, по подмногообразию размерности ρ.

Вообще говоря, ткань W не обладает трансверсальными подмногообразиями. Локальные условия существования последних обсуждаются в § 9. Здесь же мы отметим лишь следующий очевидный факт: на всяком трансверсальном многообразии (если оно существует) слои ткани W высекают некоторую три-ткань $\widetilde{W}$, образованную слоями размерности ρ. Эта три-ткань называется *подтканью* ткани W.

Например, *грассмановы ткани* GW, определенные тройкой гиперповерхностей X_α проективного пространства P^{r+1} (см. пример 1), *имеют грассмановы подткани любой размерности.* Действительно, пусть как и в примере 1, прямая p пересекает гиперповерхности X_α. Произвольное $(\rho+1)$-мерное пространство $P^{\rho+1}$ в P^{r+1}, проходящее через прямую p, пересекает гиперповерхности X_α по поверхностям размерности ρ. С помощью последних в $P^{\rho+1}$ аналогично определяется грассманова три-ткань $\widetilde{GW}$, являющаяся подтканью ткани GW.

Определим теперь *прямое произведение три-тканей* $W_1 = (X_1, \underset{1}{\lambda}_\alpha)$ и $W_2 = (X_2, \underset{2}{\lambda}_\alpha)$, $\dim X_1 = 2r_1$, $\dim X_2 = 2r_2$. Пусть слои $\underset{1}{\mathcal{F}}_\alpha$ ткани W_1 пересекаются в точке p_1 из X_1, а слои $\underset{2}{\mathcal{F}}_\alpha$ ткани W_2 — в точке p_2 из X_2. Тогда через точку $p = (p_1, p_2)$ прямого произведения $X_1 \times X_2 \overset{\text{def}}{=} X$ проходят три r-мерных слоя $\underset{1}{\mathcal{F}}_\alpha \times \underset{2}{\mathcal{F}}_\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}_\alpha$, причем $r = r_1 + r_2$. Из определений три-ткани и прямого произведения следует, что слои $\mathcal{F}_\alpha$ находятся в общем положении. Поэтому в подходящей окрестности точки p многообразия X определена три-ткань, которая называется прямым произведением тканей W_1 и W_2 и обозначается $W_1 \times W_2$.

Заметим, что подмногообразия вида (p_1, X_2) и (X_1, p_2) многообразия $X = X_1 \times X_2$ будут трансверсальными подмногообразиями построенной три-ткани W.

Полупрямое произведение тканей и фактор-ткань будут определены в § 9.

§ 1.3. Геометрия касательного пространства многомерной три-ткани

1. Пусть $\underset{\alpha}{\omega}$, $\alpha = 1, 2, 3,$ — линейная форма со значениями в r-мерном пространстве, которая определена в области U многообразия X и аннулируется на расслоении λ_α ткани W. Соответствующие координатные формы обозначим $\underset{\alpha}{\omega}^i$. Так как каждая пара слоений λ_α, λ_β при $\alpha \neq \beta$ находится в общем положении на X, то система форм $\{\underset{\alpha}{\omega}, \underset{\beta}{\omega}\}$ при $\alpha \neq \beta$ будет независимой. Выберем в качестве базисных формы $\underset{1}{\omega}$ и $\underset{2}{\omega}$. Тогда формы $\underset{3}{\omega}$ будут их линейными комбинациями:

$$\underset{3}{\omega} = A\underset{1}{\omega} + B\underset{2}{\omega},$$

причем $(r \times r)$-матрицы A и B зависят от локальных координат в U. Поскольку эти соотношения разрешимы относительно $\underset{1}{\omega}$ и $\underset{2}{\omega}$, то матрицы A и B невырожденные. При замене локальных координат на базах слоений по формулам (1.13) формы $\underset{\alpha}{\omega}$ умножаются на невырожденную матрицу. Поэтому допустима замена $A\underset{1}{\omega} \to -\underset{1}{\omega}$, $B\underset{2}{\omega} \to -\underset{2}{\omega}$, в результате которой предыдущее уравнение примет симметричный вид:

$$\underset{1}{\omega} + \underset{2}{\omega} + \underset{3}{\omega} = 0. \tag{1.16}$$

Пусть, как обычно, T_p обозначает касательное пространство к многообразию X в точке p; касательные пространства к слоям $\mathcal{F}_\alpha$ ткани W в этой точке обозначим символом $\underset{\alpha}{T}_p$. Рассмотрим в точке p три репера $\underset{\alpha}{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots r$, таких, что $\underset{\alpha}{e}_i \in \underset{\alpha}{T}_p$. Тогда в силу определения форм $\underset{\alpha}{\omega}$ имеют место равенства

$$\underset{\alpha}{\omega}^i(\underset{\alpha}{e}_j) = 0. \tag{1.17}$$

Кроме того, положим

$$\underset{1}{\omega}^i(\underset{2}{e}_j) = \underset{2}{\omega}^i(\underset{3}{e}_j) = \underset{3}{\omega}^i(\underset{1}{e}_j) = \delta^i_j.$$

Применяя далее равенства (1.16) и (1.17), находим, что при $(\alpha, \beta) = (1, 2), (2, 3), (3, 1)$ выполняются соотношения

$$\underset{\beta}{\omega}^i(\underset{\alpha}{e}_j) = -\underset{\alpha}{\omega}^i(\underset{\beta}{e}_j) = -\delta^i_j. \tag{1.18}$$

Отсюда вытекает, что базисные векторы $\underset{\alpha}{e}_i$ удовлетворяют равенствам

$$\underset{1}{e}_i + \underset{2}{e}_i + \underset{3}{e}_i = 0, \tag{1.19}$$

а произвольный вектор ξ из T_p записывается в одной из следующих форм:

$$\xi = \underset{1}{\omega}^i(\xi)\underset{2}{e}_i - \underset{2}{\omega}^i(\xi)\underset{1}{e}_i = \underset{2}{\omega}^i(\xi)\underset{3}{e}_i - \underset{3}{\omega}^i(\xi)\underset{2}{e}_i = \underset{3}{\omega}^i(\xi)\underset{1}{e}_i - \underset{1}{\omega}^i(\xi)\underset{3}{e}_i. \tag{1.20}$$

Будем считать, что дифференциальное уравнение ткани всегда записывается в виде (1.16), тогда базисные формы $\underset{\alpha}{\omega}^i$ определены с точностью до преобразований

$$\underset{\alpha}{\widetilde{\omega}}^i = A^i_j \underset{\alpha}{\omega}^j, \quad \det(A^i_j) \neq 0, \tag{1.21}$$

не изменяющих вид уравнений (1.16). При этом базисные векторы $\underset{\alpha}{e}_i$ преобразуются также согласованно:

$$\underset{\alpha}{e}_i = A^j_i \underset{\alpha}{\widetilde{e}}_j. \tag{1.21$'$}$$

Таким образом, группа допустимых преобразований репера $\{\underset{1}{e}_i, \underset{2}{e}_j\}$ пространства T_p состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ и изоморфна полной линейной группе $\mathbf{GL}(r)$. Ввиду этого на $2r$-мерном многообразии X, несущем три-ткань W, определена G-структура со структурной группой $\mathbf{GL}(r)$. Назовем ее *G_W-структурой*. Построенное расслоение адаптированных реперов, связанных с три-тканью W, обозначим символом $\mathcal{R}(W)$.

2. Рассмотрим три вектора $\eta_\alpha = \eta^i \underset{\alpha}{e}_i$, $\eta_\alpha \in \underset{\alpha}{T}_p$. Они лежат в одном двумерном подпространстве, так как в силу (1.19) выполняется равенство $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$. Назовем это подпространство *трансверсальным* для тройки пространств $\underset{\alpha}{T}_p$. Оно вполне определяется бивектором

$$H = \eta_1 \wedge \eta_2 = \eta_2 \wedge \eta_3 = \eta_3 \wedge \eta_1,$$

который назовем *трансверсальным бивектором* три-ткани W. Очевидно, через произвольный вектор η пространства $\underset{\alpha}{T}_p$ проходит единственное двумерное трансверсальное подпространство. Следовательно, семейство трансверсальных подпространств в точке p зависит от $r - 1$ параметров.

Заметим, что если на три-ткани W существует двумерная трансверсальная поверхность V^2 (см. § 2), то касательные пространства к ней будут трансверсальными пространствами этой ткани.

Трансверсальные подпространства могут быть определены и другим способом. Рассмотрим два слоя $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ ткани W, проходящие через точку p, $\mathcal{F}_1 \in \lambda_1$, $\mathcal{F}_2 \in \lambda_2$. Слоение λ_3 определяет в некоторой окрестности U_p биективное отображение $\varphi_{12} \colon \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$, при котором точки q и $\varphi_{12}(q), q \in \mathcal{F}_1$ лежат на одном и том же слое третьего слоения. Обозначим $(\varphi_{12})_* = d\varphi_{12}\big|_p$. Аналогично определяются отображения $\varphi_{\alpha\beta}$ и $(\varphi_{\alpha\beta})_*$ при любых $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, $\alpha \neq \beta$.

Предложение 1.1. *Трансверсальные подпространства инвариантны относительно отображений* $(\varphi_{\alpha\beta})_*$.

□ Доказательство проведем для отображения $(\varphi_{12})_*$. Пусть три-ткань задана уравнением $z = f(x, y)$, a и b — параметры слоев $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно. Тогда точки q и $\varphi_{12}(q)$ имеют координаты (a, y) и (x, b) соответственно. Так как эти точки лежат на одном слое третьего слоения, то $f(a, y) = f(x, b)$ — уравнение отображения φ_{12}. Продифференцировав, находим действие оператора $(\varphi_{12})_*(a, y)$: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, y)\eta_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, b)\xi_1$, где $\eta_2 \in \underset{1}{T}_q$, $\xi_1 \in \underset{2}{T}_{\varphi_{12}(q)}$. В точке $p = (a, b)$ получаем: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)\eta_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)\xi_1$. Последнее равенство можно записать в виде $df(a, b)(\eta) = df(a, b)(\xi)$, где $\eta = (0, \eta_2) \in \underset{1}{T}_q$, $\xi = (\xi_1, 0) \in \underset{2}{T}_{\varphi_{12}(q)}$, или $df(a, b)(\eta - \xi) = 0$. Это означает, что вектор $\eta - \xi$ касается слоя третьего слоения, так как этот слой определяется уравнением $f = \mathrm{const}$. Ввиду этого отображение $(\varphi_{12})_*$ представляет собой проектирование пространства $\underset{1}{T}_p$ на пространство $\underset{2}{T}_p$ параллельно пространству $\underset{3}{T}_p$ (рис. 4).

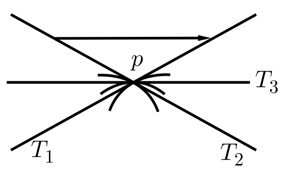

Рис. 4

Далее, в силу (1.20) имеем: $\eta = (0, \eta_2) = -\eta^i \underset{1}{e}_i$, $\xi = (\xi_1, 0) = \xi^i \underset{2}{e}_i$. Так как разность этих векторов касается слоя третьего слоения, то $\xi^i \underset{2}{e}_i + \eta^i \underset{1}{e}_i = a^i(\underset{1}{e}_i + \underset{2}{e}_i)$. Отсюда находим $\xi^i = \eta^i$ и, следовательно, $(\varphi_{12})_*(-\eta^i \underset{1}{e}_i) = \eta^i \underset{2}{e}_i$ или, короче, $(\varphi_{12})_*(-\eta_1) = \eta_2$. Таким образом, бивектор $\eta_1 \wedge \eta_2$ инвариантен относительно дифференциала отображения φ_{12}. ■

Из приведенных рассуждений вытекает нечто большее, а именно, что всякое двумерное подпространство в T_p, инвариантное относительно преобразований $(\varphi_{\alpha\beta})_*$, будет трансверсальным. Поэтому сформулированное в предложении 1.1 свойство трансверсальных подпространств является характеристическим, и его можно взять в качестве определения.

Из предложения 1.1 вытекает еще одно важное следствие. Как отмечено выше, касательные пространства ко всякой двумерной трансверсальной поверхности V ткани W являются трансверсальными подпространствами этой ткани. Поскольку последние инвариантны относительно отображения $(\varphi_{\alpha\beta})_*$, то и сама *трансверсальная поверхность V инвариантна относительно преобразований $\varphi_{\alpha\beta}$*.

3. С тройкой r-мерных касательных подпространств $\underset{\alpha}{T}_p$ пространства T_p связано однопараметрическое семейство r-мерных подпространств, определенных векторами

$$\xi_i = \xi^1 \underset{2}{e}_i - \xi^2 \underset{1}{e}_i = \xi^2 \underset{3}{e}_i - \xi^3 \underset{2}{e}_i = \xi^3 \underset{1}{e}_i - \xi^1 \underset{3}{e}_i,$$

где $\xi^1 + \xi^2 + \xi^3 = 0$. Эти подпространства назовем *изоклинными* по отношению к пространствам $\underset{\alpha}{T}_p$, а r-векторы $z = \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_r$ — *изоклинными r-векторами* ткани W. В частности, изоклинными будут касательные пространства $\underset{\alpha}{T}_p$ к слоям ткани ($\xi^1 = 0$, $\xi^2 = 0$, $\xi^1 + \xi^2 = 0$).

Трансверсальное 2-пространство, определяемое бивектором $H = \eta_1 \wedge \eta_2$, пересекает изоклинное r-пространство, определяемое r-вектором Z, по прямой [2] ℓ с направляющим вектором

$$\xi = \eta^i(\xi^1 \underset{2}{e}_i - \xi^2 \underset{1}{e}_i),$$

[2] Здесь для удобства мы переходим на «точечно-векторную» терминологию.

так как $\xi = \xi^1\eta_2 - \xi^2\eta_1 = \eta^i\xi_i$. Множество всех таких прямых ℓ, проходящих через точку p, образует конус, обозначим его $C_p(2,r)$. Этот конус, как видно из его определения, несет $(r-1)$-параметрическое семейство двумерных плоских образующих — трансверсальных 2-плоскостей и однопараметрическое семейство r-мерных плоских образующих — изоклинных r-плоскостей. Следовательно, $\dim C_p(2,r) = r+1$.

Рассмотрим касательное векторное пространство T_p. Его *проективизацией* PT_p называется проективное пространство, получающееся из T_p факторизацией по отношению коллинеарности векторов и представляющее собой множество прямых, проходящих через точку p. При проективизации конус $C_p(2,r)$ перейдет в многообразие $S_p(1,r-1)$ размерности r, которое несет $(r-1)$-параметрическое семейство прямолинейных образующих, соответствующих двумерным трансверсальным образующим конуса $C_p(2,r)$, и однопараметрическое семейство $(r-1)$-мерных плоских образующих, соответствующих его r-мерным изоклинным образующим. При этом образующие одного и того же семейства многообразия $S_p(1,r-1)$ не пересекаются между собой, а образующие разных семейств пересекаются в точке. Следовательно, многообразие $S_p(1,r-1)$ представляет собой реализацию произведения проективных пространств P^1 и P^{r-1} в проективном пространстве PT_p размерности $2r-1$. Такие многообразия называются *многообразиями Сегре* [ХП-1]. Поэтому конус $C_p(2,r)$, построенный в касательном пространстве T_p к многообразию X, несущему три-ткань W, назовем *конусом Сегре*.

При $r=2$ получаем $\dim PT_p = 3$, конус Сегре $C_p(2,2)$ будет конусом второго порядка и несет два двупараметрических семейства плоских двумерных образующих. Многообразие Сегре $S(1,1)$ будет линейчатой поверхностью второго порядка. Одно семейство прямолинейных образующих этой поверхности соответствует трансверсальным бивекторам три-ткани W, а другое семейство — ее изоклинным бивекторам.

§ 1.4. Структурные уравнения многомерной три-ткани

1. Пусть, как и выше, слоения λ_α три-ткани W заданы вполне интегрируемыми системами форм Пфаффа $\underset{\alpha}{\omega}{}^i$, $\alpha = 1,2,3$, которые нормированы условием (1.16). Условия полной интегрируемости каждой из систем запишем в виде (1.10):

$$d\underset{\alpha}{\omega}{}^i = \underset{\alpha}{\omega}{}^j \wedge \underset{\alpha}{\omega}{}^i_j, \tag{1.22}$$

где формы $\underset{\alpha}{\omega}{}^i_j$ содержат дифференциалы параметров, определяющих семейство реперов в области U. Дифференцируя внешним образом уравнения (1.16) и пользуясь уравнениями (1.22), получим:

$$\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{1}{\omega}{}^i_j + \underset{2}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^i_j + \underset{3}{\omega}{}^j \wedge \underset{3}{\omega}{}^i_j = 0.$$

Исключая отсюда с помощью (1.16), например, формы $\underset{3}{\omega}{}^i$, придем к равенствам

$$\underset{1}{\omega}{}^j \wedge (\underset{1}{\omega}{}^i_j - \underset{3}{\omega}{}^i_j) + \underset{2}{\omega}{}^j \wedge (\underset{2}{\omega}{}^i_j - \underset{3}{\omega}{}^i_j) = 0. \tag{1.23}$$

Из этих соотношений следует, что формы $\underset{1}{\omega}{}^i_j - \underset{3}{\omega}{}^i_j$ и $\underset{2}{\omega}{}^i_j - \underset{3}{\omega}{}^i_j$, а значит, и их разности $\underset{1}{\omega}{}^i_j - \underset{2}{\omega}{}^i_j$ будут главными на многообразии X, т. е. являются линейными комбинациями базисных форм $\underset{1}{\omega}{}^i$ и $\underset{2}{\omega}{}^i$:

$$\underset{1}{\omega}{}^i_j - \underset{2}{\omega}{}^i_j = \underset{1}{a}{}^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^k - \underset{2}{a}{}^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^k.$$

Перепишем эти равенства иначе:

$$\underset{1}{\omega}{}^i_j - \underset{1}{a}{}^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^k = \underset{2}{\omega}{}^i_j - \underset{2}{a}{}^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^k \overset{\text{def}}{=} \omega^i_j.$$

Отсюда

$$\underset{1}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + \underset{1}{a}{}^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^k, \quad \underset{2}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + \underset{2}{a}{}^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^k, \tag{1.24}$$

в результате уравнения (1.23) принимают следующий вид:

$$(\underset{1}{\omega}^j + \underset{2}{\omega}^j) \wedge (\underset{3}{\omega}{}^i_j - \omega^i_j) = \underset{1}{a}{}^i_{[jk]}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k + \underset{2}{a}{}^i_{[jk]}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k. \tag{1.25}$$

Эти соотношения должны выполняться тождественно на всем многообразии X. Следовательно, они выполняются и на слоях третьего слоения, которые определяются уравнениями $\underset{3}{\omega}^i = 0$, или (см. (1.16)), $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$. Полагая в (1.25) $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$, придем к равенствам $\underset{1}{a}{}^i_{[jk]} + \underset{2}{a}{}^i_{[jk]} = 0$. Обозначим

$$\underset{1}{a}{}^i_{[jk]} = -\underset{2}{a}{}^i_{[jk]} \overset{\text{def}}{=} a^i_{jk}.$$

В результате первые две серии уравнений (1.22), представляющие собой условие интегрируемости системы форм $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$, примут вид:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \tag{1.26}$$

где величины a^i_{jk} кососимметричны по нижним индексам. Сложив эти уравнения, получим уравнения

$$d\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{3}{\omega}^j \wedge (\underset{1}{\omega}^k - \underset{2}{\omega}^k), \tag{1.27}$$

из которых вытекает интегрируемость и третьей серии форм $\underset{3}{\omega}^i$.

2. Дифференцируя уравнения (1.26) внешним образом, придем к уравнениям:

$$\begin{aligned} &\Omega^i_j \wedge \underset{1}{\omega}^j - \nabla a^i_{jk} \wedge \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k - 2a^m_{jk}a^i_{m\ell} \wedge \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell = 0, \\ &\Omega^i_j \wedge \underset{2}{\omega}^j + \nabla a^i_{jk} \wedge \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k - 2a^m_{jk}a^i_{m\ell} \wedge \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = 0, \end{aligned} \tag{1.28}$$

где обозначено

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k,$$

а ∇ — дифференциальный оператор, определяемый формулой

$$\nabla a^i_{jk} \overset{\text{def}}{=} da^i_{jk} + a^m_{jk}\omega^i_m - a^i_{mk}\omega^m_j - a^i_{jm}\omega^m_k.$$

Докажем, что формы ∇a^i_{jk} являются линейными комбинациями форм $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$, а квадратичные формы Ω^i_j — линейными комбинациями внешних произведений этих форм. Предположим противное — формы ∇a^i_{jk} и Ω^i_j содержат не только комбинации базисных форм. Тогда они имеют вид:

$$\begin{gathered} \nabla a^i_{jk} = \overline{a}^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^\ell + \widetilde{a}^i_{jk\ell}\underset{2}{\omega}^\ell + \Theta^i_{jk}, \\ \Omega^i_j = \overline{b}^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell + b^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell + \widetilde{b}^i_{jk\ell}\underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell + \overline{\Theta}^i_{jk} \wedge \underset{1}{\omega}^k + \widetilde{\Theta}^i_{jk} \wedge \underset{2}{\omega}^k + \Theta^i_j, \end{gathered} \tag{1.29}$$

причем формы $\Theta^i_{jk}, \overline{\Theta}^i_{jk}, \widetilde{\Theta}^i_{jk}$ и Θ^i_j не содержат базисные формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$. Коэффициенты $\overline{a}^i_{jk\ell}, \widetilde{a}^i_{jk\ell}$ и формы Θ^i_{jk}, входящие в эти разложения, будут кососимметричными по индексам j и k, а коэффициенты $\overline{b}^i_{jk\ell}$ и $\widetilde{b}^i_{jk\ell}$ — кососимметричными по индексам k и l. Внося эти разложения в уравнения (1.28), получим следующие тождества:

$$\begin{aligned} &(\overline{b}^i_{jk\ell} - \overline{a}^i_{jk\ell} - 2a^m_{jk}a^i_{m\ell})\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell + (b^i_{jk\ell} - \widetilde{a}^i_{jk\ell})\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell + \\ &\qquad + \widetilde{b}^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell - (\overline{\Theta}^i_{jk} + \Theta^i_{jk}) \wedge \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k - \widetilde{\Theta}^i_{jk} \wedge \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k + \Theta^i_j \wedge \underset{1}{\omega}^j \equiv 0, \\ &(\widetilde{b}^i_{jk\ell} + \widetilde{a}^i_{jk\ell} - 2a^m_{jk}a^i_{m\ell})\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell - (b^i_{j\ell k} - \overline{a}^i_{jk\ell})\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell + \\ &\qquad + \overline{b}^i_{jk\ell}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell - (\widetilde{\Theta}^i_{jk} - \Theta^i_{jk}) \wedge \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k - \overline{\Theta}^i_{jk} \wedge \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k + \Theta^i_j \wedge \underset{2}{\omega}^j \equiv 0. \end{aligned}$$

Так как формы $\Theta^i_{jk}, \overline{\Theta}^i_{jk}, \widetilde{\Theta}^i_{jk}$ и Θ^i_j не содержат базисные формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$, то все слагаемые, входящие в тождества, линейно независимы. Следовательно, каждое из них равно нулю. Отсюда находим, во-первых, что $\overline{\Theta}^i_{jk} = \widetilde{\Theta}^i_{jk} = \Theta^i_{jk} = 0$, $\Theta^i_j = 0$. Приравнивая к нулю слагаемые, содержащие базисные формы $\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell$ и $\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell$, придем к равенствам:

$$\overline{b}^i_{jk\ell} = 0,\ \widetilde{b}^i_{jk\ell} = 0, \quad \widetilde{a}^i_{jk\ell} = b^i_{[jk]\ell}, \quad \overline{a}^i_{jk\ell} = b^i_{[j|\ell|k]}. \tag{1.30}$$

Наконец, рассматривая слагаемые, содержащие произведения $\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell$ и $\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell$, получим соотношения

$$\overline{a}^i_{[jk\ell]} + 2a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]} = 0,\ \widetilde{a}^i_{[jk\ell]} - 2a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]} = 0.$$

С другой стороны, альтернируя выражения для $\overline{a}^i_{jk\ell}$ и $\widetilde{a}^i_{jk\ell}$ из (1.30), придем к равенствам

$$\overline{a}^i_{[jk\ell]} = b^i_{[j\ell k]},\ \widetilde{a}^i_{[jk\ell]} = b^i_{[jk\ell]}.$$

Исключая из этих и предыдущих равенств величины $\overline{a}^i_{jk\ell}$ и $\widetilde{a}^i_{jk\ell}$, получим единственную серию соотношений:

$$b^i_{[jk\ell]} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]}. \tag{1.31}$$

В результате система (1.29) — первое дифференциальное продолжение уравнений (1.26) — примет вид:

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = b^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell, \tag{1.32}$$

$$\nabla a^i_{jk} = b^i_{[j|\ell|k]}\underset{1}{\omega}^\ell + b^i_{[jk]\ell}\underset{2}{\omega}^\ell, \tag{1.33}$$

причем входящие сюда величины a^i_{jk} и $b^i_{jk\ell}$ связаны соотношениями (1.31).

Уравнения (1.26), (1.32) и (1.33) являются основными дифференциальными уравнениями произвольной три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$. В них заключена вся информация о строении три-тканей, и мы будем обращаться к ним на протяжении всей книги. Уравнения (1.26) и (1.32) называются *структурными уравнениями* три-ткани W.

Формы $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$ и ω^i_j, входящие в структурные уравнения, зависят от главных параметров — локальных координат на многообразии X и от вторичных параметров, определяющих положение подвижного репера $\{\underset{1}{e}_i, \underset{2}{e}_i\}$. Фиксируем главные параметры, определяющие положение точки p из X, положив $\underset{1}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^i = 0$. Тогда уравнения (1.32) перейдут в следующие:

$$\delta\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k,$$

где формы π^i_j и символ δ имеют тот же смысл, что и в § 1.

Геометрический смысл форм π^i_j состоит в том, что они определяют согласованные инфинитезимальные преобразования реперов $\underset{\alpha}{e}_i$, $\alpha = 1, 2, 3$, в касательном пространстве T_p:

$$\delta \underset{\alpha}{e}_i = \pi^j_i \underset{\alpha}{e}_j.$$

Отсюда вытекает, что формы π^i_j являются инвариантными формами группы $\mathbf{GL}(r)$ — структурной группы определенной в § 3 G_W-структуры. Формы π^i_j можно выразить через величины A^i_j (см. § 2), определяющие преобразования реперов, присоединенных к точке p, и их дифференциалы dA^i_j (см., например, [Лх-1], с. 65).

Из уравнений (1.33) следует, что при фиксированных главных параметрах величины a^i_{jk} удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_\delta a^i_{jk} = \delta a^i_{jk} + a^m_{jk}\pi^i_m - a^i_{mk}\pi^m_j - a^i_{jm}\pi^m_k = 0.$$

Эти уравнения показывают, что величины a^i_{jk} образуют тензор относительно группы $\mathbf{GL}(r)$ допустимых преобразований адаптированных реперов три-ткани W. Рассматривая дифференциальные продолжения уравнений (1.32), которые будут получены в следующем пункте (уравнения (1.36)), можно доказать, что величины $b^i_{jk\ell}$ также образуют тензор. Эти тензоры называются соответственно *тензором кручения* и *тензором кривизны три-ткани* W. Мы будем обозначать их также более кратко: a и b.

3. Следующие теоремы показывают, что тензорные поля кручения и кривизны однозначно определяют три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$.

Теорема 1.2. *Если три-ткани W и $\widetilde{W}$, заданные на многообразиях X и $\widetilde{X}$ одинаковой размерности, эквивалентны, то в соответствующих реперах их тензоры a^i_{jk} и $\widetilde{a}^i_{jk}$, $b^i_{jk\ell}$ и $\widetilde{b}^i_{jk\ell}$ совпадают.*

$\square$ Структурные уравнения ткани W имеют вид (1.26), (1.32). Структурные уравнения ткани $\widetilde{W}$ запишем аналогичным образом:

$$d\underset{1}{\widetilde{\omega}}{}^i = \underset{1}{\widetilde{\omega}}{}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + \widetilde{a}^i_{jk}\underset{1}{\widetilde{\omega}}{}^j \wedge \underset{1}{\widetilde{\omega}}{}^k, \quad d\underset{2}{\widetilde{\omega}}{}^i = \underset{2}{\widetilde{\omega}}{}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j - \widetilde{a}^i_{jk}\underset{2}{\widetilde{\omega}}{}^j \wedge \underset{2}{\widetilde{\omega}}{}^k,$$

$$d\widetilde{\omega}^i_j = \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k + \widetilde{b}^i_{jk\ell}\underset{1}{\widetilde{\omega}}{}^k \wedge \underset{2}{\widetilde{\omega}}{}^\ell.$$

Пусть отображение $\varphi\colon X \to \widetilde{X}$ переводит три-ткань W в эквивалентную ей три-ткань $\widetilde{W}$, т. е. переводит каждое из слоений λ_α, образующих три-ткань W, в соответствующее слоение $\widetilde{\lambda}_\alpha$ ткани $\widetilde{W}$. Это означает, что параметры слоения λ_α выражаются через параметры слоения $\widetilde{\lambda}_\alpha$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что базисные формы этих слоений $\underset{\alpha}{\omega}{}^i$ и $\underset{\alpha}{\widetilde{\omega}}{}^i$ связаны соотношениями вида

$$\underset{\alpha}{\widetilde{\omega}}{}^i = \underset{\alpha}{A}{}^i_j \underset{\alpha}{\omega}{}^j, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

(см. § 2). Но так как формы $\underset{\alpha}{\widetilde{\omega}}{}^i$, как и формы $\underset{\alpha}{\omega}{}^i$, удовлетворяют уравнениям (1.16), то $\underset{1}{A}{}^i_j = \underset{2}{A}{}^i_j = \underset{3}{A}{}^i_j \equiv A^i_j$. После допустимой замены форм $A^i_j \underset{\alpha}{\omega}{}^j \to \underset{\alpha}{\omega}{}^i$ (см. (1.21)) предыдущие уравнения примут вид

$$\underset{\alpha}{\omega}{}^i = \underset{\alpha}{\widetilde{\omega}}{}^i. \tag{1.34}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (1.34) и пользуясь структурными уравнениями тканей W и $\widetilde{W}$, получим:

$$\underset{1}{\omega}{}^j \wedge (\widetilde{\omega}^i_j - \omega^i_j) + (\widetilde{a}^i_{jk} - a^i_{jk})\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{1}{\omega}{}^k = 0, \quad \underset{2}{\omega}{}^j \wedge (\widetilde{\omega}^i_j - \omega^i_j) - (\widetilde{a}^i_{jk} - a^i_{jk})\underset{2}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k = 0.$$

Отсюда видно, что формы $\widetilde{\omega}^i_j - \omega^i_j$ выражаются через базисные формы $\underset{1}{\omega}{}^j$ и $\underset{2}{\omega}{}^j$, т. е. можно положить

$$\widetilde{\omega}^i_j - \omega^i_j = \lambda^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^k + \mu^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^k.$$

Подставляя эти разложения в последние уравнения, найдем, что $\lambda^i_{jk} = 0$, $\mu^i_{jk} = 0$, $\omega^i_j = \widetilde{\omega}^i_j$, $a^i_{jk} = \widetilde{a}^i_{jk}$. Сравнивая теперь уравнения (1.32) тканей W и $\widetilde{W}$, получим $b^i_{jk\ell} = \widetilde{b}^i_{jk\ell}$. $\blacksquare$

Более существенное значение имеет обратное утверждение. Пусть, как и в § 3, символом $\mathcal{R}(\mathcal{W})$ обозначено расслоение адаптированных реперов ткани W.

Теорема 1.3. *Пусть даны две три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ и $\widetilde{W} = (\widetilde{X}, \widetilde{\lambda}_\alpha)$, и пусть существуют локальный диффеоморфизм $\varphi\colon X \to \widetilde{X}$ и такие сечения в расслоениях адаптированных реперов $\mathcal{R}(\mathcal{W})$ и $\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{W}})$, что в соответствующих точках значения тензоров a и b совпадают:*

$$a^i_{jk}(p) = \widetilde{a}^i_{jk}(\varphi(p)), \quad b^i_{jk\ell}(p) = \widetilde{b}^i_{jk\ell}(\varphi(p)).$$

Тогда три-ткани W и $\widetilde{W}$ эквивалентны.

$\square$ Предположим, что структурные уравнения три-тканей W и $\widetilde{W}$ записаны как и в теореме 1.2, причем, в соответствии с условием доказываемой теоремы, реперы выбраны так, что $a = \widetilde{a}$, $b = \widetilde{b}$. Рассмотрим на прямом произведении $\mathcal{R}(\mathcal{W}) \times \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{W}})$ систему уравнений

$$\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{1}{\widetilde{\omega}}{}^i, \quad \underset{2}{\omega}{}^i = \underset{2}{\widetilde{\omega}}{}^i, \quad \widetilde{\omega}^i_j = \omega^i_j. \tag{1.35}$$

В силу структурных уравнений три-тканей W и $\widetilde{W}$ эта система вполне интегрируема, и, следовательно, определяет некоторое отображение $\Phi\colon \mathcal{R}(\mathcal{W}) \to \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{W}})$. Это отображение определено единственным образом по заданной паре соответствующих точек p_0 и $\varphi(p_0)$ и паре соответствующих адаптированных реперов в этих точках. Первые два уравнения системы (1.35) задают отображение $\varphi\colon X \to \widetilde{X}$, которое, очевидно, переводит слои ткани W (напомним, что их уравнения $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$, $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$) в соответствующие слои ткани $\widetilde{W}$. Поэтому три-ткани W и $\widetilde{W}$ эквивалентны. ■

4. Продифференцировав внешним образом уравнения (1.32) и (1.33), получим внешние уравнения

$$\begin{gathered}(\nabla b^i_{jk\ell} - b^i_{jp\ell}a^p_{km}\underset{1}{\omega}^m + b^i_{jkp}a^p_{\ell m}\underset{2}{\omega}^m) \wedge \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = 0,\\ (\nabla b^i_{[j|\ell|k]} - b^i_{[j|p|k]}a^p_{\ell m}\underset{1}{\omega}^m) \wedge \underset{1}{\omega}^\ell + (\nabla b^i_{[jk]\ell} + b^i_{[jk]p}a^p_{\ell m}\underset{2}{\omega}^m) \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = B^i_{jk\ell m}\underset{1}{\omega}^\ell \wedge \underset{2}{\omega}^m,\end{gathered} \tag{1.36}$$

где обозначено

$$B^i_{jk\ell m} = a^i_{pj}b^p_{k\ell m} - a^i_{pk}b^p_{j\ell m} + a^p_{jk}b^i_{p\ell m}. \tag{1.37}$$

Из уравнений (1.36) следует, что формы $\nabla b^i_{jk\ell}$ являются главными на многообразии X. Их разложения по базисным формам запишем в виде:

$$\nabla b^i_{jk\ell} = \underset{1}{c}{}^i_{jk\ell m}\underset{1}{\omega}^m + \underset{2}{c}{}^i_{jk\ell m}\underset{2}{\omega}^m. \tag{1.38}$$

Подставляя в уравнения (1.36), найдем конечные соотношения, связывающие величины $\underset{1}{c} = (\underset{1}{c}{}^i_{jk\ell m})$ и $\underset{2}{c} = (\underset{2}{c}{}^i_{jk\ell m})$ с величинами a^i_{jk} и $b^i_{jk\ell}$:

$$\underset{1}{c}{}^i_{j[k|\ell|m]} = b^i_{jp\ell}a^p_{km},\ \underset{2}{c}{}^i_{jk[\ell m]} = -b^i_{jkp}a^p_{\ell m}, \tag{1.39}$$

$$\underset{1}{c}{}^i_{[jk]m\ell} - \underset{2}{c}{}^i_{[j|\ell|k]m} = B^i_{jk\ell m}. \tag{1.40}$$

Других соотношений, связывающих a, b, $\underset{1}{c}$, $\underset{2}{c}$, нет. Действительно, они могли бы получиться при дифференцировании уравнений (1.31), но нетрудно проверить, что получающиеся таким образом уравнения тождественно удовлетворяются в силу (1.39) и (1.40).

Продолжая уравнения (1.38), можно показать, что величины $\underset{1}{c}$, $\underset{2}{c}$ и все последующие, получающиеся при дальнейших дифференциальных продолжениях, также являются тензорами. Назовем их, как и тензоры a и b, *основными тензорами* три-ткани W. Они связаны довольно сложными соотношениями, найденными в работе [Ш-11], которые мы здесь не приводим.

В дополнение к теореме 1.3 заметим, что если три-ткани W и $\widetilde{W}$ эквивалентны, то в соответствующих реперах совпадают не только их тензоры кручения и кривизны a и b, но также и тензоры $\underset{1}{c}$, $\underset{2}{c}$, и все другие основные тензоры.

5. Пусть $r = 1$, то есть три-ткань W образована тремя семействами кривых на двумерном многообразии. В этом случае все индексы принимают только значение 1, и поэтому кососимметричный тензор a^i_{jk} тождественно равен нулю, так как состоит из единственной компоненты a^1_{11}. Положив $b^1_{111} = b$, $\underset{1}{\omega}^1 = \omega_1$, $\underset{2}{\omega}^1 = \omega_2$, $\omega^1_1 = \omega$, из (1.26), (1.32), (1.36) получим структурные уравнения криволинейной три-ткани:

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega, \quad d\omega = b\omega_1 \wedge \omega_2, \quad \nabla b \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0,$$

где $\nabla b = db - 2b\omega$. Эти уравнения совпадают с уравнениями, полученными в [Бл-1], а единственная компонента тензора кривизны является *относительным инвариантом* и совпадает с введенной там же *кривизной* ткани.

6. Предложение 1.4. *При допустимой замене форм по формулам* (1.21) *основные тензоры ткани преобразуются по тензорному закону, а формы* ω^i_j *преобразуются так*:

$$dA^i_j - A^i_k\omega^k_j + A^k_j\widetilde{\omega}^i_k = 0. \tag{1.41}$$

□ Продифференцировав равенства (1.21) при $\alpha = 1, 2$ внешним образом и воспользовавшись структурными уравнениями (1.26), придем к равенствам:

$$(dA^i_j - A^i_k\omega^k_j + A^k_j\widetilde{\omega}^i_k) \wedge \underset{1}{\omega}^j + (A^j_\ell a^\ell_{jk} - A^{j'}_j A^{k'}_k \widetilde{a}^{i'}_{j'k'})\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k = 0,$$
$$(dA^i_j - A^i_k\omega^k_j + A^k_j\widetilde{\omega}^i_k) \wedge \underset{2}{\omega}^j - (A^j_\ell a^\ell_{jk} - A^{j'}_j A^{k'}_k \widetilde{a}^{i'}_{j'k'})\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k = 0.$$

Из первого уравнения следует, что выражения в скобках зависят только от форм $\underset{1}{\omega}^i$, а из второго — что они зависят только от $\underset{2}{\omega}^i$. Следовательно, эти выражения равны нулю. Приравнивая нулю вторую скобку, получим тензорный закон преобразования для величин a^i_{jk}, а приравнивая нулю вторую скобку, получим (1.41). Тензорный закон преобразования для величин $b^i_{jk\ell}$ получится при внешнем дифференцировании уравнений (1.41). ■

§ 1.5. Параллелизуемые и групповые три-ткани

1. В этом параграфе рассматриваются два специальных класса три-тканей, которые характеризуются обращением в нуль тензоров кривизны и кручения. Напомним, что параллелизуемыми мы назвали в § 1 три-ткани, эквивалентные параллельным.

Теорема 1.5. *Три-ткань W является параллелизуемой тогда и только тогда, когда ее тензоры кручения и кривизны равны нулю.*

□ Пусть три-ткань W эквивалентна ткани W_0, образованной тремя семействами параллельных плоскостей в аффинном пространстве A^{2r}. Присоединим к каждой точке p пространства A^{2r} аффинный репер $\{\underset{1}{e}_i, \underset{2}{e}_i\}$ так, чтобы его векторы $\underset{1}{e}_i$ лежали в плоскости первого слоения, векторы $\underset{2}{e}_i$ — в плоскости второго слоения, векторы $\underset{1}{e}_i + \underset{2}{e}_i$ — в плоскости третьего слоения ткани W_0, проходящих через точку p. Тогда можно положить

$$dp = \underset{1}{\omega}^i \underset{2}{e}_i - \underset{2}{\omega}^i \underset{1}{e}_i, \tag{1.42}$$

и плоские слоения, составляющие три-ткань W_0, будут задаваться системами уравнений

$$\underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0.$$

Так как плоскости первого слоения параллельны между собой, также как и плоскости второго слоения, то выполняются соотношения

$$d\underset{1}{e}_i = \overline{\omega}^j_i \underset{1}{e}_j, \quad d\underset{2}{e}_i = \widetilde{\omega}^j_i \underset{2}{e}_j, \tag{1.43}$$

в силу которых

$$d(\underset{1}{e}_i + \underset{2}{e}_i) = \frac{1}{2}(\overline{\omega}^j_i + \widetilde{\omega}^j_i)(\underset{1}{e}_j + \underset{2}{e}_j) + \frac{1}{2}(\overline{\omega}^j_i - \widetilde{\omega}^j_i)(\underset{1}{e}_j - \underset{2}{e}_j).$$

Но так как плоскости третьего слоения также параллельны между собой, а каждая из систем векторов $\underset{1}{e}_i - \underset{2}{e}_i$ и $\underset{1}{e}_i + \underset{2}{e}_i$ линейно независима, то из последних равенств вытекает, что $\overline{\omega}^j_i - \widetilde{\omega}^j_i = 0$. Положим

$$\overline{\omega}^j_i = \widetilde{\omega}^j_i \overset{\text{def}}{=} \omega^i_j.$$

Вследствие этого уравнения (1.43) примут вид:

$$d\underset{1}{e}_i = \omega^j_i \underset{1}{e}_j, \quad d\underset{2}{e}_i = \omega^j_i \underset{2}{e}_j.$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (1.42) и последние, найдем уравнения структуры параллелизуемой три-ткани:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k. \tag{1.44}$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (1.26) и (1.32), убеждаемся, что для рассматриваемой ткани W_0 $a^i_{jk} = 0$ и $b^i_{jk\ell} = 0$.

Обратно, если тензоры кручения и кривизны некоторой три-ткани W равны нулю, то ее структурные уравнения (1.26) и (1.32) имеют вид (1.44), т. е. представляют собой структурные уравнения $2r$-мерного аффинного пространства, в котором фиксированы три семейства параллельных r-плоскостей: $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$, $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$. Поэтому ткань W эквивалентна параллельной ткани, то есть является параллелизуемой. ■

2. Пусть $W(G)$ — групповая три-ткань, определенная на прямом произведении $X = G \times G$, где $G(\cdot)$ — r-мерная группа Ли с единицей e (см. пример 3 в § 2). Положим $G_1 = (G, e) \subset X$, $G_2 = (e, G) \subset X$, причем операцию в группе G_1 оставим ту же, что и в группе G, а в G_2 введем сопряженную операцию $(\circ)$ по формуле $x \circ y = y \cdot x$. Тогда на прямом произведении $X = G \times G$ возникает структура группы с операцией «$\times$»:

$$(x, y) \times (u, v) = (x \cdot u, y \circ v) = (x \cdot u, v \cdot y).$$

Ясно, что группы G_1 и G_2 являются подгруппами группы $X(\times)$, а естественные вложения $i_1\colon G(\cdot) \to X(\times)$, $i_1(x) = (x, e)$ и $i_2\colon G(\circ) \to X(\times)$, $i_2(x) = (e, x)$, являются изоморфизмами на образы G_1 и G_2 соответственно.

Рассмотрим далее слой $\mathcal{F}_3$ третьего слоения, проходящий через точку (e, e). Согласно определению (см. § 2), он образован такими точками (x, y) из X, для которых выполняется условие $x \cdot y = e$. По определению операции $(\circ)$ имеем

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-1} \circ y^{-1}. \tag{1.45}$$

Отсюда вытекает, во-первых, что слой $\mathcal{F}_3$ является подгруппой группы $X(\times)$, так как $(x, x^{-1}) \times (y, y^{-1}) = (x \cdot y, (y \circ x)^{-1}) = (x \cdot y, (x \cdot y)^{-1})$. Обозначим эту группу G_3. Слои ткани $W(G)$, проходящие через точку (a, b), представляют собой смежные классы вида $(a, b)G_1 = \{(ax, b)\}$, $(a, b)G_2 = \{(a, xb)\}$, $(a, b)G_3 = \{(ax, x^{-1}b)\}$.

Во-вторых, слой $\mathcal{F}_3$ является графиком биективного отображения $\Theta\colon G_1(\cdot) \to G_2(\circ)$, $\Theta(x, e) = (e, x^{-1})$, которое в силу (1.45) будет изоморфизмом. Изоморфизмом будет также отображение $\varphi\colon G(\cdot) \to G(\circ)$, $\varphi(x) = x^{-1}$. Очевидно, что $\Theta = i_2 \circ \varphi \circ i_1^{-1}$.

Обозначим базисные левоинвариантные поля и дуальный базис левоинвариантных форм на группе $G(\cdot)$ соответственно через e_i и ω^i, и пусть c^i_{jk} — структурный тензор этой группы. Напомним, что структурный тензор определяется посредством коммутатора в касательной алгебре Ли группы $G(\cdot)$: $[e_i e_j] = c^i_{jk} e_k$. Поэтому, в силу определения сопряженной операции $(\circ)$ получаем, что структурным тензором группы $G(\circ)$ (в тех же координатах!) будет тензор $-c^i_{jk}$ (см. формулы (2.33) главы 2). Обозначим базис и кобазис на X в соответствии с формулами (1.18) следующим образом:

$$di_1(e_i) = \underset{1}{e}_i, \quad di_2(e_i) = \underset{2}{e}_i, \quad (i_1^{-1})^*(\omega^i) = \underset{1}{\omega}^i, \quad (i_2^{-1})^*(\omega^i) = -\underset{2}{\omega}^i$$

(здесь, как обычно, через $(i_1^{-1})^*$ обозначено антиувлечение, определяемое отображением (i_1^{-1})).

В результате структурные уравнения Маурера–Картана группы $X(\times)$ запишутся так:

$$d\underset{1}{\omega}^i = c^i_{jk} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = -c^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k. \tag{1.46}$$

Покажем, что уравнения (1.46) являются в то же время структурными уравнениями рассматриваемой групповой три-ткани $W(G)$. Для этого следует проверить, что слоения ткани задаются вполне интегрируемыми системами $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$ и $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$. Для первых двух слоений этот факт очевиден. Слои третьего слоения, как следует из вышесказанного, являются смежными классами по группе G_3, которая является графиком отображения Θ. Поэтому дифференциальные уравнения третьего слоения определяются дифференциалом этого отображения. Из предыдущих формул получаем:

$$\Theta^* = (i_1^{-1})^* \circ \varphi^* \circ i_2^*, \tag{1.47}$$

откуда

$$\Theta^*(\underset{2}{\omega}^i) = \underset{1}{\omega}^i, \tag{1.48}$$

так как $\varphi^*(\omega^i) = -\omega^i$. С другой стороны, если на всех группах отождествить локальные координаты, то получим $i_1 = i_2 = Id$, $\Theta(x) = x^{-1}$, $\Theta^*(\underset{2}{\omega}{}^i) = -\underset{2}{\omega}{}^i$, и уравнения (1.48), определяющие третье слоение ткани, примут вид $\underset{1}{\omega}{}^i + \underset{2}{\omega}{}^i = 0$. Этим доказано, что уравнения (1.46) являются структурными уравнениями рассматриваемой групповой три-ткани $W(G)$. Сравнивая уравнения (1.46) с уравнениями (1.26), находим, что $\omega_j^i = 0$, $a_{jk}^i = c_{jk}^i$. Подставляя $\omega_j^i = 0$ в (1.32), получим $b_{jk\ell}^i = 0$.

Докажем теперь обратное: если тензор кривизны некоторой три-ткани W тождественно равен нулю, то эта ткань является групповой тканью. В самом деле, если $b_{jk\ell}^i = 0$, то уравнения (1.32) и (1.33) принимают вид:

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i, \tag{1.49}$$

$$\nabla a_{jk}^i = 0. \tag{1.50}$$

Покажем, что с помощью допустимого преобразования (1.21) формы ω_j^i могут быть одновременно приведены к нулю на многообразии X. Действительно, если $\omega_j^i = 0$, то из (1.41) получаем соотношения

$$dA_j^i - A_k^i \omega_j^k = 0.$$

В силу (1.49) эта система вполне интегрируема. Следовательно, величины A_j^i, определяемые последними уравнениями, существуют, и в новом кобазисе $\{\underset{1}{\widetilde{\omega}}{}^i, \underset{2}{\widetilde{\omega}}{}^i\}$ формы $\widetilde{\omega}_j^i$ будут равны нулю. Тогда уравнения (1.50) дают $da_{jk}^i = 0$, т. е. компоненты тензора кручения становятся постоянными. Уравнения (1.26) при этом совпадают с уравнениями (1.46), в силу чего рассматриваемая три-ткань является групповой тканью. Таким образом, доказана

Теорема 1.6. *Три-ткань W является групповой тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны $b_{jk\ell}^i$ равен нулю.*

Заметим, что на групповой ткани соотношения (1.31) принимают вид

$$a_{jk}^m a_{m\ell}^i + a_{\ell j}^m a_{mk}^i + a_{k\ell}^m a_{mj}^i = 0,$$

то есть совпадают с тождествами Якоби, которым удовлетворяют структурные постоянные группы Ли (см. § 1). Ввиду этого, соотношения (1.31), выполняющиеся на всякой три-ткани W, назовем *обобщенными тождествами Якоби.*

Из теоремы 1.6 вытекает следствие: *три-ткань W является параллелизуемой тогда и только тогда, когда она эквивалентна групповой ткани, порожденной коммутативной группой.*

3. Задача о нахождении подкласса параллелизуемых (регулярных) тканей в заданном классе тканей является одной из классических задач дифференциальной геометрии, см. [Бл-1], [АШ-12], [УШ-5]. Например, если три-ткань на плоскости образована тремя семействами прямых, условие регулярности следующее: прямые ткани должны принадлежать одному кубическому семейству ([Бл-1, с. 26–27]). В частности, регулярными будут ткани, образованные тремя пучками прямых и тремя семействами параллельных прямых.

Необходимое и достаточное условие регулярности дает теорема 1.5. Но приравнивая нулю тензоры кручения и кривизны, мы получим весьма сложную систему дифференциальных уравнений третьего порядка в частных производных относительно функции ткани. Если же вид функции известен, то на практике этот путь приводит к системе алгебраических или функциональных уравнений. Рассмотрим, например, круговые ткани, то есть ткани, образованные пучками окружностей. Это следующий по сложности (за прямолинейными тканями) класс 3-тканей, образованных алгебраическими кривыми. В начале 50-х годов прошлого века В. Бляшке предложил найти все регулярные круговые ткани. Предложенный им способ нахождения регулярных тканей, связанный с прямым перебором всех случаев обращения в нуль кривизны ткани, приводит к необозримым вычислениям, которые ни один из авторов, их применивших, не сумел довести до конца в достаточной мере подробно и прозрачно.

Укажем простое геометрическое необходимое условие регулярности ткани.

Пусть три-ткань W задана уравнением (1.12) в некоторой области U, где выполнено условие (1.11) трансверсальности слоев ткани. Область D определения слоений λ_α, образующих ткань W, вообще говоря, шире области U. Вне области U слои ткани могут не быть трансверсальными, то есть могут касаться друг друга.

Определение. Точка M области D называется *граничной*, если в ней касаются два слоя ткани W. *Границей* Γ_α три-ткани W назовем гладкое подмногообразие, в точках которого касаются слои слоений λ_β и λ_γ, где $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

Возможны следующие варианты: 1) параметры слоев ткани, касающихся друг друга вдоль границы Γ_α, зависят от точки касания; 2) эти параметры постоянны; 3) параметры слоев одного слоения постоянны, а параметры слоев другого меняются.

В первом случае границу Γ_α будем называть *границей первого рода*.

Во втором случае граница представляет собой общую часть двух слоев. Такие границы будем называть *границами второго рода*.

В третьем случае граница есть подмногообразие некоторого слоя слоения λ_β, огибающее слои слоения λ_γ (или наоборот). Такие границы будем называть *границами третьего рода*.

Границы Γ_α могут иметь общую часть — *параболическую границу*, которая также может принадлежать к одному из трех указанных типов.

Теорема 7 (о границах регулярной ткани). *Пусть три-ткань W является регулярной, тогда всякая непараболическая граница этой ткани является слоем этой ткани.*

$\square$ Пусть три-ткань W является регулярной. Это означает, что в окрестности произвольной точки из области U локальные координаты (x, y) можно выбрать так, что уравнения ткани W примут вид $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, а слоения λ_α, образующие ткань, будут задаваться уравнениями $\mathbf{x} = \mathrm{const}$, $\mathbf{y} = \mathrm{const}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathrm{const}$. Так как замена параметров производится по формулам (1.13), в произвольных локальных координатах уравнения регулярной ткани W должны иметь вид $J_3(\mathbf{z}) = J_1(\mathbf{x}) + J_2(\mathbf{y})$ или

$$\mathbf{z} = F(J_1(\mathbf{x}) + J_2(\mathbf{y})),$$

где J_1, J_2, J_3 и $F = J_3^{-1}$ — локальные диффеоморфизмы. При этом слои ткани будут задаваться уравнениями $\mathbf{x} = \mathrm{const}$, $\mathbf{y} = \mathrm{const}$, $\mathbf{z} = \mathrm{const}$.

Пусть D — максимальная область определения функции F, $D \supset U$. Поскольку переменные $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ являются локальными координатами и в области D, то слои первых двух семейств ($\mathbf{x} = \mathrm{const}$ и $\mathbf{y} = \mathrm{const}$) не могут иметь границу в D. Отсюда вытекает, что в области D не может быть параболических границ ткани W.

В то же время границы Γ_1 и Γ_2 определяются уравнениями $\det\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) = 0$ и $\det\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right) = 0$, или $\det\left(\dfrac{\partial J_1}{\partial x}\right) = 0$ и $\det\left(\dfrac{\partial J_2}{\partial y}\right) = 0$ соответственно. Эти уравнения имеют решения $x = \mathrm{const}$ и $y = \mathrm{const}$ соответственно, что и доказывает утверждение. $\blacksquare$

С помощью теоремы о границах в [Ш-40] была решена указанная выше проблема Бляшке о регулярных круговых тканях, а в [ЛШ-12] найдены все проективно различные триангуляции плоскости, получающиеся проектированием регулярных три-тканей, высекаемых на невырожденной кубической поверхности тремя пучками плоскостей, оси которых лежат на этой поверхности.

В [ЛШ-10] теорема о границах обобщена для $(n+1)$-тканей, что позволило авторам описать некоторые классы регулярных 4-тканей, образованных пучками сфер (решение одной из проблем, сформулированных В. Бляшке, см. [Бл-1], с. 112).

§ 1.6. Вычисление тензоров кручения и кривизны три-ткани

Покажем, как найти уравнения структуры три-ткани W и вычислить ее тензоры кривизны и кручения, если эта ткань задана в некоторой области U уравнениями (1.12):

$$z^i = f^i(x^j, y^k).$$

При этом предполагается, что функции f^i принадлежат классу C^s, где $s \geqslant 3$. Напомним, что всюду в области U выполняется условие (1.11):

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right) \neq 0, \quad \det\left(\frac{\partial f^i}{\partial y^k}\right) \neq 0,$$

а слоения λ_α, образующие три-ткань, определяются следующими уравнениями: $\lambda_1: x^i = c^i_1$, $\lambda_2: y^i = c^i_2$, $\lambda_3: f^i(x^i, y^k) = c^i_3$, где c^i_α — постоянные.

Положим

$$\overline{f}^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad \widetilde{f}^i_j = \frac{\partial f^i}{\partial y^j}.$$

В силу условий (1.11) матрицы $(\overline{f}^i_j)$ и $(\widetilde{f}^i_j)$ обратимы. Обозначим обратные им матрицы $(\overline{g}^i_j)$ и $(\widetilde{g}^i_j)$ соответственно.

Дифференцирование уравнений (1.12) дает:

$$dz^i = \overline{f}^i_j dx^j + \widetilde{f}^i_j dy^j. \tag{1.51}$$

Положим

$$\underset{1}{\omega}^i = \overline{f}^i_j dx^j, \quad \underset{2}{\omega}^i = \widetilde{f}^i_j dy^j, \tag{1.52}$$

тогда слоения ткани будут определяться уравнениями

$$\underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0.$$

Формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ должны удовлетворять структурным уравнениям ткани, полученным в § 4. Продифференцируем эти формы внешним образом, принимая во внимание уравнения (1.52) и полученные из них уравнения

$$dx^i = \overline{g}^i_j \underset{1}{\omega}^j, \quad dy^i = \widetilde{g}^i_j \underset{2}{\omega}^j. \tag{1.53}$$

В результате получим:

$$d\underset{1}{\omega}^i = -d\underset{2}{\omega}^i = \Gamma^i_{jk} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \tag{1.54}$$

где

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^\ell \partial y^m}\, \overline{g}^\ell_j \widetilde{g}^m_k. \tag{1.55}$$

Соотношения (1.54) можно записать также в следующем виде:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge (\Gamma^i_{kj} \underset{1}{\omega}^k + \Gamma^i_{jk} \underset{2}{\omega}^k) + \Gamma^i_{[jk]} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \qquad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge (\Gamma^i_{kj} \underset{1}{\omega}^k + \Gamma^i_{jk} \underset{2}{\omega}^k) - \Gamma^i_{[jk]} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k.$$

Положим

$$a^i_{jk} = -\Gamma^i_{[jk]} \tag{1.56}$$

и

$$\omega^i_j = \Gamma^i_{kj} \underset{1}{\omega}^k + \Gamma^i_{jk} \underset{2}{\omega}^k, \tag{1.57}$$

тогда последние квадратичные соотношения примут вид (1.26), то есть мы получаем первую серию структурных уравнений три-ткани. Как видно из (1.56), *тензор кручения выражается через частные производные второго порядка от функций* f^i, *задающих три-ткань* W.

Чтобы найти выражение для тензора кривизны, продифференцируем равенства (1.57). Пользуясь равенствами (1.54) и (1.57), найдем:

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = \Big(\frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial x^m} dx^m + \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial y^m} dy^m\Big) \wedge \underset{1}{\omega}^k + \Gamma^i_{kj}\Gamma^k_{\ell m} \underset{1}{\omega}^\ell \wedge \underset{2}{\omega}^m + \Big(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^m} dx^m + \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^m} dy^m\Big) \wedge \underset{2}{\omega}^k +$$
$$+ \Gamma^i_{jk}(-\Gamma^k_{\ell m}) \underset{1}{\omega}^\ell \wedge \underset{2}{\omega}^m - (\Gamma^k_{\ell j} \underset{1}{\omega}^\ell + \Gamma^k_{j\ell} \underset{2}{\omega}^\ell) \wedge (\Gamma^i_{mk} \underset{1}{\omega}^m + \Gamma^i_{km} \underset{2}{\omega}^m).$$

Преобразуем это выражение с помощью (1.53), (1.54) и (1.57). В результате получим:

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = b^i_{jkl} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell + A^i_{jkl} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell + B^i_{jkl} \underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell. \tag{1.58}$$

где

$$b^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial y^m}\, \widetilde{g}^m_\ell + \frac{\partial \Gamma^i_{j\ell}}{\partial x^m}\, \overline{g}^m_k + \Gamma^i_{mj}\Gamma^m_{k\ell} - \Gamma^i_{jm}\Gamma^m_{k\ell} - \Gamma^i_{m\ell}\Gamma^m_{kj} + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{j\ell}, \tag{1.59}$$

и
$$A^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{[k|j|}}{\partial x^m}\,\overline{g}^m_{\ell]} - \Gamma^i_{[\ell|m|}\Gamma^m_{k]j}, \qquad B^i_{jkl} = \Big(-\frac{\partial \Gamma^i_{j[k}}{\partial y^m}\,\widetilde{g}^m_{\ell]} - \Gamma^i_{m[\ell}\Gamma^m_{|j|k]}\Big).$$

Непосредственно проверяется, что $A^i_{jkl} = B^i_{jkl} = 0$ (см. задачу 1.23), в силу чего равенства (1.58) совпадут со второй серией структурных уравнений (1.32) три-ткани.

Если в выражение (1.59) для тензора кривизны ткани подставить значение величин Γ^i_{jk} из (1.55), то после преобразований получим следующую формулу:

$$b^i_{jkl} = \Big(\frac{\partial^3 f^i}{\partial x^m \partial y^n \partial y^p}\,\widetilde{g}^n_j - \frac{\partial^3 f^i}{\partial x^m \partial x^n \partial y^p}\,\overline{g}^n_j\Big)\overline{g}^m_k \widetilde{g}^p_\ell + \Gamma^i_{kp}\frac{\partial^2 f^p}{\partial y^m \partial y^n}\,\widetilde{g}^m_j \widetilde{g}^n_\ell - \Gamma^i_{p\ell}\frac{\partial^2 f^p}{\partial x^m \partial x^n}\,\overline{g}^m_j \overline{g}^n_k + \\ + \Gamma^i_{km}\Gamma^m_{j\ell} - \Gamma^i_{m\ell}\Gamma^m_{kj}. \quad (1.60)$$

Как видно, *тензор кривизны выражается через частные производные третьего порядка от функций f^i, задающих три-ткань W.*

Другие выражения для тензора кривизны ткани даны в упражнениях 1.11, 1.12, 1.22.

Альтернируя соотношения (1.60) по нижним индексам, получим равенства

$$b^i_{[jkl]} = \Gamma^m_{[j\ell}\Gamma^i_{k]m} - \Gamma^m_{[kj}\Gamma^i_{|m|\ell]}.$$

В силу обозначений (1.56) эти соотношения совпадут с соотношениями (1.31), связывающими тензоры кручения и кривизны ткани.

§ 1.7. Каноническая связность Черна на три-ткани

Три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$ порождает на многообразии X инвариантные аффинные связности. Наличие этих связностей позволяет, как будет видно из дальнейшего, эффективно изучать дифференциальную геометрию три-тканей общего вида, а также специальные классы тканей.

1. Напомним определение аффинной связности на гладком многообразии X (см. например, [А-12], с. 62–77, или [КН-1], т. 1, гл. 2,3).

Пусть $\mathcal{R}(X)$ — расслоение реперов над X, $\dim X = n$, и ω^u — формы Пфаффа на этом расслоении, определенные как в § 1 и удовлетворяющие уравнениям (1.2). Формы ω^u_v $(u, v, w, ... = = 1, 2, ..., n)$, входящие в уравнения (1.2), инвариантно определены на расслоении реперов второго порядка $\mathcal{R}^2(X)$, которое строится аналогично расслоению $\mathcal{R}(X)$. *Аффинная связность* Γ на многообразии X задается на расслоении $\mathcal{R}^2(X)$ с помощью инвариантного горизонтального распределения Δ. Последнее определяется системой форм Пфаффа

$$\Theta^u_v = \omega^u_v - \Gamma^u_{vw}\omega^w, \qquad (1.61)$$

которые аннулируются на распределении Δ. Распределение Δ инвариантно относительно группы аффинных преобразований, действующей на расслоении $\mathcal{R}(X)$. Ее орбитами являются слои из $\mathcal{R}(X)$.

Исключая с помощью уравнений (1.61) формы ω^u_v из соотношений (1.2), получим уравнения

$$d\omega^u = \omega^v \wedge \Theta^u_v + R^u_{vw}\omega^v \wedge \omega^w, \qquad (1.62)$$

где $R^u_{vw} = \Gamma^u_{[vw]}$. Условия инвариантности распределения Δ приводят к уравнениям

$$d\Theta^u_v = \Theta^w_v \wedge \Theta^u_w + R^u_{vwz}\omega^w \wedge \omega^z. \qquad (1.63)$$

Форма Пфаффа $\Theta = (\Theta^u_v)$ со значениями в алгебре Ли $gl(n)$ группы $\mathbf{GL}(n)$ называется *формой связности* Γ.

Величины R^u_{vw} и R^u_{vwz} образуют тензорные поля на многообразии X и называются соответственно *тензором кручения* и *тензором кривизны* связности Γ.

Обратно, если на расслоении реперов $\mathcal{R}^2(X)$ заданы формы Θ^u_v, удовлетворяющие вместе с формами ω^u уравнениям (1.62) и (1.63), то они определяют на X аффинную связность Γ, тензоры кручения и кривизны которой будут R^u_{vw} и R^u_{vwz} (*теорема Картана–Лаптева*, см. [Е-1], [А-10]).

Аффинная связность является G-структурой на расслоении реперов $\mathcal{R}^2(X)$ второго порядка. Пусть $\widetilde{X}$ — подмногообразие многообразия X. Векторное поле $\xi = (\xi^u)$, заданное на $\widetilde{X}$, называется *параллельным в связности* Γ, если его координаты ξ^u удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$d\xi^u + \xi^v \Theta_v^u = 0, \tag{1.64}$$

которые выполняются на $\widetilde{X}$. Если $\widetilde{X}$ — кривая $\gamma(t)$, то система (1.64) превращается в систему обыкновенных дифференциальных уравнений и имеет единственное решение $\xi(t)$ при заданных начальных условиях $\xi_0 = \xi(0)$. В этом случае говорят также, что вектор $\xi(t)$ получен параллельным переносом вектора ξ_0 вдоль кривой $\gamma(t)$, а уравнения (1.64) называют уравнениями параллельного переноса.

Линия $\gamma(t)$ называется *геодезической в связности* Γ, если на $\gamma(t)$ существует параллельное векторное поле, касательное к $\gamma(t)$. Координаты касательного вектора $\xi(t)$ геодезической линии удовлетворяют уравнениям

$$d\xi^u + \xi^v \Theta_v^u = \Theta \xi^u, \tag{1.65}$$

где Θ — некоторая форма Пфаффа.

Внешние квадратичные формы

$$\Omega^u = R^u_{vw}\omega^v \wedge \omega^w, \quad \Omega^u_v = R^u_{vwz}\omega^w \wedge \omega^z,$$

входящие в уравнения (1.62) и (1.63), называются *формами кручения* и *кривизны* связности Γ и имеют следующий геометрический смысл. Напомним, что разверткой пространства аффинной связности Γ на аффинное пространство A, $\dim A = n$, называется семейство реперов $\{e_u\}$ в A, полученное интегрированием системы уравнений Пфаффа

$$dp = \omega^u e_u, \quad de_u = \Theta_u^v e_v$$

вдоль некоторой кривой $\gamma(t)$. Пусть V^2 — некоторая двумерная поверхность в X, ξ и η — два векторных поля этой поверхности. Рассмотрим на V^2 малый криволинейный параллелограмм $l = pp_1p_3p_2p$ (рис. 5), образованный интегральными кривыми полей ξ и η, стороны pp_1 и pp_2 которого равны Δt и Δs соответственно.

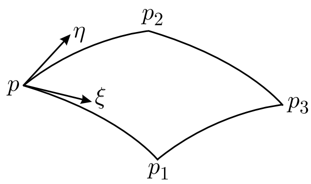

Рис. 5

Замкнутая линия ℓ при развертке в аффинное пространство переходит в линию $\widetilde{\ell}$, вообще говоря, не замкнутую, а образовавшийся зазор Δp с точностью до малых третьего порядка вычисляется по формуле:

$$\Delta p = 2R^u_{vw}\xi^v\eta^w\,\Delta t\,\Delta s\,e_u. \tag{1.66}$$

Точно так же с помощью форм Ω^u_v оценивается (с точностью до третьего порядка малости) разность Δe_u между базисными векторами e_u касательного пространства $T_p(X)$ и векторами, которые получаются из них при параллельном переносе вдоль замкнутого пути ℓ на V^2:

$$\Delta e_u = R^v_{uwz}\xi^w\eta^z\,\Delta t\,\Delta s\,e_v. \tag{1.67}$$

Отметим еще, что если на многообразии X задана G-структура со структурной группой G, то, как указано в § 1, формы ω^u_v имеют вид (1.8). Если эти формы вместе с формами ω^u удовлетворяют уравнениям (1.62) и (1.63), то они определяют на X связность, называемую G-связностью. Например, если $G = \mathbf{O}(n)$ — ортогональная группа, то $\omega^u_v = \Theta^u_v$, где $\Theta^u_v = -\Theta^v_u$ — кососимметричные формы, и определяемая ими связность называется *римановой связностью.*

2. Пусть на многообразии X размерности $2r$ задана три-ткань W. Сравнивая ее структурные уравнения (1.26) и (1.32) с уравнениями (1.62) и (1.63), находим, что формы

$$\omega^u = (\underset{1}{\omega}{}^i, \underset{2}{\omega}{}^i), \quad \Theta^u_v = \begin{pmatrix} \omega^i_j & 0 \\ 0 & \omega^i_j \end{pmatrix}$$

определяют аффинную связность на G_W-структуре, присоединенной к три-ткани W. Она называется *связностью Черна* и обозначается Γ.

Уравнения (1.33) и (1.38) показывают, что дифференциальный оператор ∇, введенный в § 4 гл. 1, является оператором ковариантного дифференцирования относительно связности Черна.

Из уравнений (1.26) и (1.32) видно, что тензоры кручения и кривизны связности Γ имеют следующее строение:

$$R^u_{vw} = \left(\begin{pmatrix} a^i_{jk} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -a^i_{jk} \end{pmatrix} \right); \qquad R^u_{vwz} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\, b^i_{jk\ell} \\ -\frac{1}{2}\, b^i_{jk\ell} & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\, b^i_{jk\ell} \\ -\frac{1}{2}\, b^i_{jk\ell} & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \tag{1.68}$$

Выясним геометрические свойства связности Черна.

Подмногообразие Y пространства аффинной связности X называется *автопараллельным* [КН-1, т. 2, стр. 57], если любое параллельное поле ξ вдоль любой кривой $\gamma(t)$, $\gamma(t) \subset Y$, обладает следующим свойством: если хотя в одной точке вектор поля ξ касается Y, то все векторы поля ξ касаются Y.

Пусть Y_1 и Y_2 — два подмногообразия в X, $p_1 \in Y_1$, $p_2 \in Y_2$ — две произвольные точки на них, ℓ — произвольная гладкая кривая, соединяющая эти точки. Подмногообразия Y_1 и Y_2 называются *параллельными* в X, если любой вектор ξ_1, касательный к Y_1 в точке p_1, при параллельном переносе вдоль ℓ переходит в вектор ξ_2, касательный к Y_2 в точке p_2. Очевидно, что если два подмногообразия параллельны между собой, то каждое из них автопараллельно.

Предложение 1.8. *Каждый слой три-ткани $W = (x, \lambda_\alpha)$ является автопараллельным подмногообразием в X относительно связности Черна. Любые два слоя из одного слоения параллельны между собой.*

□ Запишем уравнения параллельного переноса произвольного вектора $\xi = \xi^i_1 \underset{2}{e}_i - \xi^i_2 \underset{1}{e}_i$, где $\xi^i_\alpha = \underset{\alpha}{\omega}^i(\xi)$, в связности Γ (см. (1.20)). Так как формы связности Черна имеют указаный выше специальный вид, то уравнения (1.64) параллельного переноса для этой связности запишутся так:

$$d\xi^i_1 + \xi^j_1 \omega^i_j = 0, \quad d\xi^i_2 + \xi^j_2 \omega^i_j = 0. \tag{1.69}$$

Пусть в начальной точке p_0 вектор ξ_0 касается слоя слоения λ_1, проходящего через эту точку, тогда $(\xi^i_1)_0 = 0$. Так как первая серия уравнений (1.69) является однородной относительно ξ^i_1, то, интегрируя эту систему вдоль любого пути $p(t)$ $(p(0) = p_0, 0 \leqslant t \leqslant 1)$, мы получим $(\xi^i_1)_{t=1} = 0$. Это значит, что при параллельном переносе вдоль любого пути вектора ξ_0, касательного к слою первого слоения λ_1, снова получается вектор, касательный к слою этого слоения. Так как вектор ξ_0 и кривая $p(t)$ были выбраны произвольно, то отсюда получаем, что слои первого слоения, проходящие через точки $p(0)$ и $p(1)$, параллельны между собой и, следовательно, каждое из них является автопараллельным. Для слоев второго слоения утверждение доказывается аналогично.

Так как из уравнения (1.61) следует, что

$$d(\xi^i_1 + \xi^i_2) + (\xi^j_1 + \xi^j_2)\omega^i_j = 0,$$

а вектор ξ, касательный к слоям $\mathcal{F}_3$ третьего слоения, определяется условием $\xi^i_1 + \xi^i_2 = 0$, то предыдущее утверждение остается верным и для третьего слоения λ_3. ■

Из предложения 1.8 получается, в частности, что любая r-плоскость параллельно переносится вдоль слоя $\mathcal{F}_\alpha$. Это означает следующее: если геодезическая линия касается слоя $\mathcal{F}_\alpha$ в некоторого точке p, то она касается его в каждой точке, то есть принадлежит этому слою. Доказано

Предложение 1.9. *Слои ткани W являются вполне геодезическими подмногообразиями многообразия X относительно связности Черна.*

Связность Черна индуцирует аффинные связности на слоях три-ткани W. На слоях первого слоения λ_1 выполняются уравнения $\underset{1}{\omega}^i = 0$, в силу чего уравнения (1.26) и (1.32) принимают вид:

$$d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a^i_{jk} \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k. \tag{1.70}$$

Точно так же на слоях второго слоения λ_2 индуцированная связность задается уравнениями

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a^i_{jk} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k. \tag{1.71}$$

Наконец, на слоях третьего слоения λ_3, которые определяются уравнениями $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$, структурные уравнения индуцированной связности имеют вид

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega_j^i + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i - b^i_{j[k\ell]}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell. \tag{1.72}$$

Из уравнений (1.70)–(1.72) вытекает

Предложение 1.10. *Слои первых двух слоений ткани W являются поверхностями абсолютного параллелизма относительно связности Черна. Слои третьего слоения обладают этим свойством тогда и только тогда, когда тензор кривизны ткани удовлетворяет условию $b^i_{j[k\ell]} = 0$, т. е. симметричен по двум последним нижним индексам.*

Из уравнений (1.70)–(1.72) следует также, что тензоры кручения всех трех индуцированных связностей на слоях $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, проходящих через точку p из X, одинаковы в этой точке и совпадают с тензором кручения ткани W.

В силу специфического строения тензоров кручения и кривизны связности Черна (см. (1.68)) система (1.66) принимает вид:

$$\Delta p = \Delta p_1 + \Delta p_2,$$

где

$$\Delta p_1 = 2a^i_{jk}\xi_1^j\eta_1^k\,\Delta t\,\Delta s\,\underset{1}{e}_i, \quad \Delta p_2 = -2a^i_{jk}\xi_2^j\eta_2^k\,\Delta t\,\Delta s\,\underset{2}{e}_i, \tag{1.73}$$

а система (1.67) распадается на две подсистемы:

$$\begin{aligned} \Delta\underset{1}{e}_j &= b^i_{jk\ell}(\xi_1^k\eta_2^\ell - \eta_1^k\xi_2^\ell)\,\Delta t\,\Delta s\,\underset{1}{e}_i,\\ \Delta\underset{2}{e}_j &= b^i_{jk\ell}(\xi_1^k\eta_2^\ell - \eta_1^k\xi_2^\ell)\,\Delta t\,\Delta s\,\underset{2}{e}_i. \end{aligned} \tag{1.74}$$

При этом предполагается, что векторы ξ и η записаны, как и выше, в следующей форме:

$$\xi = \xi_1^i\underset{2}{e}_i - \xi_2^i\underset{1}{e}_i, \quad \eta = \eta_1^i\underset{2}{e}_i - \eta_2^i\underset{1}{e}_i.$$

Отсюда вытекают следующие свойства связности Черна.

(A) Пусть $\xi \in T_1$, т. е. двумерная площадка $\xi \wedge \eta$ пересекает касательное подпространство T_1 к слою $\mathcal{F}_1$. Тогда $\xi_1^i = 0$ и из формул (1.73) получаем $\Delta p_1 = 0$. Это означает, что вектор Δp лежит в подпространстве T_1. Аналогично находим, что если двумерная площадка $\xi \wedge \eta$ пересекает подпространство T_2, то там же лежит и вектор Δp. Если двумерная площадка $\xi \wedge \eta$ пересекает оба подпространства T_1 и T_2, то $\Delta p = 0$.

(B) Если $\xi \in T_3$, $\eta \in T_3$, то $\xi_1^i + \xi_2^i = 0$, $\eta_1^i + \eta_2^i = 0$, и из формул (1.62) следует, что $\Delta p_1 + \Delta p_2 = 0$, т. е. $\Delta p \in T_3$.

Свойства (A) и (B) полностью характеризуют тензор кручения связности Черна. В самом деле, нетрудно проверить, что в силу этих свойств тензор a^u_{vw} имеет вид (1.68).

Обратимся теперь к формулам (1.74).

(A_1) Прежде всего заметим, что векторы $\Delta\underset{\alpha}{e}_i$ выражаются только через векторы $\underset{\alpha}{e}_i$ ($\alpha = 1, 2, 3$), и каждая из этих систем векторов преобразуется одинаково при параллельном переносе вдоль замкнутого контура ℓ.

(B_1) Если $\xi \in T_1$, $\eta \in T_1$, то $\xi_1^i - \eta_1^i = 0$, и из формул (1.73) получаем $\Delta\underset{1}{e}_i = \Delta\underset{2}{e}_i = 0$. Аналогичный результат получится, если $\xi \in T_2$, $\eta \in T_2$.

Обратно, если для связности Γ, структурные уравнения которой записаны в виде (1.62), (1.63), выполняются свойства (A_1) и (B_1), то ее тензор кривизны имеет вид (1.68). Следовательно, *свойства (A_1) и (B_1) полностью характеризуют строение тензора кривизны связности Черна.*

§ 1.8. Другие связности, присоединенные к три-ткани

1. Неравноправие слоений λ_α три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ по отношению к связности Γ объясняется тем, что ее структурные уравнения (1.26) и (1.32) несимметричны относительно систем форм $\underset{\alpha}{\omega}^i$, задающих эти слоения. При выводе структурных уравнений за базисные были приняты формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$, то есть слоения λ_1 и λ_2 играли роль координатных слоений на многообразии X. Если же в качестве базисных форм взять формы $\underset{\alpha}{\omega}^i$ и $\underset{\beta}{\omega}^i$ $(\alpha \neq \beta)$ и повторить для них вычисления, проведенные в § 4, то получатся следующие уравнения:

$$\begin{aligned} d\underset{\alpha}{\omega}^i &= \underset{\alpha}{\omega}^j \wedge \underset{\alpha\beta}{\omega}{}^i_j + \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}\underset{\alpha}{\omega}^j \wedge \underset{\alpha}{\omega}^k, \\ d\underset{\beta}{\omega}^i &= \underset{\beta}{\omega}^j \wedge \underset{\alpha\beta}{\omega}{}^i_j - \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}\underset{\beta}{\omega}^j \wedge \underset{\beta}{\omega}^k, \\ d\underset{\alpha\beta}{\omega}{}^i_j &= \underset{\alpha\beta}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{\alpha\beta}{\omega}{}^i_k + \underset{\alpha\beta}{b}{}^i_{jk\ell}\underset{\alpha}{\omega}^k \wedge \underset{\beta}{\omega}^\ell, \end{aligned} \tag{1.75}$$

которые являются структурными уравнениями некоторой связности $\Gamma_{\alpha\beta}$. При этом связность Γ_{12} совпадает со связностью Черна Γ. Обозначим оператор ковариантного дифференцирования в связности $\Gamma_{\alpha\beta}$ через $\overset{\alpha\beta}{\nabla}$. Тогда для тензора $\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk}$ должны выполняться уравнения

$$\overset{\alpha\beta}{\nabla}\underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk} = \underset{\alpha\beta}{b}{}^i_{[j|\ell|k]}\underset{\alpha}{\omega}^\ell + \underset{\alpha\beta}{b}{}^i_{[jk]\ell}\underset{\beta}{\omega}^\ell, \tag{1.76}$$

аналогичные уравнениям (1.33).

Поменяем местами в уравнениях (1.75) индексы α и β и сравним полученные уравнения с уравнениями (1.75). В результате найдем, что

$$\underset{\alpha\beta}{\omega}{}^i_j = \underset{\beta\alpha}{\omega}{}^i_j, \quad \underset{\alpha\beta}{a}{}^i_{jk} = -\underset{\beta\alpha}{a}{}^i_{jk}, \quad \underset{\alpha\beta}{b}{}^i_{jk\ell} = -\underset{\beta\alpha}{b}{}^i_{jk\ell}.$$

Таким образом, связности $\Gamma_{\alpha\beta}$ и $\Gamma_{\beta\alpha}$ отличаются несущественно.

Чтобы найти связь между формами $\omega^i_j \equiv \underset{12}{\omega}{}^i_j$, $\underset{23}{\omega}{}^i_j$, $\underset{31}{\omega}{}^i_j$, заметим, что из уравнений (1.27) с помощью соотношений (1.16) получаются следующие равенства:

$$d\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\omega}^j \wedge (\omega^i_j - 2a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^k) - a^i_{jk}\underset{3}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k.$$

Кроме того, уравнения (1.26) могут быть переписаны в виде

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge (\omega^i_j + 2a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^k) - a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \qquad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge (\omega^i_j - 2a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^k) + a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k.$$

Поэтому для связности Γ_{23} имеем:

$$d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{23}{\omega}{}^i_j + a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \quad d\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\omega}^j \wedge \underset{23}{\omega}{}^i_j - a^i_{jk}\underset{3}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k, \tag{1.77}$$

где обозначено

$$\underset{23}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j - 2a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^k. \tag{1.78}$$

Для связности Γ_{31} аналогично находим:

$$d\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\omega}^j \wedge \underset{31}{\omega}{}^i_j + a^i_{jk}\underset{3}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k, \quad d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{31}{\omega}{}^i_j - a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \tag{1.79}$$

где

$$\underset{31}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + 2a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^k. \tag{1.80}$$

Как видно из последних равенств, тензоры кручения трех связностей Γ_{12}, Γ_{23} и Γ_{31} равны между собой.

Чтобы найти тензор кривизны связности Γ_{23}, продифференцируем внешним образом формы $\underset{23}{\omega}{}^i_j$. Используя уравнения (1.26), (1.32) и (1.33), придем к равенствам:

$$d\underset{23}{\omega}{}^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k - 2(a^i_{\ell k}\omega^\ell_j - a^\ell_{jk}\omega^i_\ell) \wedge \underset{2}{\omega}^k + (b^i_{jk\ell} - 2b^i_{[j|k|\ell]})\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell - 2b^i_{[j\ell]k}\underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell + 2a^i_{jm}a^m_{k\ell}\underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell.$$

С помощью (1.78) находим:

$$\underset{23}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{23}{\omega}{}^i_k = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + 2a^\ell_{jk}\omega^i_\ell \wedge \underset{2}{\omega}^k - 2a^i_{\ell k}\omega^\ell_j \wedge \underset{2}{\omega}^k + 4a^m_{jk}a^i_{m\ell}\underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell.$$

Вычитая эти соотношения из предыдущих, придем к уравнениям

$$d\underset{23}{\omega}{}^i_j - \underset{23}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{23}{\omega}{}^i_k = b^i_{\ell kj}\underset{1}{\omega}{}^k \wedge \underset{2}{\omega}{}^\ell - 2(b^i_{[j\ell]k} + 3a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]})\underset{2}{\omega}{}^k \wedge \underset{2}{\omega}{}^\ell.$$

Если теперь исключить формы $\underset{1}{\omega}{}^k$ с помощью соотношений (1.16) и воспользоваться соотношениями (1.31), то окончательно получим:

$$d\underset{23}{\omega}{}^i_j - \underset{23}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{23}{\omega}{}^i_k = b^i_{k\ell j}\underset{2}{\omega}{}^k \wedge \underset{3}{\omega}{}^\ell. \tag{1.81}$$

Отсюда следует, что

$$\underset{23}{b}{}^i_{jk\ell} = b^i_{k\ell j}. \tag{1.82}$$

Аналогичным образом найдем уравнения

$$d\underset{31}{\omega}{}^i_j - \underset{31}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{31}{\omega}{}^i_k = b^i_{\ell jk}\underset{3}{\omega}{}^k \wedge \underset{1}{\omega}{}^\ell \tag{1.83}$$

и

$$\underset{31}{b}{}^i_{jk\ell} = b^i_{\ell jk}. \tag{1.84}$$

Таким образом, *тензоры кривизны связностей* Γ_{23} *и* Γ_{31} *получаются из тензора кривизны связности* Γ_{12} *круговой перестановкой нижних индексов.*

Результаты этого пункта сведены в Таблицу 1.1.

Таблица 1.1

Связность	Γ_{12}	Γ_{23}	Γ_{31}	Γ_{21}	Γ_{32}	Γ_{13}
Тензор кручения	a^i_{jk}	a^i_{jk}	a^i_{jk}	$-a^i_{jk}$	$-a^i_{jk}$	$-a^i_{jk}$
Тензор кривизны	$b^i_{jk\ell}$	$b^i_{k\ell j}$	$b^i_{\ell jk}$	$-b^i_{j\ell k}$	$-b^i_{\ell kj}$	$-b^i_{kj\ell}$

Далее, пользуясь формулами (1.76), (1.82) и (1.84), найдем ковариантные дифференциалы тензора кручения относительно связностей Γ_{23} и Γ_{31}:

$$\overset{23}{\nabla} a^i_{jk} = b^i_{\ell[kj]}\underset{2}{\omega}{}^\ell + b^i_{[k\ell j]}\underset{3}{\omega}{}^\ell; \quad \overset{31}{\nabla} a^i_{jk} = b^i_{[kj]\ell}\underset{3}{\omega}{}^\ell + b^i_{\ell[jk]}\underset{1}{\omega}{}^\ell. \tag{1.85}$$

Другие связности $\Gamma_{\alpha\beta}$ описываются аналогично.

2. Введем еще одну — среднюю связность $\overset{*}{\Gamma}$, симметричную по отношению ко всем трем слоениям λ_α ткани W. Положим

$$\overset{*}{\omega}{}^i_j = \frac{1}{3}(\underset{12}{\omega}{}^i_j + \underset{23}{\omega}{}^i_j + \underset{31}{\omega}{}^i_j). \tag{1.86}$$

Учитывая (1.78) и (1.80), найдем:

$$\begin{aligned}
\underset{12}{\omega}{}^i_j &= \overset{*}{\omega}{}^i_j - \frac{2}{3}a^i_{jk}(\underset{1}{\omega}{}^k - \underset{2}{\omega}{}^k),\\
\underset{23}{\omega}{}^i_j &= \overset{*}{\omega}{}^i_j - \frac{2}{3}a^i_{jk}(\underset{2}{\omega}{}^k - \underset{3}{\omega}{}^k),\\
\underset{31}{\omega}{}^i_j &= \overset{*}{\omega}{}^i_j - \frac{2}{3}a^i_{jk}(\underset{3}{\omega}{}^k - \underset{1}{\omega}{}^k).
\end{aligned} \tag{1.87}$$

В результате уравнения (1.26) и (1.27) примут в связности $\overset{*}{\Gamma}$ симметричный вид:

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}{}^i &= \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \overset{*}{\omega}{}^i_j + \frac{1}{3}\, a^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge (\underset{2}{\omega}{}^k - \underset{3}{\omega}{}^k),\\
d\underset{2}{\omega}{}^i &= \underset{2}{\omega}{}^j \wedge \overset{*}{\omega}{}^i_j + \frac{1}{3}\, a^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^j \wedge (\underset{3}{\omega}{}^k - \underset{1}{\omega}{}^k),\\
d\underset{3}{\omega}{}^i &= \underset{3}{\omega}{}^j \wedge \overset{*}{\omega}{}^i_j + \frac{1}{3}\, a^i_{jk}\underset{3}{\omega}{}^j \wedge (\underset{1}{\omega}{}^k - \underset{2}{\omega}{}^k).
\end{aligned} \tag{1.88}$$

Найдем теперь ковариантный дифференциал тензора кручения в связности $\overset{*}{\Gamma}$. В силу определения этой связности $\overset{*}{\nabla} = \frac{1}{3}(\overset{12}{\nabla} + \overset{23}{\nabla} + \overset{31}{\nabla})$. Поэтому, пользуясь формулами (1.33) и (1.85), получаем:

$$\overset{*}{\nabla} a^i_{jk} = \frac{1}{3}\Big[(b^i_{\ell[jk]} - b^i_{[k|\ell|j]})\underset{1}{\omega}^\ell + (b^i_{[jk]\ell} - b^i_{\ell[jk]})\underset{2}{\omega}^\ell + (b^i_{[k|\ell|j]} - b^i_{[jk]\ell})\underset{3}{\omega}^\ell\Big].$$

Если исключить из правой части последовательно формы $\underset{3}{\omega}^\ell$, $\underset{1}{\omega}^\ell$, $\underset{2}{\omega}^\ell$ при помощи уравнений (1.16), то получим три выражения для форм $\overset{*}{\nabla} a^i_{jk}$:

$$\overset{*}{\nabla} a^i_{jk} = \overset{*}{b}{}^i_{[jk]\ell}\underset{2}{\omega}^\ell - \overset{*}{b}{}^i_{[k|\ell|j]}\underset{1}{\omega}^\ell = \overset{*}{b}{}^i_{[k|\ell|j]}\underset{3}{\omega}^\ell - \overset{*}{b}{}^i_{\ell[jk]}\underset{2}{\omega}^\ell = \overset{*}{b}{}^i_{\ell[jk]}\underset{1}{\omega}^\ell - \overset{*}{b}{}^i_{[jk]\ell}\underset{3}{\omega}^\ell, \tag{1.89}$$

где обозначено $\overset{*}{b}{}^i_{jk\ell} = b^i_{jk\ell} - b^i_{[jk\ell]}$. Тензор $\overset{*}{b}{}^i_{jk\ell}$ удовлетворяет соотношению

$$\overset{*}{b}{}^i_{[jk\ell]} = 0, \tag{1.90}$$

которое получается из (1.31). Заметим, что, в отличие от тензора $b^i_{jk\ell}$, тензор $\overset{*}{b}{}^i_{jk\ell}$ не связан с тензором кручения a^i_{jk} никакими конечными соотношениями.

Найдем далее структурные уравнения, которым удовлетворяют формы $\overset{*}{\omega}{}^i_j$. Дифференцируя уравнения (1.86) и пользуясь (1.26), (1.81), (1.83), получим:

$$d\overset{*}{\omega}{}^i_j = \frac{1}{3}(\underset{12}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{12}{\omega}{}^i_k + \underset{23}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{23}{\omega}{}^i_k + \underset{31}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{31}{\omega}{}^i_k) + \frac{1}{3}(b^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell + b^i_{k\ell j}\underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{3}{\omega}^\ell + b^i_{\ell jk}\underset{3}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell).$$

При этом из соотношений (1.87) следует, что

$$\frac{1}{3}(\underset{12}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{12}{\omega}{}^i_k + \underset{23}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{23}{\omega}{}^i_k + \underset{31}{\omega}{}^k_j \wedge \underset{31}{\omega}{}^i_k) = \overset{*}{\omega}{}^k_j \wedge \overset{*}{\omega}{}^i_k - \frac{4}{9}(a^m_{jk}a^i_{m\ell} + a^m_{\ell j}a^i_{mk})(\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell + \underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{3}{\omega}^\ell + \underset{3}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell).$$

Кроме того, в силу (1.31)

$$b^i_{jk\ell} = \overset{*}{b}{}^i_{jk\ell} + 2a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]}.$$

Используя эти соотношения, находим:

$$d\overset{*}{\omega}{}^i_j - \overset{*}{\omega}{}^k_j \wedge \overset{*}{\omega}{}^i_k = \frac{1}{3}(\overset{*}{b}{}^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell + \overset{*}{b}{}^i_{k\ell j}\underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{3}{\omega}^\ell + \overset{*}{b}{}^i_{\ell jk}\underset{3}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell) - \frac{1}{3}A^i_{jk\ell}(\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell + \underset{2}{\omega}^k \wedge \underset{3}{\omega}^\ell + \underset{3}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^\ell), \tag{1.91}$$

где обозначено

$$A^i_{jk\ell} = \frac{2}{3}(a^m_{jk}a^i_{m\ell} + a^m_{\ell j}a^i_{mk} - a^m_{k\ell}a^i_{mj}). \tag{1.92}$$

Уравнения (1.88) и (1.91) представляют собой структурные уравнения средней связности $\overset{*}{\Gamma}$.

3. Нам понадобятся в дальнейшем связности еще одного вида, порожденные тканью $W = (X, \lambda_\alpha)$ на многообразии X. Положим

$$\underset{12}{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j + a^i_{jk}(\underset{1}{\omega}^k - \underset{2}{\omega}^k). \tag{1.93}$$

Тогда уравнения (1.26) и (1.27) запишутся в виде:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{12}{\widetilde{\omega}}{}^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{12}{\widetilde{\omega}}{}^i_j - a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \quad d\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\omega}^j \wedge \underset{12}{\widetilde{\omega}}{}^i_j. \tag{1.94}$$

Обозначим связность, определяемую на многобразии X формами $\underset{12}{\widetilde{\omega}}{}^i_j$, символом $\widetilde{\Gamma}_{12}$.

Наряду со связностью $\widetilde{\Gamma}_{12}$ введем еще связности $\widetilde{\Gamma}_{23}$ и $\widetilde{\Gamma}_{31}$, определяемые соответственно формами

$$\underset{23}{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^k, \quad \underset{31}{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^k. \tag{1.95}$$

Для связности $\widetilde{\Gamma}_{23}$ уравнения (1.26) и (1.27) примут вид:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{23}{\widetilde{\omega}}{}^i_j, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{23}{\widetilde{\omega}}{}^i_j + a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k, \quad d\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\omega}^j \wedge \underset{23}{\widetilde{\omega}}{}^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k,$$

для связности $\widetilde{\Gamma}_{31}$ —

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{31}{\widetilde{\omega}}{}^i_j - a^i_{jk}\underset{3}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{31}{\widetilde{\omega}}{}^i_j, \quad d\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\omega}^j \wedge \underset{31}{\widetilde{\omega}}{}^i_j + a^i_{jk}\underset{3}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k.$$

Для связностей $\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}$, так же как и для связностей $\Gamma_{\alpha\beta}$, можно построить среднюю связность, определяемую формами

$$\overset{*}{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \frac{1}{3}(\underset{12}{\widetilde{\omega}}{}^i_j + \underset{23}{\widetilde{\omega}}{}^i_j + \underset{31}{\widetilde{\omega}}{}^i_j).$$

Применяя формулы (1.93) и (1.95), убедимся, что $\overset{*}{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \overset{*}{\omega}{}^i_j$. Таким образом, *связность* $\overset{*}{\Gamma}$ *является средней и по отношению к связностям* $\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}$.

Все построенные связности — $\Gamma_{\alpha\beta}$, $\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}$, $\overset{*}{\Gamma}$ принадлежат пучку связностей $\Gamma(W)$, определяемому формами

$$\Theta^u_v = \begin{pmatrix} \Theta^i_j & 0 \\ 0 & \Theta^i_j \end{pmatrix}, \tag{1.96}$$

где

$$\Theta^i_j = \omega^i_j + a^i_{jk}(p\underset{1}{\omega}^k + q\underset{2}{\omega}^k), \tag{1.97}$$

u, $v = 1, 2, ..., 2r$, а p и q — постоянные.

Просто проверяется, что *все слои ткани будут вполне геодезическими относительно любой из связностей пучка* $\Gamma(W)$. Покажем, кроме того, что *все эти связности имеют на слоях ткани одни и те же геодезические линии.* В самом деле, в силу указанного строения матрицы форм Θ^u_v уравнения геодезических (1.65) разобьются на две серии:

$$d\xi^i_1 + \xi^j_1\Theta^i_j = \Theta\xi^i_1, \quad d\xi^i_2 + \xi^j_2\Theta^i_j = \Theta\xi^i_2,$$

откуда следуют также уравнения

$$d\xi^i_3 + \xi^j_3\Theta^i_j = \Theta\xi^i_3.$$

С учетом (1.97) и вследствие кососимметричности тензора a^i_{jk} получаем:

$$d\xi^i_1 + \xi^j_1\omega^i_j + q\, a^i_{jk}\xi^j_1\xi^k_2 = \Theta\xi^i_1, \quad d\xi^i_2 + \xi^j_2\omega^i_j + p\, a^i_{jk}\xi^j_2\xi^k_1 = \Theta\xi^i_2, \quad d\xi^i_3 + \xi^j_3\omega^i_j + (q-p)a^i_{jk}\xi^j_1\xi^k_2 = \Theta\xi^i_3. \tag{1.98}$$

Найдем, например, уравнения геодезических на слоях первого слоения. Для этого положим в последних равенствах $\xi^i_1 = 0$. Тогда все уравнения (1.98) сведутся к одной системе:

$$d\xi^i_2 + \xi^j_2\omega^i_j = \Theta\xi^i_2. \tag{1.99}$$

Эти соотношения не зависят от величин p и q. Следовательно, все связности указанного пучка имеют на слоях из λ_1 одни и те же геодезические линии.

4. Мы увидим в дальнейшем, что все основные типы три-тканей характеризуются особым строением тензора кручения и, в особенности, тензора кривизны. Поэтому важно иметь разложение тензора кривизны в сумму независимых компонент.

Обозначим кососимметричные части тензора кривизны следующим образом:

$$b^i_{[jk]\ell} = \underset{1}{a}{}^i_{jk\ell}, \quad b^i_{[j|\ell|k]} = -\underset{2}{a}{}^i_{jk\ell}, \quad b^i_{\ell[jk]} = \underset{3}{a}{}^i_{jk\ell}. \tag{1.100}$$

Тензоры $\underset{\alpha}{a}{}^i_{jk\ell}$ кососимметричны по индексам j и k и удовлетворяют следующим условиям:

$$\underset{\alpha}{a}{}^i_{[jk\ell]} = b^i_{[jk\ell]}, \quad \underset{1}{a}{}^i_{jk\ell} + \underset{2}{a}{}^i_{jk\ell} + \underset{3}{a}{}^i_{jk\ell} = 3b^i_{[jk\ell]}. \tag{1.101}$$

Введем далее тензоры $\underset{\alpha}{\overset{*}{a}}{}^i_{jk\ell}$ по формулам

$$\underset{\alpha}{\overset{*}{a}}{}^i_{jk\ell} = \underset{\alpha}{a}{}^i_{jk\ell} - b^i_{[jk\ell]}. \tag{1.102}$$

Эти тензоры, как и тензоры $\underset{\alpha}{a}{}^i_{jk\ell}$, кососимметричны по индексам j и k и в силу (1.101) удовлетворяют соотношениям

$$\underset{\alpha}{\overset{*}{a}}{}^i_{[jk\ell]} = 0, \quad \underset{1}{\overset{*}{a}}{}^i_{jk\ell} + \underset{2}{\overset{*}{a}}{}^i_{jk\ell} + \underset{3}{\overset{*}{a}}{}^i_{jk\ell} = 0. \tag{1.103}$$

Тензоры $\underset{\alpha}{\overset{*}{a}}{}^i_{[jk\ell]}$ являются ковариантными производными тензора кручения a^i_{jk} относительно средней связности $\overset{*}{\Gamma}$ (задача 1.19).

Рассмотрим легко проверяемое тождество:

$$b^i_{jk\ell} = b^i_{[jk\ell]} + \frac{2}{3}(b^i_{[jk]\ell} - b^i_{[jk\ell]}) + \frac{2}{3}(-b^i_{[\ell|k|j]} - b^i_{[\ell jk]}) + \frac{2}{3}(b^i_{j[k\ell]} - b^i_{[k\ell j]}) + b^i_{(jk\ell)}.$$

Первое слагаемое заменим с помощью формулы (1.31), а три следующих — с помощью (1.102). В результате получим:

$$b^i_{jk\ell} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]} + \frac{2}{3}(\underset{1}{\overset{*}{a}}{}^i_{jk\ell} + \underset{2}{\overset{*}{a}}{}^i_{jk\ell} + \underset{3}{\overset{*}{a}}{}^i_{jk\ell}) + b^i_{(jk\ell)}. \tag{1.104}$$

Это и есть искомое разложение тензора $b^i_{jk\ell}$.

Таким образом, тензор кривизны b представлен в виде суммы слагаемых трех типов: первое выражается через тензор кручения, второе выражается только через ковариантные производные тензора кручения относительно средней связности $\overset{*}{\Gamma}$, а третье не зависит от тензора кручения. Отсюда следует, что *дифференциальная окрестность третьего порядка три-ткани определяется заданием поля тензора кручения и симметричной части тензора кривизны.*

Формула (1.104) позволяет внести существенное дополнение в теорему 1.3 об эквивалентности три-тканей. В силу равенства (1.104), *для эквивалентности тканей W и $\widetilde{W}$ достаточно совпадения их тензоров кручения a^i_{jk} и $\widetilde{a}^i_{jk}$ и симметричных частей их тензоров кривизны $b^i_{jk\ell}$ и $\widetilde{b}^i_{jk\ell}$.*

§ 1.9. Подткани многомерных три-тканей

Напомним (см. § 2), что подткань многомерной три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ высекается ее слоями на трансверсальной поверхности $\widetilde{X}$ размерности 2ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant r$, т. е. на подмногообразии в X, имеющем ρ-мерное пересечение с каждым из тех слоев ткани W, которые имеют с $\widetilde{X}$ хотя бы одну общую точку. Такие трансверсальные подмногообразия существуют не на всякой три-ткани. В этом параграфе найдены условия их существования, получены структурные уравнения три-ткани, содержащей подткань. Дано также определение нормальной подткани.

В § 3 мы определили двумерные трансверсальные подпространства в касательном пространстве T_p точки p многообразия X. Напомним, что трансверсальное подпространство пересекает каждое из касательных пространств $\underset{\alpha}{T}_p$ к слоям ткани, проходящим через точку p, по одномерным подпространствам, порожденным векторами $\underset{\alpha}{\xi} = \xi^i \underset{\alpha}{e}_i$, $\underset{\alpha}{e}_i \in \underset{\alpha}{T}_p$ соответственно. Аналогично определяются 2ρ*-мерные трансверсальные подпространства* в T_p, порождаемые векторами

$$\underset{\alpha}{\xi}_a = \xi^i_a \underset{\alpha}{e}_i, \quad a = 1, 2, ..., \rho.$$

Трансверсальное 2ρ-мерное подпространство пересекает касательные пространства $\underset{\alpha}{T}_p$ к слоям ткани W по ρ-мерным подпространствам, натянутым на векторы $\underset{\alpha}{\xi}_a$.

Для 2ρ-мерных трансверсальных подпространств справедливо предложение 1.1: они также инвариантны относительно преобразований $(\varphi_{\alpha\beta})*$. Отсюда следует, что 2ρ*-мерные трансверсальные подмногообразия ткани W инвариантны относительно преобразований $\varphi_{\alpha\beta}$*, поскольку касательные пространства к ним будут трансверсальными подпространствами этой ткани. Из последнего обстоятельства вытекает, что уравнения вложения $i: \widetilde{X} \to X$ трансверсального подмногообразия $\widetilde{X}$ в многообразие X, несущее три-ткань W, записывается следующим образом:

$$\underset{1}{\omega}{}^i = \xi^i_a \underset{1}{\Theta}{}^a, \quad \underset{2}{\omega}{}^i = \xi^i_a \underset{2}{\Theta}{}^a, \tag{1.105}$$

где через $\underset{1}{\Theta}^a$ и $\underset{2}{\Theta}^a$ обозначены формы, образующие корепер на трансверсальном подмногообразии $\widetilde{X}$. Слои подткани $\widetilde{W}$, высекаемой на подмногообразии $\widetilde{X}$ слоями ткани W, определяются уравнениями

$$\underset{1}{\Theta}^a = 0, \quad \underset{2}{\Theta}^a = 0, \quad \underset{1}{\Theta}^a + \underset{2}{\Theta}^a = 0. \tag{1.106}$$

Заметим, что уравнения (1.106) по виду совпадают с уравнениями, определяющими слоения ткани W. Следовательно, формы $\underset{1}{\Theta}^a$ и $\underset{2}{\Theta}^a$ должны удовлетворять структурным уравнениям вида (1.26) и (1.32):

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\Theta}^a &= \underset{1}{\Theta}^b \wedge \Theta_b^a + \widetilde{a}^a_{bc} \underset{1}{\Theta}^b \wedge \underset{1}{\Theta}^c, \\ d\underset{2}{\Theta}^a &= \underset{2}{\Theta}^b \wedge \Theta_b^a - \widetilde{a}^a_{bc} \underset{2}{\Theta}^b \wedge \underset{2}{\Theta}^c, \end{aligned} \tag{1.107}$$

$$d\Theta_b^a = \Theta_b^c \wedge \Theta_c^a + \widetilde{b}^a_{bcd} \underset{1}{\Theta}^c \wedge \underset{2}{\Theta}^d. \tag{1.108}$$

С другой стороны, вместе с уравнениями (1.105) должны выполняться и их дифференциальные следствия. Дифференцируя эти уравнения внешним образом и пользуясь уравнениями (1.26), (1.105) и (1.107), придем к системе

$$\begin{aligned} (\nabla \xi_a^i - \xi_b^i \Theta_a^b) \wedge \underset{1}{\Theta}^a + (\xi_c^i \widetilde{a}^c_{ab} - a^i_{jk} \xi_a^j \xi_b^k) \underset{1}{\Theta}^a \wedge \underset{1}{\Theta}^b = 0, \\ (\nabla \xi_a^i - \xi_b^i \Theta_a^b) \wedge \underset{2}{\Theta}^a - (\xi_c^i \widetilde{a}^c_{ab} - a^i_{jk} \xi_a^j \xi_b^k) \underset{2}{\Theta}^a \wedge \underset{2}{\Theta}^b = 0, \end{aligned}$$

где обозначено $\nabla \xi_a^i = d\xi_a^i + \xi_a^j \omega_j^i$. Из полученных квадратичных уравнений следует, что выражения в скобках равны нулю. Это дает уравнения

$$\nabla \xi_a^i = \xi_b^i \Theta_a^b, \tag{1.109}$$

$$a^i_{jk} \xi_b^j \xi_c^k = \xi_a^i \widetilde{a}^a_{bc}. \tag{1.110}$$

Ткань $\widetilde{W}$ индуцирует на многообразии $\widetilde{X}$ аффинную связность $\widetilde{\Gamma}$, определяемую формами Θ_b^a, входящими в структурные уравнения (1.107). Связность $\widetilde{\Gamma}$ согласована со связностью Черна Γ, определенной на многообразии X, в том смысле, что параллельный перенос вектора на многообразии $\widetilde{X}$ относительно связности $\widetilde{\Gamma}$ совпадает с параллельным переносом того же вектора относительно связности Γ. В самом деле, параллельное векторное поле η с координатами $\underset{\alpha}{\widetilde{\eta}}^a$ на многообразии $\widetilde{X}$ определяется уравнениями

$$d\underset{\alpha}{\widetilde{\eta}}^a + \underset{\alpha}{\widetilde{\eta}}^b \Theta_b^a = 0, \quad \alpha = 1, 2. \tag{1.111}$$

Координаты векторов этого поля в репере $\underset{\alpha}{e}_i$, связанном с многообразием X, вычисляются в силу (1.105) по формулам $\underset{\alpha}{\eta}^i = \xi_a^i \underset{\alpha}{\widetilde{\eta}}^a$. Дифференцируя эти равенства и пользуясь соотношениями (1.109), получим уравнения

$$d\underset{\alpha}{\eta}^i + \underset{\alpha}{\eta}^j \omega_j^i = 0,$$

которые показывают, что векторное поле η является параллельным и в связности Черна на X. Отсюда непосредственно следует, что трансверсальное подмногообразие $\widetilde{X}$ многообразия X является вполне геодезическим подмногообразием в этой связности. Но тогда слои подткани $\widetilde{W}$ являются пересечением вполне геодезических подмногообразий: слоев ткани W и ее трансверсального подмногообразия $\widetilde{X}$. Следовательно, слои ткани $\widetilde{W}$ также являются вполне геодезическими подмногообразиями.

Легко устанавливается, что полученные результаты справедливы для любой из связностей пучка $\Gamma(W)$. Итак, доказана

Теорема 1.11. *Трансверсальные подмногообразия три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ являются вполне геодезическими подмногообразиями относительно всех связностей пучка $\Gamma(W)$, определяемого этой тканью на многообразии X. Подткань $\widetilde{W}$ ткани W, высекаемая слоями последней на* *трансверсальном подмногообразии* $\widetilde{X}$, *состоит из вполне геодезических подмногообразий относительно этих связностей.*

Теорема 1.11 объясняет, почему трансверсальные поверхности три-ткани называют также *трансверсально-геодезическими.*

Найдем необходимые и достаточные условия существования трансверсальных поверхностей три-ткани. Продифференцировав уравнения (1.109) и воспользовавшись соотношениями (1.26) и (1.108), после несложных преобразований придем к равенствам

$$b^i_{jk\ell}\,\xi^j_b\xi^k_c\xi^\ell_d = \xi^i_a\widetilde{b}^a_{bcd}. \tag{1.112}$$

Соотношения (1.110) и (1.112) представляют собой условия интегрируемости системы (1.105), (1.109), определяющей поверхность $\widetilde{X}$. Следовательно, их выполнение необходимо и достаточно для существования расслоения на X, одним из слоев которого является подмногообразие $\widetilde{X}$.

В частности, при $\rho = 1$ соотношения (1.110) удовлетворяются тождественно, так как при $\rho = 1$ тензор кручения равен нулю (см. § 4), а соотношения (1.112) принимают вид:

$$b^i_{jk\ell}\,\xi^j\xi^k\xi^\ell = \xi^i\widetilde{b}. \tag{1.113}$$

Вектор ξ^i, удовлетворяющий этому соотношению, называется *собственным вектором* тензора $b^i_{jk\ell}$.

Уравнения подткани $\widetilde{W}$ ткани W значительно упростятся, если перейти к семейству реперов, адаптированных к подткани $\widetilde{W}$. Из уравнений (1.20) и (1.109) вытекают соотношения

$$\xi = \underset{1}{\Theta}^a(\xi^i_a\underset{2}{e}_i) - \underset{2}{\Theta}^a(\xi^i_a\underset{1}{e}_i),$$

которые показывают, что векторы $\xi^i_a\underset{1}{e}_i$ и $\xi^i_a\underset{2}{e}_i$ образуют на многообразии $\widetilde{X}$ репер, дуальный кореперу $\underset{1}{\Theta}^a$, $\underset{2}{\Theta}^a$. Ограничим семейство реперов на X, поместив векторы $\underset{\alpha}{e}_a$ в касательное пространство $\underset{\alpha}{\widetilde{T}}_p$ к слою $\underset{\alpha}{\widetilde{\mathcal{F}}}_p$ ткани $\widetilde{W}$. Это семейство реперов адаптировано к вложению $i\colon \widetilde{X} \to X$, заданному уравнениями (1.105). В результате получим $\xi^b_a = \delta^b_a$, $\xi^u_a = 0$ $(u, v, w, \ldots = \rho + 1, \ldots, r)$, и уравнения (1.105) примут следующий вид:

$$\underset{1}{\Theta}^a = \underset{1}{\omega}^a, \quad \underset{2}{\Theta}^a = \underset{2}{\omega}^a, \quad \underset{1}{\omega}^u = \underset{2}{\omega}^u = 0.$$

Кроме того, из соотношений (1.110) и (1.112), связывающих тензоры кривизны и кручения тканей W и $\widetilde{W}$, последуют равенства

$$\widetilde{a}^a_{bc} = a^a_{bc}, \quad \widetilde{b}^a_{bcd} = b^a_{bcd}, \quad a^u_{ab} = 0, \quad b^u_{abc} = 0, \tag{1.114}$$

которые выполняются на многообразии $\widetilde{X}$.

Предположим, что тензоры кручения и кривизны ткани W приведены к виду (1.114) на всем многообразии X. Тогда уравнения структуры (1.107) этой ткани разобьются на две серии:

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^a &= \underset{1}{\omega}^i \wedge \omega^a_i + a^a_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k,\\ d\underset{2}{\omega}^a &= \underset{2}{\omega}^i \wedge \omega^a_i - a^a_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \end{aligned} \tag{1.115}$$

и

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^u &= \underset{1}{\omega}^v \wedge \omega^u_v + \underset{1}{\omega}^a \wedge \omega^u_a + 2a^u_{av}\underset{1}{\omega}^a \wedge \underset{1}{\omega}^v + a^u_{vw}\underset{1}{\omega}^v \wedge \underset{1}{\omega}^w,\\ d\underset{2}{\omega}^u &= \underset{2}{\omega}^v \wedge \omega^u_v + \underset{2}{\omega}^a \wedge \omega^u_a - 2a^u_{av}\underset{2}{\omega}^a \wedge \underset{2}{\omega}^v - a^u_{vw}\underset{2}{\omega}^v \wedge \underset{2}{\omega}^w. \end{aligned} \tag{1.116}$$

В результате проведенной канонизации соотношения (1.109) примут вид:

$$\omega^a_b = \Theta^a_b, \quad \omega^u_a = 0 \pmod{\underset{1}{\omega}^u, \underset{2}{\omega}^u}.$$

Отсюда, в частности, следует, что на многообразии X должны выполняться уравнения

$$\omega_a^u = \lambda_{av}^u \underset{1}{\omega}^v + \mu_{av}^u \underset{2}{\omega}^v. \tag{1.117}$$

Уравнения (1.116) и (1.117) показывают, что система $\underset{1}{\omega}^u = \underset{2}{\omega}^u = 0$, определяющая трансверсальную поверхность $\widetilde{X}$, вполне интегрируема. При этом базисные формы $\underset{1}{\omega}^a$, $\underset{2}{\omega}^a$ многообразия $\widetilde{X}$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^a &= \underset{1}{\omega}^b \wedge \omega_b^a + a_{bc}^a \underset{1}{\omega}^b \wedge \underset{1}{\omega}^c, \\ d\underset{2}{\omega}^a &= \underset{2}{\omega}^b \wedge \omega_b^a - a_{bc}^a \underset{2}{\omega}^b \wedge \underset{2}{\omega}^c, \end{aligned} \tag{1.118}$$

которые получаются из уравнений (1.115) при $\underset{1}{\omega}^u = \underset{2}{\omega}^u = 0$.

Входящие сюда формы ω_b^a связаны соотношениями

$$d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + b_{bcd}^a \underset{1}{\omega}^c \wedge \underset{2}{\omega}^d, \tag{1.119}$$

получающимися из уравнений (1.108) при $\underset{1}{\omega}^u = \underset{2}{\omega}^u = 0$. Уравнения (1.118) и (1.119) являются структурными уравнениями подткани $\widetilde{W}$ в адаптированном репере.

Теперь мы можем дополнить результаты первого параграфа, введя понятие фактор-ткани и полупрямого произведения тканей. Уравнения (1.116), которым удовлетворяют формы $\underset{1}{\omega}^u$ и $\underset{2}{\omega}^u$, не представляют собой, вообще говоря, структурные уравнения какой-либо ткани. Они определяют три-ткань тогда и только тогда, когда в них отсутствуют слагаемые, содержащие формы $\underset{1}{\omega}^a$ и $\underset{2}{\omega}^a$, т. е. когда на ткани W выполняются соотношения

$$\omega_a^u = 0, \quad a_{ai}^u = 0 \tag{1.120}$$

(при этом учтены равенства (1.114) и (1.117)). Три-ткань, определяемая уравнениями (1.116) при условиях (1.120), задана на фактор-многообразии $X/\widetilde{X}$. Назовем ее *фактор-тканью* и обозначим символом $W/\widetilde{W}$, а ткань $\widetilde{W}$ назовем в этом случае *нормальной подтканью*. Итак, *условия* (1.120) *необходимы и достаточны для того, чтобы подткань $\widetilde{W}$ была нормальной подтканью ткани W и существовала фактор-ткань $W/\widetilde{W}$.*

Дифференцируя соотношения (1.120), получим:

$$b_{aij}^u = 0, \quad b_{[a|i|v]}^u = 0, \quad b_{[av]c}^u = 0,$$

откуда

$$b_{aij}^u = b_{via}^u = b_{vai}^u = 0. \tag{1.121}$$

В результате единственными отличными от нуля компонентами тензора кривизны с верхним индексом u будут величины b_{vwz}^u.

Аналогично устанавливается, что если на многообразии X имеют место соотношения

$$a_{uv}^a = 0, \quad \omega_u^a = \lambda_{ub}^a \underset{1}{\omega}^b + \mu_{ub}^a \underset{2}{\omega}^b, \tag{1.122}$$

то оно расслаивается на трансверсальные подмногообразия размерности $2(r-\rho)$, несущие подткани ткани W. Обозначим эти подткани $\widetilde{\widetilde{W}}$.

Если на многообразии X выполняются уравнения (1.120), (1.121) и (1.122), то будем говорить, что ткань W представляет собой *полупрямое произведение* подтканей $\widetilde{W}$ и $\widetilde{\widetilde{W}}$.

В случае, когда на ткани W выполняются соотношения

$$a_{iv}^a = 0, \quad \omega_u^a = 0, \tag{1.123}$$

то имеют место равенства

$$b_{vij}^a = b_{biv}^a = b_{bvi}^a = 0 \tag{1.124}$$

и существует фактор-ткань $W/\widetilde{\widetilde{W}}$, а подткань $\widetilde{\widetilde{W}}$ будет нормальной.

Если же одновременно выполняются уравнения (1.120), (1.121) и (1.123), (1.124), то ткань W представляет собой *прямое произведение* тканей $\widetilde{W}$ и $\widetilde{\widetilde{W}}$, так как в этом случае уравнения (1.26), (1.32), (1.33) и все последующие, получающиеся при продолжении, распадаются на две независимые серии:

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^a &= \underset{1}{\omega}^b \wedge \omega_b^a + a_{bc}^a \underset{1}{\omega}^b \wedge \underset{1}{\omega}^c, & d\underset{1}{\omega}^u &= \underset{1}{\omega}^v \wedge \omega_v^u + a_{vw}^u \underset{1}{\omega}^v \wedge \underset{1}{\omega}^w, \\ d\underset{2}{\omega}^a &= \underset{2}{\omega}^b \wedge \omega_b^a - a_{bc}^a \underset{2}{\omega}^b \wedge \underset{2}{\omega}^c, & d\underset{2}{\omega}^u &= \underset{2}{\omega}^v \wedge \omega_v^u - a_{vw}^u \underset{2}{\omega}^v \wedge \underset{2}{\omega}^w, \\ d\omega_b^a &= \omega_b^c \wedge \omega_c^a + b_{bcd}^a \underset{1}{\omega}^c \wedge \underset{2}{\omega}^d, & d\omega_v^u &= \omega_v^w \wedge \omega_v^u + b_{vwz}^u \underset{1}{\omega}^w \wedge \underset{2}{\omega}^z. \end{aligned}$$

Три-ткани, не имеющие нормальных подтканей, назовем *простыми тканями.*

ЗАДАЧИ

1.1. Найдите границы области определения и уравнение три-ткани, образованной на плоскости:

а) тремя пучками прямых;

б) пучком прямых с вершиной в точке O и касательными к некоторой окружности с центром в O;

в) тремя эллиптическими пучками окружностей с вершинами в точках $(A, B), (B, C), (C, A)$ (см. [Бл-1]);

г) декартовой сетью и семейством концентрических окружностей;

д) прямыми $y = \mathrm{const}$, пучком прямых, проходящих через начало координат, и параболическим пучком окружностей с вершиной в O, линией центра которого служит ось y;

е) пучком прямых с вершиной в точке O, семейством концентрических окружностей с центром в точке O, и гиперболическим пучком окружностей с вершинами в точках (1,0) и $(-1, 0)$;

ж) тремя семействами прямых $A_\alpha(u_\alpha)x + B_\alpha(u_\alpha)y + C_\alpha(u_\alpha) = 0$, $\alpha = 1, 2, 3$, где A_α, B_α, C_α — гладкие функции параметра u_α;

з) декартовой сетью и эллиптическим пучком окружностей с вершинами в точках (1,1) и $(-1, -1)$.

и) тремя пучками окружностей, принадлежащими одной связке;

к) тремя гиперболическими пучками окружностей, содержащими общую мнимую окружность, причем в каждом из пучков есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков;

л) двумя эллиптическими и одним гиперболическим пучками окружностей, содержащими общую окружность, причем в каждом из пучков есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков;

м) тремя пучками окружностей, два из которых ортогональны, причем в каждом из этих двух пучков есть одна окружность, принадлежащая третьему пучку;

н) двумя ортогональными параболическими пучками окружностей с общей вершиной и гиперболическим пучком окружностей, одна из вершин (окружностей нулевого радиуса) которого совпадает с общей вершиной параболических пучков;

о) двумя эллиптическими пучками окружностей с вершинами A, B и B, C, и гиперболическим пучком окружностей с вершинами A и C;

п) двумя параболическими пучками окружностей и эллиптическим пучком окружностей, вершины которого совпадают с вершинами параболических пучков;

р) эллиптическим пучком окружностей с вершинами A и B, гиперболическим пучком окружностей с вершинами B и C и параболическим пучком окружностей с вершиной A и базисной окружностью S, проходящей через точки A, B и C.

В каждом из случаев а)–р) найдите границы Γ_α (см. п. 3 § 5). Докажите, что ткани и)–р) являются регулярными (параллелизуемыми).

1.2. Множество всех прямых плоскости, тангенциальные координаты которых связаны однородным алгебраическим уравнением третьей степени, называется кривой третьего класса. Докажите, что последняя образует три-ткань.

1.3. Докажите, что совокупность касательных к трехарочной гипоциклоиде

$$x = a(2\cos t + \cos 2t), \quad y = a(2\sin t - \sin 2t),$$

есть кривая третьего класса.

1.4. Докажите, что ткани, указанные в задаче 1.1, являются регулярными, приведя с помощью допустимых преобразований их уравнения к виду $z = x + y$.

1.5. Докажите, что три-ткань, заданная на плоскости уравнением

$$Au_1u_2u_3 + B_1u_2u_3 + B_2u_1u_3 + B_3u_1u_2 + C_1u_1 + C_2u_2 + C_3u_3 + D = 0,$$

где A, $B_1, ..., D$ — постоянные, является регулярной.

Докажите утверждения 1.6–1.8.

1.6. Уравнения параллелизуемой ткани приводятся к виду $z^i = x^i + y^i$.

1.7. Если ткань W является прямым произведением двух тканей, то ее уравнения могут быть записаны в виде $z = f_1(x, y)$, $w = f_2(u, v)$.

1.8. Докажите, что три-ткань, заданная уравнениями

$$z^1 = x^1 + y^1, \qquad z^i = x^i\varphi_1(x^1, y^1) + y^i\varphi_2(x^1, y^1), \quad i = 2, 3, ..., r,$$

является полупрямым произведением двух параллелизуемых тканей.

1.9. Найдите формы ω_v^u и первый структурный тензор e-структуры и пфаффовой структуры.

1.10. С помощью структурных уравнений докажите следующие утверждения:

а) если кривизна двумерной три-ткани равна нулю, то эта ткань регулярная;

б) если функции $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$, входящие в уравнения (1.38) некоторой двумерной три-ткани, равны нулю, то и кривизна этой ткани равна нулю, т. е. ткань регулярная.

1.11. Пользуясь формулой (1.60), получите следующие выражения для кривизны b двумерной три-ткани, заданной уравнением $z = f(x, y)$:

$$b = -\frac{1}{f_xf_y}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\ln\frac{f_x}{f_y}), \quad \text{или} \quad b = \frac{1}{f_xf_y}\left(\frac{f_{xyy}}{f_y} - \frac{f_{xxy}}{f_x} + \frac{f_{xx}f_{xy}}{f_x^2} - \frac{f_{xy}f_{yy}}{f_y^2}\right).$$

В частности, если кривизна ткани равна нулю, то определяющая ее функция f удовлетворяет *условию Сен-Робера* [Бл-1]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\Bigl(\ln\frac{f_x}{f_y}\Bigr) = 0.$$

Выведите отсюда результаты упражнений 1.5 и 1.10 а).

1.12. Пусть двумерная три-ткань задана уравнением $W(u_1, u_2, u_3) = 0$. Тогда ее кривизна вычисляется по формуле:

$$b = A_{23} + A_{31} + A_{12},$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \frac{W_{\alpha\alpha\beta}}{W_\alpha^2W_\beta} - \frac{W_{\alpha\beta\beta}}{W_\alpha W_\beta^2} + \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha W_\beta}\Bigl(\frac{W_{\beta\beta}}{W_\beta^2} - \frac{W_{\alpha\alpha}}{W_\alpha^2}\Bigr), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3,$$

а через $W_\alpha, W_{\alpha\beta}, W_{\alpha\beta\gamma}$ обозначены соответствующие частные производные функции $W(u_1, u_2, u_3)$. Пользуясь найденной формулой, вычислите кривизну три-ткани, рассмотренной в упражнении 1.5.

1.13. Найдите структурные уравнения и тензоры кручения и кривизны шестимерной три-ткани, заданной уравнениями

$$z^1 = x^1 + y^1 - (x^2 + y^2)x^3y^3, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z^3 = x^3 + y^3. \tag{1.125}$$

Р е ш е н и е. В соответствии с (1.52) положим:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\omega}^1 = dx^1 - x^3y^3dx^2 - y^3(x^2+y^2)dx^3,\\
&\underset{2}{\omega}^1 = dy^1 - x^3y^3dy^2 - x^3(x^2+y^2)dy^3,\\
&\underset{1}{\omega}^2 = dx^2, \quad \underset{1}{\omega}^3 = dx^3, \quad \underset{2}{\omega}^2 = dy^2, \quad \underset{2}{\omega}^3 = dy^3.
\end{aligned} \tag{1.126}$$

Продифференцируем внешним образом формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ $(i, j, k = 1, 2, 3)$ и преобразуем полученные выражения с учетом (1.126). В результате получим структурные уравнения:

$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = \underset{1}{\omega}^2 \wedge \omega_2^1 + \underset{1}{\omega}^3 \wedge \omega_3^1 + (x^3-y^3)\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^3,\\
&d\underset{2}{\omega}^1 = \underset{2}{\omega}^2 \wedge \omega_2^1 + \underset{2}{\omega}^3 \wedge \omega_3^1 - (x^3-y^3)\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^3,\\
&d\underset{1}{\omega}^2 = d\underset{1}{\omega}^3 = d\underset{2}{\omega}^2 = d\underset{2}{\omega}^3 = 0,
\end{aligned} \tag{1.127}$$

где

$$\begin{aligned}
&\omega_2^1 = x^3\underset{2}{\omega}^3 + y^3\underset{1}{\omega}^3 = x^3dy^3 + y^3dx^3 = d(x^3y^3),\\
&\omega_3^1 = y^3dy^2 + x^3dx^2 + (x^2+y^2)(dx^3+dy^3) = d(x^2x^3) + d(y^2y^3) + x^2dy^3 + y^2dx^3.
\end{aligned} \tag{1.128}$$

Сравнивая с уравнениями (1.26) первые два из уравнений (1.127), находим, что $\omega_1^1 = 0$, $a_{12}^1 = a_{13}^1 = 0$, $a_{23}^1 = \dfrac{1}{2}(x^3 - y^3)$. Сравнивая с (1.26) последние четыре из уравнений (1.127), найдем, что $\omega_k^2 = \omega_k^3 = 0$, $a_{jk}^2 = a_{jk}^3 = 0$. Внешнее дифференцирование форм ω_j^i дает следующий результат:

$$d\omega_2^1 = 0, \quad d\omega_3^1 = \underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^3 - \underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^2, \quad d\omega_k^2 = d\omega_k^3 = 0.$$

Сравнивая с уравнениями (1.32), найдем единственные ненулевые компоненты тензора кривизны: $b_{323}^1 = 1$, $b_{332}^1 = -1$. Отметим, что выполняется условие $b_{j(k\ell)}^i = 0$, т.е. тензор кривизны является кососимметричным по двум последним нижним индексам.

1.14. Пусть группа G является прямым произведением двух изоморфных r-мерных групп Ли G_1 и G_2, а подгруппа G_3 в G есть график некоторого изоморфизма из G_1 в G_2. Докажите, что:

а) три-ткань W, образованная на G смежными классами по подгруппам G_1, G_2, G_3, является групповой тканью;

б) всякая групповая ткань может быть определена таким способом;

в) подгруппа G_3 будет нормальной тогда и только тогда, когда ткань W параллелизуема.

Докажите утверждения, сформулированные в упражнениях 1.15–1.17.

1.15. Поле $\xi = (\xi_1^i, \xi_2^i)$ параллельно на три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ относительно связности Γ_{12} тогда и только тогда, когда координаты ξ_1^i и ξ_2^i удовлетворяют соотношениям $b_{jk\ell}^i\xi_1^j = 0$, $b_{jk\ell}^i\xi_2^j = 0$. Если на многообразии X существует r независимых параллельных векторных полей и только в этом случае три-ткань W будет групповой.

1.16. Изоклинные r-векторы $\xi_1 \wedge \ldots \wedge \xi_r$, где $\xi_i = \xi^1\underset{2}{e}_i - \xi^2\underset{1}{e}_i$, параллельны в связности Черна. Они будут параллельны также относительно любой связности на X, матрица форм которой имеет квазидиагональный вид (1.96).

1.17. Слои ткани W являются автопараллельными подмногообразиями относительно каждой из связностей пучка $\Gamma(W)$ (см. (1.97)).

1.18. Векторное поле $\xi = (\xi_1^i, \xi_2^i)$, заданное на многообразии X, несущем три-ткань W, назовем *сегреальным*, если в каждой точке p из X вектор $\xi(p)$ принадлежит конусу Сегре, определенному в этой точке. Докажите, что:

а) поле ξ сегреальное тогда и только тогда, когда $\xi_2^i = \lambda\xi_1^i$;

б) всякое сегреальное поле ξ определяет на X единственное распределение двумерных трансверсальных подпространств, содержащее ξ;

в) если сегреальное поле $\xi = (\xi_1^i, \lambda\xi_1^i)$ параллельно вдоль кривой γ, то $\lambda|_\gamma = \mathrm{const}$.

1.19. Докажите, что тензоры $\overset{*}{\underset{\alpha}{a}}{}^i{}_{jk\ell}$ (см.(1.102)) являются ковариантными производными тензора кручения a^i_{jk} относительно средней связности $\overset{*}{\Gamma}$.

1.20. Найдите тензоры кручения и кривизны следующих четырехмерных три-тканей:

a) $z^1 = x^1 e^{-2y^2} + y^1 + \dfrac{1}{2} x^2 y^2 e^{-2y^2}, \quad z^2 = x^2 + y^2;$

b) $z^1 = x^2 \dfrac{x^1 x^2 - y^1 y^2}{x^1 y^1 + 2x^1 x^2 + x^2 y^2}, \quad z^2 = x^2 y^2.$

Докажите, что тензор кручения этих тканей удовлетворяет тождеству Якоби, а тензор кривизны симметричен по нижним индексам.

1.21. Докажите, что коммутатор ξ векторных полей $\xi(\underset{1}{\xi}{}^i, \underset{2}{\xi}{}^i)$ и $\eta(\underset{1}{\eta}{}^i, \underset{2}{\eta}{}^i)$, заданных на многообразии X, несущем три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$, вычисляется по формуле

$$\underset{1}{\xi}{}^i = \underset{1}{\xi}{}^j \eta^i_j - \underset{1}{\eta}{}^j \xi^i_j + 2a^i_{jk} \underset{1}{\xi}{}^j \underset{1}{\eta}{}^k, \qquad \underset{2}{\xi}{}^i = \underset{2}{\xi}{}^j \eta^i_j - \underset{2}{\eta}{}^j \xi^i_j - 2a^i_{jk} \underset{2}{\xi}{}^j \underset{2}{\eta}{}^k.$$

У к а з а н и е. Коммутатор полей $\xi(\xi^a)$ и $\eta(\eta^a)$ на многообразии аффинной связности выражается в виде

$$[\xi\eta]^a = \xi^b \eta^a_b - \eta^b \xi^a_b - A^a_{bc} \xi^b \eta^c,$$

где A^a_{bc} — тензор кручения связности, ξ^a_b и η^a_b — ковариантные производные от ξ^a и η^a (см., например, [КН-1], с. 131).

1.22. Докажите, что в кобазисе

$$\underset{1}{\omega}{}^i = dx^i, \quad \underset{2}{\omega}{}^i = P^i_j dy^j, \tag{1.129}$$

где обозначено

$$P^i_j = \overline{g}^i_k \widetilde{f}^k_j,$$

тензор кривизны ткани может быть записан в виде:

$$b^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{kj}}{\partial y^m} \overline{P}^m_\ell = \frac{\partial}{\partial y^m} \Big(\frac{\partial P^i_n}{\partial x^k} \overline{P}^n_j \Big) \overline{P}^m_\ell . \tag{1.130}$$

(многомерное обобщение формулы Сен-Робера).

У к а з а н и е. Кобазис $\underset{1}{\omega}{}^i = dx^i$, $\underset{2}{\omega}{}^i = P^i_j dy^j$ связан с симметричным кобазисом

$$\underset{1}{\omega}{}^{i\prime} = \overline{f}^{i\prime}_j dx^j, \quad \underset{2}{\omega}{}^{i\prime} = \widetilde{f}^{i\prime}_j dy^j,$$

рассмотренным в § 6, матрицей перехода $\overline{f}^{i\prime}_j$:

$$\underset{1}{\omega}{}^{i\prime} = \overline{f}^{i\prime}_i \underset{1}{\omega}{}^i, \quad \underset{2}{\omega}{}^{i\prime} = \overline{f}^{i\prime}_i \underset{2}{\omega}{}^i.$$

Следовательно, компоненты тензора кривизны в соответствующих базисах связаны следующими соотношениями:

$$b^{i\prime}_{j\prime k\prime l\prime} = \overline{f}^{i\prime}_i \overline{g}^j_{j\prime} \overline{g}^k_{k\prime} \overline{g}^l_{l\prime} b^i_{jkl},$$

причем выражения для $b^{i\prime}_{j\prime k\prime l\prime}$ дано формулой (1.59) или (1.60). Подробные вычисления см. в [Ш-32].

1.23. Докажите, что

$$A^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{[kj}}{\partial x^m} \overline{g}^m_{\ell]} - \Gamma^i_{[\ell m} \Gamma^m_{k]j} = 0, \quad B^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{j[k}}{\partial y^m} \widetilde{g}^m_{\ell]} - \Gamma^i_{m[\ell} \Gamma^m_{jk]} = 0$$

(обозначения см. в § 6).

ПРИМЕЧАНИЯ

1.1. [1] Термин «три-ткань» принадлежит *Бляшке* [ББ-1], термин «квазигруппа» — *Муфанг* [Му-1].

1.2. Как доказал *Дюфур* [Дю-1], дифференциально-геометрическая эквивалентность гладких три-тканей вытекает из их топологической эквивалентности.

1.4. Дифференциальные уравнения многомерной три-ткани впервые были получены *Черном* [Ч-1]; в более обозримой и удобной форме (1.26), (1.32) — *Акивисом* [А-2]. Их можно считать также структурными уравнениями координатной квазигруппы q_{12} ткани, обобщающими структурные уравнения Маурера-Картана группы Ли. Термины «тензор кручения» и «тензор кривизны» введены в [А-2].

Теорема 1.2 доказана авторами в [АШ-6]. Обратное утверждение (теорема 1.3) впервые приведено в этой книге.

Структурные уравнения двумерной три-ткани выведены *Бляшке* в [Бл-1]. Там же введен термин «кривизна ткани».

Дифференциальные уравнения многомерной три-ткани в контравариантной форме найдены в [АШ-13].

1.5. Параллелизуемые и групповые три-ткани рассматривались в [Ч-1] как ткани, на которых выполняются условия замыкания (T) и (R) (в [Ч-1] они называются соответственно условиями (D) и (P)). Доказательство теорем 1.4 и 1.5 также имеется в [Ч-1], однако в более громоздкой но менее геометричной форме, чем в § 5 этой книги.

1.6. Формулы (1.56), (1.60) для вычисления тензоров кручения и кривизны ткани получены в [АШ-1], хотя близкие к ним выражения имеются в [Ч-1]. Формула (1.130) найдена в [Ш-32]. Формула для вычисления кривизны двумерной три-ткани, заданной уравнением $W(u_1, u_2, u_3) = 0$ (см. задачу (1.12)), имеется в [Бл-1].

1.7. Каноническая аффинная связность Γ на три-ткани определена в [А-2]; более подробно ее свойства рассматриваются в [АШ-6], [АШ-12]. Связностью Черна ее назвал *Киккава* в [Ки-1].

1.8. Связности, рассмотренные в § 8, исследовались в [АШ-4]. Средняя связность $\overset{*}{\Gamma}$ определена в [АШ-2] в связи с изучением тканей Муфанг.

1.9. Понятия подткани и фактор-ткани были введены в [Ш-3], и более детально рассматривались в [АШ-7], [АШ-10].

1.10. Ткани с симметричным тензором кривизны изучались в [Ш-4], [То-1], [То-2]. Ткани, указанные в задаче 1.20, рассматривались *Толстихиной* в [То-1], [То-2].

[1] Номер «$m.n$» обозначает примечание к § n гл. m.

Глава 2

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ТРИ-ТКАНЯМИ

§ 2.1. Квазигруппы и лупы

1. С три-тканями непосредственно связаны некоторые алгебраические структуры, в первую очередь квазигруппы и лупы.

Напомним, что группоид Q с бинарной операцией

$$q(x,y) \overset{\text{def}}{=} x \cdot y$$

называется *квазигруппой*, если при любых a, b, c из Q однозначно разрешимы уравнения

$$a\,y = c, \quad x\,b = c. \tag{2.1}$$

Квазигруппа с единицей называется *лупой.* В лупе, вообще говоря, не выполняется ассоциативность $x(yz) = (xy)z$. Ассоциативная лупа является *группой.*

Известный пример неассоциативной лупы — множество ненулевых октав относительно операции умножения (см., например, [По-1], с. 307). Другие конечномерные алгебры с делением — поля действительных и комплексных чисел, тело кватернионов — будут (относительно умножения) ассоциативными лупами, т. е. группами. Множество точек на прямой с операцией $x \cdot y = z$, где y — середина отрезка xz, будет квазигруппой, но не лупой.

Трехбазисной квазигруппой называется тройка множеств X_1, X_2, X_3 вместе с операцией $q\colon X_1 \times X_2 \to X_3$, относительно которой разрешимы уравнения (2.1). Трехбазисную квазигруппу будем обозначать $q = (\cdot\,,\, X_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, или, короче, $q(\cdot)$. Заметим, что понятие единицы имеет смысл только в однобазисной квазигруппе.

Множества X_α, входящие в определение трехбазисной квазигруппы, равномощны, так как первое из соотношений (2.1) при фиксированном y устанавливает взаимно однозначное соответствие между X_1 и X_3, а второе при фиксированном x — между X_2 и X_3.

Отношением эквивалентности в теории квазигрупп является *изотопия*, обобщающая понятие изоморфизма групп.

Две квазигруппы $q = (\cdot\,,\, X_\alpha)$ и $\widetilde{q} = (\circ\,,\, \widetilde{X}_\alpha)$ называются *изотопными*, если существует тройка $J = (J_1, J_2, J_3)$ биективных отображений $J_\alpha\colon X_\alpha \to \widetilde{X}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ таких, что для любых x и y, $x \in X_1$, $y \in X_2$, выполняется соотношение:

$$J_1(x) \circ J_2(y) = J_3(x \cdot y). \tag{2.2}$$

Тройка $J = (J_\alpha)$ называется *изотопическим отображением* или *изотопией* квазигруппы $q(\cdot)$ на квазигруппу $\widetilde{q}(\circ)$. Это определение сохраняет свой смысл и в случае, когда одна из квазигрупп $q(\cdot)$, $\widetilde{q}(\circ)$ или обе вместе будут однобазисными квазигруппами.

Изотопия $J = (J_\alpha)$, называется *регулярной*, если одно из отображений J_α является тождественным. В частности, изотопия вида (J_1, J_2, id) называется *главной изотопией.* Изотопия $J = (J_\alpha)$, где $J_1 = J_2 = J_3$, является изоморфизмом.

Естественным образом определяется композиция изотопий:

$$J \cdot \widetilde{J} = (J_1 \cdot \widetilde{J}_1, J_2 \cdot \widetilde{J}_2, J_3 \cdot \widetilde{J}_3).$$

При этом подразумевается левое действие: $(J \cdot \widetilde{J})(x) = J(\widetilde{J}(x))$.

Изотопии образуют наиболее широкий класс отображений, переводящих квазигруппу снова в квазигруппу. Это вытекает из легко проверяемого утверждения: любой группоид, изотопный квазигруппе, сам является квазигруппой. Иными словами, пусть $q = (\cdot\,,\, X_\alpha)$ — трехбазисная квазигруппа, Q — некоторое множество, $J_\alpha\colon X_\alpha \to Q$ — биекции. Определим на Q операцию $(\circ)$

равенством (2.2). Тогда группоид $Q(\circ)$ будет квазигруппой, изотопной исходной квазигруппе $q(\cdot)$. В частности, если $J_3 = id$, то $X_3 = Q$ и квазигруппа $X_3(\circ)$ будет *главным изотопом* квазигруппы $q = (\cdot\,,\, X_\alpha)$.

2. Отметим некоторые свойства изотопий.

Предложение 2.1. *Изотопия трехбазисной квазигруппы $q = (\cdot\,,\, X_\alpha)$ на однобазисную квазигруппу $Q(\circ)$ представляет собой композицию главной изотопии и изоморфизма.*

□ Обозначим рассматриваемую изотопию $J = (J_\alpha)$, так что $J_\alpha\colon X_\alpha \to Q$, и пусть выполнено соотношение (2.2). Определим на X_3 новую операцию $\times$ равенством:

$$J_3^{-1}J_1(x) \times J_3^{-1}J_2(y) = x \cdot y, \quad x \in X_1,\ y \in X_2,\ x \cdot y \in X_3.$$

Ввиду (2.2) выполняется соотношение

$$J_3^{-1}J_1(x) \times J_3^{-1}J_2(y) = x \cdot y = J_3^{-1}(J_3(x \cdot y)) = J_3^{-1}(J_1(x) \circ J_2(y)),$$

из которого следует, что тройка отображений $\widetilde{J}^{-1} = (J_3^{-1}, J_3^{-1}, J_3^{-1})$ квазигруппы $Q(\circ)$ на $X_3(\times)$ является изоморфизмом. Поэтому композиция $\widetilde{J}^{-1} \cdot J$ имеет вид

$$\widetilde{J}^{-1} \cdot J = (J_3^{-1} \cdot J_1, J_3^{-1} \cdot J_2, id),$$

т. е. представляет собой главную изотопию квазигруппы $q(\cdot)$ на квазигруппу $X_3(\times)$. Доказываемое утверждение вытекает из очевидного равенства $J = \widetilde{J}(\widetilde{J}^{-1} \cdot J)$. ■

Предложение 2.2. *Пусть $q = (\cdot\,,\, X_\alpha)$ — трехбазисная квазигруппа. Всякая пара элементов a и b, $a \in X_1$, $b \in X_2$, определяет лупу $X_3(\circ)$, главноизотопную q.*

□ Действительно, рассмотрим биекции $R_b\colon X_1 \to X_3$ и $L_a\colon X_2 \to X_3$, определяемые соответственно равенствами: $R_b(x) = x \cdot b$ (правый сдвиг) и $L_a(y) = a \cdot y$ (левый сдвиг). Обозначим $u = R_b(x)$, $v = L_a(y)$, $u, v \in X_3$. На множестве X_3 определим новую операцию $\circ$, положив

$$u \circ v = x \cdot y = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v). \tag{2.3}$$

Как видно из (2.3), квазигруппа $X_3(\circ)$ является главным изотопом квазигруппы $q = (\cdot\,,\, X_\alpha)$, причем изотопия $q(\cdot) \to X_3(\circ)$ имеет вид (R_b, L_a, id).

Покажем, что $X_3(\circ)$ — лупа с единицей $e = a \cdot b$. Имеем:

$$u \circ e = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(e) = x \cdot b = u, \qquad e \circ v = R_b^{-1}(e) \cdot L_a^{-1}(v) = a \cdot y = v. \quad ■$$

Как видно, операция $\circ$ зависит от выбора элементов a и b. Лупа $X_3(\circ)$ называется *LP-изотопом квазигруппы* $q(\cdot)$ и обозначается $\ell(a, b)$. Значение LP-изотопов выясняется в следующем утверждении.

Предложение 2.3. *Любой главный изотоп квазигруппы $q = (\cdot, X_\alpha)$, являющийся лупой, будет ее LP-изотопом.*

□ Пусть главная изотопия $q(\cdot) \to Q(\circ)$ имеет вид (J_1, J_2, id), так что $Q \equiv X_3$ и для любых x из X_1 и y из X_2 выполняется соотношение

$$J_1(x) \circ J_2(y) = x \cdot y. \tag{2.4}$$

Пусть e — единица лупы $Q(\circ)$. Обозначим $J_1^{-1}(e) = a$, $J_2^{-1}(e) = b$. Из равенств $J_1(a) \circ J_2(y) = a \cdot y$ и $J_1(a) = e$ вытекает, что $J_2(y) = a \cdot y$, т. е. $J_2 = L_a$. Аналогично находим, что $J_1 = R_b$. ■

Изотопическое отображение квазигруппы $q(\cdot\,,\, X_\alpha)$ на себя называется *автотопией.* Если $A = (A_1, A_2, A_3)$ — автотопия, то для любой пары (x, y) из $X_1 \times X_2$ выполняется соотношение

$$A_1(x) \cdot A_2(y) = A_3(x \cdot y). \tag{2.5}$$

Некоторые свойства автотопий рассмотрены в главе 6.

3. Как уже отмечалось, ассоциативная лупа является группой. Между группами и лупами общего вида имеются классы луп, в которых выполнено ослабленное условие ассоциативности (см. табл. 2.1). Эти классы луп играют большую роль в теории три-тканей.

Множество луп, в которых выполняется некоторое тождество S, называется *многообразием луп* и обозначается $V(S)$. Например, группы образуют многообразие луп, определяемое тождеством ассоциативности $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

В таблице 2.1 перечислены другие наиболее важные многообразия луп и соответствующие им тождества.

Второе–пятое тождества обобщают тождество ассоциативности. Они связаны между собой некоторыми соотношениями, часть из которых очевидна: например, из альтернативности или эластичности вытекает моноассоциативность. Другие, менее очевидные соотношения будут рассмотрены в упражнениях и следующих параграфах.

Таблица 2.1

Многообразие луп	Тождество в лупе
Коммутативные лупы	$x \cdot y = y \cdot x$
Моноассоциативные лупы	$x^2 \cdot x = x \cdot x^2$
Правоальтернативные лупы	$x \cdot y^2 = (x \cdot y) \cdot y$
Левоальтернативные лупы	$x^2 \cdot y = x \cdot (x \cdot y)$
Альтернативные лупы	$x^2 \cdot y = x \cdot (x \cdot y)$, $x \cdot y^2 = (x \cdot y) \cdot y$
Эластичные лупы	$(x \cdot y) \cdot x = x \cdot (y \cdot x)$
Левые лупы Бола	$(x \cdot (y \cdot x)) \cdot z = x \cdot (y \cdot (x \cdot z))$
Правые лупы Бола	$x \cdot ((y \cdot z) \cdot y) = ((x \cdot y) \cdot z) \cdot y$
Лупы Муфанг	$(x \cdot y) \cdot (z \cdot x) = x \cdot ((y \cdot z) \cdot x)$

Многообразия луп не инвариантны, вообще говоря, относительно изотопии. Это означает, что если в некоторой лупе Q выполняется тождество S, то оно может не выполняться в ее изотопах. Например, как показывает задача 2.10, многообразие коммутативных луп не инвариантно относительно изотопии.

С другой стороны, справедлива **теорема Алберта:** *если некоторая квазигруппа изотопна группе, то она ей изоморфна, и, следовательно, сама является группой.* [3] Из теоремы Алберта вытекает, что многообразие групп инвариантно относительно изотопии. Оказывается, что существуют и другие многообразия луп, обладающие этим свойством. Определяющие их тождества называются *универсальными.* Основная задача, связанная с универсальными тождествами, формулируется так: выяснить, является ли данное тождество S универсальным, а если нет, то указать максимальное инвариантное относительно изотопии подмногообразие многообразия $V(S)$. Как мы увидим в § 3, каждому универсальному тождеству отвечает некоторый класс три-тканей. Это дает возможность, в частности, доказать универсальность тождеств Муфанг и Бола.

В дальнейшем точка, обозначающая умножение в квазигруппе или лупе, будет, как правило, опускаться, если это не приводит к недоразумению.

§ 2.2. Конфигурации на полных три-тканях

1. В предыдущей главе рассматривались три-ткани, образованные гладкими слоениями на дифференцируемом многообразии размерности $2r$. Такие ткани мы будем называть *геометрическими.* В этом параграфе мы рассмотрим так называемые *полные три-ткани*, которые обладают *инцидентностными свойствами* геометрических тканей (то есть свойствами, связанными с пересечением их слоев), но не имеют, вообще говоря, *дифференциально-геометрической структуры.*

Рассмотрим множество X, элементы которого назовем точками, и три множества (или семейства) λ_α, $\alpha = 1, 2, 3$, элементы которых будем называть линиями или слоями.

Определение. Множества X, λ_α образуют *полную три-ткань* $W = (X, \lambda_\alpha)$, если их элементы связаны *отношением инцидентности*, которое удовлетворяет следующим аксиомам.

[3] Доказательство этой теоремы имеется в книге [Б-3], с. 17.

А1. *Каждая точка множества X инцидентна в точности трем линиям, принадлежащим различным семействам λ_α.*

А2. *Две линии, взятые из разных семейств, инцидентны одной и только одной точке из X.*

Отсюда следует справедливость следующего утверждения.

А3. *Две линии, принадлежащие одному семейству λ_α, не имеют общих точек.*

Элементы множеств X и λ_α будем обозначать, как правило, малыми латинскими буквами. Если точка p инцидентна линии x, то будем говорить, что p лежит на x или x проходит через p. Если точки p и q лежат на одной линии семейства λ_α, то будем писать $p\alpha q$.

На геометрической ткани всегда выполняется аксиома А1, но аксиома А2 может и не выполняться (например, три-ткань из задачи 1.1 (г)). С другой стороны, на параллельной три-ткани W_0, образованной тремя семействами r-мерных плоскостей в аффинном пространстве A^{2r}, выполняются все аксиомы полной три-ткани.

Полная три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$ определяет шесть отображений $q_{\alpha\beta} : \lambda_\alpha \times \lambda_\beta \to \lambda_\gamma$, где $\alpha,\ \beta,\ \gamma = 1, 2, 3$, $\alpha \neq \beta \neq \gamma$, и $q_{\alpha\beta}(x_\alpha, x_\beta) = x_\gamma$, если линии x_α, x_β, x_γ ($x_\alpha \in \lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$) пересекаются в одной точке. Так как эти отображения однозначно разрешимы относительно x_α и x_β, то они являются трехбазисными квазигруппами и называются *координатными квазигруппами* полной три-ткани W.

Непосредственно из определения полной три-ткани вытекает, что множества точек, принадлежащие двум различным линиям этой ткани, равномощны; более того, с помощью линий ткани между ними устанавливается биективное соответствие. Поскольку каждая точка множества X является пересечением двух линий, например, линий x_1 и x_2, где $x_1 \in \lambda_1$, $x_2 \in \lambda_2$, то множество X биективно прямому произведению $\lambda_1 \times \lambda_2$, $X \sim \lambda_1 \times \lambda_2$. При этом линии первого семейства соответствует множества пар вида (a, y), где a — фиксированный элемент из λ_1, а y пробегает все множество λ_2. Линии второго семейства соответствует множество пар вида (x, b), линии третьего семейства — множество пар (x, y) таких, что $q_{12}(x, y) = \mathrm{const}$. Аналогичным образом полная три-ткань координатизируется с помощью любой из квазигрупп $q_{\alpha\beta}$.

Все координатные квазигруппы полной три-ткани W могут быть получены из одной, например, из q_{12}. Если $q_{12}(x, y) = z$, то $q_{21}(x, y) = q_{12}(y, x)$, $q_{32}(z, y) = q_{23}(y, z) = x$, $q_{13}(x, z) = q_{31}(z, x) = y$. Квазигруппы q_{13} и q_{32} называются соответственно *правой и левой обратными квазигруппами* для квазигруппы q_{12}: $q_{13} = q_{12}^{-1}$ и $q_{32} = {}^{-1}q_{12}$. Операция в квазигруппе q_{12}^{-1} обозначается также знаком $\backslash$, а в квазигруппе ${}^{-1}q_{12}$ — знаком $/$, так что $q_{13}(x, z) = x\backslash z$, $q_{32}(z, y) = z/y$. Переход от одной координатной квазигруппы к другой называется *парастрофией*. В дальнейшем чаще всего в качестве основной используется квазигруппа q_{12}, которую будем обозначать также буквой q, а операцию в ней обозначать точкой.

Обратно, всякая трехбазисная квазигруппа $q\colon X_1 \times X_2 \to X_3$ однозначно определяет некоторую полную три-ткань W на прямом произведении $X = X_1 \times X_2$. Линиями первого семейства этой ткани будут подмножества точек вида (a, y) из X, где a — фиксированный элемент из X_1, линиями второго семейства — подмножества точек вида (x, b), где b — фиксированный элемент множества X_2, а линиями третьего семейства — пары вида (x, y), для которых выполнено условие $x \cdot y = c$, где $c \in X_3$. Так как в квазигруппе q однозначно разрешимы уравнения (2.1), то для построенной три-ткани выполняются аксиомы А1 и А2. Исходная квазигруппа q будет координатной квазигруппой q_{12} этой ткани.

	a	b	c
a	c	a	b
b	b	c	a
c	a	b	c

Рис. 6

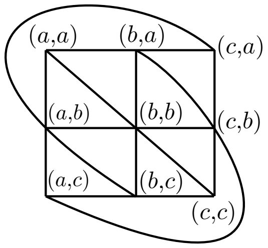

Рис. 7

Таким образом, *со всякой полной три-тканью W связаны ее координатные квазигруппы $q_{\alpha\beta}$, и обратно, всякая трехбазисная квазигруппа q порождает полную три-ткань, для которой она является координатной квазигруппой.*

Рассмотрим, например, квазигруппу q, состоящую из трех элементов, таблица умножения которой приведена на рис. 6. Соответствующая три-ткань изображена на рис. 7. Ее слои содержат по три точки.

В силу указанного соответствия между квазигруппами и полными три-тканями изотопическое преобразование координатной квазигруппы влечет за собой преобразование соответствующей три-ткани, также называемое *изотопией.* Соотношение (2.2), которое определяет изотопическое преобразование координатной квазигруппы q три-ткани W в координатную квазигруппу $\widetilde{q}$ три-ткани $\widetilde{W}$, означает, что три линии ткани W, проходящие через одну точку, переходят в три линии ткани $\widetilde{W}$, также проходящие через одну точку. *Изотопия является отношением эквивалентности на множестве полных три-тканей.* Напомним, что отношение эквивалентности для геометрических три-тканей было определено в § 2 гл. 1. Однако в нем отображения J_α являлись локальными диффеоморфизмами, но не обязательно биекциями в целом.

2. Классификация три-тканей, как полных, так и геометрических, тесно связана с *условиями замыкания* конфигураций, образованных точками и слоями ткани. Ниже рассматриваются наиболее важные из этих конфигураций (короче, фигур).

На рис. 8 изображена *шестиугольная конфигурация* или фигура H (напомним, что слои первого, второго и третьего семейств ткани изображаются соответственно вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями). Получается эта фигура следующим образом. Пусть p — произвольная точка множества X. Через нее проходят три линии ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$. Возьмем на одной из них точку a и построим последовательно точки b, c, d, e, f, как и указано на рис. 8. Их существование вытекает из определения полной три-ткани. Линия семейства λ_3, проходящая через точку f, не проходит, вообще говоря, через a. Если же точки a и f лежат на одной линии третьего семейства, то говорят, что шестиугольная фигура $(abcdef)$ замыкается.

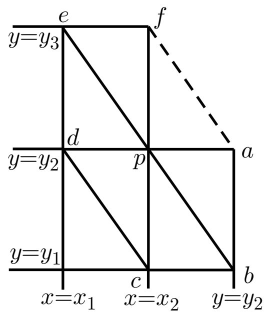

Рис. 8

Запишем условие замыкания фигуры H с помощью операции умножения в координатной квазигруппе q. Обозначим линии первых двух семейств, образующих фигуру H, через x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3, как указано на рис. 8. Равенство $z = q(x, y) \equiv xy$ в координатной квазигруппе q означает, что линия z третьего семейства проходит через точку пересечения линий x и y первого и второго семейств. Поэтому замкнутой фигуре H, изображенной на рис. 8, отвечают равенства

$$\begin{aligned} x_1y_2 &= x_2y_1, \\ x_1y_3 = x_2y_2 &= x_3y_1, \\ x_2y_3 &= x_3y_2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

выполняемые в координатной квазигруппе q. Условия (2.6) записываются иногда в виде импликации

$$\left.\begin{aligned} x_1y_2 = x_2y_1 \\ x_1y_3 = x_2y_2 = x_3y_1 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_2y_3 = x_3y_2,$$

которая называется также *условным тождеством* [Б-3].

На следующих шести рисунках изображены другие основные фигуры, рядом с которыми записаны соответствующие условия замыкания.

Фигура Томсена T: *Фигура Рейдемейстера R*: *Левая фигура Бола B_ℓ*:

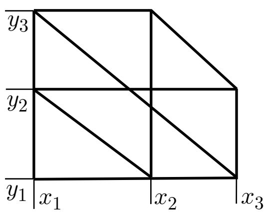

Рис. 9

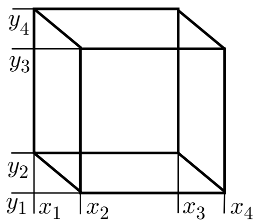

Рис. 10

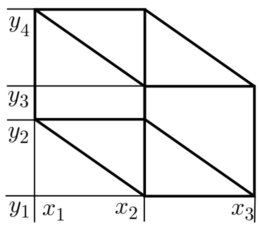

Рис. 11

$$\begin{aligned} x_2y_1 &= x_1y_2,\\ x_3y_1 &= x_1y_3,\\ x_2y_3 &= x_3y_2 \end{aligned} \qquad (2.7) \qquad\qquad \begin{aligned} x_2y_1 &= x_1y_2,\\ x_4y_1 &= x_3y_2,\\ x_1y_4 &= x_2y_3,\\ x_3y_4 &= x_4y_3. \end{aligned} \qquad (2.8) \qquad\qquad \begin{aligned} x_1y_2 &= x_2y_1,\\ x_1y_4 &= x_2y_3,\\ x_2y_2 &= x_3y_1,\\ x_2y_4 &= x_3y_3. \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Правая фигура Бола B_r:

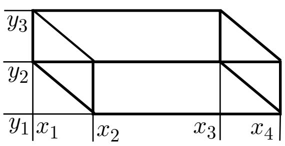

Рис. 12

Средняя фигура Бола B_m:

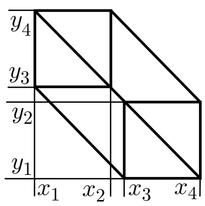

Рис. 13

Фигура E:

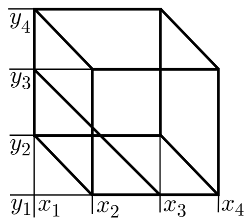

Рис. 14

$$\begin{aligned} x_1y_2 &= x_2y_1,\\ x_1y_3 &= x_2y_2,\\ x_3y_2 &= x_4y_1,\\ x_3y_3 &= x_4y_2. \end{aligned} \qquad (2.10) \qquad\qquad \begin{aligned} x_1y_2 &= x_3y_4,\\ x_1y_1 = x_2y_2 = x_3y_3 &= x_4y_4,\\ x_2y_1 &= x_4y_3. \end{aligned} \qquad (2.11) \qquad\qquad \begin{aligned} x_1y_2 &= x_2y_1,\\ x_1y_3 &= x_3y_1,\\ x_3y_2 &= x_4y_1,\\ x_2y_3 &= x_1y_4,\\ x_4y_3 &= x_3y_4. \end{aligned} \qquad (2.12)$$

Ткани, на которых замыкаются все фигуры одного из указанных выше типов, называются, соответственно, тканями $H, T, R, B_\ell, B_r, B_m, E$.

Из рисунков 8–14 видно, что фигуры H, B_ℓ, B_r, B_m и E являются частными случаями фигуры R и получаются из нее наложением дополнительных условий. Например, фигура B_ℓ получается из фигуры R, изображенной на рис. 10, если в ней совместить два средних вертикальных слоя, т. е. положить $x_2 = x_3$. Если положить еще и $y_2 = y_3$, то получим фигуру H. Аналогичным образом фигура H может быть получена из фигур B_ℓ, B_r, B_m и E, а также из фигуры T, если в последней три внутренние линии проходят через одну точку.

Связь между классами T и R выясняется в следующем утверждении.

Теорема 2.4. *Всякая три-ткань T является тканью R.*

□ Действительно, пусть на полной три-ткани W замыкаются все фигуры T. Докажем, что на ней замыкаются и фигуры R. Рассмотрим на ткани W произвольную фигуру $R = (abcdefgh)$ (рис. 15) и докажем, что она замыкается, т. е. точки f и g лежат на одной линии третьего семейства (это условие мы договорились записывать в виде $f3g$).

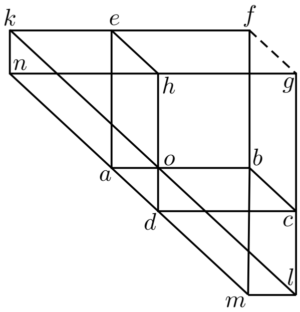

Рис. 15

Построим точки n, k, ℓ, m так, как показано на рис. 15, и рассмотрим две фигуры T: $T_1 = (oankeh)$ и $T_2 = (obc\ell md)$. Поскольку они должны замыкаться, то выполняются условия $n1k$ и $\ell 2m$. Рассмотрим теперь фигуру $T_3 = (\ell mnkfg)$. Так как она обязана замыкаться, то выполняется условие $f3g$. Следовательно, замыкается и фигура $R = (abcdefgh)$. ■

Еще один важный класс три-тканей образуют так называемые *ткани M* или *ткани Муфанг*, на которых замыкаются фигуры Бола всех трех типов: B_ℓ, B_r и B_m. Следующая теорема «минимизирует» это определение.

Теорема 2.5. *Если на три-ткани W замыкаются фигуры Бола каких-либо двух типов, то замыкаются фигуры и третьего типа.*

□ Покажем, например, что $B_\ell \& B_r \Rightarrow B_m$. Предположим, что на три-ткани W замыкаются все фигуры B_ℓ и B_r. Рассмотрим произвольную фигуру $B_m = (abcdefgh)$ (рис. 16) и докажем, что она тоже замыкается, т. е. выполняется условие $b3f$. Построим последовательно точки n, k, m, ℓ, o, p. Точки $d, k, \ell, m, a, n, o, g$ образуют фигуру B_r, поэтому $n3o$. Пусть s — точка пересечения линий ef и on. Точки $h, e, g, m, p, s, o, \ell$ образуют фигуру B_r, а так как она должна замыкаться, то $p1s$. Далее, точки b, n, s, f, c, k, p, g образуют фигуру B_ℓ, поэтому $b3f$. Следовательно, замыкается фигура $B_m = (abcdefgh)$. ■

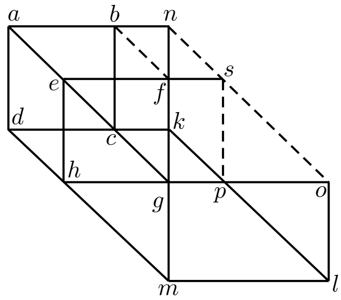

Рис. 16

Из предыдущих рассуждений вытекает, что рассмотренные условия замыкания связаны следующими импликациями:

$$\begin{matrix} & & & & & \nearrow B_\ell & & \\ T & \longrightarrow & R & \longrightarrow & M & \longrightarrow B_m & \longrightarrow & H \qquad R \longrightarrow E \longrightarrow H \\ & & & & & \searrow B_r & & \end{matrix}$$

В заключение заметим, что фигуры Бола B_ℓ, B_r и B_m (рис. 11–13) представляют собой одну и ту же конфигурацию, но по разному расположенную относительно семейств λ_α, образующих три-ткань. Поэтому правильнее было бы обозначить их $\underset{12}{B_\ell}$, $\underset{12}{B_r}$, $\underset{12}{B_m}$, соотнеся с координатной квазигруппой q_{12}. Если перейти, например, к координатной квазигруппе q_{32}, то наклонные линии следует считать линиями первого семейства, а вертикальные — линиями третьего семейства. Поэтому фигура $\underset{12}{B_m}$ совпадает с фигурой $\underset{32}{B_\ell}$, т. е. с фигурой B_ℓ для координатной квазигруппы q_{32}. Аналогично, фигура $\underset{32}{B_m}$ совпадает с фигурой $\underset{13}{B_r}$, так что

$$\underset{12}{B_m} \Leftrightarrow \underset{32}{B_\ell} \Leftrightarrow \underset{13}{B_r}. \tag{2.13}$$

§ 2.3. Тождества в координатных лупах и условия замыкания

1. Соотношения (2.6)–(2.12), представляющие собой условия замыкания различных конфигураций на полной три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$, принимают более простой вид, если вместо координатной квазигруппы $q(\cdot)\colon \lambda_1 \times \lambda_2 \to \lambda_3$ использовать ее LP-изотопы, которые называются *координатными лупами ткани* W. Согласно § 1, LP-изотоп $\ell(a, b)(\circ)$ определяется формулой (2.3):

$$u \circ v = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v) = x \cdot y,$$

где $u, v \in \lambda_3$, $a \in \lambda_1$, $b \in \lambda_2$, $u = x \cdot b$, $v = a \cdot y$. Элемент $u \circ v$ строится на ткани w так, как показано на рис. 17. Таким образом, с каждой точкой $p = (a, b)$ три-ткани W связана ее координатная лупа $\ell(a, b)$, которую будем обозначать также ℓ_p. Поскольку LP-изотопы главноизотопны координатной квазигруппе $q(\cdot)$, то они главноизотопны друг другу. Из предложений 2.1–2.2 вытекает, что *три-ткани W соответствует класс всех главно-изотопных между собой луп.*

Предположим, что элементы u и v координатной лупы $\ell(a, b)$ коммутируют, т. е. $u \circ v = v \circ u$. Построим с помощью рис. 17 произведения $u \circ v$ и $v \circ u$ (рис. 18). Сравнивая рисунки 10 и 18, мы видим, что условие $u \circ v = v \circ u$ эквивалентно замыканию некоторой фигуры T. В зависимости от расположения линий u и v относительно точки p, получаются фигуры T, изображенные на рисунках 18–20.

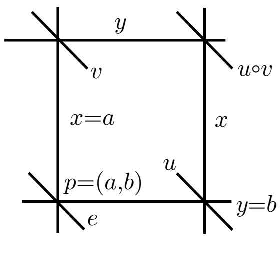

Рис. 17

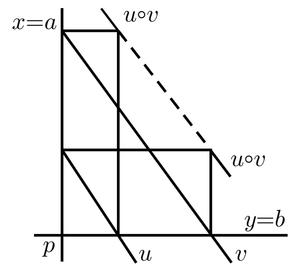

Рис. 18

Предположим теперь, что координатная лупа $\ell(a, b)$ является коммутативной. Тогда на рассматриваемой три-ткани W замыкаются всевозможные фигуры T, расположенные относительно линий $x = a$ и $y = b$ так, как показано на рисунках 18–20. Назовем их *координатными фигурами, связанными с координатной лупой* $\ell(a, b)$. Меняя a и b, получим все фигуры T на три-ткани W. Отсюда следует, что *полная три-ткань W является тканью T тогда и только тогда, когда все ее координатные лупы будут коммутативными.*

Возьмем в лупе $\ell(a,b)$ три произвольных элемента u, v, и w и построим произведения $(u\circ v)\circ w$ и $u\circ(v\circ w)$ (рис. 21). Равенство этих произведений, как видно из сравнения рисун-

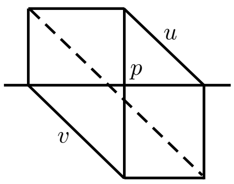

Рис. 19

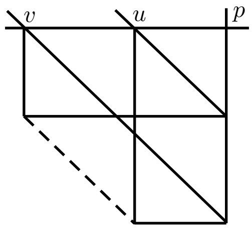

Рис. 20

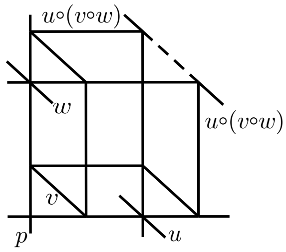

Рис. 21

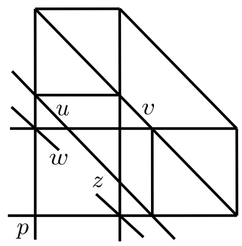

Рис. 22

ков 21 и 11, ведет к замыканию некоторой фигуры R.

Если в лупе $\ell(a,b)$ выполняется тождество ассоциативности $u\circ(v\circ w)=(u\circ v)\circ w$, то на ткани замыкаются всевозможные координатные фигуры R, связанные с лупой $\ell(a,b)$ (см. задачу 2.16). Меняя a и b, придем к заключению, что *полная три-ткань W является тканью R тогда и только тогда, когда все ее координатные лупы являются ассоциативными лупами, т. е. группами.*

Сравнивая рис. 11, 12, 14, 8 с рис. 21, находим, что фигуры B_ℓ, B_r, E и H получаются из фигуры R соответственно при $u=v$, $v=w$, $u=w$ и $u=v=w$. Им отвечают тождества $u^2\circ w=u\circ(u\circ v)$, $u\circ v^2=(u\circ v)\circ v$, $(u\circ v)\circ u=u\circ(v\circ u)$ и $u^2\circ u=u\circ u^2$ соответственно.

Далее, в § 2 доказано, что ткань T является тканью R. Следовательно, в ее координатных лупах выполняется кроме тождества коммутативности еще и тождество ассоциативности. Таким образом, *координатные лупы ткани T являются абелевыми группами.*

Чтобы найти тождество, соответствующее фигуре B_m, введем переменные u, v, w z так, как указано на рис. 22. С помощью рис. 17 получим следующие равенства:

$$u\circ w=v,\quad z\circ u=v,\quad v\circ w=z\circ v.$$

Из двух первых находим, что $w=u\backslash v$, $z=v/u$. Подставляя в последнее, получим искомое тождество:

$$v\circ(u\backslash v)=(v/u)\circ v. \tag{2.14}$$

Сопоставляя полученные результаты с таблицей 2.1 (с. 43), приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.6. *Полная три-ткань W является тканью R, T, B_ℓ, B_r, M, E, H* или *B_m тогда и только тогда, когда все ее координатные лупы будут соответственно группами, абелевыми группами, левоальтернативными, правоальтернативными, альтернативными, эластичными, моноассоциативными лупами, или лупами с тождеством* (2.14).

2. В предыдущем пункте рассмотрены три-ткани, во всех координатных лупах которых выполняется некоторое тождество S. Обозначим $W(S)$ класс тканей, координатные лупы которых принадлежат многообразию $V(S)$ (см. § 1).

Допустим, что тождество S универсально. Поскольку все координатные лупы три-ткани изотопны друг другу, то получаем, что ткань W принадлежит классу $W(S)$, если хотя бы в одной координатной лупе выполняется тождество S.

Это не выполняется, если тождество S не является универсальным. Однако в таком случае, поскольку все координатные лупы ткани W изотопны, должно существовать универсальное тождество $\widetilde{S}$, характеризующее многообразие луп ткани W. Оно находится следующим образом. Так как ткань W принадлежит классу $W(S)$, то на ней замыкаются все фигуры S, определенным образом связанные с координатными лупами (мы назвали их в п. 1 координатными фигурами). Рассмотрим произвольную фигуру S, не являющуюся координатной для лупы $\ell(a,b)$. Ей отвечает в лупе $\ell(a,b)$ некоторое новое тождество $\widetilde{S}$, которое уже будет универсальным. Действительно, если тождество $\widetilde{S}$ выполняется хотя бы в одной лупе $\ell(a,b)$, то на ткани W будут замыкаться всевозможные фигуры S, и поэтому тождество $\widetilde{S}$ выполняется во всех координатных лупах ткани.

Таким образом получаем следующий алгоритм для нахождения универсального тождества $\widetilde{S}$, соответствующего тождеству S. На рис. 23 через S обозначена некоторая координатная фигура, связанная с координатной лупой $\ell_p(\circ)$, через $\widetilde{S}$ — такая же фигура, но расположенная произвольно относительно точки p. Фигура $\widetilde{S}$ будет координатной для некоторой другой координатной лупы $\ell_{\widetilde{p}}(\widetilde{\circ})$. Из определения LP-изотопа, которое было дано в § 1, имеем следующее равенство (см. рис. 23):

$$\widetilde{u}\,\widetilde{\circ}\,\widetilde{v} = x \cdot y = u \circ v.$$

Полагая $\widetilde{u} = u \circ t$, $\widetilde{v} = s \circ v$, перепишем это равенство в виде

$$\widetilde{u}\,\widetilde{\circ}\,\widetilde{v} = (\widetilde{u}/t) \circ (s\backslash\widetilde{v}), \tag{2.15}$$

где, как и выше, символами / и \ обозначены обратные операции к операции ($\circ$).

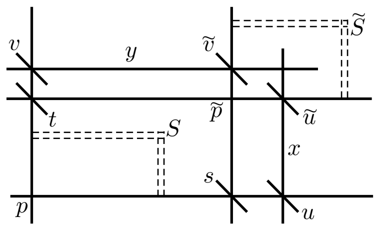

Рис. 23

Фигуре $\widetilde{S}$ отвечает в лупе $\ell_{\widetilde{p}}(\widetilde{\circ})$ тождество S. Чтобы получить соответствующее тождество в лупе $\ell_p(\circ)$, следует каждое произведение $\widetilde{u}\,\widetilde{\circ}\,\widetilde{v}$, входящее в тождество S, преобразовать с помощью равенства (2.15). Полученное таким образом тождество называется *производным* от тождества S и содержит, помимо переменных, входящих в исходное тождество S, еще две переменные: s и t.

Например, тождеству моноассоциативности $u^2 \circ u = u \circ u^2$ отвечает производное тождество

$$(u/t \circ s\backslash u)/t \circ s\backslash u = u/t \circ s\backslash(u/t \circ s\backslash u) \tag{2.16}$$

с тремя переменными: u, s и t.

Кроме производного тождества $\widetilde{S}$ на многообразии луп $V(S)$ могут существовать и другие универсальные тождества, не содержащие обратных операций и зависящие от меньшего числа переменных, чем производное тождество. Такие универсальные тождества связаны уже не с произвольной, а с некоторой *полукоординатной* фигурой S. Доказательство универсальности основано на том, что из замыкания полукоординатных фигур S, связанных с одной из координатных луп ткани, вытекает замыкание всех фигур S.

Теорема 2.7. *Тождество ассоциативности*

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w) \tag{2.17}$$

является универсальным.

☐ Пусть в лупе Q выполняется тождество (2.17). Обозначим буквой W три-ткань, для которой эта лупа будет одной из координатных луп ℓ_p. Так как она ассоциативна, то в соответствии с п. 1 на ткани W замыкаются все связанные с лупой ℓ_p координатные фигуры R.

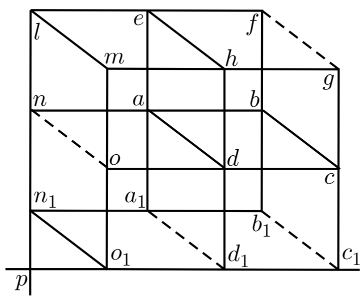

Рис. 24

Рассмотрим теперь на ткани W произвольную фигуру $R = (abcdefgh)$ (рис. 24). Докажем, что она также замыкается, то есть ее точки f и g лежат на одной линии третьего семейства. Построим последовательно точки $\ell, m, o, n, n_1, o_1, a_1, d_1, b_1, c_1$, как показано на рис. 24. Так как координатные фигуры R замыкаются, то замыкается и фигура $R_1 = (e\ell mha_1o_1n_1d_1)$, т. е. выполняется условие $a_1 3 d_1$. Рассмотрим далее координатную фигуру $R_2 = (anoda_1n_1o_1d_1)$. Так как она тоже замыкается, то $n3o$. Из замыкания еще одной координатной фигуры $R_3 = (bnocb_1n_1o_1c_1)$ следует условие $b_1 3 c_1$. Наконец, из замыкания координатной фигуры $R_4 = (f\ell mgb_1n_1o_1c_1)$ получаем условие $f3g$. Следовательно, замыкается и фигура $R = (abcdefgh)$.

Итак, на рассматриваемой ткани W замыкаются все фигуры R. Следовательно, все ее координатные лупы будут группами. Так как с точностью до изоморфизма координатными лупами исчерпываются все возможные изотопы лупы Q (теорема 2.1), то получается, что любой изотоп ассоциативной лупы также является ассоциативной лупой. Но это и означает, что тождество ассоциативности универсально. ■

Теорема 2.8. *Лупы, в которых выполняется тождество T*

$$T\colon\quad u\circ(v\circ w)=v\circ(u\circ w),\tag{2.18}$$

и только такие лупы являются коммутативными группами. Тождество (2.18) *универсально.*

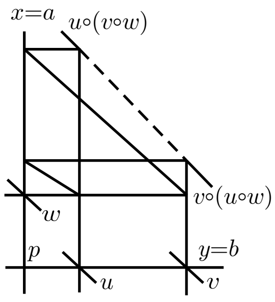

Рис. 25

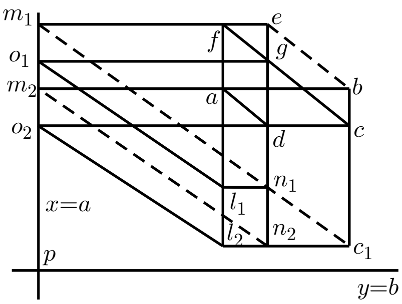

Рис. 26

□ С одной стороны, тождество (2.18) вытекает из тождеств коммутативности и ассоциативности. Обратно, если в (2.18) положить $w=\ell$, то получается тождество коммутативности, в силу которого из (2.18) следует ассоциативность. Первая часть теоремы доказана.

Предположим теперь, что в координатной лупе ℓ_p некоторой три-ткани W выполняется тождество (2.18). Ему отвечает полукоординатная фигур T (изображенная на рис. 25), у которой, в отличие от рассмотренных выше координатных фигур T, только одна сторона лежит на прямой $x=a$.

Рассмотрим теперь произвольную фигуру Томсена $T=(abcdef)$, образованную линиями ткани W (рис. 26), и докажем, что она замыкается, т. е. точки b и e лежат на одной линии третьего семейства.

Построим последовательно точки m_1, o_1, ℓ_1, n_1, как показано на рис. 26, и рассмотрим фигуру $T_1=(o_1gn_1\ell_1fm_1)$. Так как она полукоординатная, то выполняется условие m_13n_1.

Далее построим точки m_2, o_2, ℓ_2, n_2 и рассмотрим полукоординатную фигуру $T_2=$ $=(o_2dn_2\ell_2am_2)$. Из ее замыкания следует, что выполняется условие m_23n_2. Построив точку c_1, мы получим еще одну полукоординатную фигуру — $T_3=(o_2cc_1\ell_2fm_1)$, откуда следует, что m_13c_1.

Рассмотрим, наконец, полукоординатную фигуру $T_4=(m_2bc_1\ell_2fm_1)$. Из ее замыкания выводим, что $b3f$. Следовательно, фигура $T=(abcdef)$ замыкается, а поскольку она была взята произвольно, то получается что на рассматриваемой ткани замыкаются все фигуры T. Поэтому все координатные лупы рассматриваемой три-ткани являются абелевыми группами, и в них выполняется тождество (2.18). Но это и означает, что оно универсально. ■

Теорема 2.9. *Три-ткань W является тканью B_ℓ тогда и только тогда, когда в ее координатных лупах выполняется левое тождество Бола*

$$(u\circ(w\circ u))\circ v=u\circ(w\circ(u\circ v)).\tag{2.19}$$

Левое тождество Бола универсально.

□ Предположим, что в координатной лупе ℓ_p ткани W выполняется тождество (2.19). Соответствующая этому тождеству полукоординатная фигура $b_\ell=(abcdfgha_1b_1c_1d_1f_1g_1h_1)$ изображена

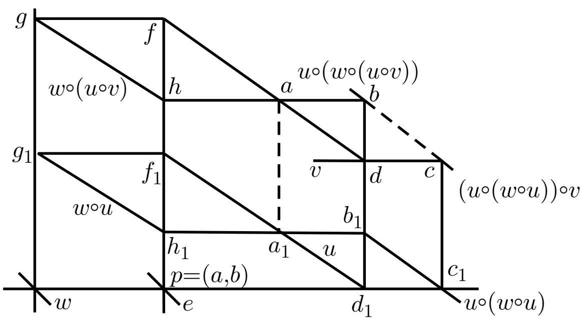

Рис. 27

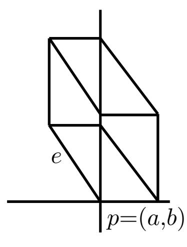

Рис. 28

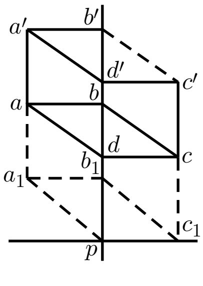

Рис. 29

на рис. 27 (без пунктирной линии aa_1). Частными случаями этой фигуры являются левые фигуры Бола B'_ℓ и B_ℓ, изображенные на рисунках 28 и 11. Фигура B'_ℓ получается, если положить $w \circ u = e$, B_ℓ — при $w = e$, где e — единица лупы ℓ_p.

Докажем сначала, что из замыкания полукоординатных фигур B'_ℓ, вид которых изображен на рис. 28, следует замыкание полукоординатных фигур $B'_\ell = (abcda'b'c'd')$, вид которых изображен на рис. 29. Действительно, построим точки a_1, b_1, c_1, как показано на рис. 29. Получим полукоординатную фигуру $B'_\ell = (abcda_1b_1c_1p)$, из замыкания которой следует $c1c_1$. Возникает полукоординатная фигура $B'_\ell = (a'b'c'd'a_1b_1c_1p)$, замыкание которой дает $b'3c'$, что и требовалось.

Теперь докажем, что на ткани W замыкаются полукоординатные фигуры $B''_\ell = (abcda_1b_1c_1d_1)$, вид которых изображен на рис. 30. Построим последовательно точки f, g, h и f_1, g_1, h_1 (рис. 30). Согласно предыдущему абзацу замыкается фигура $B'_\ell = (gfahg_1f_1a_1h_1)$, что дает $g1g_1$. Получилась полукоординатная фигура $b_\ell = (bcdfghb_1c_1d_1f_1g_1h_1)$. Так как она обязана замыкаться, то $b3c$, то есть фигура $B''_\ell = (abcda_1b_1c_1d_1)$ также замыкается.

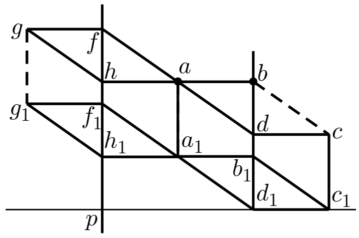

Рис. 30

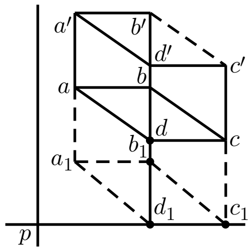

Рис. 31

Наконец, рассмотрим на ткани W произвольную фигуру $B_\ell = (abcda'b'c'd')$ (рис. 31). Построив точки d_1, a_1, b_1, c_1 как показано на рис. 31, получим полукоординатную фигуру $B''_\ell = (abcda_1b_1c_1d_1)$. В силу предыдущего абзаца она замыкается, то есть $c1c_1$. Получилась полукоординатная фигура $B''_\ell = (a'b'c'd'a_1b_1c_1d_1)$. Так как она замыкается, то $b'3c'$, и произвольная фигура $B_\ell = (abcda'b'c'd')$ также замкнулась.

Итак, на рассматриваемой ткани W замыкаются все левые фигуры Бола, то есть это ткань Бола.

Обратно, предположим, что ткань W является левой тканью Бола, то есть на ней замыкаются все фигуры B_ℓ. Докажем, что на ней замыкаются и все фигуры вида $b_\ell = (abcdfgha_1b_1c_1d_1f_1g_1h_1)$ (рис. 27, без пунктирной линии aa_1). Действительно, фигура $b_\ell = (abcdfgha_1b_1c_1d_1f_1g_1h_1)$ «склеена» из двух левых фигур Бола: $(abcda_1b_1c_1d_1)$ и $(afgha_1f_1g_1h_1)$. Так как на ткани W все левые фигуры Бола замыкаются, то $a1a_1$ и $c3b$. Таким образом, все фигуры вида b_ℓ (не только полукоординатные!) замыкаются. ■

Аналогично доказывается

Теорема 2.10. *В координатных лупах тканей B_r и только таких тканей выполняется правое тождество Бола*

$$B_r\colon \quad u \circ ((v \circ w) \circ v) = ((u \circ v) \circ w) \circ v. \tag{2.20}$$

Правое тождество Бола универсально.

Напомним, что тканью Муфанг мы назвали в § 2 ткань, на которой замыкаются фигуры Бола всех трех типов. Из последних двух теорем, теоремы 2.5 и задач 2.8, 2.9 вытекает

Теорема 2.11. *В координатных лупах тканей Муфанг и только таких тканей выполняется тождество Муфанг*

$$M\colon \quad (u \circ v) \circ (w \circ u) = u \circ ((v \circ w) \circ u). \tag{2.21}$$

Тождество Муфанг универсально.

Теорема 2.12. *В координатных лупах тканей B_m и только в них выполняется тождество*

$$B_m\colon \quad w \circ ((u \circ v)\backslash w) = (w/v) \circ (u\backslash w). \tag{2.22}$$

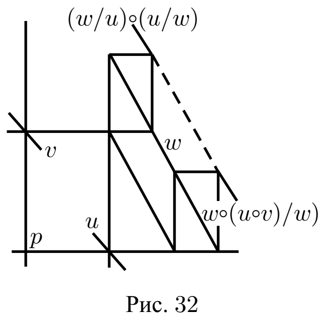

Рис. 32

Это тождество универсально.

□ На три-ткани B_m замыкаются все фигуры B_m, в частности, связанные с лупой ℓ_p полукоординатные фигуры B_m, изображенные на рис. 32. Им соответствует тождество (2.22), которое при $u = e$ совпадает с тождеством (2.14). Это доказывает первую часть теоремы.

Предположим теперь, что на три-ткани W замыкаются только полукоординатные фигуры B_m, связанные с координатной лупой ℓ_p, и докажем, что на этой ткани замыкаются все такие фигуры. Рассмотрим произвольную фигуру $B_m = (abcda_1b_1c_1d_1)$, изображенную на рис. 33. Построив точки d_2, c_2, a_2, b_2, как показано на этом рисунке, получим полукоординатную фигуру $B^1_m = (a_1b_1c_1d_1a_2b_2c_2d_2)$, которая по условию теоремы замыкается, так что $b_1 3 b_2$. Из замыкания другой полукоординатной фигуры $B^2_m = (abcda_2b_2c_2d_2)$ следует $b3b_2$. Пользуясь определением три-ткани, находим, что точки b, b_1, b_2 лежат на одной линии третьего семейства, т. е. фигура $B_m = (abcda_1b_1c_1d_1)$ замыкается. Таким образом, из замыкания полукоординатных фигур B_m следует замыкание всех фигур B_m. Следовательно, тождество (2.22), соответствующее полукоординатной фигуре B_m, является универсальным. ■

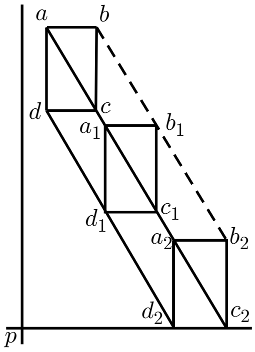

Рис. 33

Лупы, в которых выполняется тождество B_m, называются *средними лупами Бола.*

Напомним, что для каждого из классов R, T, B_ℓ, B_r, M, B_m кроме найденных универсальных тождеств (2.17)–(2.22) существует еще одно — производное. Например, в координатных лупах ткани B_ℓ выполняется универсальное тождество, производное от тождества левой альтернативности $u^2 \circ v = u \circ (u \circ v)$. Но оно содержит уже 4 переменные и обратные операции, поэтому выглядит значительно сложнее, чем тождество Бола B_ℓ (2.19). Для тканей H производное тождество имеет вид (2.16), для тканей E оно получается описанным выше способом из тождества эластичности. Вопрос о том, существуют ли для тканей H и E универсальные тождества более простые, чем указанные производные тождества, остается открытым.

§ 2.4. Локальные гладкие лупы и их касательные алгебры

1. Для изучения многомерных геометрических три-тканей нам понадобится понятие локальной гладкой квазигруппы, которое соотносится с алгебраическим понятием квазигруппы, введенным в § 1, так же, как понятие локальной группы Ли соотносится с понятием группы.

Рассмотрим три гладких r-мерных многообразия X, Y, Z (которые, в частности, могут и совпадать). Гладкое отображение $q\colon X \times Y \to Z$ называется *локальной гладкой квазигруппой* (короче, локальной квазигруппой), если оно является локальным диффеоморфизмом а) при фиксированном x и б) при фиксированном y. Согласно этому определению уравнение $z = q(x, y)$ локально однозначно разрешимо как относительно переменной x, так и относительно переменной y.

Локальной гладкой лупой называется r-мерное дифференцируемое многообразие Q с фиксированной точкой e, ее окрестностью U и функцией $q\colon U \times U \to Q$, такой что а) q является локальной гладкой квазигруппой и б) $q(x, e) = q(e, x) = x$ для любого x из U. Элемент e называется единицей.

Отображение q называется *умножением* и обозначается точкой и другими знаками, как это принято в алгебраической теории: $z = q(x, y) \equiv x \cdot y$. Также применяются обозначения $q(\cdot)$, $Q(\cdot)$.

На локальные гладкие квазигруппы и лупы без труда переносятся те понятия и теоремы, которые были рассмотрены в § 1, § 2 для алгебраических квазигрупп и луп, только всему сказанному следует придавать локальный смысл. Так, изотопией $J = (J_\alpha)$ локальной квазигруппы $q(\cdot)$ на локальную квазигруппу $\widetilde{q}(\circ)$ называется тройка локальных диффеоморфизмов, удовлетворяющих условию (2.2).

Локальной гладкой квазигруппе $q\colon X \times Y \to Z$ соответствует геометрическая три-ткань W, образованная на прямом произведении $X \times Y$ слоениями $x = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$ и $q(x, y) = \mathrm{const}$. При этом функция $q(x, y)$ является функцией ткани (см. (1.12)). Все конфигурации, рассмотренные на полной три-ткани, можно рассматривать и на геометрической ткани, только их следует брать достаточно малыми.

В силу предложения 2.1 для всякой локальной гладкой квазигруппы $q\colon X_1 \times X_2 \to X_3$ (мы будем ее обозначать также $q(\cdot, X_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$) с помощью локальных диффеоморфизмов

$$u = q(x, b), \quad v = q(a, y), \quad z = z, \tag{2.23}$$

заданных на многообразии X_3, можно построить LP-изотоп $X_3(\cdot)$, операция в котором определяется по формуле (2.3). Точка $q(a, b) = e$ будет единицей локальной гладкой лупы $X_3(\cdot)$.

2. Рассмотрим локальную гладкую лупу $Q(\cdot)$ класса C^s, где $s \geqslant 3$, и введем в окрестности U ее единицы e координаты так, чтобы точка e имела нулевые координаты. Пусть u и v — точки из окрестности U, тогда координаты $(u \cdot v)^i$ произведения $u \cdot v$ будут гладкими функциями от координат сомножителей u и v. Так как единица e имеет нулевые координаты, то ввиду условий $u \cdot e = u$, $e \cdot v = v$ формула Тейлора для функции $u \cdot v$ имеет вид:

$$u \cdot v = u + v + \Lambda(u, v) + \frac{1}{2}\, M(u, u, v) + \frac{1}{2}\, N(u, v, v) + o(\rho^3). \tag{2.24}$$

Здесь набор координат (u^i) точки u лупы Q обозначен тем же символом u (как мы увидим в дальнейшем, это соглашение не приводит к недоразумениям). Кроме того, $\rho = \max(\|u\|, \|v\|)$, $\|u\| = \max\limits_i u^i$, $\|v\| = \max\limits_i v^i$,

$$\begin{gathered} \Lambda^i(u, v) = \lambda^i_{jk} u^j v^k, \quad M^i(u, u, v) = \mu^i_{jk\ell} u^j u^k v^\ell, \quad N(u, v, v) = \nu^i_{jk\ell} u^j v^k v^\ell, \\ \lambda^i_{jk} = \frac{\partial^2 (u \cdot v)^i}{\partial u^j \partial v^k}\Big|_{u=v=0}, \quad \mu^i_{jk\ell} = \frac{\partial^3 (u \cdot v)^i}{\partial u^j \partial u^k \partial v^\ell}\Big|_{u=v=0}, \quad \nu^i_{jk\ell} = \frac{\partial^3 (u \cdot v)^i}{\partial u^j \partial v^k \partial v^\ell}\Big|_{u=v=0}. \end{gathered} \tag{2.25}$$

Многочленам $M(u, u, v)$ и $N(u, v, v)$ однозначно соответствуют трилинейные формы $M(u, v, w)$ и $N(u, v, w)$ от переменных u^i, v^i и w^i, первая из которых симметрична по u и v, а вторая — по v и w.

Локальные координаты u^i в локальной лупе $Q(\cdot)$ определены с точностью до преобразований вида

$$u^{i'} = \gamma^{i'}(u^j), \tag{2.26}$$

где

$$u^{i'}(0) = 0, \quad \frac{\partial \gamma^{i'}}{\partial u^i}\Big|_0 = \gamma^{i'}_i, \quad \det(\gamma^{i'}_i) \neq 0. \tag{2.27}$$

Можно проверить, что при таких преобразованиях коэффициенты λ^i_{jk} изменяются по формулам

$$\lambda^{i'}_{j'k'} = \gamma^{i'}_i \gamma^j_{j'} \gamma^k_{k'} \lambda^i_{jk} + \gamma^{i'}_{jk} \gamma^j_{j'} \gamma^k_{k'},$$

где $\gamma^j_{j'}$ — матрица, обратная матрице $\gamma^{j'}_j$, и

$$\gamma^{i'}_{jk} = \frac{\partial^2 \gamma^{i'}}{\partial u^j \partial u^k}\Big|_0, \quad \gamma^{i'}_{jk} = \gamma^{i'}_{kj}.$$

Как видно, величины λ^i_{jk} тензор не образуют, но из них можно построить тензор

$$\alpha^i_{jk} = \lambda^i_{jk} - \lambda^i_{kj}. \tag{2.28}$$

Ввиду этого кососимметричная форма

$$A(u, v) = \Lambda(u, v) - \Lambda(v, u) \tag{2.29}$$

от переменных u и v представляет собой билинейную функцию на пространстве $T_e \times T_e$ со значениями в T_e, где T_e — касательное пространство к лупе $Q(\cdot)$ в единице e.

Точно так же из форм M и N (см. (2.25)), которые не инвариантны относительно допустимых преобразованиях координат в $Q(\cdot)$, строится инвариантная трилинейная форма

$$B(u, v, w) = M(u, v, w) - N(u, v, w) + \Lambda(\Lambda(u, v), w) - \Lambda(u, \Lambda(v, w)). \tag{2.30}$$

Альтернируя это равенство по переменным $u,\ v,\ w$ и учитывая симметрию форм M и N, получим соотношение

$$B(u,v,w)+B(v,w,u)+B(w,u,v)-B(v,u,w)-B(w,v,u)-B(u,w,v)= \\ =A(A(u,v),w)+A(A(v,w),u)+A(A(w,u),v),$$

которое можно переписать в виде

$$\operatorname{alt} B(u,v,w)=\frac{1}{2}\operatorname{alt} A(A(u,v),w). \tag{2.31}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.13. *В касательном пространстве T_e локальной гладкой лупы $Q(\cdot)$ инвариантным образом определены билинейная и трилинейная формы $A(u,v)$ и $B(u,v,w)$, связанные между собой соотношением* (2.31).

Координаты вектора $B(u,v,w)$ могут быть записаны следующим образом:

$$B^i(u,v,w)=\beta^i_{jk\ell}u^jv^kw^\ell,$$

где в силу (2.30) и (2.25) величины $\beta^i_{jk\ell}$ выражаются через коэффициенты тейлоровского разложения (2.24):

$$\beta^i_{jk\ell}=\mu^i_{jk\ell}-\nu^i_{jk\ell}+\lambda^m_{jk}\lambda^i_{m\ell}-\lambda^m_{k\ell}\lambda^i_{jm}. \tag{2.32}$$

При допустимых преобразованиях координат в U_e величины $\beta^i_{jk\ell}$ преобразуются по тензорному закону.

3. Выясним алгебраический смысл форм $A(u,v)$ и $B(u,v,w)$. Обозначим ${}^{-1}x$ и x^{-1} левый и правый обратные элементы для элемента x из $Q(\cdot)$, так что ${}^{-1}x\cdot x=x\cdot x^{-1}=e$.

Рассмотрим в лупе $Q(\cdot)$ *левый и правый коммутаторы*:

$$\alpha_\ell(u,v)={}^{-1}(v\cdot u)(u\cdot v),\quad \alpha_r(u,v)=(u\cdot v)(v\cdot u)^{-1}, \tag{2.33}$$

а также ее *левый и правый ассоциаторы*:

$$\beta_\ell(u,v,w)={}^{-1}(u\cdot(v\cdot w))((u\cdot v)\cdot w),\quad \beta_r(u,v,w)=((u\cdot v)\cdot w)(u\cdot(v\cdot w))^{-1}. \tag{2.34}$$

Теорема 2.14. *С точностью до бесконечно малых высших порядков коммутаторы и ассоциаторы лупы $Q(\cdot)$ совпадают с определенными выше формами $A(u,v)$ и $B(u,v,w)$, т. е. имеют место соотношения*

$$\alpha_\ell(u,v)=A(u,v)+O(\rho^2),\quad \alpha_r(u,v)=A(u,v)+O(\rho^2); \tag{2.35}$$

$$\beta_\ell(u,v,w)=B(u,v,w)+O(\rho^3),\quad \beta_r(u,v,w)=B(u,v,w)+O(\rho^3). \tag{2.36}$$

□ Сначала выразим обратные элементы ${}^{-1}z$ и z^{-1} через элемент z в лупе $Q(\cdot)$. Так как ${}^{-1}zz=e$, то из формулы (2.24) получаем:

$${}^{-1}z=-z-\Lambda({}^{-1}z,z)-\frac{1}{2}M({}^{-1}z,{}^{-1}z,z)-\frac{1}{2}N({}^{-1}z,z,z)+o(\rho^3).$$

Заменяя в правой части ${}^{-1}z$ с помощью этой же формулы, придем к равенству

$${}^{-1}z=-z+\Lambda(z,z)+\sigma(z,z,z)+o(\rho^3), \tag{2.37}$$

где

$$\sigma(z,z,z)=-\frac{1}{2}(M(z,z,z)-N(z,z,z))-\Lambda(\Lambda(z,z),z). \tag{2.38}$$

Аналогично вычисляется и правый обратный элемент:

$$z^{-1}=-z+\Lambda(z,z)+\tau(z,z,z)+o(\rho^3), \tag{2.39}$$

где

$$\tau(z,z,z)=\frac{1}{2}(M(z,z,z)-N(z,z,z))-\Lambda(z,\Lambda(z,z)).$$

Далее, так как из (2.24) следует

$$u \cdot v = v + u + \Lambda(v, u) + o(\rho^2),$$

то в силу (2.37) имеем:

$$^{-1}(v \cdot u) = -v - u - \Lambda(v, u) + \Lambda(v + u, v + u) + o(\rho^2) = -v \cdot u + \Lambda(u + v, u + v) + o(\rho^2). \quad (2.40)$$

Теперь вычислим коммутатор $\alpha_e(u, v)$. Пользуясь формулами (2.24) и (2.40), находим:

$$\begin{aligned} \alpha_e(u, v) &= {}^{-1}(v \cdot u) + (u \cdot v) + \Lambda({}^{-1}(v \cdot u), u \cdot v) + o(\rho^2) = \\ &= -v \cdot u + \Lambda(u + v, u + v) + u \cdot v + \Lambda(-v - u, u + v) + o(\rho^2) = \\ &= u \cdot v - v \cdot u + o(\rho^2) = \Lambda(u, v) - \Lambda(v, u) + o(\rho^2) = A(u, v) + o(\rho^2). \end{aligned}$$

Точно так же доказывается и вторая формула (2.35).

Для доказательства соотношений (2.36) вычислим сначала прозведения $(u \cdot v) \cdot w$ и $u \cdot (v \cdot w)$. Дважды применяя формулу (2.26), получим:

$$\begin{aligned} (u \cdot v) \cdot w &= t + \widetilde{\Lambda} + \widetilde{M} + \widetilde{N} + M(u, v, w) + \Lambda(\Lambda(u, v), w) + o(\rho^3), \\ u \cdot (v \cdot w) &= t + \widetilde{\Lambda} + \widetilde{M} + \widetilde{N} + N(u, v, w) + \Lambda(u, \Lambda(v, w)) + o(\rho^3), \end{aligned} \quad (2.41)$$

где

$$t = u + v + w, \quad \widetilde{\Lambda} = \Lambda(u, v) + \Lambda(u, w) + \Lambda(v, w),$$

$$\widetilde{M} = \frac{1}{2}(M(u, u, v) + M(u, u, w) + M(v, v, w)), \quad \widetilde{N} = \frac{1}{2}(N(u, v, v) + N(u, w, w) + N(v, w, w)).$$

С помощью формулы (2.37) находим:

$$^{-1}(u \cdot (v \cdot w)) = -u \cdot (v \cdot w) + \Lambda(t + \widetilde{\Lambda}, t + \widetilde{\Lambda}) + \sigma(t, t, t) + o(\rho^3).$$

Пользуясь далее формулой (2.24), имеем:

$$\begin{aligned} \beta_\ell(u, v, w) &= {}^{-1}(u \cdot (v \cdot w))((u \cdot v) \cdot w) = -u \cdot (v \cdot w) + \Lambda(t + \widetilde{\Lambda}, t + \widetilde{\Lambda}) + \\ &\quad + \sigma(t, t, t) + (u \cdot v) \cdot w + \Lambda(-t - \widetilde{\Lambda} + \Lambda(t, t), t + \widetilde{\Lambda}) + \frac{1}{2} M(t, t, t) - \frac{1}{2} N(t, t, t) + o(\rho^3) = \\ &= -u \cdot (v \cdot w) + (u \cdot v) \cdot w + \sigma(t, t, t) + \Lambda(\Lambda(t, t), t) + \frac{1}{2} M(t, t, t) - \frac{1}{2} N(t, t, t) + o(\rho^3). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (2.38) получаем:

$$\beta_\ell(u, v, w) = (u \cdot v) \cdot w - u \cdot (v \cdot w) + o(\rho^3).$$

Заменяя слагаемые в правой части с помощью (2.41), приходим к выражению:

$$\beta_\ell(u, v, w) = M(u, v, w) - N(u, v, w) + \Lambda(\Lambda(u, v, w)) - \Lambda(u, \Lambda(v, w)) + o(\rho^3).$$

В силу (2.30) эта формула совпадает с первым из соотношений (2.36). Точно так же доказывается и второе соотношение (2.36). ■

4. Рассмотренные в предыдущем пункте коммутаторы и ассоциаторы лупы $Q(\cdot)$ позволяют определить в касательном пространстве T_e этой лупы бинарную и тернарную операции, которые называются соответственно *коммутированием и ассоциированием.*

Пусть $u(t)$ и $v(t)$ — две гладкие линии на лупе Q, проходящие через точку e. Параметризуем эти линии так, чтобы $u(0) = v(0) = e$, и обозначим касательные векторы к ним в точке e буквами ξ и η. Напомним, что набор координат вектора мы договорились обозначать тем же символом, что и сам вектор. Тогда получим:

$$\xi = \lim_{t \to 0} \frac{u(t)}{t}, \quad \eta = \lim_{t \to 0} \frac{v(t)}{t}.$$

Рассмотрим на $Q(\cdot)$ еще две линии:

$$\alpha_e(t) = \alpha_e(u(t), v(t)), \quad \alpha_r(t) = \alpha_r(u(t), v(t)),$$

где α_e и α_r — коммутаторы лупы $Q(\cdot)$. Эти линии также проходят через точку e при $t = 0$. Рассмотрим далее те части этих линий, на которых $t \geqslant 0$, и введем на них новый параметр, положив $t = \sqrt{s}$.

Теорема 2.15. *Линии $\alpha_\ell(\sqrt{s})$ и $\alpha_r(\sqrt{s})$ имеют в точке e один и тот же касательный вектор $\zeta = A(\xi, \eta)$.*

□ В силу формул (2.33)

$$\alpha_\ell = A(u(t), v(t)) + o(t^2), \quad \alpha_r = A(u(t), v(t)) + o(t^2).$$

Поэтому

$$\zeta = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha_\ell(\sqrt{s})}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{\alpha_r(\sqrt{s})}{s} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}(A(u(t), v(t)) + o(t^2)) = A(\xi, \eta). \quad \blacksquare$$

Вектор ζ называется *коммутатором* векторов ξ и η и обозначается $[\xi, \eta]$. Таким образом,

$$[\xi, \eta] = A(\xi, \eta). \tag{2.42}$$

Коммутатор $[\xi, \eta]$, рассматриваемый как функция двух векторных аргументов ξ и η, есть бинарная операция в касательном пространстве T_e лупы $Q(\cdot)$. Эта операция и называется коммутированием (иногда коммутатором).

Замечание. Как видно, одним и тем же термином «коммутатор» называют функции (2.33), определенные на лупе Q, и функцию $[\xi, \eta]$, определенную в касательном пространстве этой лупы. Но это не приводит к путанице. Как мы увидим далее, аналогичная ситуация будет и с ассоциатором.

Из (2.42) следует, что операция коммутирования билинейна и кососимметрична:

$$[\xi, \eta] = -[\xi, \eta]. \tag{2.43}$$

Рассмотрим далее на лупе $Q(\cdot)$ три гладкие линии $u(t)$, $v(t)$ и $w(t)$, параметризованые так, что $u(0) = v(0) = w(0) = e$. Обозначим касательные векторы к ним в точке e буквами ξ, η, ζ:

$$\xi = \lim_{t\to 0} \frac{u(t)}{t}, \quad \eta = \lim_{t\to 0} \frac{v(t)}{t}, \quad \zeta = \lim_{t\to 0} \frac{w(t)}{t}.$$

Построим еще две линии, также проходящие через точку e:

$$\beta_\ell(t) = \beta_\ell(u(t), v(t), w(t)), \qquad \beta_r(t) = \beta_r(u(t), v(t), w(t)).$$

Введем на них новый параметр, положив $t = s^{1/3}$.

Теорема 2.16. *Линии $\beta_\ell(s^{1/3})$ и $\beta_r(s^{1/3})$ имеют в точке e один и тот же касательный вектор $\Theta = B(\xi, \eta, \zeta)$.*

□ В силу (2.36) имеем

$$\beta_\ell(t) = B(u(t), v(t), w(t)) + o(t^3), \quad \beta_r(t) = B(u(t), v(t), w(t)) + o(t^3),$$

Поэтому

$$\Theta = \lim_{s\to 0} \frac{\beta_\ell(s^{1/3})}{s} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t^3}(B(u(t), v(t), w(t)) + o(t^3)) = B(\xi, \eta, \zeta). \quad \blacksquare$$

Вектор Θ назовем *ассоциатором* векторов ξ, η, ζ и обозначим (ξ, η, ζ). Из предыдущей формулы имеем:

$$(\xi, \eta, \zeta) = B(\xi, \eta, \zeta). \tag{2.44}$$

Трилинейная операция, определяемая ассоциатором в касательном пространстве T_e лупы $Q(\cdot)$, называется ассоциированием (иногда ассоциатором).

Из соотношения (2.30) следует, что операции коммутирования и ассоциирования связаны соотношением

$$\mathrm{alt}(\xi, \eta, \zeta) = J(\xi, \eta, \zeta), \tag{2.45}$$

где

$$J(\xi, \eta, \zeta) = [[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta].$$

Равенство (2.45) представляет собой записанное в других обозначениях соотношение (1.31), которое мы назвали обобщенным тождеством Якоби.

Определение. *W-алгеброй или алгеброй Акивиса называется линейное пространство, в котором определены две полилинейные операции: бинарная $[\xi,\eta]$ и тернарная (ξ,η,ζ), причем первая из них кососимметрична и эти операции связаны обобщенным тождеством Якоби.*

Итак, доказана

Теорема 2.17. *Касательное пространство T_e гладкой лупы $Q(\cdot)$ является W-алгеброй относительно операций коммутирования и ассоциирования. Эта W-алгебра называется касательной к лупе Q.*

В частности, если лупа $Q(\cdot)$ является группой Ли, то ее ассоциаторы β_ℓ и β_r, определенные формулами (2.36), тождественно равны единице. В этом случае операция ассоциирования в пространстве T_e становится тривиальной, т. е. $(\xi,\eta,\zeta)=0$ для любых векторов ξ, η, ζ из T_e; тождество (2.45) превращается в тождество Якоби $J(\xi,\eta,\zeta)=0$, а касательная W-алгебра лупы $Q(\cdot)$ — в алгебру Ли.

§ 2.5. Касательные алгебры многомерной три-ткани

Рассмотрим гладкую три-ткань $W=(X,\lambda_\alpha)$, $\dim X=2r$, $\alpha,\beta,\gamma=1,2,3$, и обозначим, как и выше, базу слоения λ_α символом X_α. Три-ткань W порождает 6 локальных гладких квазигрупп $q_{\alpha\beta}\colon X_\alpha\times X_\beta\to X_\gamma$ (α,β,γ различны), причем отображение $q_{\alpha\beta}$ ставит в соответствие слоям $\mathcal{F}_\alpha$ из λ_α и $\mathcal{F}_\beta$ из λ_β, пересекающимся в точке p многообразия X, слой $\mathcal{F}_\gamma$ из λ_γ, также проходящий через p. Гладкие квазигруппы $q_{\alpha\beta}$ называются координатными квазигруппами три-ткани W. Как и в случае полной три-ткани, они будут парастрофами координатной квазигруппы $q\equiv q_{12}$.

Между парастрофами $q_{\alpha\beta}$ геометрической три-ткани $W=(X,\lambda_\alpha)$ и связностями $\Gamma_{\alpha\beta}$, введенными в § 8 гл. 1, имеется естественное соответствие $\Gamma_{\alpha\beta}\longleftrightarrow q_{\alpha\beta}$, так как парастрофу $q_{\alpha\beta}$ отвечает выбор форм $\underset{\alpha}{\omega^i}$ и $\underset{\beta}{\omega^i}$ в качестве базисных на многообразии X три-ткани. Поэтому таблице 1.1 на с. 29 можно придать иной смысл, соотнеся приведенные там тензоры ткани W с парастрофами $q_{\alpha\beta}$, т. е. с различными координатизациями этой ткани.

Будем считать в дальнейшем, что ткань W координатизирована с помощью квазигруппы q_{12}, т. е. многообразие X локально диффеоморфно прямому произведению баз X_1 и X_2 слоений λ_1 и λ_2.

По аналогии с полной три-тканью, в окрестности точки $p=(a,b)$ многообразия X ($a\in X_1$, $b\in\in X_2$) определим локальную координатную лупу $\ell(a,b)$, операция в которой определяется, как и в § 3 для полной три-ткани, формулой (2.3). Эта операция может быть записана также в виде

$$u\circ v=q({}^{-1}q(u,b),q^{-1}(a,v)).\tag{2.46}$$

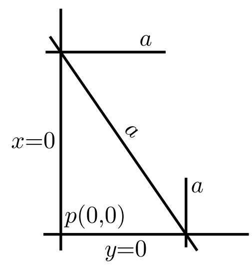

Рис. 34

В соответствии с § 4 в касательном пространстве T_e координатной лупы $\ell(a,b)$ определена W-алгебра, которую назовем *касательной W-алгеброй три-ткани W в точке $p=(a,b)$*. Расслоение этих алгебр назовем *касательной W-алгеброй три-ткани W*.

Найдем связь между тензорами кручения и кривизны три-ткани W, введенными в гл.1, и коммутаторами и ассоциаторами ее локальных W-алгебр. Для этого три-ткань W в окрестности точки p параметризуем специальным образом. Слои $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ первых двух слоений, проходящие через точку p, зададим уравнениями $x=0$ и $y=0$, а всяким двум слоям ткани, пересекающимся на слоях $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, припишем одинаковое значение параметра (рис. 34). Тогда функция $z=f(x,y)$ ткани W, определенная в некоторой окрестности точки $p(0,0)$, удовлетворяет условиям $f(0,y)=y$, $f(x,0)=x$. Ввиду этого координатная квазигруппа q ткани W становится лупой с единицей $e(0,0...0)$ и совпадает с координатной лупой $\ell(0,0)$. Будем называть описанную параметризацию *стандартной.* Стандартная параметризация сохраняется при таких согласованных преобразованиях локальных координат на базах X_α, при которых единица e лупы сохраняет свои нулевые координаты. Назовем такие преобразования *допустимыми.*

В касательном пространстве $T_p(X)$ к многообразию X допустимые преобразования координат индуцируют линейные преобразования вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, оставляющие инвариантными подпространства T_α, касательные к слоям ткани W, проходящим через точку p. Эти преобразования образуют группу $G = GL(r)$, которая (см. §3 гл. 1) является структурной группой G_W-структуры, определяемой три-тканью W на многообразии X. Они индуцируют также линейные преобразования в касательном пространстве T_e к лупе $\ell(0,0)$ в единице e. Ввиду этого все тензоры, связанные с три-тканью, можно рассматривать как тензоры в r-мерном пространстве T_e; тензорные поля — как поля в расслоении, базой которого является многообразие X размерности $2r$, а слоями — r-мерные линейные пространства, касательные к координатным лупам.

Итак, пусть три-ткань W параметризована в окрестности точки $p = (0,0)$ стандартным образом. Тогда разложение функции ткани $z = f(x,y)$ в ряд Тейлора (с точностью до обозначения переменных) имеет вид (2.24). Пользуясь им, вычислим в точке p производные функции f до третьего порядка включительно. Имеем:

$$\begin{gathered} \frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \delta^i_j, \quad \frac{\partial f^i}{\partial y^j} = \delta^i_j, \quad \overline{g}^i_j = \delta^i_j, \quad \widetilde{g}^i_j = \delta^i_j, \\ \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial y^k} = \lambda^i_{jk}, \quad \frac{\partial^3 f^i}{\partial x^j \partial x^k \partial y^\ell} = \mu^i_{jk\ell}, \quad \frac{\partial^3 f^i}{\partial x^j \partial y^k \partial y^\ell} = \nu^i_{jk\ell}, \end{gathered} \tag{2.47}$$

а остальные производные равны нулю.

Подставляя найденные значения производных в формулы (1.55) и (1. 56), найдем, что в точке p

$$\Gamma^i_{jk} = -\lambda^i_{jk}, \quad a^i_{jk} = -\lambda^i_{[jk]},$$

откуда в силу (2.28) следует, что в этой точке

$$a^i_{jk} = -\frac{1}{2}\alpha^i_{jk}. \tag{2.48}$$

Таким образом, *тензор кручения три-ткани W только числовым множителем отличается от тензора α^i_{jk}, определяющего коммутатор ее локальной координатной лупы $\ell(0,0)$.*

Из формулы (1.49) с учетом (2.47) получаем следующее выражение для тензора кривизны ткани W в точке p:

$$b^i_{jk\ell} = \nu^i_{kj\ell} - \mu^i_{jk\ell} + \lambda^m_{j\ell}\lambda^i_{km} - \lambda^m_{kj}\lambda^i_{m\ell}. \tag{2.49}$$

Сравнивая с (2.32), находим, что

$$b^i_{jk\ell} = -\beta^i_{kj\ell}, \tag{2.50}$$

т. е. *тензор кривизны ткани W только знаком и расположением индексов отличается от тензора $\beta^i_{jk\ell}$, определяющего ассоциатор лупы $\ell(0,0)$.*

Обозначим $a(\xi,\eta)$ и $b(\xi,\eta,\zeta)$ полилинейные формы, определяемые тензорами кручения и кривизны три-ткани. Тогда предыдущие соотношения перепишутся в виде:

$$a(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}A(\xi,\eta), \quad b(\xi,\eta,\zeta) = -B(\eta,\xi,\zeta). \tag{2.51}$$

Ввиду этого операции в касательной W-алгебре примут следующий вид:

$$[\xi,\eta] = -2a(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta,\zeta) = -b(\eta,\xi,\zeta).$$

Следующая теорема дает необходимые тензорные условия принадлежности три-ткани W к одному из основных классов, связанных с условиями замыкания.

Теорема 2.18. *Если на три-ткани W выполнено условие замыкания, указанное в первом столбце таблицы* 2.2, *то тензоры кручения и кривизны этой ткани удовлетворяют условиям, указанным во втором ее столбце.*

□ Получим, например, соотношение для ткани B_ℓ. Согласно теореме 2.6, в координатных лупах этой ткани выполняется тождество левой альтернативности $u \circ (u \circ v) = (u \circ u) \circ v$. С другой стороны, из формулы (2.36) следует, что

$$^{-1}(u \circ (u \circ v))((u \circ u) \circ v) = B(u,u,v) + o(\rho^3).$$

В силу левой альтернативности левая часть этого равенства обращается в нуль, что дает соотношение $B(u,u,v) = 0$. Из (2.51) находим, что $b(u,u,v) = 0$; после линеаризации имеем $b(u,v,w) + b(v,u,w) = 0$. ■

Таблица 2.2

Условие замыкания	Условия на тензоры a и b
T	$a = 0,\ b = 0$
R	$b = 0$
B_ℓ	$b(u,v,w) = -b(v,u,w)$
B_r	$b(u,v,w) = -b(w,v,u)$
B_m	$b(u,v,w) = -b(u,w,v)$
M	$b = \operatorname{alt} b$
H	$b(u,u,u) = 0$

Докажем достаточность приведенных в таблице тензорных условий для классов T и R. По теореме 1.3 соотношения $a = 0$, $b = 0$ характеризуют параллелизуемые три-ткани, на которых, очевидно, замыкаются все перечисленные выше фигуры, в том числе и фигуры T. Следовательно, *класс геометрических тканей T совпадает с классом параллелизуемых тканей и характеризуется условием $a = b = 0$.*

Соотношение $b = 0$, как показано в теореме 1.4, характеризует групповые три-ткани. Согласно определению групповой ткани, данному в § 2, ее координатная квазигруппа есть группа Ли G. Из теоремы Алберта (с. 43) вытекает, что все координатные лупы групповой три-ткани также являются группами, поскольку они изотопны координатной группе G. В силу теоремы 2.6 групповая три-ткань является тканью R. Поэтому *класс групповых геометрических тканей совпадает с классом тканей R и характеризуется тензорным условием $b = 0$.*

Достаточность тензорных условий для тканей Бола и Муфанг будет доказана в следующих главах.

§ 2.6. Канонические координаты в локальной аналитической лупе

1. Хорошо известно, какую важную роль играют в теории групп Ли канонические координаты. В этих координатах

а) всякая однопараметрическая подгруппа группы Ли задается линейными уравнениями, причем при умножении элементов в этой подгруппе их координаты складываются;

б) ряд Тейлора произведения $u \cdot v$ вполне определяется структурным тензором группы, т. е. все члены ряда выражаются только через ее коммутатор $[uv]$ (формула Кэмпбелла–Хаусдорфа);

в) всякий автоморфизм группы Ли, записанный в канонических координатах, является линейным преобразованием.

В отличие от групп Ли, в произвольной локальной аналитической лупе $Q(\cdot)$, не существует, вообще говоря, однопараметрических подгрупп, и даже подлуп. Нет в ней и нетривиальных автоморфизмов. Тем не менее, и в локальной аналитической лупе можно ввести канонические координаты, которые обладают свойствами, аналогичными перечисленным выше.

Итак, пусть $Q(\cdot)$ — локальная аналитическая лупа размерности r с единицей e. Выберем локальные координаты в некоторой окрестности единице так, чтобы координаты последней были равны нулю.

Как и в §4 умножение в выбранных координатах запишем в виде $w = u \cdot v = f(u,v)$, а разложение функции f в ряд Тейлора — в виде

$$u \cdot v = f(u,v) = \sum_{s=1}^{\infty} \underset{s}{\Lambda}(u,v), \tag{2.52}$$

где $\underset{s}{\Lambda}(u,v)$ — однородный многочлен степени s от локальных координат u^i и v^i.

В силу равенств $f(u,0) = f(0,u) = u$ многочлены $\underset{s}{\Lambda}(u,v)$ удовлетворяют условиям

$$\underset{1}{\Lambda}(u,v) = u + v, \quad \underset{s}{\Lambda}(0,v) = \underset{s}{\Lambda}(u,0) = 0, \quad s \geqslant 2, \tag{2.53}$$

из которых следует, что их можно записать в виде:

$$\underset{s}{\Lambda}(u, v) = \sum_{k=1}^{s-1} \frac{1}{(s-k)!k!} \underset{s-k,k}{\Lambda}(u, ..., u, v, ..., v), \tag{2.54}$$

где $\underset{s-k,k}{\Lambda}(u, ..., u, v, ..., v)$ — однородный многочлен степени $s-k$ относительно u и степени k относительно v. Заметим, что обозначения в разложении (2.52) несколько отличаются от аналогичных обозначений в формуле (2.24), которая содержит члены только до третьего порядка.

Рассмотрим на лупе Q еще одну систему аналитических координат $\widetilde{u}^i$, и пусть умножение в них записывается в виде $\widetilde{w} = \widetilde{f}(\widetilde{u}, \widetilde{v})$. Старые и новые переменные связаны соотношениями

$$u = \gamma(\widetilde{u}), \quad v = \gamma(\widetilde{v}), \quad w = \gamma(\widetilde{w}), \tag{2.55}$$

где γ — локальный диффеоморфизм, удовлетворяющий условию $\gamma(0) = 0$. Это условие означает, что единица e сохраняет свои нулевые координаты, ввиду чего ряд Тейлора функции $\widetilde{f}$ также обладает свойствами (2.53), а разложение для γ с точностью до невырожденного линейного преобразования имеет вид

$$\gamma(\widetilde{u}) = \widetilde{u} + \sum_{s=2}^{\infty} P_s(\widetilde{u}), \tag{2.56}$$

где $P_s(\widetilde{u})$ — однородный многочлен степени s.

Определение. *Локальные координаты $\widetilde{u}^i$ в лупе Q, определенные в некоторой окрестности U единицы $e(0)$, называются каноническими, если для всякого $\widetilde{u}$ из U выполняется равенство*

$$\widetilde{f}(\widetilde{u}, \widetilde{u}) = 2\widetilde{u}. \tag{2.57}$$

Это определение обобщает понятие канонических координат в группе Ли, так как для последних соотношение (2.57) выполняется.

Теорема 2.19. *В окрестности единицы всякой локальной аналитической лупы можно ввести канонические координаты, причем, с точностью до линейного преобразования, единственным образом.*

□ В силу (2.55) функции f и $\widetilde{f}$ связаны между собой соотношением

$$\gamma(\widetilde{f}(\widetilde{u}, \widetilde{v})) = f(\gamma(\widetilde{u}), \gamma(\widetilde{v})).$$

Отсюда, учитывая (2.57), находим:

$$\gamma(2\widetilde{u}) = f(\gamma(\widetilde{u}), \gamma(\widetilde{u})) = f_d(\gamma(\widetilde{u})), \tag{2.58}$$

где f_d — ограничение f на диагональ.

Из (2.52) следует, что

$$f_d(u) = 2u + \sum_{s=2}^{\infty} \underset{s}{\Lambda}_d(u), \tag{2.59}$$

где $\underset{s}{\Lambda}_d(u)$ обозначает $\underset{s}{\Lambda}(u, v)|_{u=v}$. Подставляя (2.56) и (2.59) в равенства (2.58) и опуская «тильду» над u, получим:

$$\begin{aligned} &2u + P_2(2u) + P_3(2u) + ... = \\ &\quad = 2[u + P_2(u) + P_3(u) + ...] + \underset{2}{\Lambda}_d(u + P_2(u) + P_3(u) + ...) + \underset{3}{\Lambda}_d(u + P_2(u) + P_3(u) + ...) + ... \end{aligned}$$

Приравнивая многочлены одинаковой степени и учитывая их однородность, находим:

$$\begin{aligned} 4P_2(u) &= 2P_2(u) + \underset{2}{\Lambda}_d(u), \\ 8P_3(u) &= 2P_3(u) + 2\underset{2}{\Lambda}(u, P_2(u)) + \underset{3}{\Lambda}_d(u), \\ &\ldots\ldots \\ 2^k P_k(u) &= 2P_k(u) + \sum_{i_1+i_2=k} \underset{2}{\Lambda}(P_{i_1}(u), P_{i_2}(u)) + \sum_{i_1+i_2+i_3=k} \underset{3}{\Lambda}(P_{i_1}(u), P_{i_2}(u), P_{i_3}(u)) + ... + \underset{k}{\Lambda}(P_1(u), ..., P_1(u)). \end{aligned}$$

Отсюда для многочленов $P_k(u)$ при $k \geqslant 2$ получается рекуррентное соотношение:

$$P_k(u) = A_k\Big[\sum_{s=2}^{k}\sum_{i_1+\ldots+i_s=k}\underset{s}{\Lambda}(P_{i_1}(u), P_{i_2}(u), \ldots, P_{i_s}(u))\Big], \tag{2.60}$$

где $A_k = \left(2^k-2\right)^{-1}$, а i_1, i_2, …, i_k — натуральные числа. Пользуясь им, получаем, например:

$$P_2(u) = \frac{1}{2}\underset{2}{\Lambda_d}(u), \quad P_3(u) = \frac{1}{6}\Big[\underset{2}{\Lambda}(u, \underset{2}{\Lambda}(u)) + \underset{3}{\Lambda_d}(u)\Big],$$

и т. д. Таким образом, если ряд (2.56) сходится, то единственность функции $\gamma(u)$ очевидна.

Докажем сходимость ряда (2.56). Для этого напомним, что коэффициенты $\underset{k}{\Lambda}$ тейлоровского разложения всякой вещественной аналитической функции $f(u)$ удовлетворяют неравенствам Коши:

$$\|\underset{k}{\Lambda}\| < MR^{-k}, \tag{2.61}$$

причем норма $\|\underset{k}{\Lambda}\|$ определяется как $\sup\underset{k}{\Lambda}$ на единичной сфере $\|u\| = 1$, а M и R — некоторые постоянные. При этом если $f(u)$ — векторная функция векторного аргумента $u = (u^i)$, то $\underset{k}{\Lambda}(u)$ будут векторозначными формами от переменных u^i.

Обратно, если выполнены условия (2.61), то ряд, составленный из норм $\|\underset{k}{\Lambda}\|$, сходится. Следовательно, сходится и ряд $\underset{0}{\Lambda}(u) + \underset{1}{\Lambda}(u) + \underset{3}{\Lambda}(u) + \ldots$ (см., например, [Шв-1], с. 129).

Перейдем теперь к доказательству сходимости ряда (2.56). Нам нужно доказать существование таких постоянных N и ρ, что выполняются неравенства

$$\|P_k\| < N\rho^{-k}. \tag{2.62}$$

Так как ряд (2.59) сходится к функции f_d, то существуют такие постоянные M и R, что для многочленов $\underset{k}{\Lambda}$, входящих в разложение (2.59), выполняются неравенства (2.61). Покажем, что условие (2.62) будет выполнено, если положить

$$\rho < N < 2R^2M^{-1}. \tag{2.63}$$

Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 1$ имеем $P_1(u) = u$, поэтому $\|P_1\| = 1$ и $\|P_1\| < N\rho^{-1}$ в силу (2.63). Предположим теперь, что неравенства (2.62) выполняются для всех натуральных чисел, меньших k, и докажем его для k. Из (2.60) имеем:

$$\|P_k\| \leqslant A_k\bigg(\sum_{i_1+i_2=k}\|\underset{2}{\Lambda}\|\cdot\|P_{i_1}\|\cdot\|P_{i_2}\| + \sum_{i_1+i_2+i_3=k}\|\underset{3}{\Lambda}\|\cdot\|P_{i_1}\|\cdot\|P_{i_2}\|\cdot\|P_{i_3}\| + \ldots + \|\underset{k}{\Lambda}\|\cdot\|P_1\|^k\bigg). \tag{2.64}$$

Количество слагаемых в первой сумме справа равно числу способов записи числа k в виде суммы двух натуральных чисел (с учетом порядка), т. е. $k-1$. Количество слагаемых во второй сумме равно числу разбиений для числа k на 3 слагаемых, поэтому оно равно C_{k-1}^2. Следующие суммы содержат C_{k-1}^3, …, C_{k-1}^{k-1} слагаемых. Так как каждый из индексов i_1, i_2,… меньше k, то по предположению индукции $\|P_{i_s}\| < N\rho^{-i_s}$. В силу этого из неравенства (2.64) следует неравенство

$$\|P_k\| < \frac{MA_k}{\rho^k}\left(C_{k-1}^1\frac{N^2}{R^2} + C_{k-1}^2\frac{N^3}{R^3} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}\frac{N^k}{R^k}\right).$$

Здесь учтено, что $i_1+i_2 = k$, $i_1+i_2+i_3 = k$,…. Правая часть преобразуется к виду:

$$A_k\rho^{-k}MNR^{-1}\Big[\left(1+\frac{N}{R}\right)^{k-1} - 1\Big] = \rho^{-k}MNR^{-1}\Big[\left(1+\frac{N}{R}\right)^{k-1} - 1\Big]\left(2^k-2\right)^{-1}.$$

Из (2.63) следует $MN < 2R^2$, ввиду чего получаем:

$$\|P_k\| < R\rho^{-k}\left[(1+NR^{-1})^{k-1} - 1\right]\left(2^k-2\right)^{-1}.$$

Как видно из (2.59), $\|\underset{1}{\Lambda}\| = 2$, так что неравенство (2.61) при $k = 1$ дает $2 < MR^{-1}$. Используя неравенство (2.63), находим, что

$$NR^{-1} < 2RM^{-1} < 1.$$

Поэтому

$$\frac{(1+NR^{-1})^{k-1}-1}{2^{k-1}-1} = \frac{N}{R}\,\frac{1+(1+NR^{-1})+(1+NR^{-1})^2+\ldots+(1+NR^{-1})^{k-2}-1}{1+2+2^2+\ldots+2^{k-2}} < \frac{N}{R}$$

и $\|P_k\| < R\rho^{-k}\cdot NR^{-1} = N\rho^{-k}$, то есть мы пришли к (2.62). ■

Разложение (2.52), записанное в канонических координатах, называется *каноническим разложением лупы* $Q(\cdot)$. Многочлены $\underset{s}{\Lambda}$, входящие в каноническое разложение, удовлетворяют соотношениям

$$\underset{s}{\Lambda}(u,u) = 0, \tag{2.65}$$

которые получаются из (2.52), если положить $u = v$ и воспользоваться определением канонических координат. Используя соотношения (2.54), перепишем последние равенства в развернутой форме:

$$\underset{1,1}{\Lambda}(u,u) = 0, \quad \underset{2,1}{\Lambda}(u,u) + \underset{1,2}{\Lambda}(u,u) = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{p=1,\, p+q=s}^{s-1} C_s^p \underset{p,q}{\Lambda}(u,u) = 0. \tag{2.66}$$

Первое из равенств означает, что форма $\underset{2}{\Lambda} = \underset{1,1}{\Lambda}$ кососимметрична.

В координатной форме соотношения (2.66) имеют следующий вид:

$$\sum_{p=1,\, p+q=s}^{s-1} C_s^p \underset{p,q}{\Lambda}{}^i_{(j_1 j_2 \ldots j_p k_{p+1} \ldots k_{p+q})} = 0. \tag{2.67}$$

2. Уже отмечалось, что канонические координаты в лупе Q определены с точностью до невырожденного линейного преобразования. При таких преобразованиях формы $\underset{p,q}{\Lambda}$, определяющие каноническое разложение, меняются по тензорному закону. Следовательно, они инвариантно определены в касательном пространстве T_e к лупе Q. С их помощью введем в T_e линейные операции: одну бинарную, две тернарных и т. д., определив произведения векторов $\xi_1, \xi_2, \ldots$ как значения форм:

$$\underset{1,1}{\Lambda}(\xi_1,\xi_2), \quad \underset{2,1}{\Lambda}(\xi_1,\xi_2,\xi_3), \quad \ldots, \quad \underset{p,q}{\Lambda}(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{p+q}). \tag{2.68}$$

Эти операции не являются независимыми, а связаны между собой соотношениями (2.66). Кроме того они удовлетворяют условиям симметрии: формы $\underset{p,q}{\Lambda}$, как ясно из их определения, симметричны по p первым и по q последним аргументам.

Определение. Совокупность операций $\underset{p,q}{\Lambda}$ при $p+q \leqslant k$ назовем *касательной* Λ_k*-алгеброй лупы* Q, а совокупность всех таких операций (т. е. при любых k) — *касательной* Λ*-алгеброй этой лупы.*

Бинарная операция в касательной Λ-алгебре лупы Q совпадает с половиной ее коммутатора, введенного в § 4, а ассоциатор этой лупы выражается через ее операции в ее Λ-алгебре следующим образом:

$$(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \underset{2,1}{\Lambda}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) - \underset{1,2}{\Lambda}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) + \underset{1,1}{\Lambda}(\underset{1,1}{\Lambda}(\xi_1,\xi_2),\xi_3)) - \underset{1,1}{\Lambda}((\xi_1,\underset{1,1}{\Lambda}(\xi_2,\xi_3)).$$

С помощью канонических координат естественным образом определяется экспоненциальное отображение окрестности нуля касательного пространства T_e к аналитической лупе Q в эту лупу: $\exp u = (u^i)$, где (u^i) — канонические координаты в Q.

В последующих утверждениях перечисленные в начале параграфа свойства канонических координат группы Ли переносятся на аналитические лупы.

Теорема 2.20. *Всякая однопараметрическая подлупа локальной аналитической лупы задается в канонических координатах линейными уравнениями.*

□ Пусть, как и выше, умножение в лупе Q записывается в виде $w = f(u,v)$, а единица e имеет нулевые координаты. Предположим, что $u(t), t \in I \subset \mathbf{R}$ — подлупа, причем произведение точек

$u(t)$ и $u(s)$ имеет параметр $\tau = \tau(t,s), \tau \in C^\omega$. Тогда для любых допустимых t и s из интервала I выполняется условие

$$f(u(t), u(s)) = u(\tau(t,s)). \tag{2.69}$$

Пусть $u(0) = e$. Полагая в (2.69) $t = 0$, затем $s = 0$, получим $\tau(0,s) = s$, $\tau(t,0) = t$. Поэтому ряд Тейлора функции $\tau(t,s)$ имеет вид

$$\tau(t,s) = t + s + \mu_2(t,s) + \mu_3(t,s) + ..., \tag{2.70}$$

где $\mu_i(t,s)$ — однородный многочлен степени i от переменных t и s. Полагая в (2.69) $t = s$, получаем

$$f(u(t), u(t)) = u(\tau(t,t)).$$

Предположим теперь, что координаты u^i точки u являются каноническими. Тогда в силу их определения предыдущее равенство дает

$$2u^i(t) = u^i(\tau(t,t)). \tag{2.71}$$

Так как $u^i(0) = 0$, то ряд Тейлора функции $u^i(t)$ имеет вид

$$u^i(t) = \xi_1^i t + \xi_2^i t^2 + ... \tag{2.72}$$

Кроме того, из (2.70) следует

$$\tau(t,t) = 2t + \mu_2 t^2 + \mu_3 t^3 + ...,$$

где $\mu_2, \mu_3, \ldots$ — некоторые постоянные. Подставляя эти разложения в (2.71), получим:

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^i t^k = \sum_{k=1}^{\infty} (2t + \sum_{j=2}^{\infty} \mu_j t^j)^k \xi_k^i.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned}
&2\xi_2^i = \mu_2 \xi_1^i + 4\xi_2^i, \\
&2\xi_3^i = \mu_3 \xi_1^i + 4\mu_2 \xi_2^i + 8\xi_3^i, \\
&\ldots\ldots \\
&2\xi_k^i = \mu_k \xi_1^i + (\ldots)\xi_2^i + \ldots + (\ldots)\xi_{k-1}^i + 2^k \xi_k^i, \ldots
\end{aligned}$$

Отсюда последовательно находим, что векторы $\xi_2^i, \xi_3^i, \ldots$ коллинеарны вектору ξ_1^i, что и доказывает теорему. ■

Теорема 2.21. *Пусть Q — локальная аналитическая лупа, отнесенная к каноническим координатам $u^i, u^i(t) = \xi^i t$ — кривая на Q, проходящая через единицу e. Линия $u(t)$ будет однопараметрической подлупой в Q тогда и только тогда, когда касательное пространство к ней в точке e, определяемое вектором ξ, является подалгеброй касательной Λ-алгебры этой лупы.*

□ Так как координаты u^i канонические, то функции $u^i(t)$ удовлетворяют условию (2.69), которое, если воспользоваться разложением (2.52) и предыдущей теоремой, примет вид:

$$(t+s)\xi + \frac{1}{2}\underset{2,1}{\Lambda_d}(\xi)t^2 s + \frac{1}{2}\underset{1,2}{\Lambda_d}(\xi)ts^2 + \ldots = \tau(s,t)\xi,$$

где ξ — вектор с координатами ξ^i, и $\underset{1,1}{\Lambda}(\xi,\xi) = 0$ в силу (2.66). Это соотношение должно удовлетворяться тождественно относительно переменных s и t, что возможно в том и только том случае, если каждый из векторов $\underset{p,q}{\Lambda_d}(\xi)$ коллинеарен вектору ξ, т. е. если выполняются соотношения

$$\underset{p,q_\alpha}{\Lambda}(\xi,\xi,\ldots,\xi) = \underset{p,q}{\lambda}\xi, \quad \underset{p,q}{\lambda} \in \mathbf{R}. \tag{2.73}$$

Условие (2.73) в точности означает, что одномерное подпространство, определяемое вектором ξ, является подалгеброй относительно операции $\underset{p,q}{\Lambda}$ из касательной Λ-алгебры лупы Q. ■

Вектор ξ, удовлетворяющий условию (2.73), называется *собственным вектором тензора* $\underset{p,q}{\Lambda}$. Поэтому из теоремы 2.21 получаем

Следствие. *Линия $u(t)$ будет подлупой тогда и только тогда, когда касательный вектор к ней в точке e является собственным вектором для любого из тензоров $\underset{p,q}{\Lambda}$.*

Предположим, что все величины $\underset{p,q}{\lambda}$, входящие в уравнения (2.73), равны нулю. Тогда из соотношения (2.69) следует $f^i(u(t), u(s)) = (t+s)\xi^i$, т. е. подлупа $u(t)$ становится группой, а параметр t превращается в канонический параметр этой группы. Обратно: предположим, что $u(t)$ — подгруппа, и введем на ней канонический параметр условием $u^i(t) = t\xi^i$. Тогда в разложении функции $f(u(t), u(s))$ все слагаемые, кроме первого, равны нулю: $\underset{p,q}{\Lambda_\alpha}(\xi) = 0$. Это означает, что произведение любых векторов из одномерного касательного пространства, определяемого вектором ξ, относительно любой из операций $\underset{p,q}{\Lambda}$ равно нулю. По общепринятой терминологии всевозможные произведения элементов из алгебры A образуют так называемую производную алгебру. Поэтому из вышесказанного вытекает

Теорема 2.22. *Однопараметрическая подлупа локальной аналитической лупы Q является подгруппой тогда и только тогда, когда касательный вектор к ней в точке e будет собственным вектором с собственным числом, равным нулю для каждого из тензоров $\underset{p,q}{\Lambda}$. Другими словами, этот вектор порождает в касательной Λ-алгебре лупы Q одномерную подалгебру, производная Λ-алгебра от которой равна нулю.*

Заметим, что в алгебре Ли подобным свойством обладает всякая одномерная подалгебра.

Из теоремы 2.22 вытекает, что *аналитическая лупа Q обладает максимально возможным количеством однопараметрических подлуп тогда и только тогда, когда каждый вектор ξ ее касательной Λ-алгебры определяет одномерную подалгебру. Если, кроме того, для каждой из этих подалгебр производная подалгебра тривиальна, и только в этом случае, лупа Q обладает максимальным количеством однопараметрических подгрупп.*

Столь же несложно доказываются следующие утверждения 2.23–2.25.

Теорема 2.23. *Локальная аналитическая лупа Q обладает максимальным количеством однопараметрических подгрупп тогда и только тогда, когда в ней имеет место ассоциативность степеней с натуральными показателями, т. е. для любых $m, n \in N$ и любого $x \in Q$ выполняется равенство*

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

Теорема 2.24. *Пусть Q — локальная аналитическая лупа, отнесенная к каноническим координатам. Если $\varphi \in Aut\, Q$, $\varphi \in C^\omega$, то φ — линейное преобразование.*

Теорема 2.25. *Диффеоморфизм $\varphi\colon Q \to Q$ локальной аналитической лупы Q тогда и только тогда является автоморфизмом этой лупы, когда $\varphi(e) = e$ и производное отображение $d\varphi|_e$ является автоморфизмом касательной Λ-алгебры лупы Q.*

В заключение заметим, что канонические координаты могут быть введены и в C^k-гладких лупах, $k \leqslant \infty$. В этом случае соотношения (2.65)—(2.67) сохраняют свой смысл при $s \leqslant k$. Они могут быть получены последовательной канонизацией ряда (2.52) с помощью допустимых преобразований, сохраняющих условия (2.53). За подробностями отсылаем читателя к [А-1].

§ 2.7. Алгебраические свойства связности Черна

Соответствие между три-тканями и квазигруппами позволяет интерпретировать свойства связности Черна с помощью координатных квазигрупп и луп ткани. Так, в § 5 установлено, что тензоры кручения и кривизны ткани W связаны соответственно с коммутаторами и ассоциаторами ее координатных луп. В настоящем параграфе мы описываем с помощью координатных луп параллельный перенос в связности Черна и устанавливаем соответствие между подтканями и подквазигруппами.

Пусть, как и в § 2 гл. 1, три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$ задана уравнением $z = f(x, y)$, а произвольное векторное поле ξ в U записывается в виде

$$\xi = \xi_1^i \underset{2}{e_i} - \xi_2^i \underset{1}{e_i} = \xi_2^i \underset{3}{e_i} - \xi_3^i \underset{2}{e_i} = \xi_3^i \underset{1}{e_i} - \xi_1^i \underset{3}{e_i},$$

причем векторы $\underset{\alpha}{e_i}$ касаются слоя слоения λ_α, а координаты ξ^i_α связаны соотношениями

$$\xi^i_1 + \xi^i_2 + \xi^i_3 = 0.$$

Напомним, что в § 6 гл. 1 введены следующие обозначения: $\overline{f}^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$, $\widetilde{f}^i_j = \dfrac{\partial f^i}{\partial y^j}$, а матрицы $\overline{g}^i_j$ и $\widetilde{g}^i_j$ будут обратными для $\overline{f}^i_j$ и $\widetilde{f}^i_j$ соответственно.

Лемма 2.26. *Векторное поле ξ параллельно в связности Черна тогда и только тогда, когда его координаты ξ^i_α удовлетворяют уравнению*

$$\widetilde{f}^i_k \frac{\partial}{\partial x^m}(\widetilde{g}^k_j \xi^j_\alpha)dx^m + \overline{f}^i_k \frac{\partial}{\partial y^m}(\overline{g}^k_j \xi^j_\alpha)dy^m = 0. \tag{2.74}$$

□ В силу специфического строения формы связности Черна (§ 7 гл. 1) координаты ξ^i_α параллельного поля ξ удовлетворяют при разных α одной и той же системе уравнений

$$d\xi^i_\alpha + \omega^i_j \xi^j_\alpha = 0. \tag{2.75}$$

С помощью формул из § 6 гл. 1 это уравнение преобразуется к виду:

$$d\xi^i_\alpha - \Big(\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^m \partial y^k}\widetilde{g}^k_j dx^m + \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial y^m}\overline{g}^k_j dy^m\Big)\xi^j_\alpha = 0,$$

или

$$d\xi^i_\alpha - \Big(\frac{\partial \widetilde{f}^i_k}{\partial x^m}\widetilde{g}^k_j dx^m + \frac{\partial \overline{f}^i_k}{\partial y^m}\overline{g}^k_j dy^m\Big)\xi^j_\alpha = 0. \tag{2.76}$$

Рассмотрим соотношения

$$\overline{f}^i_k \overline{g}^k_j = \delta^i_j, \quad \widetilde{f}^i_k \widetilde{g}^k_j = \delta^i_j, \tag{2.77}$$

связывающие компоненты обратных матриц. Дифференцируя первое по y^m, второе по x^m, получим:

$$\frac{\partial \overline{f}^i_k}{\partial y^m}\overline{g}^k_j = -\frac{\partial \overline{g}^k_j}{\partial y^m}\overline{f}^i_k, \quad \frac{\partial \widetilde{f}^i_k}{\partial x^m}\widetilde{g}^k_j = -\frac{\partial \widetilde{g}^k_j}{\partial x^m}\widetilde{f}^i_k.$$

Ввиду этого уравнения (2.76) перепишутся так:

$$d\xi^i_\alpha + \Big(\widetilde{f}^i_k \frac{\partial \widetilde{g}^k_j}{\partial x^m} dx^m + \overline{f}^i_k \frac{\partial \overline{g}^k_j}{\partial y^m} dy^m\Big)\xi^j_\alpha = 0,$$

или

$$\Big(\frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial x^m} + \widetilde{f}^i_k \frac{\partial \widetilde{g}^k_j}{\partial x^m}\xi^j_\alpha\Big)dx^m + \Big(\frac{\partial \xi^i_\alpha}{\partial y^m} + \overline{f}^i_k \frac{\partial \overline{g}^k_j}{\partial y^m}\xi^j_\alpha\Big)dy^m = 0.$$

С учетом соотношений (2.77) последние равенства примут вид:

$$\widetilde{f}^i_k \Big(\widetilde{g}^k_j \frac{\partial \xi^j_\alpha}{\partial x^m} + \frac{\partial \widetilde{g}^k_j}{\partial x^m}\xi^j_\alpha\Big)dx^m + \overline{f}^i_k \Big(\overline{g}^k_j \frac{\partial \xi^j_\alpha}{\partial y^m} + \frac{\partial \overline{g}^k_j}{\partial y^m}\xi^j_\alpha\Big)dy^m = 0,$$

откуда следует (2.74). ■

Назовем векторное поле ξ, касательное к слоям первого слоения, *вертикальным*, а касательное к слоям второго — *горизонтальным*. Из леммы 2.26 получаем

Следствие. *Вертикальное поле $\underset{1}{\xi} = -\xi^i_2 \underset{1}{e_i}$ будет параллельным в связности Черна вдоль вертикального слоя тогда и только тогда, когда его координаты ξ^i_2 имеют вид*

$$\xi^i_2 = c^j_2 \frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \tag{2.78}$$

а горизонтальное векторное поле $\underset{2}{\xi} = \xi^i_1 \underset{2}{e_i}$ будет параллельным вдоль горизонтального слоя при условии

$$\xi^i_1 = c^j_1 \frac{\partial f^i}{\partial y^j}, \tag{2.79}$$

где c^i_1 *и* c^i_2 *— постоянные.*

□ Действительно, на слое первого слоения выполняются уравнения $x^i = \mathrm{const}$, поэтому на нем условие параллельности (2.74) при $\alpha = 2$ дает:

$$\overline{f}^i_k d(\overline{g}^k_j \xi^j_2) = 0.$$

Согласно определению три-ткани в области ее регулярности выполняется условие $\det\,(\overline{f}^i_k) \neq \neq 0$, поэтому из последних соотношений вытекает, что $\overline{g}^k_j \xi^j_1 = c^k_1$. Отсюда, пользуясь равенствами (2.77), получаем (2.78). Соотношения (2.79) выводятся аналогично. ■

Равенства (2.78) и (2.79) получают наглядную геометрическую интерпретацию, если ввести стандартную параметризацию (см. § 5). Пусть p — произвольная точка области U многообразия X, несущего три-ткань W. Слои первых двух слоений этой ткани, проходящие через p, зададим соответственно уравнениями $x^i = 0$ и $y^i = 0$. На них равенства (2.78) и (2.79) принимают вид

$$\xi^i_2(0, y) = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0, y)c^j_2, \quad \xi^i_1(x, 0) = \frac{\partial f^i}{\partial y^j}(x, 0)c^j_1. \tag{2.80}$$

Допустим, что параметризация стандартная. Тогда $f(x, y) = x \cdot y$ — умножение в координатной лупе $\ell(0, 0) \equiv \ell_p$, $L_x(y) = x \cdot y$ и $R_y(x) = x \cdot y$ — сдвиги в ℓ_p, поэтому

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = (R_y)_*\big|_{x=0}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = (L_x)_*\big|_{y=0}.$$

При этом первое соотношение написано в предположении, что лупа ℓ_p действует на слое $x = 0$, и касательное пространство T_e к ней в единице e отождествлено с касательным пространством T_1 к этому слою в точке $p(0, 0)$. Так как $R_y(e) = y$, то $(R_y)_*\big|_e \colon T_e \to T_y$, и первое из равенств (2.80) дает:

$$\underset{1}{\xi}(0, y) = (R_y)_*\big|_e(\underset{1}{\xi}(0, 0)), \quad \underset{1}{\xi}(0, 0) \in T_1 \equiv T_e. \tag{2.81}$$

Аналогично находим, что на слое $y = 0$ выполняется соотношение

$$\underset{2}{\xi}(x, 0) = (L_x)_*\big|_e(\underset{2}{\xi}(0, 0)), \quad \underset{2}{\xi}(0, 0) \in T_2 \equiv T_e. \tag{2.82}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.27. *Всякое вертикальное векторное поле* $\underset{1}{\xi}$*, параллельное вдоль вертикального слоя ткани* W*, записывается в виде* (2.81)*, а горизонтальное поле* $\underset{2}{\xi}$*, параллельное вдоль горизонтального слоя, — в виде* (2.28)*, где* L_x *и* R_y *— сдвиги в координатной лупе* ℓ_p *ткани* W*.*

Поскольку слои $x = 0$ и $y = 0$ ткани W несут структуру ее координатной лупы $\ell(0, 0)$, то ограничение связности Черна на них можно рассматривать как аффинную связность на лупе $\ell(0, 0)$. Это утверждение справедливо и для любой из связностей, присоединенной к три-ткани (см. §§ 7,8 гл. 1). Без ограничения общности можно считать, что $\ell(0, 0)$ — произвольная локальная аналитическая лупа, поэтому указанные связности определены на всякой такой лупе.

Наиболее интересными для нас являются связности, индуцируемые связностью Черна на слоях первых двух слоений ткани. Обозначим их Γ_1 и Γ_2 соответственно. Структурные уравнения связностей Γ_1 и Γ_2 получаются из структурных уравнений (1.26), (1.32) связности Черна при $\underset{1}{\omega}{}^i = 0$ или $\underset{2}{\omega}{}^i = 0$:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 \colon\ & d\underset{2}{\omega}{}^i + \underset{2}{\omega}{}^j \wedge \omega^i_j = -a^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k; \\ \Gamma_2 \colon\ & d\underset{1}{\omega}{}^i + \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \omega^i_j = a^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{1}{\omega}{}^k, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Связности Γ_1 и Γ_2 имеют нулевую кривизну и, следовательно, обладают *абсолютным параллелизмом.* Если W является групповой тканью, то формы ω^i_j могут быть приведены к нулю (см. § 5 гл. 1), величины a^i_{jk} становятся постоянными, а уравнения (2.83) переходят в уравнения Маурера–Картана группы Ли. Последние являются в то же время структурными уравнениями одной из канонических связностей Картана, присоединенных к группе Ли. Поэтому *связности* Γ_1 *и* Γ_2*, возникающие на гладкой лупе* Q*, являются обобщением групповых связностей Картана.*

Назовем их *каноническими связностями на лупе* Q. Из теоремы 2.27 вытекает, что параллельные поля в этих связностях получаются как инвариантные поля на группе Ли: вектор, заданный в единице лупы Q, разносится по ней дифференциалами сдвигов. Однако, если лупа Q не является группой, то эти поля, вследствие отсутствия ассоциативности, не будут инвариантными относительно сдвигов.

Известно, что геодезические линии групповых связностей Картана являются однопараметрическими подгруппами. Однако геодезические канонических связностей Γ_1 и Γ_2 этим свойством не обладают, поскольку, как показано в § 6, в лупе нет, вообще говоря, подгрупп (и даже подлуп). В связи с этим обстоятельством возникает вопрос: если в лупе Q есть однопараметрическая подлупа, будет ли она геодезической относительно связностей Γ_1 и Γ_2? Оказывается, верна

Теорема 2.28. *Всякая однопараметрическая подлупа локальной аналитической лупы* Q *является геодезической относительно канонических связностей на* Q.

$\square$ Доказательство проведем, например, для связности Γ_1. Обозначим через W три-ткань, для которой лупа Q будет координатной лупой. Пусть эта ткань параметризована описанным выше стандартным способом. Тогда условие параллельности векторного поля $\xi = \underset{1}{\xi}$ на лупе Q записывается в виде (2.81) или (2.80). Предположим далее, что $y(t)$ — подлупа в Q. Введем на Q канонические координаты. По теореме 2.20 уравнения подлупы $y(t)$ примут вид $y^i(t) = a^i t$. Докажем, что она будет геодезической, т. е. на ней существует параллельное поле вида $\underset{2}{\xi^i} = \lambda(t)\dfrac{dy^i}{dt} = \lambda(t)a^i$. Подставляя $\underset{2}{\xi^i}$ в уравнения (2.80), получаем

$$\lambda(t)a^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0, at)\underset{2}{c^j}. \tag{2.84}$$

Отсюда можно найти функцию $\lambda(t)$. Для этого достаточно показать, что правая часть пропорциональна вектору $a(a^i)$. Действительно, каноническое разложение функции $z = f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = x + y + \dots,$$

ввиду чего

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = id.$$

Поэтому, полагая в (2.84) $t = 0$, получаем $\lambda(0)a^i = \underset{2}{c^i}$, и уравнения (2.84) примут вид

$$\lambda(t)a^i = \lambda(0)\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(0, at)a^j.$$

Преобразуем правую часть, заменив функцию f ее каноническим разложением (2.52)–(2.54):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, at)(a) = a + \underset{1,1}{\Lambda}(a, at) + \frac{1}{2}\underset{1,2}{\Lambda}(a, at, at) + \frac{1}{6}\underset{1,3}{\Lambda}(a, at, at, at) + \ldots =$$
$$= a + \frac{1}{2}t^2\underset{1,2}{\Lambda}(a, a, a) + \frac{1}{6}t^3\underset{1,3}{\Lambda}(a, a, a, a) + \ldots$$

Здесь $\underset{1,1}{\Lambda}(a, a) = 0$ в силу кососимметричности формы $\underset{2}{\Lambda}$, см. (2.66). По теореме 2.21 вектор a является собственным вектором каждой из форм $\underset{p,q}{\Lambda}$, поэтому в силу обозначений (2.73) окончательно получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, at)(a) = a + \frac{1}{2}t^2\underset{1,2}{\lambda}a + \frac{1}{6}t^3\underset{1,3}{\lambda}a + \ldots$$

Следовательно,

$$\lambda(t) = \lambda(0)\left(1 + \sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s!}t^s\underset{1,s}{\lambda}\right). \quad \blacksquare$$

Геодезическое свойство однопараметрических подлуп вытекает также из других, более общих соображений. Основную роль здесь играет соответствие между подтканями и подквазигруппами. Обозначим, как и в § 5, локальную координатную квазигруппу три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ буквой q, $q\colon X_1 \times X_2 \to X_3$, где X_α — база слоения $\lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$, $\dim X_\alpha = r$.

Теорема 2.29. *2ρ-мерной подткани $\widetilde{W}$ три-ткани W соответствует в локальной координатной квазигруппе q некоторая ρ-мерная подквазигруппа $\widetilde{q}$. Обратно: если существует подквазигруппа $\widetilde{q}$ размерности ρ в квазигруппе q, $\rho < r = dim\, q$, то она определяет на три-ткани W 2ρ-мерную подткань.*

□ Согласно § 2 гл. 1 подткань $\widetilde{W}$ размерности 2ρ высекается слоями три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ на 2ρ-мерном трансверсальном подмногообразии $\widetilde{X}$ многообразия X. Те слои из слоения λ_α, которые высекают подткань $\widetilde{W}$ в некоторой окрестности U из $\widetilde{X}$, образуют ρ-мерное подрасслоение $\widetilde{\lambda}_\alpha$ в λ_α. Обозначим базу слоения $\widetilde{\lambda}_\alpha$ символом $\widetilde{X}_\alpha$.

Рассмотрим два слоя ткани $\widetilde{W}$, один из $\widetilde{\lambda}_1$, второй из $\widetilde{\lambda}_2$. Они пересекаются в некоторой точке многообразия $\widetilde{X}$. Проходящий через нее слой третьего слоения принадлежит многообразию $\widetilde{\lambda}_3$. Следовательно, сужение $\widetilde{q}$ координатной квазигруппы q на множество $\widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2$ действует из $\widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2$ в $\widetilde{X}_3$ и является, таким образом, локальной подквазигруппой в q.

Обратно, пусть локальная координатная квазигруппа $q(\cdot)\colon X_1 \times X_2 \to X_3$ три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ имеет подквазигруппу $\widetilde{q}$ размерности ρ, $\widetilde{q}\colon \widetilde{X}_1 \times \widetilde{X}_2 \to \widetilde{X}_3$, $\widetilde{X}_\alpha \subset X_\alpha$. Подмногообразию $\widetilde{X}_\alpha$ отвечает на слоении λ_α ρ-мерное подрасслоение, которое обозначим $\widetilde{\lambda}_\alpha$. Рассмотрим на многообразии X подмногообразие $\widetilde{X}$, образованное точками пересечения всевозможных слоев из $\widetilde{\lambda}_1$ и $\widetilde{\lambda}_2$. Так как $\dim\widetilde{\lambda}_\alpha = \rho$, то $\dim\widetilde{X} = 2\rho$, а поскольку уравнение $\widetilde{x}_1 \cdot \widetilde{x}_2 = \widetilde{x}_3$, $\widetilde{x}_\alpha \in \widetilde{\lambda}_\alpha$, в квазигруппе $\widetilde{q}$ однозначно разрешимо, то многообразие $\widetilde{X}$ пересекают только слои из $\widetilde{\lambda}_\alpha$, но никакие другие слои из λ_α. Далее, поскольку $\dim\widetilde{X} = 2\rho$, а $\dim\widetilde{\lambda}_\alpha = \rho$, то каждый слой из $\widetilde{\lambda}_\alpha$ пересекает X по многообразию размерности ρ. Следовательно, $\widetilde{X}$ — трансверсальное подмногообразие в X и слои ткани W высекают на нем подткань. ■

Установим теперь соответствие между подтканями и подлупами. Пусть $\widetilde{X}$ — 2ρ-мерное трансверсальное подмногообразие в X, p — произвольная точка из $\widetilde{X}$. С точкой p связана координатная лупа $\ell_p(\circ)$ ткани W, произведение $u \circ v$ в которой определяется, как показано на рис. 17 (с. 47). Если слои u и v из λ_3 пересекают трансверсальную поверхность $\widetilde{X}$, то и их произведение $u \circ v$ обладает этим свойством. Таким образом определяется ρ-мерная координатная лупа $\widetilde{\ell}_p$ подткани $\widetilde{W}$, высекаемой на многообразии $\widetilde{X}$ слоями ткани W. Из приведенных рассуждений вытекает, что $\widetilde{\ell}_p$ — подлупа лупы ℓ_p.

Следующее предложение обобщает теорему 2.28.

Теорема 2.30. *ρ-мерная подлупа локальной аналитической лупы Q является вполне геодезическим подмногообразием относительно канонических связностей Γ_1 и Γ_2 на Q.*

□ Обозначим буквой W три-ткань, для которой лупа Q является координатной лупой $\ell(0,0)$. Согласно предложению 1.9 и теореме 1.11 слои ткани W, ее трансверсальные поверхности, а значит — и пересечения последних со слоями ткани W — являются вполне геодезическими подмногообразиями относительно связности Черна. Отсюда следует, что эти же пересечения будут вполне геодезическими подмногообразиями и относительно связностей Γ_1 и Γ_2, индуцированных связностью Черна на слоях ткани W. Предположим теперь, что в окрестности точки $p(0,0)$ три-ткань W параметризована стандартным способом (§ 5 гл. 2). Тогда ее горизонтальный и вертикальный слои, проходящие через точку p, несут структуру координатной лупы $\ell(0,0) \equiv Q$, причем связности Γ_1 и Γ_2 становятся каноническими связностями на Q, а указанные вполне геодезические подмногообразия, высекаемые на горизонтальном и вертикальном слоях ткани, превращаются в ρ-мерные подлупы лупы Q. Отсюда вытекает требуемый результат. Теорема 2.28 получается при $\rho = 1$. ■

ЗАДАЧИ

2.1. Если изотопия $J = (J_\alpha)$ лупы $Q(\cdot)$ с единицей e на лупу $\widetilde{Q}(\circ)$ с единицей $\widetilde{e}$ удовлетворяет условию $J_1(e) = J_2(e) = \widetilde{e}$, то J — изоморфизм.

2.2. В любой лупе ${}^{-1}(x^{-1}) = ({}^{-1}x)^{-1} = x$.

Лупа $Q(\cdot)$ называется обратимой (IP-лупой), если в ней выполняются тождества обратимости справа и обратимости слева:

$$(xy)y^{-1} = x, \quad {}^{-1}x(xy) = y. \tag{2.85}$$

2.3. Докажите следующие свойства IP-луп:

1) решение уравнения $ax = b$ имеет вид $x = {}^{-1}ab$, а уравнения $yb = c$ — вид $y = cb^{-1}$;

2) $x^{-1} = {}^{-1}x, \quad (x^{-1})^{-1} = {}^{-1}({}^{-1}x) = x$;

3) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$;

4) $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}, \quad R_b^{-1} = R_{b^{-1}}$.

Определим в лупе Q отображение $I : Q \to Q$ равенством $I(x) = x^{-1}$. Тогда для IP-луп выполняются еще следующие свойства:

5) $IR_aI = L_a^{-1}, \quad IL_aI = R_a^{-1}$;

6) если $A = (A_\alpha)$ — автотопия в Q, то автотопиями будут и (IA_1I, A_3, A_2), (A_3, IA_2I, A_1), (A_2, IA_3I, IA_1I), (IA_3, A_1, IA_2I), (IA_2I, IA_1I, IA_3I).

Докажем, например, что (IA_1I, A_3, A_2) — автотопия. Из определения автотопии (2.5) имеем $A_1(x^{-1}) \cdot A_2(xy) = A_3(y)$, откуда $(A_1(x^{-1}))^{-1} = A_2(xy) \cdot A_3^{-1}(y)$. С другой стороны, используя (2.85) и свойство 3), находим:

$$(IA_1I)(x)A_3(y) = (A_1(x^{-1}))^{-1}A_3(y) = (A_2(xy) \cdot A_3^{-1}(y))A_3(y) = A_2(xy),$$

что и требовалось доказать.

2.4. Левая (правая) лупа Бола: а) альтернативна слева (справа); б) обратима слева (справа).

Указание. Положите в тождестве B_ℓ в случае а) $y = e$, в случае б) $y = {}^{-1}x$.

2.5. Лупа Муфанг: а) эластична; б) обратима справа и слева, т.е. является IP-лупой; в) альтернативна справа и слева.

Указание к б). Положите в тождестве Муфанг (см. Таблицу 2.1 на с. 43) $y = z^{-1}$, затем $y = {}^{-1}x$ и воспользуйтесь эластичностью.

Указание к в). Положите в тождестве Муфанг $z = x$ или соответственно $y = x$ и воспользуйтесь эластичностью.

2.6. В лупе Муфанг имеются автотопии вида:

а) (L_y, R_y, L_yR_y);

б) $(L_y, IL_y^{-1}I, L_yR_y), \quad (IR_y^{-1}, R_y, L_yR_y)$,

в) $(L_yR_y, L_y^{-1}, L_y), \quad (R_y^{-1}, L_yR_y, R_y)$, где, как и выше, $I(x) = x^{-1}$.

Указания. а) следует непосредственно из тождества Муфанг; б) следует из задач 2.5 и 2.3 (5); в) следует из задачи 2.3 (6).

2.7. В лупе Муфанг выполняются следующие тождества:

$$M_1 : x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z; \quad M_2 : (zx \cdot y)x = z(x \cdot yx).$$

Каждые два из трех тождеств: M, M_1 и M_2 эквивалентны.

Указание. Используйте задачу 2.6 в).

2.8. Лупа Муфанг является правой и левой лупой Бола.

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	1	6	5
3	3	4	6	5	1	2
4	4	1	5	6	2	3
5	5	6	1	2	3	4
6	6	5	2	3	4	1

Рис. 35

	6	5	2	3	4	1
3	1	2	3	4	5	6
4	2	3	4	1	6	5
6	3	4	6	5	1	2
5	4	1	5	6	2	3
1	5	6	1	2	3	4
2	6	5	2	3	4	1

Рис. 36

Указание. Левое тождество Бола вытекает из тождества M_1 и эластичности.

2.9. Правоальтернативная левая (левоальтернативная правая) лупа Бола есть лупа Муфанг. Если лупа Q является одновременно и правой и левой лупой Бола, то она лупа Муфанг.

2.10. Проверьте, что таблица умножения, приведенная на рис. 36, определяет LP-изотоп $\ell(6,3)(\circ)$ коммутативной лупы $Q(\cdot)$, таблица умножения которой дана на рис. 35. Является ли лупа $Q(\cdot)$ группой?

2.11. Если одно семейство λ_α полной три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ содержит n линий, то множество X содержит n^2 точек.

2.12. Если e — единица лупы Q, то e будет левой единицей в правой обратной квазигруппе Q^{-1} и правой единицей в левой обратной квазигруппе ${}^{-1}Q$ (см. с. 44).

2.13. $B_\ell \& B_m \Rightarrow B_r, \quad B_r \& B_m \Rightarrow B_\ell$.

2.14. Напишите производное тождество от тождества эластичности $(xy)x = x(yx)$ и постройте соответствующую фигуру на три-ткани.

2.15. Изобразите координатные фигуры, соответствующие тождеству ассоциативности и левому тождеству Бола при различных положениях линий u, v, w относительно линии e (как это сделано на рис. 20–22 для фигуры T). Какие тождества отвечают этим фигурам?

2.16. Постройте с помощью рис. 17 (с. 47) элементы x^{-1}, ${}^{-1}x$, $(x^{-1})^{-1}$, ${}^{-1}({}^{-1}x)$, x/y, $y\backslash x$. Какие фигуры отвечают тождествам $x^{-1} = {}^{-1}x$, $(x^{-1})^{-1} = x$, ${}^{-1}({}^{-1}x) = x$?

2.17. Докажите, что ткани B_m характеризуются также универсальным тождеством $(w/v) \circ (u\backslash w) = (w/(u \circ v)) \circ w$.

2.18. Постройте фигуру, соответствующую тождеству $(y \circ z) \circ x = (y \circ x) \circ z$. Будет ли это тождество универсальным?

2.19. Докажите, что ткани B_ℓ и B_r характеризуются универсальными тождествами $(v \circ (u\backslash v)) \circ w = v \circ (u\backslash(v \circ w))$ и $((u \circ v)/w) \circ v = u \circ ((v/w) \circ v)$ соответственно.

Указание. См. доказательство теоремы 2.9.

2.20. Докажите, что тождества $x^{-1} = {}^{-1}x$, ${}^{-1}({}^{-1}x) = x$ выполняются в координатных лупах тканей H и только в них.

2.21. Постройте фигуры, соответствующие тождествам $(xy)y^{-1} = x$, ${}^{-1}x(xy) = y$. Докажите, что соответствующие условия замыкания характеризуют ткани B_r и B_ℓ соответственно.

2.22. В координатных лупах ткани B_m выполняется тождество $(xy)^{-1} = ({}^{-1}y)({}^{-1}x)$. Обратно: если это тождество выполняется в координатных лупах некоторой три-ткани W, то три-ткань W является тканью B_m.

Указание. Из заданного тождества вытекает тождество $x^{-1} = {}^{-1}x$, то есть рассматриваемая ткань является тканью H (задача 2.20). Обозначим конфигурацию, соответствующую заданному тождеству, через F. Используя условия замыкания F и H, докажите замыкание произвольной фигуры B_m.

2.23. В координатных лупах тканей B_ℓ, B_m и E выполняются соответственно тождества $x^m(x^n y) = x^{m+n} \cdot y$, $xy^m \cdot y^n = x \cdot y^{m+n}$ и $x^m(yx^n) = (x^m y)x^n$. Дайте геометрическое доказательство (см. § 5 гл. 7).

2.24. Тождество S универсально тогда и только тогда, когда оно эквивалентно своему производному тождеству.

2.25. Докажите теорему 2.6 аналитически, выведя ее непосредственно из условий замыкания (2.6)–(2.12).

Указание. Воспользуйтесь формулой (2.3).

2.26. В трехмерной лупе, заданной уравнениями

$$z^1 = x^1 + y^1 - (x^2 + y^2)x^3y^3, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z^3 = x^3 + y^3, \tag{2.86}$$

выполняется тождество эластичности, но не выполняются тождества B_ℓ и B_r.

Указание. Сравните первые координаты произведений $(xy)x, x(yx), x(yy), (xy)y, x(xy)$, $(xx)y$.

2.27. Три-ткань, определяемая уравнениями (2.86), является тканью E, т.е. на ней замыкаются все фигуры E (рис. 14 на с. 46).

Решение. Уравнения (2.86) задают умножение $(\cdot)$ в координатной квазигруппе q рассматриваемой ткани. Поэтому условия (2.12), означающие замыкание произвольной фигуры E, принимают вид $\{(2.87)\text{–}(2.89)\} \Rightarrow (2.90)$, где

$$\begin{aligned} x_2^3 + y_1^3 &= x_1^3 + y_2^3, \\ x_3^3 + y_1^3 &= x_1^3 + y_3^3, \\ x_2^3 + y_3^3 &= x_1^3 + y_4^3, \\ x_3^3 + y_2^3 &= x_4^3 + y_1^3; \end{aligned} \tag{2.87}$$

$$\begin{aligned} x_2^2 + y_1^2 &= x_1^2 + y_2^2, \\ x_3^2 + y_1^2 &= x_1^2 + y_3^2, \\ x_2^2 + y_3^2 &= x_1^2 + y_4^2, \\ x_3^2 + y_2^2 &= x_4^2 + y_1^2; \end{aligned} \tag{2.88}$$

$$
\begin{aligned}
x_2^1 + y_1^1 - (x_2^2 + y_1^2)x_2^3y_1^3 &= x_1^1 + y_2^1 - (x_1^2 + y_2^2)x_1^3y_2^3,\\
x_3^1 + y_1^1 - (x_3^2 + y_1^2)x_3^3y_1^3 &= x_1^1 + y_3^1 - (x_1^2 + y_3^2)x_1^3y_3^3,\\
x_2^1 + y_3^1 - (x_2^2 + y_3^2)x_2^3y_3^3 &= x_1^1 + y_4^1 - (x_1^2 + y_4^2)x_1^3y_4^3,\\
x_3^1 + y_2^1 - (x_3^2 + y_2^2)x_3^3y_2^3 &= x_4^1 + y_1^1 - (x_4^2 + y_1^2)x_4^3y_1^3;
\end{aligned}
\tag{2.89}
$$

$$
\begin{aligned}
x_4^3 + y_3^3 &= x_3^3 + y_4^3,\\
x_4^2 + y_3^2 &= x_3^2 + y_4^2,\\
x_4^1 + y_3^1 - (x_4^2 + y_3^2)x_4^3y_3^3 &= x_3^1 + y_4^1 - (x_3^2 + y_4^2)x_3^3y_4^3.
\end{aligned}
\tag{2.90}
$$

Первое из равенств (2.90) получается из системы (2.87), если к первому уравнению прибавить последнее и вычесть третье. Точно так же получается и второе уравнение (2.90) с помощью системы (2.88). Составив такую же комбинацию из уравнений (2.89), придем к следующему равенству:

$$
\begin{aligned}
&x_4^1 + y_3^1 - (x_1^2 + y_2^2)x_1^3y_2^3 + (x_1^2 + y_4^2)x_1^3y_4^3 - (x_4^2 + y_1^2)x_4^3y_1^3 =\\
&= x_3^1 + y_4^1 - (x_2^2 + y_1^2)x_2^3y_1^3 + (x_2^2 + y_3^2)x_2^3y_3^3 - (x_3^2 + y_2^2)x_3^3y_2^3.
\end{aligned}
$$

Докажем, что это уравнение совпадает с третьим уравнением (2. 90). Рассмотрим разность (обозначим ее P) этих уравнений:

$$
\begin{aligned}
P = {}&(\underset{5}{x_3^2} + \underset{6}{y_4^2})x_3^3y_4^3 + (\underset{7}{x_1^2} + \underset{8}{y_2^2})x_1^3y_2^3 - (\underset{7}{x_1^2} + \underset{6}{y_4^2})x_1^3y_4^3 + (\underset{1}{x_4^2} + \underset{4}{y_1^2})x_4^3y_1^3 -\\
&- (\underset{1}{x_4^2} + \underset{2}{y_3^2})x_4^3y_3^3 - (\underset{3}{x_2^2} + \underset{4}{y_1^2})x_2^3y_1^3 + (\underset{3}{x_2^2} + \underset{2}{y_3^2})x_2^3y_3^3 - (\underset{5}{x_3^2} + \underset{8}{y_2^2})x_3^3y_2^3.
\end{aligned}
$$

Группируя слагаемые, отмеченные одинаковым номером снизу, получим:

$$
\begin{aligned}
P = {}&x_4^2x_4^3(y_1^3 - y_3^3) + y_3^2y_3^3(x_2^3 - x_4^3) + x_2^2x_2^3(y_3^3 - y_1^3) + y_1^2y_1^3(x_4^3 - x_2^3) +\\
&+ x_3^2x_3^3(y_4^3 - y_2^3) + y_2^2y_2^3(x_1^3 - x_3^3) + y_4^2y_4^3(x_3^3 - x_1^3) + x_1^2x_1^3(y_2^3 - y_4^3).
\end{aligned}
$$

Из (2.87) и (2.88) находим:

$$
\begin{aligned}
&y_1^3 - y_3^3 = x_1^3 - x_3^3,\\
&x_2^3 - x_4^3 = x_4^3 + y_2^3 - y_1^3 - (x_3^3 + y_2^3 - y_1^3) = x_1^3 - x_3^3,\\
&y_2^3 - y_4^3 = x_2^3 + y_1^3 - x_1^3 - (x_2^3 + y_3^3 - x_1^3) = y_1^3 - y_3^3 = x_1^3 - x_3^3.
\end{aligned}
$$

В результате выражение P примет вид $(x_1^3 - x_3^3)R$, где

$$
R = x_4^2x_4^3 + y_3^2y_3^3 - x_2^2x_2^3 - y_1^2y_1^3 - x_3^2x_3^3 + y_2^2y_2^3 - y_4^2y_4^3 + x_1^2x_1^3.
$$

Преобразуем некоторые слагаемые, входящие в последнюю сумму, с помощью уравнений (2.87) и (2.88):

$$
\begin{aligned}
x_4^2x_4^3 &= (x_3^2 + y_2^2 - y_1^2)(x_3^3 + y_2^3 - y_1^3) = (x_3^2 + x_2^2)x_1^3 - x_1^2(x_3^3 + x_2^3 - x_1^3) =\\
&= -(x_3^2 + x_2^2)x_1^3 - x_1^2(x_3^3 + x_2^3) + (x_3^2 + x_2^2)(x_3^3 + x_2^3) + x_1^2x_1^3;\\
y_3^2y_3^3 &= (x_3^2 + y_1^2 - x_1^2)(x_3^3 + y_1^3 - x_1^3) = x_3^2x_3^3 + x_3^2(y_1^3 - x_1^3) + x_3^3(y_1^2 - x_1^2) + (y_1^2 - x_1^2)(y_1^3 - x_1^3);\\
y_2^2y_2^3 &= (x_2^2 + y_1^2 - x_1^2)(x_2^3 + y_1^3 - x_1^3) = x_2^2x_2^3 + x_2^2(y_1^3 - x_1^3) + (y_1^2 - x_1^2)x_2^3 + (y_1^2 - x_1^2)(y_1^3 - x_1^3);
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_4^2y_4^3 &= (x_2^2 + y_3^2 - x_1^2)(x_2^3 + y_3^3 - x_1^3) = (x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 - 2x_1^2)(x_2^3 + x_3^3 + y_1^3 - 2x_1^3) =\\
&= [(x_2^2 + x_3^2) + (y_1^2 - x_1^2) - x_1^2][(x_2^3 + x_3^2) + (y_1^3 - x_1^3) - x_1^3 =\\
&= (x_2^2 + x_3^2)(x_2^3 + x_3^3) + (y_1^2 - x_1^2)(x_2^3 + x_3^3) - x_1^2(x_2^3 + x_3^3) +\\
&+ (x_2^2 + x_3^2)(y_1^3 - x_1^3) + (y_1^2 - x_1^2)(y_1^3 - x_1^3) - x_1^2(y_1^3 - x_1^3) - (x_2^2 + x_3^2)x_1^3 - (y_1^2 - x_1^2)x_1^3 + x_1^2x_1^3.
\end{aligned}
$$

Подставляя все в R, после преобразования найдем, что $R = 0$. Отсюда $P = 0$ и утверждение доказано.

Обозначим три-ткань E, определяемую уравнениями (2.86), символом E_1. Как было показано, эта ткань не является левой или правой тканью Бола, а следовательно — и тканью Муфанг.

2.28. Пусть $x(t) = ta$ — однопараметрическая подлупа в локальной аналитической лупе Q, $\underset{p,q}{\lambda}$ — собственные числа вектора a относительно формы $\underset{p,q}{\Lambda}$ (см. (2.73)). Докажите, что числа $\underset{p,q}{\lambda}$ связаны условиями

$$\sum_{p=1,\, p+q=s}^{s-1} C_s^p \underset{p,q}{\lambda} = 0.$$

Указание. Воспользуйтесь равенством (2.67).

2.29. Если лупа Q обладает максимальным количеством двумерных подлуп, то ее уравнения могут быть записаны в виде

$$z = \lambda(x, y)x + \mu(x, y)y,$$

где $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y) \in R$, $\lambda(x, x) + \mu(x, x) = 2$, $x, y \in R^r$.

Указание. Предварительно докажите, что касательная Λ-алгебра рассматриваемой лупы Q характеризуется соотношениями:

$$\underset{p,q}{\Lambda}{}^i_{j_1 \dots j_p k_1 \dots k_q} = \delta^i_{(j_1} \lambda_{j_2 \dots j_p) k_1 \dots k_q} + \mu^i_{j_1 \dots j_p (k_1 \dots k_{q-1}} \delta^i_{k_q)}.$$

2.30. Лупа Q является моноассоциативной тогда и только тогда, когда коэффициенты ее канонического разложения связаны условиями:

$$\sum_{p=1,\, p+q=s}^{s-1} \frac{2^q - 2^p}{p!q!} \underset{p,q}{\Lambda}{}_d = 0.$$

2.31. Если в локальной аналитической лупе Q выполняется тождество правой (левой) альтернативности, то в ней выполняется и тождество ассоциативности степеней.

2.32. Найдите вид форм $\underset{p,q}{\Lambda}$ канонического разложения аналитической лупы Q, обладающей максимальным количеством однопараметрических подлуп (в частности, подгрупп).

Решение. Предположим, что локальные координаты в лупе Q являются каноническими. Условие теоремы 2.21 приводит к соотношениям (2. 73), которые должны удовлетворяться при любых a. Поэтому величины $\underset{p,q}{\Lambda}$ будут симметричными формами степени $p + q - 1$ относительно a: $\underset{p,q}{\lambda} = \underset{p,q}{\lambda}(a, a \dots a)$. Подставляя в (2.73), получаем

$$\underset{p,q}{\Lambda}(a, a \dots a) = \underset{p,q}{\lambda}(a, a \dots a) \cdot a,$$

откуда следуют соотношения на координаты форм $\underset{p,q}{\Lambda}$:

$$\underset{p,q}{\Lambda}{}^i_{(j_1 \dots j_{p+q})} = \underset{p,q}{\lambda}{}_{(j_1 \dots j_{p+q-1}} \delta^i_{j_{p+q})}.$$

Обратно, из последних соотношений легко вытекает, что каждый вектор a касательной Λ-алгебры лупы Q определяет одномерную подалгебру.

В случае, если все однопараметрические подлупы являются группами, то все собственные числа $\underset{p,q}{\lambda}$ равны нулю, и мы приходим к условиям

$$\underset{p,q}{\Lambda}{}^i_{(j_1 \dots j_{p+q})} = 0.$$

2.33. Докажите, что в локальной аналитической лупе Q могут быть введены канонические координаты, удовлетворяющие условию

$$f(x, \sigma x) = (1 + \sigma)x, \quad \sigma \neq 0, -1,$$

где $x \in Q$, $f(x, y) = x \cdot y$ — умножение в Q.

2.34. Все введенные в задаче 2.33 системы канонических координат, соответствующие различным значениям σ, совпадают тогда и только тогда, когда лупа Q моноассоциативна.

2.35. Векторное поле ξ параллельно на слоях третьего слоения ткани W тогда и только тогда, когда его координаты удовлетворяют уравнениям

$$Q_n^k \frac{\partial}{\partial x^m}(\widetilde{g}_j^n \xi^j) = P_m^n \frac{\partial}{\partial y^n}(\overline{g}_j^k \xi^j),$$

где $P_m^n = \widetilde{g}_k^n \overline{f}_m^k$, $Q_n^k = \overline{g}_m^k \widetilde{F}_n^m$, $P_m^n Q_n^k = \delta_m^k$.

2.36. Пусть лупа Q отнесена к каноническим координатам. Линия $z^i = a^i t$ будет геодезической относительно канонических связностей на Q тогда и только тогда, когда вектор (a^i) является собственным вектором тензоров $\underset{1,2}{\Lambda}, \underset{1,3}{\Lambda}, \dots, \underset{1,s}{\Lambda}, \dots$, либо тензоров $\underset{2,1}{\Lambda}, \underset{3,1}{\Lambda}, \dots$.

2.37. Докажите, что коэффициенты $\mu^i_{jk\ell}$ и $\nu^i_{jk\ell}$ канонического разложения координатной лупы ℓ_p три-ткани W следующим образом выражаются через тензор кривизны этой ткани:

$$\begin{aligned} \mu^i_{jk\ell} &= -\frac{1}{2} b^i_{(jk\ell)} + \frac{4}{3}(b^i_{[\ell|k|j]} + b^i_{[\ell|j|k]}) + \frac{2}{3}(a^m_{k\ell} a^i_{jm} + a^m_{j\ell} a^i_{km}), \\ \nu^i_{jk\ell} &= \frac{1}{2} b^i_{(jk\ell)} + \frac{4}{3}(b^i_{[kj]\ell} + b^i_{[\ell j]k}) + \frac{2}{3}(a^m_{\ell j} a^i_{km} + a^m_{kj} a^i_{\ell m}) \end{aligned} \tag{2.91}$$

(предполагается, что каноническое разложение записано в виде (2.24)).

□ Из условий канонизации (2.67) при $s = 2, 3$ имеем:

$$\lambda^i_{(jk)} = 0, \quad \nu^i_{(jk\ell)} + \mu^i_{(jk\ell)} = 0.$$

Далее из формулы (2.49) с учетом кососимметричности величин λ^i_{jk} получаем:

$$b^i_{[jk]\ell} = \nu^i_{[kj]\ell} + \lambda^m_{[j|\ell|}\lambda^i_{k]m} - \lambda^m_{kj}\lambda^i_{m\ell}, \; b^i_{[j|k|\ell]} = -\mu^i_{k[j\ell]} + \lambda^m_{j\ell}\lambda^i_{km} - \lambda^m_{k[j}\lambda^i_{|m|\ell]}$$

и

$$b^i_{(jk\ell)} = \nu^i_{(jk\ell)} - \mu^i_{(jk\ell)}.$$

Из последнего соотношения с учетом условий канонизаации имеем

$$\frac{1}{2} b^i_{(jk\ell)} = \nu^i_{(jk\ell)} = -\mu^i_{(jk\ell)}.$$

Далее, в силу симметричности величин $\mu^i_{jk\ell}$ по индексам j и k и симметричности величин $\nu^i_{jk\ell}$ по индексам k и ℓ справедливы тождества

$$\mu^i_{jk\ell} = \mu^i_{(jk\ell)} + \frac{2}{3}(\mu^i_{[j|k|\ell]} + \mu^i_{[k|j|\ell]}), \; \nu^i_{jk\ell} = \nu^i_{(jk\ell)} + \frac{2}{3}(\nu^i_{[jk]\ell]} + \nu^i_{[j\ell]k}).$$

Подставляя в правые части найденные выражения, придем к (2.91).

2.38. Если три-ткань $\widetilde{W}$ является подтканью ткани W, то касательная $\widetilde{W}$-алгебра ткани $\widetilde{W}$ будет подалгеброй соответствующей W-алгебры ткани W. Если же $\widetilde{W}$-нормальная подткань (см. § 9 гл. 1), то ее $\widetilde{W}$-алгебры будут идеалами W-алгебр.

2.39. Пусть V — r-мерное гладкое подмногообразие многообразия X. Докажите, что три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$ индуцирует на V локальную *идемпотентную квазигруппу*, изотопную одной из координатных квазигрупп ткани W.

ПРИМЕЧАНИЯ

2.1. В этом параграфе мы сообщаем лишь основные факты из алгебраической теории луп. Более подробно об этом можно прочитать в книгах [Б-2], [Бр-2], [Пф-1], обзорах [БР-2], [Г-1], статье [Ац-1]. Сами термины «лупа», «квазигруппа», «главный изотоп» введены *Албертом* [Ал-1], [Ал-2]. Специфика нашего изложения состоит в том, что мы рассматриваем, в основном, трехбазисные квазигруппы. Топологические и аналитические квазигруппы и лупы изучались в [Х-1]—[Х-3], [ХШ-1].

Термин «универсальное тождество» введен в [БР-1].

2.2. Полные три-ткани называют также три-сетями. Строгое определение полной три-ткани дано *Пиккертом* [Пи-1], хотя понятие k-сети было уже у *Томсена* в 1929 г. *Ацел* употребляет в [Ац-1] термин «алгебраическая ткань». Его использовали ранее и авторы этой книги, однако, поскольку этот термин употребляется еще и для обозначения три-тканей, определяемых кубическими гиперповерхностями (см. гл. 3), то он был заменен на термин «абстрактная ткань». В этой книге мы употребляем более удачный термин «полная ткань», следуя работе [АГо-11].

Термины «координатная квазигруппа» и «координатная лупа» появились впервые, по-видимому, в [Б-2].

Связь между конфигурациями на три-ткани и алгебраическими свойствами квазигрупп и луп впервые исследовались, начиная с двадцатых годов, основателями теории тканей — *Бляшке, Болом, Рейдемейстером.* Обзор работ этого периода имеется в совместной монографии *Бляшке* и *Бола* [ББ-1].

Систематическое изложение материала второго параграфа (исключая конфигурацию E) впервые дано *Ацелом* в [Ац-1]. Соответствующие условия замыкания (2.6)–(2.11) записаны в [Ац-1] немного по-иному, в виде условных тождеств (см. § 2 этой главы). Мы же записываем их в симметричной форме, так как на самом деле безразлично, с какой стороны замыкаются фигуры.

Фигуры E рассматривались в [Б-4, гл. 4] и [ШШ-2].

2.3. Понятие универсального тождества введено в [Б-3], производного тождества — по-видимому, в [Гл-1]. Способ получения производного тождества (без употребления этого термина) описан в [Б-4] с помощью графов. Теорема 2.7 вытекает из теоремы *Алберта*, сформулированной в конце § 1. Приведенное в § 3 геометрическое доказательство теоремы 2.7 принадлежит *Шестаковой.*

Тождество (2.18) получено *Ацелом* [Ац-2], тождество (2.22) — *Белоусовым* [Б-3], причем универсальность последнего доказана в [Б-3] весьма непросто алгебраическим способом. Используемый нами простой геометрический подход обоснован в [ШШ-1], где таким образом были получены тождества (2.18)–(2.20), (2.22).

2.4. Касательная W-алгебра к локальной C^3-гладкой лупе определена *Акивисом* в [А-8]. Термин «алгебра Акивиса» предложили *Штрамбах* и *Хоффман* в [ХШ-1] .

2.6. Как показал *Мальцев* в [М-1], канонические координаты в локальной аналитической альтернативной лупе вводятся так же, как и в группе Ли, поскольку в таких лупах в каждом направлении через единицу проходит однопараметрическая подгруппа (в [М-1] лупа называется альтернативной, если в ней любая пара элементов порождает ассоциативную подлупу). *Кузьмин* обобщил понятие канонических координат для луп с ассоциативностью степеней [К-3]. Еще раньше в [А-1] канонические координаты были определены *Акивисом* для произвольной локальной аналитической лупы как предел некоторой последовательности, определенной рекуррентном образом. *Дюфур* и *Джейн* в [Дю-1] показали, что существование канонических координат в лупе непосредственно вытекает из теоремы *Стернберга* [Ст-2], причем при минимальных предположениях о гладкости. Доказательство теоремы 2.19 взято из [АШ-9].

2.7. Алгебраические свойства связности Черна рассматривал *Надь* [Н-1], [Н-3]. В частности, лемма 2.26 доказана им в более общей форме.

К задачам. Задачу 2.22 можно решить также аналитически, разложив обе части тождества в ряд с помощью (2.37) и (2.29) и воспользовавшись теоремой 4.4.

Идемпотентные квазигруппы, определяемые три-тканью (см. задачу 2.39), рассматривала *Толстихина* в [То-4] и [То-5].

Глава 3

ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И ИЗОКЛИННЫЕ ТРИ-ТКАНИ

§ 3.1. Трансверсально-геодезические и шестиугольные три-ткани

1. Пусть на многообразии X задана три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$. Тогда, как было показано в § 3 гл. 1, в каждой точке p многообразия X существует r-параметрическое семейство трансверсальных двумерных подпространств, пересекающих касательные пространства к слоям ткани, проходящим через точку p, по одномерным подпространствам. Напомним, что базисные векторы ξ_α этих подпространств мы записывали в виде $\xi_\alpha = \xi^i \underset{\alpha}{e_i}$.

В соответствии с определением, данным в п. 3 § 2 гл. 1, двумерная поверхность V^2 на X называется трансверсальной, если она в каждой своей точке касается некоторого трансверсального подпространства. Трансверсальная поверхность пересекает слои ткани, с которыми имеет общие точки, по одномерным подмногообразиям и инвариантна относительно отображений $\varphi_{\alpha\beta}$. Ее уравнения (в случае, если она существует) имеют вид (1.105) при $\rho = 1$:

$$\underset{1}{\omega^i} = \xi^i \Theta_1, \quad \underset{2}{\omega^i} = \xi^i \Theta_2. \tag{3.1}$$

Формы Пфаффа Θ_1 и Θ_2 образуют кобазис на V^2. Слои первого слоения λ_1 ткани W пересекают трансверсальную поверхность V^2 по линиям $\Theta_1 = 0$ и, в силу (3.1), касаются векторов $\xi_1 = \xi^i \underset{1}{e_i}$. Слои слоения λ_2 пересекают V^2 по линиям $\Theta_2 = 0$, касающимся векторов $\xi_2 = \xi^i \underset{2}{e_i}$, а слои слоения λ_3 — по линиям $\Theta_1 + \Theta_2 = 0$, касающимся векторов $\xi_3 = \xi^i \underset{3}{e_i}$. Эти три семейства линий образуют на трансверсальной поверхности V^2 криволинейную три-ткань $W^2 = (V^2, \lambda'_\alpha)$, $\lambda'_\alpha = \lambda_\alpha|_{V^2}$ — двумерную подткань ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$.

Вместе с уравнениями (3.1) на поверхности V^2 выполняются и их дифференциальные следствия. Дифференцируя эти уравнения внешним образом, приходим к уравнениям (1.107) и (1.109), которые при $\rho = 1$ принимают следующий вид:

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = \xi^i \Theta, \tag{3.2}$$

$$d\Theta_1 = \Theta_1 \wedge \Theta, \quad d\Theta_2 = \Theta_2 \wedge \Theta; \tag{3.3}$$

здесь Θ — некоторая форма Пфаффа.

В соответствии с теоремой 1.11 трансверсальная поверхность V^2 является вполне геодезической поверхностью многообразия X в любой из связностей, определяемых формами (1.97), и пересекает слои три-ткани W по геодезическим линиям.

Внешнее дифференцирование системы (3.2), (3.3) приводит к уравнениям

$$d\Theta = b\Theta_1 \wedge \Theta_2, \tag{3.4}$$

получающимся из (1.108) при $\rho = 1$, и соотношениям (1.113):

$$b^i_{jk\ell} \xi^j \xi^k \xi^\ell = b\xi^i, \tag{3.5}$$

означающим, что вектор ξ^i является собственным вектором тензора кривизны.

Продифференцируем теперь уравнения (3.5), пользуясь соотношениями (1.38), (3.1), (3.2) и уравнением

$$db - 2b\Theta = c_1\Theta_1 + c_2\Theta_2,$$

которое получается при дифференциальном продолжении уравнения (3.4). Тогда получим:

$$\underset{1}{c}{}^i{}_{jk\ell m}\xi^j\xi^k\xi^\ell\xi^m = c_1\xi^i, \quad \underset{2}{c}{}^i{}_{jk\ell m}\xi^j\xi^k\xi^\ell\xi^m = c_2\xi^i. \tag{3.6}$$

Таким образом, вектор ξ^i является собственным вектором и для ковариантных производных тензора кривизны. Дифференцируя (3.6), получим целый ряд аналогичных соотношений для ковариантных производных следующих порядков. Доказана

Теорема 3.1. *Касательные векторы к линиям ткани $W^2 = (V^2, \lambda'_\alpha)$, высекаемой на трансверсальной поверхности V^2 слоями три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$, будут собственными векторами тензора кривизны этой ткани и всех его ковариантных производных.*

Отметим, что эта теорема эквивалентна следствию из теоремы 2.21. Заметим еще, что уравнения (3.3) и (3.4) представляют собой уравнения структуры ткани W^2, а величина b будет ее кривизной.

2. Определение. Три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$ называется *трансверсально-геодезической*, если каждая ее трансверсальная плоскость касается некоторой трансверсальной поверхности V^2.

Из определения следует, что через каждую точку многообразия, несущего трансверсально-геодезическую ткань, проходит $(r+1)$-параметрическое семейство двумерных трансверсально-геодезических поверхностей. Примером трансверсально-геодезической ткани является грассманова ткань GW. Действительно (см. п. 3 §2 гл. 1), любое двумерное подпространство P^2 проективного пространства P^{r+1} пересекает гиперповерхности X_α, определяющие грассманову ткань GW, по трем кривым, с помощью которых в плоскости P^2 определяется грассманова три-ткань $\widetilde{GW}$, являющаяся подтканью ткани GW. Всего через произвольную прямую p, пересекающую гиперповерхности X_α, проходит ∞^{r+1} двумерных подпространств. Лежащие в них плоские поля прямых являются трансверсально-геодезическими поверхностями ткани GW.

Согласно определению, три-ткань W будет трансверсально-геодезической тогда и только тогда, когда уравнения (3.5), (3.6) и им подобные удовлетворяются тождественно. Для этого достаточно, чтобы тождественно удовлетворялись только уравнения (3.5), поскольку остальные являются их дифференциальными следствиями. Но эти условия выполняются, если множитель b, входящий в уравнения (3.5), будет однородным многочленом второй степени относительно переменных ξ^i:

$$b = b_{ij}\xi^i\xi^j, \quad b_{ij} = b_{ji}. \tag{3.7}$$

Тогда уравнения (3.5) принимают вид:

$$b^i_{jk\ell}\xi^j\xi^k\xi^\ell = \xi^i b_{k\ell}\xi^k\xi^\ell.$$

Так как это тождества относительно ξ^i, то получаются равенства

$$b^i_{(jk\ell)} = \delta^i_{(j}b_{k\ell)}. \tag{3.8}$$

Обратно, пусть выполняются соотношения (3.8), где $b_{ij} = b_{ji}$. Свернув эти равенства с координатами вектора ξ, в силу обозначений (3.7) придем к (3.5). Таким образом, вектор ξ оказывается собственным вектором тензора кривизны. В силу (3.5) система (3.1), определяющая трансверсально-геодезические поверхности ткани, оказывается вполне интегрируемой. Так как вектор ξ является произвольным, а коллинеарные векторы ξ определяют одно и то же решение, то получаем, что верна

Теорема 3.2. *Для того, чтобы три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$ была трансверсально-геодезической, необходимо и достаточно, чтобы симметричная часть ее тензора кривизны имела вид* (3.8).

Заметим, что величины $b_{k\ell}$ можно выразить через тензор кривизны. Действительно, свертывая (3.8) по индексам i и j, получим:

$$b_{k\ell} = \frac{3}{r+2}\, b^i_{(ik\ell)}. \tag{3.9}$$

Вспомним теперь, что тензоры a^i_{jk} и $b^i_{jk\ell}$ определяют соответственно бинарную и тернарную операции в касательной W-алгебре три-ткани W (см. §5 гл. 2):

$$[\xi, \eta] = -2a(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta, \zeta) = -b(\eta, \xi, \zeta).$$

Поэтому соотношения (3.8) могут быть записаны следующим образом:

$$(\xi, \xi, \xi) = -\xi\, b(\xi, \xi).$$

Так как, кроме того, $[\xi, \xi] = 0$, то теорема 3.2 в терминах W-алгебры формулируется следующим образом: *три-ткань W будет трансверсально-геодезической тогда и только тогда, когда в касательном пространстве каждой координатной лупы ℓ_p ткани произвольный вектор ξ порождает одномерную подалгебру относительно тернарной операции W-алгебры этой ткани в точке p.*

Еще одно характеристическое свойство трансверсально-геодезической три-ткани вытекает из результатов § 7 гл. 2. Там установлено (теорема 2.29 и далее), что трансверсальным поверхностям ткани отвечают подлупы ее координатных луп. Так как трансверсально-геодезическая ткань несет максимально возможное число трансверсальных двумерных поверхностей, то верна

Теорема 3.3. *Для того, чтобы три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$ была трансверсально-геодезической, необходимо и достаточно, чтобы все ее координатные лупы обладали максимальным количеством однопараметрических подлуп.*

3. Из формулы (3.7) видно, что кривизна b обращается в нуль на тех поверхностях V^2, для которых определяющий их вектор ξ удовлетворяет уравнению

$$b_{ij}\xi^i\xi^j = 0.$$

Предположим теперь, что на любой из трансверсальных поверхностей двумерная ткань W^2 является шестиугольной. Тогда последнее уравнение удовлетворяется при любом ξ, что дает $b_{ij} = 0$. Ввиду этого соотношения (3.8) принимают вид

$$b^i_{(jk\ell)} = 0. \tag{3.10}$$

Очевидно и обратное: равенства (3.10) приводят к шестиугольности подтканей на всех трансверсальных поверхностях V^2.

Как доказано в главе 2 (см. таблицу 2.2 на с. 59), условие (3.10) необходимо для того, чтобы три-ткань W была шестиугольной. Используя результаты этого параграфа, докажем обратное утверждение: *если симметричная часть тензора кривизны некоторой три-ткани W равна нулю, то эта ткань является шестиугольной.*

В самом деле, пусть соотношения (3.10) выполняются. Как только что было показано, ткань W в этом случае будет трансверсально-геодезической, и все ее трансверсальные поверхности V^2 несут шестиугольные ткани, составленные из геодезических линий.

Рассмотрим произвольную достаточно малую шестиугольную фигуру $(p_1p_2\dots p_7)$ с центром p, образованную слоями ткани W (рис. 37) и проведем через точку p геодезические лучи pp_1, pp_2, …, pp_7. Пусть ξ_1 — касательный вектор к геодезическому лучу pp_1. Этот вектор определяет в касательном пространстве T_p трансверсальный бивектор $H = \xi_1 \wedge \xi_2$, который, в свою очередь, определяет на X некоторую трансверсальную поверхность V^2. При этом геодезический луч pp_1 лежит на поверхности V^2, так как она является вполне геодезической на многообразии X (§ 7 гл. 2).

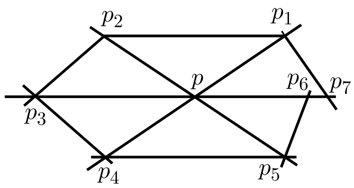

Рис. 37

Поверхность V^2 инвариантна относительно отображения φ_{12}, устанавливаемого слоями третьего слоения ткани W, причем $p_2 = \varphi_{12}(p_1)$. Поэтому точка p_2 также лежит на поверхности V^2. Следовательно, и весь геодезический луч pp_2 принадлежит поверхности V^2.

Аналогично доказывается, что на поверхности V^2 лежат и точки p_3, p_4, …, p_7, а вместе с ними — и определяемые ими геодезические лучи pp_3, pp_4, …, pp_7. При этом лучи pp_1 и pp_4 принадлежат одной геодезической линии. То же самое можно сказать о лучах pp_2 и pp_5, а также pp_3, pp_6 и pp_7. Поэтому все точки p_1, p_2,…, p_7 лежат на поверхности V^2.

Итак, доказано, что вершины всякой шестиугольной фигуры, образованной слоями рассматриваемой ткани W, лежат на некоторой ее трансверсальной поверхности V^2 и являются поэтому вершинами шестиугольной фигуры ткани W^2 на поверхности V^2. Но, поскольку ткань W^2

является шестиугольной, то на ней все шестиугольные фигуры замыкаются. Следовательно, шестиугольной будет и три-ткань W.

Полученные в этом пункте результаты объединяет следующая

Теорема 3.4. *На многомерной три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ равносильны следующие утверждения*:

а) три-ткань W является шестиугольной;

б) три-ткань W является трансверсально-геодезической и все ее двумерные подткани являются шестиугольными;

в) тензор кривизны ткани W удовлетворяет условию (3.10);

г) в касательном пространстве каждой координатной лупы ℓ_p ткани произвольный вектор ξ порождает одномерную подалгебру относительно тернарной операции W-алгебры этой ткани в точке p;

д) все координатные лупы три-ткани W моноассоциативны;

е) все координатные лупы три-ткани W обладают максимальным количеством однопараметрических подгрупп.

§ 3.2. Изоклинные три-ткани

1. В § 3 гл. 1 показано, что с каждой точкой многообразия X размерности $2r$, на котором задана три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$, связано однопараметрическое семейство изоклинных r-мерных подпространств, определяемых векторами

$$\zeta_i = \zeta^1 \underset{2}{e_i} - \zeta^2 \underset{1}{e_i}. \tag{3.11}$$

Определение. Подмногообразие V^r размерности r многообразия X называется *изоклинной поверхностью три-ткани* $W = (X, \lambda_\alpha)$, если оно в каждой своей точке касается некоторой изоклинной r-мерной плоскости этой ткани.

Ясно, что слои ткани W являются ее изоклинными поверхностями. Найдем условия, при которых три-ткань W допускает изоклинную поверхность V^r, отличную от слоев этой ткани.

Касательный вектор ξ к изоклинной поверхности будет линейной комбинацией векторов ζ_i, записанных в виде (3.11):

$$\xi = \Theta^i \zeta_i = \Theta^i (\zeta^1 \underset{2}{e_i} - \zeta^2 \underset{1}{e_i}).$$

С другой стороны, касательный вектор к многообразию X записывается в виде (1.20). Сравнивая эти два выражения, находим, что на изоклинной поверхности V^r выполняются уравнения

$$\underset{1}{\omega}^i = \zeta^1 \Theta^i, \quad \underset{2}{\omega}^i = \zeta^2 \Theta^i.$$

Исключая отсюда формы Θ^i, получим уравнения поверхности V^r в виде

$$\underset{2}{\omega}^i + \lambda \underset{1}{\omega}^i = 0, \tag{3.12}$$

где $\lambda = -\zeta^2 : \zeta^1$.

Дифференцируя внешним образом уравнения (3.12), придем к соотношениям:

$$d\lambda \wedge \underset{1}{\omega}^i - (\lambda^2 - \lambda) a^i_{jk} \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k = 0.$$

Отсюда следует, что на поверхности V^r дифференциал $d\lambda$ будет линейной комбинацией базисных форм $\underset{1}{\omega}^i$. Далее, так как поверхность V^r не является слоем первого, второго или третьего слоений ткани W, то $\lambda \neq 0, \infty, 1$ и можно положить

$$\frac{d\lambda}{\lambda^2 - \lambda} = a_k \underset{1}{\omega}^k. \tag{3.13}$$

Ввиду этого предыдущее квадратичное уравнение примет вид

$$(a^i_{jk} - \delta^i_k a_j)\, \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^i = 0.$$

На поверхности V^r оно должно выполняться тождественно. Следовательно, в точках поверхности V^r выполняются соотношения

$$a^i_{jk} = a_{[j}\delta^i_{k]}. \tag{3.14}$$

Таким образом, *если на многообразии X три-ткани W существует изоклинная поверхность V^r, то в каждой ее точке тензор кручения имеет вид* (3.14).

Заметим, что при $r = 2$ тензор кручения ткани W (не обязательно изоклинной) всегда можно записать в виде (3.14). Поэтому мы в дальнейшем будем различать случаи $r = 2$ и $r > 2$.

2. Рассмотрим теперь три-ткань W, тензор кручения которой имеет вид (3.14). Уравнения структуры (1.26) такой ткани запишутся так:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a_j \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^i, \qquad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a_j \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^i. \tag{3.15}$$

Дифференцируя уравнения (3.15) внешним образом, придем к системе внешних уравнений третьей степени:

$$\Omega^i_j \wedge \underset{1}{\omega}^j - \nabla a_j \wedge \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \Omega^i_j \wedge \underset{2}{\omega}^j + \nabla a_j \wedge \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^i = 0, \tag{3.16}$$

где

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k, \quad \nabla a_j = da_j - a_k \omega^k_j. \tag{3.17}$$

Из уравнений (3.16) следует, что формы Ω^i_j и ∇_j выражаются через базисные:

$$\nabla a_j = p_{jk} \underset{1}{\omega}^k + q_{jk} \underset{2}{\omega}^k, \tag{3.18}$$

$$\Omega^i_j = b^i_{jk\ell} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell. \tag{3.19}$$

Подставляя эти разложения в уравнения (3.16), получим соотношения

$$b^i_{[jk]\ell} = q_{\ell[j}\delta^i_{k]}, \quad b^i_{[j|\ell|k]} = p_{\ell[j}\delta^i_{k]}, \tag{3.20}$$

а при $r > 2$ еще и соотношения

$$p_{jk} = p_{kj}, \quad q_{jk} = q_{kj}. \tag{3.21}$$

Определение. Ткань W, через каждую точку которой проходит однопараметрическое семейство изоклинных поверхностей, называется *изоклинной три-тканью.*

Примером изоклинной три-ткани является грассманова ткань GW. Действительно, пусть как и выше (см. п. 3 § 1.2), p есть произвольная прямая проективного пространства P^{r+1}, пересекающая гиперповерхности X_α, определяющие грассманову ткань GW. Произвольная связка прямых с вершиной S на прямой p пересекает всякую двумерную плоскость P^2, проходящую через прямую p, по пучку прямых с вершиной S. Как отмечено в предыдущем параграфе, плоское поле прямых в плоскости P^2 есть трансверсально-геодезическая поверхность грассмановой ткани GW. Таким образом, в силу определения изоклинной поверхности получается, что любая связка прямых с вершиной на прямой p есть изоклинная поверхность ткани GW (проходящая через прямую p — точку на грассмановом многообразии прямых). Следовательно, грассманова ткань является изоклинной.

Теорема 3.5. *Для того, чтобы ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$, $\dim X > 4$, была изоклинной, необходимо и достаточно, чтобы ее тензор кручения имел специальное строение* (3.14).

□ Если через точку p многообразия X проходит хотя бы одна изоклинная поверхность, то, как было доказано выше, тензор кручения ткани имеет в этой точке строение (3.14).

Обратно, пусть тензор кручения ткани W имеет вид (3.14). Тогда при $r > 2$ на ткани выполняются и соотношения (3.21). Рассмотрим на X систему уравнений (3.12) и (3.13). Она вполне интегрируема в силу уравнений (3.14) и (3.21) и, следовательно, определяет $(r+1)$-параметрическое семейство изоклинных поверхностей. При этом через каждую точку многообразия X проходит однопараметрическое семейство изоклинных поверхностей, определяемых различными значениями параметра λ. Таким образом, три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$ является изоклинной. ■

Обратимся теперь к случаю $r = 2$. Как было сказано выше, при $r = 2$ тензор кручения произвольной ткани W всегда может быть записан в виде (3.14), однако соотношения (3.21), вообще говоря, не выполняются. Поэтому при $r = 2$ получается

Теорема 3.6. *Пусть на четырехмерном многообразии X задана три-ткань W, причем тензор кручения этой ткани записан в виде* (3.14). *Ткань W будет изоклинной тогда и только тогда, когда ковариантные производные ковектора a_i симметричны.*

3. Найдем наиболее общий вид тензора кривизны изоклинной три-ткани. Воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$b^i_{jk\ell} = b^i_{(jk\ell)} + \frac{1}{3}\, b^i_{[jk]\ell} + \frac{1}{3}\, b^i_{[j\ell]k} + b^i_{[\ell k]j} + \frac{4}{3}\, b^i_{[j|k|\ell]} + \frac{2}{3}\, b^i_{[k|\ell|j]}. \tag{3.22}$$

Подставляя сюда выражения для альтернированных частей тензора $b^i_{jk\ell}$ из (3.20), получим:

$$b^i_{jk\ell} = b^i_{(jk\ell)} + \frac{2}{3}\, p_{jk}\delta^i_\ell - \frac{1}{3}\, p_{k\ell}\delta^i_j - \frac{1}{3}\, p_{\ell j}\delta^i_k - \frac{1}{3}\, q_{jk}\delta^i_\ell - \frac{1}{3}\, q_{k\ell}\delta^i_j + \frac{2}{3}\, q_{\ell j}\delta^i_k.$$

Положим далее

$$p_{jk} = b^1_{jk} - b^3_{jk}, \quad q_{jk} = b^2_{jk} - b^3_{jk}, \tag{3.23}$$

где b^1_{jk}, b^2_{jk}, b^3_{jk} — некоторые симметричные тензоры. В результате выражение для $b^i_{jk\ell}$ примет вид:

$$b^i_{jk\ell} = b^i_{(jk\ell)} - (b^1_{(jk} + b^2_{(jk} + b^3_{(jk})\delta^i_{\ell)} + b^1_{jk}\delta^i_\ell + b^2_{\ell j}\delta^i_k + b^3_{k\ell}\delta^i_j.$$

Введем теперь симметричный тензор

$$a^i_{jk\ell} = b^i_{(jk\ell)} - (b^1_{(jk} + b^2_{(jk} + b^3_{(jk})\delta^i_{\ell)}. \tag{3.24}$$

Тогда окончательно получаем:

$$b^i_{jk\ell} = a^i_{jk\ell} + b^1_{jk}\delta^i_\ell + b^2_{\ell j}\delta^i_k + b^3_{k\ell}\delta^i_j. \tag{3.25}$$

Один из тензоров $b^\alpha_{k\ell}$, $\alpha = 1, 2, 3$, можно определить, наложив на тензор $a^i_{jk\ell}$ дополнительное условие

$$a^i_{ik\ell} = 0. \tag{3.26}$$

В самом деле, свертывая соотношение (3.24) по индексам i и j и учитывая (3.26), имеем:

$$b^i_{ik\ell} = \frac{1}{3}(r+2)(b^1_{k\ell} + b^2_{k\ell} + b^3_{k\ell}).$$

Отсюда с помощью (3.23) найдем, например, тензор $b^3_{k\ell}$:

$$b^3_{k\ell} = \frac{1}{r+2}\, b^i_{(ik\ell)} - \frac{1}{3}(p_{k\ell} + q_{k\ell}).$$

Обратно, легко проверить, что из последних равенств следуют соотношения (3.26).

Таким образом, тензор кривизны изоклинной три-ткани можно представить в виде (3.25), где $a^i_{jk\ell}$ — симметричный тензор, удовлетворяющий условию (3.26).

Соотношения (3.14) и (3.25) допускают также интерпретацию в терминах касательных W-алгебр ткани. Заметим, во-первых, что тензор a^i_{jk} вида (3.14) удовлетворяет тождеству Якоби. Следовательно, *относительно бинарной операции касательные W-алгебры изоклинной три-ткани являются алгебрами Ли.* Далее, соотношение (3.14) эквивалентно равенству

$$[\xi, \eta] = a(\eta)\xi - a(\xi)\eta, \tag{3.27}$$

где $a(\xi) = a_i\xi^i$ — скалярная линейная форма. Из соотношения (3.27) очевидно, что *коммутатор в касательных W-алгебрах изоклинной три-ткани удовлетворяет так называемой аксиоме плоскостей*: *любые два вектора W-алгебры определяют двумерную* (*лиеву*) *подалгебру.*

Полное описание алгебры Ли изоклинной три-ткани и соответствующей группы Ли дано в [ГШ-1].

В силу (3.25) ассоциатор в касательных W-алгебрах изоклинной три-ткани записывается так:

$$(\xi,\eta,\zeta) = -a(\xi,\eta,\zeta) - b^1(\xi,\eta)\zeta - b^2(\eta,\zeta)\xi - b^3(\zeta,\xi)\eta, \tag{3.28}$$

где

$$a^i(\xi,\eta,\zeta) = a^i_{jk\ell}\xi^j\eta^k\zeta^\ell$$

— симметричная трилинейная форма с нулевым следом со значениями в W-алгебре, а

$$b^\alpha(\xi,\eta) = b^\alpha_{ij}\xi^i\eta^j \quad (\alpha = 1,2,3)$$

— симметричные скалярные билинейные формы.

Из теорем, доказанных в этом и предыдущем пунктах, вытекает, что указанный выше специфический вид коммутатора и ассоциатора является необходимым и достаточным условием изоклинности многомерной три-ткани. Поэтому верна

Теорема 3.7. *Три-ткань $W = (X,\lambda_\alpha)$ будет изоклинной тогда и только тогда, когда коммутатор и ассоциатор ее W-алгебры имеют вид* (3.27) *и* (3.28).

4. Как показано выше, всякая грассманова ткань является одновременно изоклинной и трансверсально-геодезической. Возникает вопрос: существуют ли ткани, отличные от грассмановых, которые также обладают этим свойством? Как будет показано далее, ответ на этот вопрос отрицательный.

Пусть W – произвольная изоклинная ткань, не обязательно грассманова.

Теорема 3.8. *Для того чтобы изоклинная три-ткань была трансверсально-геодезической, необходимо и достаточно, чтобы ее тензор кривизны мог быть записан в виде:*

$$b^i_{jk\ell} = b^1_{jk}\delta^i_\ell + b^2_{\ell j}\delta^i_k + b^3_{k\ell}\delta^i_j, \tag{3.29}$$

где b^1_{ij}, b^2_{ij} и b^3_{ij} — симметричные тензоры.

□ Согласно теореме 3.2 трансверсально-геодезическая три-ткань характеризуется тем, что ее тензор кривизны имеет строение (3.8). Но, с другой стороны, из формулы (3.25), определяющей вид тензора кривизны изоклинной три-ткани, следует, что

$$b^i_{(jk\ell)} = a^i_{jk\ell} + (b^1_{(jk} + b^2_{(jk} + b^3_{(jk})\delta^i_{\ell)}.$$

Из этих двух условий вытекает, что тензор $a^i_{jk\ell}$ имеет специальный вид:

$$a^i_{jk\ell} = a_{(jk}\delta^i_{\ell)}.$$

Используя условие (3.26), находим:

$$a^i_{ik\ell} = (r+2)a_{k\ell} = 0,$$

т. е. $a_{k\ell} = 0$ и, следовательно, $a^i_{jk\ell} = 0$. Ввиду этого тензор кривизны рассматриваемой три-ткани имеет вид (3.29). ■

Из формул (3.27), (3.29) следует, что коммутатор и ассоциатор в W-алгебре три-ткани W, которая одновременно является изоклинной и трансверсально-геодезической, записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}[\xi,\eta] = a(\eta)\xi - a(\xi)\eta,\\ (\xi,\eta,\zeta) = -b^1(\xi,\eta)\zeta - b^2(\eta,\zeta)\xi - b^3(\zeta,\xi)\eta,\end{gathered} \tag{3.30}$$

где $a(\xi)$ — линейная, а $b^\alpha(\xi,\eta)$ — симметричные билинейные скалярные формы. Поэтому коммутатор в W-алгебре такой ткани удовлетворяет аксиоме 2-плоскостей, а ассоциатор — аксиоме 3-плоскостей.

В дальнейшем нам потребуются дифференциальные продолжения уравнений (3.18) и (3.19) в предположении, что три-ткань является одновременно изоклинной и трансверсально-геодезической. Дифференцируя эти уравнения при условиях (3.21) и (3.29), получим:

$$(\nabla p_{jk} + p_{jk}a_\ell\underset{1}{\omega}^\ell)\wedge\underset{1}{\omega}^k + (\nabla q_{jk} - q_{jk}a_\ell\underset{2}{\omega}^\ell)\wedge\underset{2}{\omega}^k + (b^1_{jk}a_\ell + b^2_{\ell j}a_k + b^3_{k\ell}a_j)\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^\ell = 0,$$

$$[\delta^i_\ell\nabla b^1_{jk} + \delta^i_k\nabla b^2_{\ell j} + \delta^i_j\nabla b^3_{k\ell} - (b^1_{jk}\delta^i_\ell + b^2_{\ell j}\delta^i_k + b^3_{k\ell}\delta^i_j)a_m(\underset{1}{\omega}^m - \underset{2}{\omega}^m)]\wedge\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^\ell = 0.$$

Здесь ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в связности Γ_{12}.

Исключим из этих уравнений величины p_{ij} и q_{ij} с помощью соотношений (3.23) и положим

$$\overset{\circ}{\nabla} b^\alpha_{ij} = \nabla b^\alpha_{ij} + b^\alpha_{ij} a_\ell (\underset{1}{\omega}^\ell - \underset{2}{\omega}^\ell).$$

Тогда получим уравнения

$$\overset{\circ}{\nabla} b^1_{jk} \wedge \underset{1}{\omega}^k + \overset{\circ}{\nabla} b^2_{jk} \wedge \underset{2}{\omega}^k - \overset{\circ}{\nabla} b^3_{jk} (\underset{1}{\omega}^k + \underset{2}{\omega}^k) + 3a_{(j} b^3_{k\ell)} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = 0, \tag{3.31}$$

$$(\delta^i_\ell \overset{\circ}{\nabla} b^1_{jk} + \delta^i_k \overset{\circ}{\nabla} b^2_{\ell j} + \delta^i_j \overset{\circ}{\nabla} b^3_{k\ell}) \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = 0. \tag{3.32}$$

Свернув последнее по индексам i и j, придем к уравнению

$$(\overset{\circ}{\nabla} b^1_{k\ell} + \overset{\circ}{\nabla} b^2_{k\ell} + \overset{\circ}{\nabla} b^3_{k\ell}) \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = 0. \tag{3.33}$$

Из уравнений (3.32) и (3.33) следует, что формы $\overset{\circ}{\nabla} b^\alpha_{k\ell}$ являются главными на многообразии X, так что можно положить

$$\overset{\circ}{\nabla} b^\alpha_{ij} = \underset{2}{b}^\alpha_{ijk} \underset{1}{\omega}^k - \underset{1}{b}^\alpha_{ijk} \underset{2}{\omega}^k, \ \alpha = 1, 2, 3. \tag{3.34}$$

Используя далее соотношения (3.31) и (3.33), можно показать, что тензоры, входящие в правые части разложений (3.34), симметричны по всем индексам. Подставляя разложения (3.34) в (3.32), найдем, что $\underset{2}{b}^2_{ijk} = 0$, $\underset{1}{b}^1_{ijk} = 0$. Поэтому при $\alpha = 1, 2$ разложения (3.34) эквивалентны квадратичным уравнениям

$$\overset{\circ}{\nabla} b^1_{ij} \wedge \underset{1}{\omega}^j = 0, \quad \overset{\circ}{\nabla} b^2_{ij} \wedge \underset{2}{\omega}^j = 0, \tag{3.35}$$

а при $\alpha = 3$ из них вытекает уравнение

$$\overset{\circ}{\nabla} b^3_{ij} \wedge \underset{1}{\omega}^i \wedge \underset{2}{\omega}^j = 0. \tag{3.36}$$

§ 3.3. Грассмановы три-ткани

1. Как было показано выше, грассмановы три-ткани являются одновременно изоклинными и трансверсально-геодезическими. Следовательно, таковыми являются и эквивалентные им грассманизуемые ткани. Иными словами, верна

Теорема 3.9. *Всякая грассманизуемая три-ткань является одновременно изоклинной и трансверсально-геодезической.*

Класс грассмановых тканей достаточно широк, так как гладкие гиперповерхности X_α, определяющие грассманову три-ткань W, вообще говоря, произвольны. Последнее обстоятельство позволяет находить в классе грассмановых три-тканей разнообразные примеры, иллюстрирующие многие понятия и результаты общей теории три-тканей.

Пусть, как и в главе 1, символом $G(1, r+1)$ обозначено грассманово многообразие прямых проективного пространства P^{r+1}. Оно биективно отображается на компактное алгебраическое многообразие Ω размерности $2r$ проективного пространства P^N, где $N = C^2_{r+2} - 1$, которое задается следующим образом. Пусть $x(x^u)$ и $y(y^u)$ — две точки пространства P^{r+1}, $u, v, w, ... = 0, 1, ..., r+1$. Миноры второго порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} x^0 & x^1 & ... & x^{r+1} \\ y^0 & y^1 & ... & y^{r+1} \end{pmatrix}$$

называются *плюккеровыми координатами прямой* $p = [x, y]$. Их всего C^2_{r+2}, поэтому они определяют точку в проективном пространстве P^N размерности $N = C^2_{r+2} - 1$. Таким образом устанавливается отображение грассманова многообразия $G(1, r+1)$ в P^N, называемое *плюккеровым* *вложением.* Плюккеровы координаты прямой не являются независимыми, а связаны между собой серией квадратичных соотношений, которые получаются из очевидных равенств вида

$$\begin{vmatrix} x^u & x^v & x^w & x^z \\ y^u & y^v & y^w & y^z \\ x^u & x^v & x^w & x^z \\ y^u & y^v & y^w & y^z \end{vmatrix} = 0$$

(где все индексы u, v, w, z различны), если левые части раскрыть по теореме Лапласа. Полученные таким образом соотношения и определяют в P^N многообразие Ω (подробные сведения о таких многообразиях можно найти, например, в [ХП-1]).

Пусть p и q — две прямые пространства P^{r+1}, пересекающиеся в точке x. Они определяют плоский пучок, которому соответствует прямолинейная образующая многообразия Ω. Связка прямых, проходящих через точку x из P^{r+1}, отображается в плоскую r-мерную образующую на Ω, а плоское поле прямых переходит в двумерную плоскую образующую.

Рассмотрим в P^{r+1} множество прямых, пересекающих некоторую фиксированную прямую p. Это множество (обозначим его $\mathcal{K}$) представляет собой многообразие размерности $r+1$. Оно содержит однопараметрическое семейство связок прямых, вершинами которых служат точки прямой p, и несет $(r-1)$-параметрическое семейство плоских полей, носителями которых являются двумерные плоскости, проходящие через p. Ввиду этого множеству $\mathcal{K}$ отвечает на многообразии Ω конус с вершиной в точке p, несущий однопараметрическое семейство r-мерных и $r-1$-параметрическое семейство двумерных плоских образующих. Этот конус называется конусом Сегре и обозначается символом $C_p(2, r)$ (см. § 3 гл. 1). Он представляет собой пересечение многообразия Ω со своим касательным пространством $T_p(\Omega)$.

Рассмотрим в пространстве P^{r+1} гладкую гиперповерхность X. Она определяет расслоение некоторой области D грассманова многообразия $G(1, r+1)$ на связки прямых, вершины которых лежат на X. На многообразии Ω каждому слою отвечает плоская r-мерная образующая.

Три гиперповерхности X_α, $\alpha = 1, 2, 3$, пространства P^{r+1} задают на $G(1, r+1)$ грассманову три-ткань GW. Соответствующий образ на Ω состоит из трех r-параметрических семейств плоских r-мерных образующих.

Координатная квазигруппа три-ткани GW получается следующим образом. Пусть p_0 — прямая, пересекающая гиперповерхности X_α в точках a_α. Тогда всякая прямая p, пересекающая X_1 и X_2 в точках x_1 и x_2, достаточно близких соответственно к a_1 и a_2, пересечет и гиперповерхность X_3 в некоторой точке x_3. Построенное таким образом дифференцируемое и локально обратимое отображение $q\colon X_1 \times X_2 \to X_3$ представляет собой локальную дифференцируемую квазигруппу — координатную квазигруппу три-ткани GW.

2. Найдем дифференциальные уравнения три-ткани GW. Отнесем пространство P^{r+1} к подвижному реперу $\{A_u\}$ $(u, v, w, z, ... = 0, 1, ..., r+1)$, уравнения инфинитезимальных перемещений которого имеют вид

$$dA_u = \Theta_u^v A_v, \tag{3.37}$$

а формы Пфаффа Θ_u^v удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства:

$$d\Theta_u^v = \Theta_u^w \wedge \Theta_w^v \tag{3.38}$$

(см., например, [А-10]).

Совместим точки A_0 и A_{r+1} подвижного репера с текущими точками x_1 и x_2 гиперповерхностей X_1 и X_2 соответственно, а точки $A_i (i, j, k, ... = 1, 2, ..., r)$ поместим в $(r-1)$-мерное пересечение гиперплоскостей, касательных к X_1 и X_2 в точках A_0 и A_{r+1}. Тогда уравнения гиперповерхностей X_1 и X_2 запишутся соответственно в виде

$$\Theta_0^{r+1} = 0, \quad \Theta_{r+1}^0 = 0, \tag{3.39}$$

а формы Θ_0^i, Θ_{r+1}^i будут базисными формами грассманова многообразия $G(1, r+1)$.

Найдем уравнение гиперповерхности X_3, описываемой точкой x_3. Так как эта точка лежит на прямой A_0A_{r+1} и не совпадает ни с одной из точек A_0, A_{r+1}, то репер можно нормировать условием $x_3 \equiv A_0 + A_{r+1}$. Дифференцируя это соотношение с помощью (3.37), найдем, что

$$dx_3 = \Theta_0^0 A_0 + \Theta_{r+1}^{r+1} A_{r+1} + (\Theta_0^i + \Theta_{r+1}^i) A_i.$$

Исключив отсюда точку A_{r+1}, получим равенство

$$dx_3 = \Theta_{r+1}^{r+1} x_3 + (\Theta_0^0 - \Theta_{r+1}^{r+1}) A_0 + (\Theta_0^i + \Theta_{r+1}^i) A_i.$$

Так как точка x_3 описывает r-мерную поверхность, а формы $\Theta_0^i + \Theta_{r+1}^i$ линейно независимы, то форма $\Theta_0^0 - \Theta_{r+1}^{r+1}$ должна быть их линейной комбинацией:

$$\Theta_0^0 - \Theta_{r+1}^{r+1} = a_i(\Theta_0^i + \Theta_{r+1}^i). \tag{3.40}$$

Это и есть уравнение гиперповерхности X_3 в рассматриваемом репере.

Связки прямых, образующих три-ткань GW на грассмановом многообразии $G(1, r+1)$, в построенном репере выделяются уравнениями

$$\Theta_0^i = 0, \quad \Theta_{r+1}^i = 0, \quad \Theta_0^i + \Theta_{r+1}^i = 0.$$

Поэтому формы $\Theta_0^i \overset{\text{def}}{=} \underset{1}{\omega}^i$, $\Theta_{r+1}^i \overset{\text{def}}{=} \underset{2}{\omega}^i$ будут базисными формами грассмановой три-ткани GW.

3. Найдем структурные уравнения три-ткани GW. Из уравнений (3.38) находим:

$$d\Theta_0^i = \Theta_0^0 \wedge \Theta_0^i + \Theta_0^j \wedge \Theta_j^i, \quad d\Theta_{r+1}^i = \Theta_{r+1}^{r+1} \wedge \Theta_{r+1}^i + \Theta_{r+1}^j \wedge \Theta_j^i. \tag{3.41}$$

Как видно из уравнения (3.40), формы Θ_0^0 и Θ_{r+1}^{r+1} могут быть представлены в виде:

$$\Theta_0^0 = \Theta + a_i \Theta_0^i, \quad \Theta_{r+1}^{r+1} = \Theta - a_i \Theta_{r+1}^i, \tag{3.42}$$

где Θ — некоторая форма Пфаффа. Внося эти выражения в (3.41), получим уравнения

$$d\Theta_0^i = \Theta_0^j \wedge \omega_j^i + a_j \delta_k^i \Theta_0^j \wedge \Theta_0^k, \quad d\Theta_{r+1}^i = \Theta_{r+1}^j \wedge \omega_j^i - a_j \delta_k^i \Theta_{r+1}^j \wedge \Theta_{r+1}^k, \tag{3.43}$$

где

$$\omega_j^i = \Theta_j^i - \delta_j^i \Theta. \tag{3.44}$$

Сравнивая уравнения (3.43) со структурными уравнениями (1.26), (1.32) произвольной три-ткани, мы видим, что формы ω_j^i являются формами связности ткани GW, а ее тензор кручения имеет вид

$$a_{jk}^i = a_{[j} \delta_{k]}^i. \tag{3.45}$$

Как было показано в § 2, специфический вид тензора кручения, определенного формулой (3.45), характеризует при $r > 2$ изоклинные три-ткани. Это соответствует тому факту, что грассманова ткань GW является изоклинной.

4. Чтобы найти тензор кривизны три-ткани GW, вычислим асимптотические формы гиперповерхностей X_α. Дифференцируя внешним образом уравнения (3.39) и применяя лемму Картана, выразим формы Θ_i^{r+1} и Θ_i^0 через базисные формы Θ_0^i, Θ_{r+1}^i многообразия прямых $G(1, r+1)$:

$$\Theta_i^{r+1} = b_{ij}^1 \Theta_0^j, \quad \Theta_i^0 = -b_{ij}^2 \Theta_{r+1}^j. \tag{3.46}$$

При этом величины b_{ij}^1 и b_{ij}^2 удовлетворяют условиям $b_{ij}^1 = b_{ji}^1$, $b_{ij}^2 = b_{ji}^2$. Так как

$$d^2 A_0 = (\ldots) A_0 + (\ldots)^i A_i + \Theta_0^i \Theta_i^{r+1} A_{r+1}, \quad d^2 A_{r+1} = (\ldots) A_{r+1} + (\ldots)^i A_i + \Theta_{r+1}^i \Theta_i^0 A_0,$$

то формы

$$b^1 = b_{ij}^1 \Theta_0^i \Theta_0^j, \quad b^2 = -b_{ij}^2 \Theta_{r+1}^i \Theta_{r+1}^j$$

являются асимптотическими формами гиперповерхностей X_1 и X_2 соответственно.

Дифференцируя внешним образом уравнение (3.40), придем к квадратичному уравнению

$$(\nabla a_i + \Theta_i^0 - \Theta_i^{r+1}) \wedge (\Theta_0^i + \Theta_{r+1}^i) = 0,$$

где $\nabla a_i = da_i - a_j\omega_i^j$. Отсюда следует, что

$$\nabla a_i + \Theta_i^0 - \Theta_i^{r+1} = -b_{ij}^3(\Theta_0^j + \Theta_{r+1}^j), \tag{3.47}$$

причем величины b_{ij}^3 удовлетворяют условию симметрии $b_{ij}^3 = b_{ji}^3$. С учетом (3.46) последние равенства запишутся так:

$$\nabla a_i = (b_{ij}^1 - b_{ij}^3)\Theta_0^j + (b_{ij}^2 - b_{ij}^3)\Theta_{r+1}^j. \tag{3.48}$$

Заметим, что величины b_{ij}^3 являются коэффициентами асимптотической формы гиперповерхности X_3 (задача 3.1).

Продифференцируем теперь формы ω_j^i, определенные равенством (3.44), и воспользуемся уравнениями (3.38), (3.42), (3.44), (3.47). В результате придем к уравнениям

$$d\omega_j^i = \Theta_j^0 \wedge \Theta_0^i + \Theta_j^k \wedge \Theta_k^i + \Theta_j^{r+1} \wedge \Theta_{r+1}^i - \delta_j^i d\Theta, \quad d\Theta = -b_{ij}^3 \Theta_0^i \wedge \Theta_{r+1}^j.$$

Отсюда в силу (3.44) и (3.46) получим:

$$d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i = (b_{jk}^1 \delta_\ell^i + b_{\ell j}^2 \delta_k^i + b_{k\ell}^3 \delta_j^i)\Theta_0^k \wedge \Theta_{r+1}^\ell.$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (1.30) произвольной три-ткани, находим следующее выражение для тензора кривизны ткани GW:

$$b_{jk\ell}^i = b_{jk}^1 \delta_\ell^i + b_{\ell j}^2 \delta_k^i + b_{ij}^3 \delta_\ell^i. \tag{3.49}$$

Как видно, тензор кривизны имеет вид (3.29), что характеризует трансверсально-геодезические три-ткани. Это соответствует тому факту, что грассманова ткань GW является трансверсально-геодезической.

5. Выше мы показали, что трансверсальным и изоклинным поверхностям грассмановой три-ткани отвечают соответственно двумерные плоские поля прямых и связки прямых. Покажем, как найти трансверсальные и изоклинные поверхности грассмановой ткани GW в построенном репере.

Уравнения (3.1), определяющие трансверсальные двумерные поверхности V^2, для грассмановой три-ткани GW примут вид

$$\Theta_0^i = \xi^i \Theta_1, \quad \Theta_{r+1}^i = \xi^i \Theta_2,$$

причем вектор ξ^i удовлетворяет уравнениям (3.3):

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = \xi^i \Theta.$$

Поэтому в пространстве P^{r+1}

$$dA_0 = \Theta_0^0 A_0 + \Theta_1(\xi^i A_i), \quad dA_{r+1} = \Theta_{r+1}^{r+1} A_{r+1} + \Theta_2(\xi^i A_i),$$
$$d(\xi^i A_i) = \Theta(\xi^i A_i) + \xi^i(\Theta_i^0 A_0 + \Theta_i^{r+1} A_{r+1}).$$

В силу этих уравнений двумерная плоскость π, определенная точками A_0, A_{r+1}, $\xi^i A_i$, остается неподвижной при преобразованиях репера. Таким образом, трансверсальные поверхности грассмановой три-ткани GW представляют собой плоские поля прямых. Напомним, что через прямую $A_0 A_{r+1}$ проходит $(r-1)$-параметрическое семейство плоскостей π.

Изоклинные поверхности V^r три-ткани определяются уравнениями (3.12) и (3.13). Для грассмановой ткани GW имеем $\underset{1}{\omega}^i = \Theta_0^i$, $\underset{2}{\omega}^i = \Theta_{r+1}^i$, поэтому с учетом (3.40) уравнения (3.12) и (3.13) примут вид

$$\Theta_{r+1}^i + \lambda \Theta_0^i = 0, \tag{3.50}$$

$$d\lambda + \lambda(\Theta_0^0 - \Theta_{r+1}^{r+1}) = 0. \tag{3.51}$$

В силу этих уравнений

$$d(A_{r+1} + \lambda A_0) = \Theta_{r+1}^{r+1}(A_{r+1} + \lambda A_0),$$

то есть точка $A_{r+1} + \lambda A_0$ неподвижна. Следовательно, на грассмановом многообразии $G(1, r+1)$ уравнения (3.50) и (3.51) определяют связку прямых с вершиной в точке $A_{r+1} + \lambda A_0$. Таким образом, изоклинные поверхности грассмановой ткани GW представляют собой связки прямых.

6. Предположим, что грассманова три-ткань GW, порожденная гиперповерхностями X_α проективного пространства P^{r+1}, является шестиугольной. Тогда ее тензор кривизны удовлетворяет условию $b^i_{(jk\ell)} = 0$ (теорема 3.4). Отсюда, используя (3.42), получаем соотношения

$$b^1_{k\ell} + b^2_{k\ell} + b^3_{k\ell} = 0. \tag{3.52}$$

В силу равенств (3.52) асимптотические формы гиперповерхностей X_α связаны условием

$$b^1(\xi, \eta) + b^2(\xi, \eta) + b^3(\xi, \eta) = 0. \tag{3.53}$$

Если три-ткань GW — шестиугольная, то шестиугольными будут и ее подткани W^2, высекаемые трансверсальными двумерными плоскостями π. Из теоремы Графа-Зауэра (см. предисловие) в этом случае вытекает, что линии ℓ_α, по которым произвольная двумерная плоскость π пересекает гиперповерхности X_α, принадлежат одной кубической кривой. Таким образом, каждая двумерная плоскость π, проходящая через прямую $A_0 A_{r+1}$ или любую из достаточно близких к ней прямых, пересекает гиперповерхности X_α по кубике. Отсюда вытекает, что и гиперповерхности X_α принадлежат одной гиперповерхности третьего порядка.

Из теоремы Графа–Зауэра следует также и обратное утверждение: если гиперповерхности X_α в P^{r+1} принадлежат одной гиперкубике, то порождаемая ими грассманова три-ткань GW будет шестиугольной. Поэтому верна

Теорема 3.10. *Для того, чтобы грассманова три-ткань GW была шестиугольной, необходимо и достаточно, чтобы определяющие ее гиперповерхности X_α принадлежали одной гиперкубике.*

Напомним, что три-ткань, описанная в этой теореме, называется алгебраической. Три-ткань, эквивалентная алгебраической ткани, называется *алгебраизуемой* и обозначается AW.

Алгебраические три-ткани, у которых определяющая их гиперкубика распадается, будут рассмотрены в § 2 следующей главы.

§ 3.4. Почти грассманова структура, связанная с три-тканью. Проблемы грассманизуемости и алгебраизуемости

1. Как было указано в начале предыдущего параграфа, касательное пространство к грассманову многообразию Ω в точке p пересекает его по конусу Сегре $C_p(2, r)$. Этот факт дает основание ввести следующее обобщение.

Рассмотрим многообразие X размерности $2r$, $r \geqslant 2$, и зададим в касательном пространстве $T_p(X)$ каждой точки p из X конус Сегре $C_p(2, r)$ с вершиной в точке p. Будем считать при этом, что поле конусов Сегре является дифференцируемым. Дифференциально-геометрическую структуру, определяемую на X полем конусов Сегре, назовем *почти грассмановой структурой* и обозначим $AG(1, r+1)$.

Так как конус Сегре $C_p(2, r)$ несет однопараметрическое семейство r-мерных плоских образующих и $(r-1)$-параметрическое семейство двумерных плоских образующих, то его параметрические уравнения в касательном пространстве $T_p(X)$ записываются следующим образом:

$$x^\sigma_i = t_i s^\sigma, \quad i = 1, 2, ..., r, \quad \sigma = 1, 2.$$

При этом r-мерные образующие выделяются на конусе Сегре уравнениями $s^\sigma = c^\sigma s$, а двумерные — уравнениями $t_i = c_i t$ (здесь c^σ и c_i — постоянные). Поэтому конус $C_p(2, r)$ остается инвариантным при преобразованиях группы $\mathbf{GL}(r) \times \mathbf{SL}(2)$, которая является подгруппой полной линейной группы $\mathbf{GL}(2r)$ преобразований $2r$-мерного пространства $T_p(X)$. Группа $\mathbf{GL}(r) \times \mathbf{SL}(2)$ является структурной группой почти грассмановой структуры $AG(1, r+1)$.

Почти грассманова структура называется *r-полуинтегрируемой*, если на X существует $(r+1)$-параметрическое семейство r-мерных подмногообразий V^r, которые в каждой своей точке касаются r-мерных образующих конуса Сегре, причем каждая такая образующая касается одного и только одного подмногообразия V^r. Аналогичным образом определяется 2-*полуинтегрируемость* почти грассмановой структуры и соответствующие подмногообразия V^2.

Если почти грассманова структура $AG(1, r+1)$ является одновременно r- и 2-полуинтегрируемой, то она называется *интегрируемой.* При этом оказывается справедливой следующая теорема, доказательство которой можно найти, например, в [Ми-1].

Теорема 3.11. *Интегрируемая почти грассманова структура $AG(1, r+1)$ является локально грассмановой, т. е. окрестность каждой точки p многообразия X, несущего такую структуру, допускает дифференцируемое отображение в грассманово многообразие Ω, при котором подмногообразиям V^r соответствуют r-мерные плоские образующие, а подмногообразиям V^2 — двумерные плоские образующие грассманова многообразия Ω.*

2. Рассмотрим теперь дифференцируемое многообразие X размерности $2r$, $r \geqslant 2$, на котором задана три-ткань W. Тогда, как показано в § 3 гл. 1, в каждом касательном пространстве $T_p(X)$ многообразия X определяется конус Сегре $C_p(2, r)$, инвариантно связанный с тканью. Расслоение конусов задает на X почти грассманову структуру. Итак, верна

Теорема 3.12. *Три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$, заданная на многообразии X размерности $2r$ ($r \geqslant 2$), определяет на нем почти грассманову структуру $AG(1, r+1)$.*

С другой стороны, с произвольной три-тканью W связана также G_W-структура, структурная группа $\mathbf{GL}(r)$ которой оставляет инвариантными подпространства $T_p(\mathcal{F}_\alpha)$, касательные к слоям $\mathcal{F}_\alpha$ ткани, проходящим через точку p. Эта G_W-структура будет подструктурой почти грассмановой структуры $AG(1, r+1)$, структурной группой которой является группа $\mathbf{GL}(r) \times \mathbf{SL}(2)$.

Как следует из приведенных выше определений, *изоклинность три-ткани W равносильна r-полуинтегрируемости соответствующей почти грассмановой структуры $AG(1, r+1)$, а трансверсальная геодезичность ткани W эквивалентна 2-полуинтегрируемости этой структуры.*

Имеет место следующая

Теорема 3.13. *Для того, чтобы три-ткань W была грассманизуемой, необходимо и достаточно, чтобы она была одновременно изоклинной и трансверсально-геодезической.*

□ Необходимость доказана в § 3, а достаточность вытекает из теоремы 3.11, приведенной в п. 1.

Однако достаточность можно доказать и непосредственно. Для этого построим отображение изоклинной трансверсально-геодезической три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ в грассманово многообразие $G(1, r+1)$ прямых проективного пространства P^{r+1}. Пусть, как и в § 3, пространство P^{r+1} отнесено к проективному реперу A_u, $u, v = 0, 1, ..., r+1$. Тогда имеют место уравнения (3.37), и входящие в них формы Θ_u^v удовлетворяют структурным уравнениям (3.38). Пусть текущая прямая в P^{r+1} определяется точками A_0 и A_{r+1}. Рассматриваемое отображение зададим уравнениями

$$\Theta_0^i = \underset{1}{\omega}^i, \quad \Theta_{r+1}^i = \underset{2}{\omega}^i, \tag{3.54}$$

где формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ — базисные формы многообразия X, несущего ткань W. Эти формы, как показано в § 2, удовлетворяют уравнениям (3.15) и всем их дифференциальным следствиям, приведенным там же.

Дифференцируя внешним образом уравнения (3.54) и пользуясь уравнениями структуры (3.15) и (3.38), получим:

$$\begin{gathered}\Theta_0^j \wedge (\Theta_j^i - \delta_j^i \Theta_0^0 - \omega_j^i + \delta_j^i a_k \Theta_0^k) + \Theta_0^{r+1} \wedge \Theta_{r+1}^i = 0,\\ \Theta_{r+1}^j \wedge (\Theta_j^i - \delta_j^i \Theta_{r+1}^{r+1} - \omega_j^i - \delta_j^i a_k \Theta_{r+1}^k) + \Theta_{r+1}^0 \wedge \Theta_0^i = 0.\end{gathered} \tag{3.55}$$

Отсюда вытекает, в частности, что формы Θ_0^{r+1} и Θ_{r+1}^0 выражаются через базисные формы Θ_0^j и Θ_{r+1}^j следующим образом:

$$\Theta_0^{r+1} = \lambda_j \Theta_0^j, \quad \Theta_{r+1}^0 = \mu_j \Theta_{r+1}^j. \tag{3.56}$$

Пользуясь этими уравнениями, из (3.37) находим:

$$dA_0 = \Theta_0^0 A_0 + \Theta_0^j (A_j + \lambda_j A_{r+1}), \quad dA_{r+1} = \Theta_{r+1}^{r+1} A_{r+1} + \Theta_{r+1}^j (A_j + \mu_j A_0).$$

Полученные равенства показывают, что точки A_0 и A_{r+1} описывают в P^{r+1} гиперповерхности, касательные гиперплоскости к которым определяются соответственно точками $A_0, A_j + \lambda_j A_{r+1}$ и $A_{r+1}, A_j + \mu_j A_0$.

Поместим точки A_i репера в пересечение указанных касательных гиперплоскостей. Тогда $\lambda_i = \mu_i = 0$ и уравнения (3.56) принимают вид:

$$\Theta_0^{r+1} = 0, \quad \Theta_{r+1}^0 = 0. \tag{3.57}$$

С учетом этого из (3.55) с помощью леммы Картана (см. [B-1]) получаем:

$$\Theta_j^i - \omega_j^i - \delta_j^i(\Theta_0^0 - a_k\Theta_0^k) = \rho_{jk}^i\Theta_0^k, \quad \Theta_j^i - \omega_j^i - \delta_j^i(\Theta_{r+1}^{r+1} + a_k\Theta_{r+1}^k) = \sigma_{jk}^i\Theta_{r+1}^k, \tag{3.58}$$

причем входящие сюда величины ρ_{jk}^i и σ_{jk}^i симметричны по нижним индексам. Вычитая из первых соотношений (3.58) вторые, находим:

$$\delta_j^i(\Theta_{r+1}^{r+1} - \Theta_0^0 + a_k(\Theta_0^k + \Theta_{r+1}^k)) = \rho_{jk}^i\Theta_0^k - \sigma_{jk}^i\Theta_{r+1}^k.$$

Отсюда следует, что форма Пфаффа, стоящая слева, будет главной, т. е. выражается через базисные формы Θ_0^k и Θ_{r+1}^k. Запишем ее следующим образом:

$$\Theta_{r+1}^{r+1} - \Theta_0^0 + a_k(\Theta_0^k + \Theta_{r+1}^k) = \rho_k\Theta_0^k - \sigma_k\Theta_{r+1}^k.$$

Подставляя это выражение в предыдущее равенство и приравнивая нулю коэффициенты при независимых формах, получим соотношения:

$$\rho_{jk}^i = \delta_j^i\rho_k, \quad \sigma_{jk}^i = \delta_j^i\sigma_k.$$

Альтернируя по индексам j, k и учитывая симметрию величин ρ_{jk}^i и σ_{jk}^i, отсюда выводим, что при $r \geqslant 2$ выполняются равенства $\rho_k = \sigma_k = 0$, $\rho_{jk}^i = \sigma_{jk}^i = 0$. Поэтому получаем уравнения

$$\Theta_0^0 - \Theta_{r+1}^{r+1} = a_k(\Theta_0^k + \Theta_{r+1}^k). \tag{3.59}$$

Далее, пользуясь уравнениями (3.59) и (3.30), находим:

$$d(A_0 + A_{r+1}) = \Theta_{r+1}^{r+1}(A_0 + A_{r+1}) + (\Theta_0^k + \Theta_{r+1}^k)(A_k + a_kA_0).$$

Таким образом, точка $A_0 + A_{r+1}$ также описывает гиперповерхность, касательная плоскость к которой в текущей точке $A_0 + A_{r+1}$ определяется точками $A_0 + A_{r+1}$, $A_k + a_kA_0$.

Из уравнений (3.59) и (3.54) следует, что можно положить

$$\Theta_0^0 = \Theta + a_k\underset{1}{\omega}^k, \quad \Theta_{r+1}^{r+1} = \Theta - a_k\underset{2}{\omega}^k, \tag{3.60}$$

где Θ — некоторая форма Пфаффа. Тогда соотношения (3.58) сведутся к следующим:

$$\Theta_j^i = \omega_j^i + \delta_j^i\Theta. \tag{3.61}$$

Вместе с уравнениями (3.57), (3.60) и (3.61) должны выполняться и их дифференциальные следствия. Дифференцируя уравнения (3.57) и пользуясь леммой Картана, найдем, что выполняются уравнения

$$\Theta_i^{r+1} = \widetilde{b}_{ij}^1\underset{1}{\omega}^j, \quad \Theta_i^0 = -\widetilde{b}_{ij}^2\underset{2}{\omega}^j, \tag{3.62}$$

где $\widetilde{b}_{ij}^1$ и $\widetilde{b}_{ij}^2$ — симметричные тензоры.

Дифференцируя далее уравнения (3.60) и пользуясь (3.38) и (3.18), придем к уравнениям

$$d\Theta = (q_{ij} - \widetilde{b}_{ij}^2)\underset{1}{\omega}^i \wedge \underset{2}{\omega}^j, \quad d\Theta = (p_{ij} - \widetilde{b}_{ij}^1)\underset{1}{\omega}^i \wedge \underset{2}{\omega}^j.$$

Из них вытекают следующие равенства:

$$p_{ij} - \widetilde{b}_{ij}^1 = q_{ij} - \widetilde{b}_{ij}^2 \overset{\text{def}}{=} -\widetilde{b}_{ij}^3,$$

где $\widetilde{b}^3_{ij}$ — некоторый новый симметричный тензор. Поэтому форма $d\Theta$ запишется теперь так:

$$d\Theta = -\widetilde{b}^3_{ij}\underset{1}{\omega^i} \wedge \underset{2}{\omega^j}. \tag{3.63}$$

Продифференцируем теперь уравнения (3.61). Пользуясь соотношениями (3.38), (3.19), (3.62), (3.63) и тем, что тензор кривизны изоклинной трансверсально-геодезической три-ткани имеет вид (3.29), придем к соотношениям:

$$(b^1_{jk} - \widetilde{b}^1_{jk})\delta^i_\ell + (b^2_{\ell j} - \widetilde{b}^2_{\ell j})\delta^i_k + (b^3_{k\ell} - \widetilde{b}^3_{k\ell})\delta^i_j = 0.$$

При $r \geqslant 2$ отсюда следует, что $b^\alpha_{ij} = \widetilde{b}^\alpha_{ij}$, в результате чего равенства (3.62) и (3.63) примут вид:

$$\Theta^{r+1}_i = b^1_{ij}\underset{1}{\omega^j}, \quad \Theta^0_i = -b^2_{ij}\underset{2}{\omega^j}, \quad d\Theta = -b^3_{ij}\underset{1}{\omega^i} \wedge \underset{2}{\omega^j}. \tag{3.64}$$

Рассмотрим систему уравнений (3.54), (3.57), (3.60), (3.61) и (3.64). С помощью уравнений структуры (3.15) и (3.38), а также соотношений (3.35) и (3.36) устанавливается, что эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Следовательно, она вполне интегрируема, и определяемые ею формы Θ^u_v удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства P^{r+1}. Ввиду этого перечисленные уравнения определяют отображение многообразия X размерности $2r$, несущего изоклинную трансверсально-геодезическую три-ткань W, на грассманово многообразие $G(1, r+1)$ прямых проективного пространства P^{r+1}. Точки A_0, A_{r+1} и $A_0 + A_{r+1}$ пространства P^{r+1} описывают, как было отмечено выше, гиперповерхности, которые обозначены X_1, X_2 и X_3 соответственно. Системы уравнений $\Theta^i_0 = 0$, $\Theta^i_{r+1} = 0$, $\Theta^i_0 + \Theta^i_{r+1} = 0$ будут вполне интегрируемыми в P^{r+1}. Они определят связки прямых с вершинами на гиперповерхностях X_1, X_2 и X_3 соответственно. В силу уравнений (3.47) эти связки будут образами слоев изоклинной трансверсально-геодезической ткани, что и доказывает теорему. ■

Так как шестиугольная три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$ является трансверсально-геодезической, то из последней теоремы и теоремы 3.10 вытекает

Теорема 3.14. *Для того, чтобы три-ткань W была алгебраизуемой, необходимо и достаточно, чтобы она была изоклинной и шестиугольной.*

Теоремы 3.13 и 3.14 дают решение проблем грассманизуемости и алгебраизуемости три-тканей.

§ 3.5. Изоклинно-геодезические три-ткани. Три-ткани над алгебрами

1. Вернемся к изоклинным три-тканям и покажем, что их r-мерные изоклинные поверхности в общем случае не являются вполне геодезическими относительно связности Черна Г. В самом деле, дифференциальные уравнения геодезических линий в этой связности, найденные в § 6 гл. 1, имеют вид:

$$d\xi^i_1 + \xi^j_1\omega^i_j = \Theta\xi^i_1, \quad d\xi^i_2 + \xi^j_2\omega^i_j = \Theta\xi^i_2, \tag{3.65}$$

где (ξ^i_1, ξ^i_2) — касательный вектор к геодезической.

Изоклинные поверхности ткани определяются уравнениями (3.12) и (3.13):

$$\underset{2}{\omega^i} + \lambda\underset{1}{\omega^i} = 0, \tag{3.66}$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda^2 - \lambda} = a_i\underset{1}{\omega^i}. \tag{3.67}$$

Рассмотрим на изоклинной поверхности V^r линию ℓ. В силу (3.66) касательный вектор к ℓ имеет координаты $(\xi^i, -\lambda\xi^i)$. Предположим, что линия ℓ является геодезической. Подставляя координаты ее касательного вектора в уравнения (3.65), получим

$$d\xi^i + \xi^j\omega^i_j = \Theta\xi^i, \quad d(\lambda\xi^i) + \lambda\xi^j\omega^i_j = \Theta\lambda\xi^i.$$

Отсюда следует, что $d\lambda = 0$, т. е. величина λ должна быть постоянной на изоклинной поверхности V^r. Таким образом, *изоклинные поверхности три-ткани будут вполне геодезическими в* *связности* Γ *тогда и только тогда, когда они определяются уравнениями* (3.66) *при постоянном* λ. Три-ткани, обладающие этим свойством, назовем *изоклинно-геодезическими.*

Заметим, что параметр λ имеет простой геометрический смысл: он равен двойному отношению четырех r-плоскостей, три из которых касаются слоев ткани W, проходящих через точку p, а четвертая касается изоклинной поверхности V^r, определяемой уравнениями (3.66) и также проходит через p. На изоклинно-геодезической ткани это двойное отношение будет постоянно вдоль изоклинной поверхности V^r.

Из соотношений (3.67) вытекает признак изоклинной геодезичности три-ткани W.

Теорема 3.15. *Три-ткань* W *будет изоклинно-геодезической тогда и только тогда, когда ее тензор кручения равен нулю.*

□ Если ткань является изоклинно-геодезической, то на всех ее изоклинных поверхностях выполняется уравнение $d\lambda = 0$. Отсюда в силу (3.67) получаем $a_i = 0$, а из (3.14) следует $a^i_{jk} = 0$.

Обратно, если тензор кручения ткани W равен нулю, то вследствие (1.26) уравнения (3.66) будут вполне интегрируемы при любом постоянном λ. Следовательно, ткань W изоклинно-геодезическая. ■

Отметим еще, что из уравнений (1.25) при $a^i_{jk} = 0$ вытекают соотношения

$$b^i_{[j|\ell|k]} = 0, \quad b^i_{[jk]\ell} = 0. \tag{3.68}$$

А это означает, что *тензор кривизны изоклинно-геодезической три-ткани симметричен по всем трем нижним индексам.*

2. Рассмотрим вопрос о существовании изоклинно-геодезических три-тканей. Их структурные уравнения получаются из уравнений (1.26) и (1.32) при условии $a^i_{jk} = 0$:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j, \tag{3.69}$$

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = b^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell, \tag{3.70}$$

причем тензор $b^i_{jk\ell}$ симметричен по нижним индексам.

Дифференцируя внешним образом последние уравнения, получим кубические уравнения:

$$\nabla b^i_{jk\ell} \wedge \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = 0. \tag{3.71}$$

Система уравнений (3.69)–(3.71), определяющая изоклинно-геодезические три-ткани, замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Исследуем эту систему, пользуясь признаком Картана [В-1], [Фк-1].

Уравнения (3.69) и (3.70) служат для определения внешних дифференциальных форм $d\underset{1}{\omega}^i$, $d\underset{2}{\omega}^i$, $d\omega^i_j$ и не влияют на совместность системы. Поэтому рассматривать следует только подсистему (3.71). В ней r^2 уравнений на $q = \dfrac{1}{6}\, r^2(r+1)(r+2)$ характеристических форм $\nabla b^i_{jk\ell}$. Так как эта подсистема не накладывает условий на одномерные и двумерные интегральные элементы, то ее характеры s_0 и s_1 равны нулю, $s_0 = s_1 = 0$. Ранг полярной системы уравнений, получающейся из системы (3.71), и служащей для определения трехмерного интегрального элемента, равен r^2, то есть $s_2 = r^2$.

С другой стороны, из системы (3.71) следует, что формы $\nabla b^i_{jk\ell}$ являются линейными комбинациями базисных форм $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$:

$$\nabla b^i_{jk\ell} = \underset{1}{c}{}^i{}_{jk\ell m}\underset{1}{\omega}^m + \underset{2}{c}{}^i{}_{jk\ell m}\underset{2}{\omega}^m,$$

причем тензоры $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$ симметричны по всем нижним индексам. Поэтому их число

$$N = \frac{1}{12}\, r^2(r+1)(r+2)(r+3).$$

Доказательство существования продолжим для размерности $r = 2$, так как в общем случае оно оказывается слишком сложным. При $r = 2$ система (3.71) содержит всего четыре уравнения и $q = 8$ характеристических форм. Поэтому ее характеры равны: $s_0 = s_1 = 0$, $s_2 = s_3 = 4$, $s_4 = q - s_0 - s_1 - s_2 - s_3 = 0$. Найдем число Картана Q: $Q = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 = 20$. Найденное выше число N параметров, от которых зависит наиболее общий интегральный элемент, при $r = 2$ также равно 20. Так как $N = Q$, то по признаку Картана система (3.71) находится в инволюции, т. е. имеет решение. При этом произвол существования интегрального многообразия определяется ненулевым старшим характером s_3, и равен, следовательно, четырем функциям трех аргументов.

3. Большое число интересных примеров изоклинно-геодезических тканей возникает при изучении *тканей над коммутативными и ассоциативными алгебрами.*

Пусть A — коммутативная и ассоциативная алгебра размерности r над полем R вещественных чисел. Обозначим ее базисные векторы $e_i, i = 1, 2, ..., r$. Умножение в алгебре A зададим как обычно, указав произведения ее базисных векторов:

$$e_i e_j = \gamma_{ij}^k e_k. \tag{3.72}$$

Вещественные числа γ_{ij}^k называются структурными постоянными алгебры A. При изменении базиса в A они преобразуются по тензорному закону.

Условия коммутативности и ассоциативности алгебры A равносильны соответственно соотношениям:

$$\gamma_{ij}^k = \gamma_{ji}^k, \tag{3.73}$$

$$\gamma_{ij}^m \gamma_{mk}^\ell = \gamma_{im}^\ell \gamma_{jk}^m. \tag{3.74}$$

Будем считать еще, что алгебра A является унитальной, т. е. имеет единицу σ. Из условия $\sigma \cdot e_i = e_i$ с помощью (3.72) получаем уравнения, которым удовлетворяют координаты σ^i единицы σ:

$$\gamma_{jk}^i \sigma^k = \gamma_{kj}^i \sigma^k = \delta_j^i. \tag{3.75}$$

Ненулевые элементы a и b алгебры A называются делителями нуля, если $a \cdot b = 0$. Последнее равенство влечет соотношения

$$\gamma_{jk}^i a^j b^k = 0,$$

связывающие координаты элементов a и b. Если элемент a является делителем нуля, то эта система имеет нетривиальное решение b^k и ранг матрицы $|\gamma_{jk}^i a^j|$ меньше r. Если элемент $a = a^i e_i$ не является делителем нуля, то указанная матрица будет невырожденной.

Отображение $f\colon A \to A$, для которого приращение $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ может быть представлено в виде

$$\Delta f = g \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

называется дифференцируемой функцией над алгеброй A. Оператор $\Delta x \to g \cdot \Delta x$ называется дифференциалом функции f и обозначается обычным образом:

$$df = g \cdot dx. \tag{3.76}$$

Функция g называется производной функции f по аргументу x из A. При этом используются обычные обозначения: $g = f'(x) = \dfrac{df}{dx}$.

Покажем, что условие дифференцируемости функции f равносильно выполнению следующих уравнений на ее координаты f^i:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \gamma_{jk}^i \frac{\partial f^k}{\partial x^\ell}\, \sigma^\ell. \tag{3.77}$$

Для доказательства рассмотрим соотношение (3.76). Перейдя к координатам, получим:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\, dx^j = \gamma_{kj}^i g^k dx^j,$$

или

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = \gamma_{kj}^i g^k. \tag{3.78}$$

Свернув это соотношение с координатами единицы σ^i и учитывая (3.75), найдем величины g^i:

$$g^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\, \sigma^j.$$

Подставив их в (3.78), придем к соотношениям (3.77).

Достаточность условий (3.77) для дифференцируемости функции f доказывается столь же несложно.

Уравнения (3.77) обобщают известные условия Коши–Римана для функций комплексной переменной.

Аналогично вводится понятие функции двух и нескольких переменных над алгеброй A.

4. Наличие функций, дифференцируемых над алгеброй A, позволяет определить двумерное дифференцируемое многообразие AX^2 над этой алгеброй. Локальными координатами точки многообразия AX^2 служат пары (x, y) элементов из алгебры A.

Столь же естественно определяется на многообразии AX^2 три-ткань, которую обозначим AW^2. Ее слоения задаются уравнениями

$$x = a, \quad y = b, \quad f(x, y) = c, \quad a, b, c \in A,$$

где f — дифференцируемая функция, определенная в некоторой области D многообразия AX^2 со значениями в алгебре A.

Дифференциал функции $f(x, y)$ записывается в обычном виде:

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy.$$

Так как уравнение ткани $z = f(x, y)$ однозначно разрешимо относительно x и y, то производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ не обращаются в нуль и не являются делителями нуля в алгебре A. Поэтому матрицы $\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}$ и $\dfrac{\partial f^i}{\partial y^j}$ будут невырожденными.

Рассмотрим дифференциальные формы

$$\underset{1}{\omega} = \rho \frac{\partial f}{\partial x}\, dx, \quad \underset{2}{\omega} = \rho \frac{\partial f}{\partial y}\, dy, \quad \underset{3}{\omega} = -\rho dz, \tag{3.79}$$

где ρ — функция на многообразии AX^2 со значениями в алгебре A, не обращающаяся в нуль и не являющаяся делителем нуля в области D. Значения форм $\underset{\alpha}{\omega}$ также принадлежат алгебре A. Эти формы связаны уравнением

$$\underset{1}{\omega} + \underset{2}{\omega} + \underset{3}{\omega} = 0,$$

и любые две из них образуют базис на AX^2.

Для дифференциальных форм над коммутативными и ассоциативными алгебрами вводятся операции внешнего умножения и внешнего дифференцирования подобно тому, как это делается для дифференциальных форм над полем вещественных чисел. Для форм над алгебрами сохраняются все свойства внешних операций и выполняются соответствующие теоремы. Поэтому структурные уравнения три-ткани AW^2 имеют тот же вид, что и структурные уравнения двумерной три-ткани на вещественной плоскости:

$$d\underset{\alpha}{\omega} = \underset{\alpha}{\omega} \wedge \omega, \quad d\omega = b\underset{1}{\omega} \wedge \underset{2}{\omega}. \tag{3.80}$$

Здесь ω — дифференциальная форма над алгеброй A, а b — дифференцируемая функция на многообразии AX^2, называемая кривизной ткани AW^2.

Двумерное многообразие AX^2 над алгеброй A допускает реализацию в виде вещественного $2r$-мерного многообразия X, в котором допустимые преобразования координат определяются функциями, удовлетворяющими обобщенным уравнениям Коши-Римана (3.77). При этом три-ткань AW^2 реализуется как три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$, r-мерные слоения которой являются вещественными реализациями одномерных слоений ткани AW^2.

Теорема 3.16. *Три-ткань $W = (X, \lambda_\alpha)$, являющаяся вещественной реализацией двумерной три-ткани AW^2 над ассоциативной, коммутативной и унитальной алгеброй A, будет изоклинно-геодезической тканью.*

□ Найдем структурные уравнения рассматриваемой три-ткани на вещественном многообразии X. Разложим все величины, входящие в уравнения (3.80), по базису алгебры A:

$$\underset{\alpha}{\omega} = \underset{\alpha}{\omega}^i e_i, \quad \omega = \omega^i e_i, \quad b = b^i e_i.$$

Подставляя в уравнения (3.80), получим:

$$d\underset{\alpha}{\omega}^i e_i = \underset{\alpha}{\omega}^j \wedge \omega^k (e_j \cdot e_k) = \underset{\alpha}{\omega}^j \wedge \omega^k \gamma^i_{jk} e_i, \quad d\omega^i e_i = b^j e_j \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell (e_k \cdot e_\ell) = b^j \gamma^i_{jm} \gamma^m_{k\ell} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell e_i.$$

При этом мы считаем, что базисные векторы e_i алгебры A постоянны на многообразии AX^2, т. е. $de_i = 0$. Из последних уравнений следует, что

$$d\underset{\alpha}{\omega}^i = \underset{\alpha}{\omega}^j \wedge \gamma^i_{jk}\omega^k, \quad d\omega^i = b^j \gamma^i_{jm}\gamma^m_{k\ell} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell.$$

Чтобы эти уравнения приняли вид структурных уравнений три-ткани, введем формы

$$\omega^i_j = \gamma^i_{jk}\omega^k.$$

Тогда получим систему

$$d\underset{\alpha}{\omega}^i = \underset{\alpha}{\omega}^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j = \gamma^i_{jp}\gamma^p_{qs}\gamma^q_{k\ell} b^s \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell. \tag{3.81}$$

В силу ассоциативности алгебры A (см. (3.74)) имеем:

$$\omega^k_j \wedge \omega^i_k = \gamma^k_{j\ell}\omega^\ell \wedge \gamma^i_{km}\omega^m = \frac{1}{2}(\gamma^k_{j\ell}\gamma^i_{km} - \gamma^k_{jm}\gamma^i_{k\ell})\omega^\ell \wedge \omega^m = 0.$$

Поэтому уравнения (3.81) совпадают по форме с уравнениями (1.26), (1.32), т. е. представляют собой структурные уравнения рассматриваемой три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ на многообразии X. Из них видно, что тензор кручения ткани W равен нулю, $a^i_{jk} = 0$. Согласно теореме 3.15 рассматриваемая три-ткань является изоклинно-геодезической. Ее тензор кривизны определяется формулой

$$b^i_{jk\ell} = \gamma^i_{jp}\gamma^p_{qs}\gamma^q_{k\ell} b^s,$$

и в силу (3.73), (3.74) будет симметричен по нижним индексам. ■

ЗАДАЧИ

3.1. Докажите, что величины b^3_{ij} (см.(3.47)) образуют асимптотический тензор гиперповерхности X_3.

3.2. Что представляют собой геодезические линии связности Черна грассмановой три-ткани?

3.3. Найдите трансверсальные и изоклинные поверхности следующих четырехмерных три-тканей:

1) $z^1 = e^{x^1 y^1} + x^2 y^2, \quad z^2 = x^2 + y^2;$

2) $z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = -x^1 y^1 + x^2 y^2, \quad x^2 \neq 0, \quad y^2 \neq 0;$

3) $z^1 = x^1 + y^1 e^{x^2}, \quad z^2 = x^2 + y^2;$

4) $z^1 = (x^1 + y^1)(x^2 - y^2), \quad z^2 = x^2 + y^2.$

Проверьте, являются ли эти ткани изоклинными или трансверсально-геодезическими.

3.4. Докажите, что группа Ли со структурным тензором вида (3.14) является параметрической группой группы преобразований $x' = ax + b$, $x', x, b \in R^n, a \in R$.

3.5. Пусть ковектор a_k некоторой изоклинной три-ткани является ненулевым. Покажите, что семейство адаптированных реперов этой ткани можно сузить, наложив условие $a_k = (1, 0 \ldots 0)$. Найдите вид структурных уравнений изоклинной три-ткани в полученном репере.

3.6. Покажите, что тензор кривизны изоклинной три-ткани удовлетворяет условию $b^i_{[jk\ell]} = 0$.

3.7. Грассманова три-ткань будет изоклинно-геодезической тогда и только тогда, когда определяющие ее гиперповерхности X_α будут гиперплоскостями, принадлежащими одному пучку. Выясните в этом случае геометрический смысл параметра λ, постоянного на изоклинных поверхностях такой ткани.

3.8. Найти структурные уравнения и тензоры кривизны вещественных реализаций три-тканей над следующими алгебрами:

а) алгеброй комплексных чисел с базисом $e_1 = 1, e_2 = i, i^2 = -1$;

б) алгеброй двойных чисел с базисом $e_1 = 1, e_2 = e, e^2 = 1$;

в) алгеброй плюральных чисел с базисом $e_1 = 1, e_2 = \varepsilon, e_3 = \varepsilon^2, ..., e_r = \varepsilon^{r-1}, \varepsilon^r = 0$.

В следующих задачах предполагается, что алгебра A ассоциативна, коммутативна и унитальна.

3.9. Пусть W — вещественная реализация три-ткани AW^2, заданной над алгеброй A. Докажите, что всякий идеал размерности m алгебры A порождает расслоение три-ткани W на $(r-m)$-параметрическое семейство $2m$-мерных подтканей. Найдите условия параллелизуемости последних.

3.10. Докажите, что для приводимой алгебры $A = J_1 \oplus J_2$ имеет место двойное расслоение вещественной реализации три-ткани AW^2 на $2m$-мерные и $2(r-m)$-мерные подткани, которые, в свою очередь, являются вещественными реализациями некоторых три-тканей над алгебрами J_1 и J_2.

3.11. Пользуясь задачей 3.10, выясните строение вещественной реализации три-ткани AW^2 над полупростой алгеброй A.

ПРИМЕЧАНИЯ

3.1. Трансверсально-геодезические и изоклинные три-ткани определены в [А-2], [А-5]. Там же найдены соотношения (3.8) и (3.14), характеризующие эти ткани. Случай $r = 2$ в работе [А-5] был пропущен, на что обратил внимание *В.В. Гольдберг*. Необходимое и достаточное условие шестиугольности (3.10) впервые получено *Черном* в [Ч-1].

Классификация 4-мерных изоклинных три-тканей дана в [Го-35].

3.2. С изоклинными три-тканями связано пространство проективной связности, см. [А-5], [АШ-3].

3.3. Грассмановы три-ткани в проективном пространстве P^{r+1} определены *Акивисом* в [А-3], здесь же найдены необходимые и достаточные тензорные признаки грассманизуемости ткани при $r > 1$.

Грассмановы три-ткани при $r = 1$ — это прямолинейные ткани на плоскости. С их помощью реализуются так называемые номограммы из выравненных точек. Поэтому проблема грассманизуемости здесь связана с вопросом о представлении функции двух переменных номограммой из выравненных точек («проблема анаморфозы»). Эта задача имеет давнюю историю, и полностью решена совсем недавно, см. [ГоЛ-1], [ГоЛ-2].

Условие алгебраизуемости три-ткани при $r > 1$ впервые получено *Акивисом* в [А-3], а при $r = 1$ дается теоремой Графа–Зауэра (см. предисловие).

3.4. Почти грассманова структура на три-ткани определена в [А-15] см. также обзор [А-19]. При $r = 2$ почти грассманова структура становится псевдоконформной структурой, так как соответсвующие конусы Сегре будут конусами второго порядка. С этой точки зрения четырехмерные три-ткани рассматривал *Клековкин* [Кл-1], [Кл-2].

3.5. Изоклинно-геодезические три-ткани появились впервые под названием паратактических в [А-2]. Три-ткани над алгебрами, образующие важнейший подкласс изоклинно-геодезических тканей, рассматривал *Тимошенко* [Т-1]–[Т-7].

Четырехмерная три-ткань из задачи 3.6 указана *Болом* [Бол-1], из задач 3.3–3.5 — *Гольдбергом.* Другие примеры см. в [Го-41].

Глава 4

ТРИ-ТКАНИ БОЛА И МУФАНГ

§ 4.1. Три-ткани Бола

1. В § 2 гл. 2 были определены три класса тканей Бола, на которых замыкаются фигуры, изображенные на рисунках 11 – 13. Эти классы переходят друг в друга при перенумерации слоений, что соответствует переходу от одного парастрофа координатной квазигруппы ткани к другому. Поэтому достаточно изучить, например, только средние ткани Бола B_m.

В § 5 гл. 2 доказано, что тензор кривизны тканей B_m удовлетворяет условию

$$b^i_{j(k\ell)} = 0 \tag{4.1}$$

(см. таблицу 2.2 на с. 59). В силу теоремы 3.4 отсюда следует, что *ткани Бола являются шестиугольными, а, следовательно, и трансверсально-геодезическими.*

Для изучения тканей B_m используем вместо связности Черна Γ_{12} другую связность из пучка $\gamma(W)$ связностей, присоединенных к три-тканям W (см. § 8 гл. 1), а именно, связность $\widetilde{\Gamma}_{12}$, определяемую формами

$$\widetilde{\omega}^i_j \equiv \underset{12}{\widetilde{\omega}}{}^i_j = \omega^i_j + a^i_{jk}\Big(\underset{1}{\omega}{}^k - \underset{2}{\omega}{}^k\Big). \tag{4.2}$$

Структурные уравнения связности $\widetilde{\Gamma}_{12}$ для произвольной ткани W имеют вид (1.94):

$$d\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k, \quad d\underset{2}{\omega}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j - a^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k, \quad d\underset{3}{\omega}{}^i = \underset{3}{\omega}{}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j. \tag{4.3}$$

Продифференцируем внешним образом уравнения (4.2) и затем преобразуем правую часть с помощью соотношений (1.32), (1.33), (4.2) и (4.3). В результате придем к уравнениям

$$d\widetilde{\omega}^i_j - \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_j = -b^i_{k(\ell j)}\underset{1}{\omega}{}^k \wedge \underset{3}{\omega}{}^\ell + \Big(b^i_{[jk]\ell} + a^m_{jk}a^i_{\ell m} - a^i_{jm}a^m_{\ell k}\Big)\underset{3}{\omega}{}^k \wedge \underset{3}{\omega}{}^\ell, \tag{4.4}$$

из которых видно, что форма кривизны связности $\widetilde{\Gamma}_{12}$ произвольной ткани W выражается только через формы $\underset{3}{\omega}{}^i$ тогда и только тогда, когда тензор кривизны этой ткани W удовлетворяет условию (4.1). Отсюда и из третьего уравнения (4.3) вытекает

Теорема 4.1. *Условие* (4.1) *на тензор кривизны ткани W необходимо и достаточно для того, чтобы формы $\widetilde{\omega}^i_j$ определяли на базе X_3 третьего слоения этой ткани аффинную связность без кручения.*

Таким образом, *на базе X_3 третьего слоения всякой ткани B_m формы $\widetilde{\omega}^i_j$ определяют аффинную связность без кручения.* Обозначим ее $\widetilde{\gamma}$.

С помощью соотношений (4.1) и (1.31) из (4.4) получаем структурные уравнения связности $\widetilde{\gamma}$:

$$d\underset{3}{\omega}{}^i = \underset{3}{\omega}{}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j, \quad d\widetilde{\omega}^i_j - \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k = R^i_{jk\ell}\,\underset{3}{\omega}{}^k \wedge \underset{3}{\omega}{}^\ell, \tag{4.5}$$

где

$$R^i_{jk\ell} = \frac{1}{4}\left(b^i_{jk\ell} - 2a^i_{mj}a^m_{k\ell}\right). \tag{4.6}$$

Величины $R^i_{jk\ell}$ образуют тензор кривизны R связности $\widetilde{\gamma}$. Соотношения $R^i_{jk\ell} = -R^i_{j\ell k}$, которым должен удовлетворять тензор R, вытекают из равенств (4.1) и кососимметричности тензора кручения a^i_{jk}.

Тензор кривизны b ткани B_m и его ковариантные производные удовлетворяют, помимо соотношений (4.1), еще некоторым условиям. Из уравнений (1.38)

$$\nabla b^i_{jk\ell} = \underset{1}{c}{}^i{}_{jk\ell m}\underset{1}{\omega}{}^m + \underset{2}{c}{}^i{}_{jk\ell m}\underset{2}{\omega}{}^m \tag{4.7}$$

в силу соотношений (4.1) получаем:

$$\underset{1}{c}{}^i{}_{j(k\ell)m} = 0, \quad \underset{2}{c}{}^i{}_{j(k\ell)m} = 0. \tag{4.8}$$

Рассмотрим, кроме того, соотношения (1.39):

$$\underset{1}{c}{}^i{}_{j[k|\ell|m]} = b^i_{jp\ell} a^p_{km}, \quad \underset{2}{c}{}^i{}_{jk[\ell m]} = -b^i_{jkp} a^p_{\ell m}, \tag{4.9}$$

связывающие тензоры произвольной три-ткани. Произведя в (4.9) круговую перестановку индексов k, ℓ, m, получим еще две серии равенств:

$$\begin{aligned} &\underset{1}{c}{}^i{}_{j[m|k|\ell]} = b^i_{jpk} a^p_{m\ell}, \quad \underset{2}{c}{}^i{}_{j\ell[mk]} = -b^i_{j\ell p} a^p_{mk}, \\ &\underset{1}{c}{}^i{}_{j[\ell|m|k]} = b^i_{jpm} a^p_{\ell k}, \quad \underset{2}{c}{}^i{}_{jm[k\ell]} = -b^i_{jmp} a^p_{k\ell}. \end{aligned} \tag{4.9$'$}$$

Складывая в каждом из столбцов (4.9) и (4.9$'$) первые два равенства и вычитая третье, с учетом (4.8) найдем:

$$\underset{1}{c}{}^i{}_{jk\ell m} = -\underset{2}{c}{}^i{}_{jk\ell m} = b^i_{jpm} a^p_{k\ell} - b^i_{jpk} a^p_{\ell m} - b^i_{jp\ell} a^p_{mk} \overset{\text{def}}{=} c^i_{jk\ell m}. \tag{4.10}$$

Таким образом, *ковариантные производные* c_1 *и* c_2 *тензора кривизны ткани Бола* B_m *выражаются через ее тензоры кручения и кривизны.* Это означает, что *G-структура, определяемая три-тканью Бола, является замкнутой G-структурой класса* 3 (подробно замкнутые G-структуры обсуждаются в гл. 5.)

Как показано в § 4 гл. 1, тензоры c_1, c_2, b и a связаны также серией соотношений (1.40). Подставляя в (1.40) значения c_1 и c_2 из (4.10), после преобразований придем к соотношениям:

$$b^i_{jpk} a^p_{\ell m} - b^i_{kpj} a^p_{\ell m} = a^p_{jk} b^i_{p\ell m} - a^i_{pk} b^p_{j\ell m} - a^i_{jp} b^p_{k\ell m}. \tag{4.11}$$

Имеется еще одна система равенств, связывающих тензоры a и b ткани Бола. Мы обнаружим их, предварительно доказав следующее утверждение.

Теорема 4.2. *База X_3 третьего расслоения три-ткани B_m является локально симметрическим пространством.*

□ Напомним одно из определений локально симметрического пространства ([KH-I], т. 2, с. 206). Многообразие X с заданной аффинной связностью Γ называется локально симметрическим пространством, если тензор кручения этой связности равен нулю, а ее тензор кривизны ковариантно постоянен.

Связность $\widetilde{\gamma}$, которую мы рассматриваем, не имеет кручения. Вычислим тензор $\widetilde{\nabla} R^i_{jk\ell}$, где $\widetilde{\nabla}$ — оператор ковариантного дифференцирования в связности $\widetilde{\Gamma}$. Из (4.6) имеем:

$$\widetilde{\nabla} R^i_{jk\ell} = \frac{1}{4} \widetilde{\nabla} b^i_{jk\ell} - \frac{1}{2} \left(a^m_{k\ell} \widetilde{\nabla} a^i_{mj} + a^i_{mj} \widetilde{\nabla} a^m_{k\ell} \right). \tag{4.12}$$

Тензор $\widetilde{\nabla} b$ найдем из (4.7), заменяя формы ω^i_j на $\widetilde{\omega}^i_j$ с помощью (4.2). Учитывая (4.10), получим:

$$\widetilde{\nabla} b^i_{jk\ell} = -\left(b^i_{jpk} a^p_{m\ell} + b^i_{jpm} a^p_{k\ell} + b^p_{jk\ell} a^i_{pm} - b^i_{pk\ell} a^p_{jm} - b^i_{jkp} a^p_{\ell m} \right) \left(\underset{1}{\omega}{}^m - \underset{2}{\omega}{}^m \right). \tag{4.13}$$

Точно так же преобразуем выражение (1.33) для ковариантной производной тензора a^i_{jk}. В силу (4.1) оно примет вид:

$$\nabla a^i_{jk} = -b^i_{[jk]\ell} \left(\underset{1}{\omega}{}^\ell - \underset{2}{\omega}{}^\ell \right). \tag{4.14}$$

Заменяя ω^i_j на $\widetilde{\omega}^i_j$ с помощью (4.12), получим:

$$\widetilde{\nabla} a^i_{jk} = \left(-b^i_{[jk]\ell} + a^m_{jk} a^i_{m\ell} - a^i_{mk} a^m_{j\ell} - a^i_{jm} a^m_{k\ell} \right) \left(\underset{1}{\omega}{}^\ell - \underset{2}{\omega}{}^\ell \right).$$

Подставляя найденные значения для $\widetilde{\nabla} a$ и $\widetilde{\nabla} b$ в (4.12), после несложных преобразований придем к уравнениям:

$$\widetilde{\nabla} R^i_{jk\ell} = \left(b^i_{jmp} a^m_{k\ell} - b^i_{pmj} a^m_{k\ell} + b^i_{m\ell k} a^m_{jp} + b^m_{pk\ell} a^i_{jm} + b^m_{jk\ell} a^i_{mp} \right) \left(\underset{1}{\omega}{}^p - \underset{2}{\omega}{}^p \right).$$

В силу (4.11) эти уравнения принимают простой вид:

$$\widetilde{\nabla} R^i_{jk\ell} = 0. \quad \blacksquare \tag{4.15}$$

Теперь мы можем указать все соотношения, связывающие тензоры кручения и кривизны ткани Бола B_m. Дифференцируя внешним образом уравнения (4.15), мы придем к *тождествам Риччи:*

$$R^i_{[jk\ell]} = 0 \tag{4.16}$$

и тождествам Бианки:

$$-R^i_{s\ell m} R^s_{pjk} + R^s_{p\ell m} R^i_{sjk} + R^s_{j\ell m} R^i_{psk} + R^s_{k\ell m} R^i_{pjs} = 0 \tag{4.17}$$

для связности $\widetilde{\gamma}$. Первое из них вытекает также из (4.6) и (1.31).

Дальнейшее дифференцирование полученных равенств в силу уравнений (4.15) к новым соотношениям не приводит. Можно доказать также, что не даст новых соотношений и дифференцирование равенств (4.11). Следовательно, верна

Теорема 4.3. *Структурные уравнения средней ткани Бола B_m могут быть записаны в виде* (4.3), (4.5), *причем тензор R выражается через тензоры a и b по формулам* (4.6). *Эти тензоры удовлетворяют дифференциальным уравнения* (4.13)–(4.15) *и связаны между собой соотношениями* (4.11), (4.16), *и* (4.17).

2. Покажем, что соотношения (4.1), которым удовлетворяет тензор кривизны ткани B_m, характеризуют этот класс тканей.

Теорема 4.4. *Три-ткань W, тензор кривизны которой удовлетворяет соотношениям* (4.1), *является средней тканью Бола.*

☐ A. Рассмотрим некоторые свойства ткани W, для которой выполняются соотношения (4.1). Во-первых, на базе X_3 слоения λ_3 этой ткани геодезические линии связности $\widetilde{\gamma}$, отнесенные к аффинному параметру, определяются уравнениями (см. § 7 гл. 1):

$$d\xi^i + \xi^j \widetilde{\omega}^i_j = 0,$$

где ξ^i — координаты вектора, касательного к геодезической. Пусть $x_3(t)$ — некоторое решение этого уравнения, где t — аффинный параметр. На многообразии X, несущем три-ткань W, этому решению отвечает однопараметрическое семейство $\mathcal{F}_3(t)$ слоев слоения λ_3. Пересечение этого семейства с каким-либо слоем из первого слоения определяется системой уравнений

$$\underset{1}{\omega}^i = 0, \quad d\xi^i + \xi^j \widetilde{\omega}^i_j = 0.$$

Но, согласно § 7 гл. 1, именно такая система определяет геодезические линии связности Черна на слоях слоения λ_1. Точно так же доказывается, что семейство $\mathcal{F}_3(t)$ пересекает по геодезическим линиям и слои слоения λ_2.

Далее, так как три-ткань B_m является шестиугольной и трансверсально-геодезической, то вершины любой шестиугольной фигуры H, образованной ее слоями, лежат на некоторой двумерной трансверсально-геодезической поверхности V^2 (см. доказательство теоремы 3.4). Последняя пересекает слои, образующие фигуру H, по геодезическим линиям, которые, в свою очередь, образуют шестиугольную фигуру на V^2.

Пользуясь соотношениями (4.1) и уравнениями (3.1) трансверсальной поверхности V^2, находим, что на этой поверхности структурные уравнения (4.3) три-ткани W принимают вид:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \widetilde{\omega}^i_j, \quad d\widetilde{\omega}^i_j = \widetilde{\omega}^k_j \wedge \widetilde{\omega}^i_k.$$

Поэтому система дифференциальных уравнений

$$dp = \underset{1}{\omega}^i \underset{2}{e}_i - \underset{2}{\omega}^i \underset{1}{e}_i, \quad d\underset{1}{e}_i = \widetilde{\omega}^j_i \underset{1}{e}_j, \quad d\underset{2}{e}_i = \widetilde{\omega}^j_i \underset{2}{e}_j$$

вполне интегрируема на V^2, и определяет развертку этой поверхности вместе с присоединенным к ней семейством реперов в аффинное пространство A^{2r}. Полученные уравнения по форме совпадают с уравнениями параллельной три-ткани (§ 5 гл. 1). Следовательно, при развертке в пространство A^{2r} поверхность V^2 перейдет в двумерную плоскость π, а высекаемая на V^2 шестиугольная три-ткань — в параллельную ткань на π.

При этом шестиугольная фигура перейдет в шестиугольник с параллельными сторонами в плоскости π. Так как диагонали последнего делятся в его центре пополам, то и на поверхности V^2 соответствующая точка делит пополам геодезические отрезки — диагонали шестиугольной фигуры H.

В. Рассмотрим слоение λ_3 ткани W. В силу теоремы 4.1 формы $\widetilde{\omega}^i_j$ определяют на базе X_3 этого слоения аффинную связность $\widetilde{\gamma}$. Пусть $\mathcal{F}^1_3$ и $\mathcal{F}^2_3$ — два произвольных слоя из λ_3. Через соответствующие им точки x^1_3 и x^2_3 на базе X_3 проходит единственная геодезическая линия, которой отвечает семейство слоев $\mathcal{F}_3(t)$ расслоения λ_3, причем t — аффинный параметр. Пусть $\mathcal{F}^1_3 = \mathcal{F}_3(t_1)$, $\mathcal{F}^2_3 = \mathcal{F}_3(t_2)$. Положим $\mathcal{F}^3_3 = \mathcal{F}_3(t_3)$, где $t_3 = 2t_2 - t_1$. Тогда слой $\mathcal{F}^2_3$ соответствует середине геодезического отрезка $x^1_3 x^3_3$.

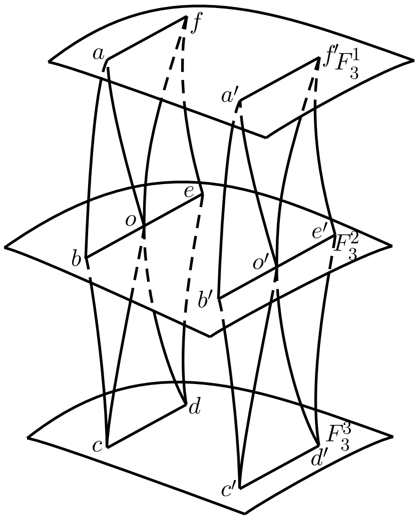

Рис. 38

Пусть a — произвольная точка слоя $\mathcal{F}^1_3$ (рис. 38). Проведем через нее слои $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ из первого и второго слоений ткани, и обозначим через b и o точки пересечения их со слоем $\mathcal{F}^2_3$. Точки a, b, o лежат на одной трансверсальной поверхности V^2 рассматриваемой ткани, так как точки a и b соответствуют друг другу в отображении φ_{12}, заданном в окрестности точки o (§ 3 гл. 1). Поэтому точки a, b, o определяют на поверхности V^2 шестиугольную фигуру $(abcdef)$ с центром o. При этом геодезические ab и ao будут образованы точками пересечения слоев семейства $\mathcal{F}_3(t)$ со слоями $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$. Как было указано в п. А, геодезические отрезки ao и od равны между собой, поэтому точка d лежит на слое $\mathcal{F}^3_3$, а вместе с ней на этом слое лежит и точка c.

Возьмем теперь на слое $\mathcal{F}^1_3$ точку a', отличную от a, и, повторив все рассуждения, придем к точкам b' и o', лежащим на слое $\mathcal{F}^2_3$, и к точке c', лежащей на слое $\mathcal{F}^3_3$. Но эти точки вместе с точками a, b, o, c образуют среднюю фигуру Бола B_m (ср. рис. 13 на с. 46), которая замыкается ввиду того, что точки c и c' лежат на одном слое $\mathcal{F}^3_3$. Так как точки a и a' были выбраны произвольно, то замыкается любая фигура B_m, определенная слоями $\mathcal{F}^1_3$ и $\mathcal{F}^2_3$. Но так как и слои были взяты произвольно, то получаем, что на рассматриваемой три-ткани замыкается любая фигура B_m. ■

Из результатов § 2 гл. 2 следует, что при парастрофии $q \to {}^{-1}q = q_{32}$ координатной квазигруппы q ткани W фигуры B_m перейдут в фигуры Бола B_ℓ, а тензор кривизны $b^i_{jk\ell}$ — в тензор $b^i_{\ell kj}$; при парастрофии $q \to q^{-1} = q_{13}$ фигуры B_m перейдут в фигуры Бола B_r, а тензор $b^i_{jk\ell}$ — в тензор $b^i_{kj\ell}$. Поэтому из последней теоремы вытекает

Теорема 4.5. *Три-ткань W является левой тканью Бола тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны удовлетворяет соотношению $b^i_{(jk)\ell} = 0$, и является правой тканью Бола тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны удовлетворяет соотношению $b^i_{(j|k|\ell)} = 0$.*

3. Симметрическая структура, определенная на базе X_3 расслоения λ_3 ткани Бола B_m, естественным образом переносится на слои ее слоений λ_1 и λ_2. Рассмотрим какой-либо слой $\mathcal{F}$ из первого или второго слоения ткани B_m. Через каждую его точку проходит единственный слой слоения λ_3, и тем самым определяется локальный диффеоморфизм $X_3 \to \mathcal{F}$, который индуцирует на $\mathcal{F}$ структуру симметрического пространства. Соответствующая связность определяется на $\mathcal{F}$ теми же уравнениями (4.5), что и связность $\widetilde{\gamma}$ на X_3.

Далее, в § 5 гл. 2 доказано, что слой $\mathcal{F}$ три-ткани W локально изоморфен ее координатной лупе Q. Так как координатные лупы ткани B_m являются средними лупами Бола, то описанная структура симметрического пространства индуцируется и на произвольной локальной лупе Бола B_m.

Для тканей B_ℓ и B_r получаются аналогичные заключения.

4. Покажем, что *компоненты тензора кривизны* $R^i_{jk\ell}$ *связности* $\widetilde{\gamma}$ *можно сделать постоянными на всем многоообразии* X *три-ткани* B_m.

Как и в § 4 гл. 1, обозначим $\mathcal{R}(W)$ расслоение адаптированных реперов три-ткани. Базисными формами на $\mathcal{R}(W)$ будут формы $\underset{1}{\omega}{}^i$, $\underset{2}{\omega}{}^i$, ω^i_j. Рассмотрим на $\mathcal{R}(W)$ распределение $\widetilde{S}$, которое задается соотношениями

$$\widetilde{\omega}^i_j = R^i_{jk\ell}\Theta^{k\ell}, \tag{4.18}$$

где $\Theta^{k\ell} = -\Theta^{\ell k}$.

Предложение 4.6. *На распределении* $\widetilde{S}$ *компоненты тензора* $R^i_{jk\ell}$ *будут постоянными.*

□ Рассмотрим уравнение (4.15):

$$\widetilde{\nabla} R^i_{jk\ell} \equiv dR^i_{jk\ell} + R^m_{jk\ell}\widetilde{\omega}^i_m - R^i_{mk\ell}\widetilde{\omega}^m_j - R^i_{jm\ell}\widetilde{\omega}^m_k - R^i_{jkm}\widetilde{\omega}^m_\ell = 0.$$

Подставляя сюда значения форм $\widetilde{\omega}^i_j$ из (4.18) и используя (4.17), получим $dR^i_{jk\ell} = 0$. ■

Предложение 4.7. *Распределение* $\widetilde{S}$ *инволютивно.*

□ Исключив из (4.18) параметры $\Theta^{k\ell}$, получим эквивалентную систему уравнений

$$B^i_{\rho j}\widetilde{\omega}^j_i = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots a \tag{4.19}$$

(естественно, мы выписываем только независимые уравнения). Если сюда внести формы $\widetilde{\omega}^i_j$ из (4.18), то получим тождества

$$B^i_{\rho j} R^j_{ik\ell} = 0. \tag{4.20}$$

Так как на распределении $\widetilde{S}$ величины $R^i_{jk\ell}$ постоянны, то на $\widetilde{S}$ будут постоянными и величины $B^i_{\rho j}$, которые выражаются через $R^i_{jk\ell}$. Поэтому дифференцирование уравнений (4.19) с учетом (4.19) и (4.5) приводит к соотношениям

$$B^i_{\rho j}\left(\widetilde{\omega}^k_i \wedge \widetilde{\omega}^j_k + R^j_{ik\ell}\underset{3}{\omega}{}^k \wedge \underset{3}{\omega}{}^\ell\right) = 0.$$

Второе слагаемое, стоящее в скобках, обращается в нуль в силу (4.20), а первое преобразуется с помощью (4.18) к виду

$$B^i_{\rho j}\left(R^k_{ipq}R^j_{k\ell s} - R^k_{i\ell s}R^j_{kpq}\right)\Theta^{pq} \wedge \Theta^{\ell s} = 0.$$

Используя равенства (4.17), перепишем эти соотношения так:

$$B^i_{\rho j}\left(R^j_{iks}R^k_{\ell pq} + R^j_{i\ell k}R^k_{spq}\right)\Theta^{pq} \wedge \Theta^{\ell s} = 0.$$

В силу (4.20) левая часть обращается в нуль. Следовательно, по теореме Фробениуса (см., например, [В-1], [Фк-1]) система (4.19) вполне интегрируема, а определяемое ею распределение $\widetilde{S}$ инволютивно. ■

Инволютивность распределения $\widetilde{S}$ означает, что многообразие $\mathcal{R}(W)$ расслаивается на подмногообразия размерности $2r + r^2 - a$, где a — число уравнений в системе (4.19). Пусть $\mathcal{R}'(W)$ — одно из этих подмогообразий. Независимыми формами на нем будут формы $\underset{1}{\omega}{}^i$, $\underset{2}{\omega}{}^i$ и $\widetilde{\theta}^i_j$ — ограничения форм $\widetilde{\omega}^i_j$ на $\widetilde{S}$. Эти формы удовлетворяют структурным уравнениям (4.3) и (4.5), причем входящие в них величины $R^i_{jk\ell}$ будут постоянными.

Фиксируем точку p многообразия X, т. е. положим $\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^i = 0$, и обозначим

$$\widetilde{\theta}^i_j\big|_{\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^i = 0} = \pi^i_j.$$

Формы π^i_j удовлетворяют структурным уравнениям группы $\mathbf{GL}(r)$ — стационарной группы точки p, получающимся из уравнений (4.5):

$$\delta\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k.$$

Кроме того, формы π^i_j, как и формы $\widetilde{\omega}^i_j$, связаны соотношениями (4.19), причем коэффициенты $B^i_{\rho j}$, входящие в эти соотношения, являются постоянными на $\mathcal{R}'(W)$. Поэтому по известной теореме из теории групп Ли получаем, что соотношения (4.19) выделяют в группе $\mathbf{GL}(r)$ некоторую подгруппу, которую обозначим буквой H. Таким образом, *многообразие* $\mathcal{R}'(W)$

представляет собой редукцию расслоения $\mathcal{R}(W)$ адаптированных реперов три-ткани B_m к группе H.

Выясним геометрический смысл группы H. Для этого напомним определение *группы голономии аффинной связности.* Пусть p — произвольная точка многообразия X, на котором задана аффинная связность Γ. Рассмотрим все замкнутые гладкие пути с началом и концом в точке p. Параллельный перенос репера $\mathcal{R}(0)$ вдоль петли $\ell(t)$, $\ell(0) = \ell(1) = p$, порождает невырожденное линейное преобразование $\mathcal{R}(0) \to \mathcal{R}(1)$ в касательном пространстве $T_p(X)$. Множество всех таких преобразований образует группу, которая называется группой голономии связности Γ в точке p. Группы голономии, взятые в разных точках связного многообразия X, изоморфны [КН-1]. Алгебра Ли группы голономии связности Γ называется *алгеброй голономии* этой связности.

Предложение 4.8. *Группа H является группой голономии связности $\widetilde{\gamma}$.*

$\square$ Пусть X — аналитическое многообразие. Тогда алгебра голономии h связности Γ, заданной на X, порождается тензором кривизны $R^i_{jk\ell}$ этой связности и его ковариантными производными всех порядков, т. е. линейными преобразованиями вида

$$R^i_{jk\ell}x^k y^\ell, \quad \nabla_m R^i_{jk\ell}x^k y^\ell z^m, \quad \nabla_n \nabla_m R^i_{jk\ell}x^k y^\ell z^m w^n, \dots.$$

[КН-1]. Для связности $\widetilde{\gamma}$ имеем $\widetilde{\nabla} R = 0$, поэтому ее алгебра голономии h порождается только операторами $R^i_j = R^i_{jk\ell}\, x^k y^\ell$. С помощью соотношений (4.17) доказывается, что алгебра h, порожденная операторами R^i_j, совпадает с их линейной оболочкой (задача 4.2). Ввиду этого алгебра голономии связности $\widetilde{\gamma}$ совпадает с алгеброй Ли группы H, определяемой соотношениями (4.18). Следовательно, группа H и является группой голономии связности $\widetilde{\gamma}$. $\blacksquare$

Из проведенных рассуждений вытекает, что уравнения (4.18) задают редукцию расслоения адаптированных реперов многообразия X три-ткани B_m к группе голономии связности $\widetilde{\gamma}$. Предложения 4.6–4.8 составляют так называемую теорему редукции, а слои $\mathcal{R}'(W)$ — интегральные многообразия распределения $\widetilde{S}$ образуют *расслоение голономии* ([КН-1], т. 1, с. 87).

5. Структурные уравнения (4.5) связности $\widetilde{\gamma}$ в результате редукции к группе H примут вид:

$$d\underset{3}{\omega}^i = \underset{3}{\omega}^j \wedge \widetilde{\theta}^i_j, \quad d\widetilde{\theta}^i_j = \widetilde{\theta}^k_j \wedge \widetilde{\theta}^i_k + R^i_{jk\ell}\underset{3}{\omega}^k \wedge \underset{3}{\omega}^\ell, \tag{4.21}$$

где, как и выше, $\widetilde{\theta}^i_j = \widetilde{\omega}^i_j\big|_{\widetilde{S}}$, $R^i_{jk\ell}$ — постоянные на $\widetilde{S}$. Будем считать для определенности, что связность $\widetilde{\gamma}$ реализована на некотором слое $\mathcal{F}$ первого слоения. Тогда к уравнениям (4.21) следует добавить еще уравнение $\underset{1}{\omega}^i = 0$. Формы $\underset{3}{\omega}^i$ будут главным на $\mathcal{F}$.

В силу тождеств (4.16) и (4.17) система (4.21), содержащая кроме дифференциальных форм только постоянные, замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Поэтому она представляет собой уравнения Маурера–Картана некоторой группы Ли G. Группа голономии H будет подгруппой в G и выделяется уравнениями $\underset{3}{\omega}^i = 0$, фиксирующими точку в слое $\mathcal{F}$. Следовательно, *слой $\mathcal{F}$, на котором реализуется рассматриваемая каноническая связность $\widetilde{\gamma}$ симметрического пространства, является однородным пространством G/H.*

Уравнения (2.21) показывают, что умножение в касательной алгебре Ли группы G определяется с помощью тензора $R^i_{jk\ell}$. Эта алгебра получается следующим образом.

Пусть T — векторное пространство размерности r. Определим в T тернарную операцию $\langle \xi, \eta, \zeta \rangle$, где

$$\langle \xi, \eta, \zeta \rangle^i = R^i_{jk\ell}\xi^i \eta^k \zeta^\ell, \quad \xi, \eta, \zeta \in T. \tag{4.22}$$

Пространство T вместе с операцией $\langle\, , \, \rangle$ называется *тройной системой Ли* (см. [Ло-1], [МхС-1]) и обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &1)\ \langle \xi, \eta, \zeta \rangle = 0;\\ &2)\ \langle \xi, \eta, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta, \xi \rangle + \langle \zeta, \xi, \eta \rangle = 0;\\ &3)\ \langle \langle \zeta, \theta, \chi \rangle, \xi, \eta \rangle = \langle \langle \zeta, \xi, \eta \rangle, \theta, \chi \rangle + \langle \zeta, \langle \theta, \xi, \eta \rangle, \chi \rangle + \langle \zeta, \theta, \langle \chi, \xi, \eta \rangle \rangle. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Свойство 1) вытекает из кососимметричности тензора $R^i_{jk\ell}$ по двум последним индексам, а свойства 2) и 3) эквивалентны тождествам (4.16) и (4.17).

Обозначим $d_{\xi,\eta}$ линейное преобразование в T, определенное формулой

$$d_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \zeta, \xi, \eta \rangle. \tag{4.24}$$

Тогда третье соотношение (4.23) перепишется в виде:

$$d_{\xi,\eta}\langle \zeta, \theta, \chi \rangle = \langle d_{\xi,\eta}(\zeta), \theta, \chi \rangle + \langle \zeta, d_{\xi,\eta}(\theta), \chi \rangle + \langle \zeta, \theta, d_{\xi,\eta}(\chi) \rangle.$$

Оно означает, что линейный оператор $d_{\xi,\eta}$ является *дифференцированием тройной системы Ли* T. Дифференцирования вида (4.24) называются *внутренними.* Так как $(d_{\xi,\eta})^i_j = R^i_{jk\ell}\xi^k\eta^\ell$, то пространство, порожденное всеми внутренними дифференцированиями, совпадает с определенной выше алгеброй голономии h связности $\widetilde{\gamma}$. Обозначим $g = T \oplus h$, и пусть $x, y \in h$, $\xi, \eta \in T$. Тогда верна следующая

Теорема 4.9. *Пространство g является алгеброй Ли относительно операции* $(,)$, *где*

$$\begin{aligned} &(x, y) = x \circ y - y \circ x \in h, \\ &(x, \xi) = -(\xi, x) = x(\xi) \in T, \\ &(\xi, \eta) = d_{\xi,\eta} \in h. \end{aligned}$$

Алгебра g является касательной алгеброй группы G.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству более сложной леммы 4.20 из § 4, поэтому мы его опускаем и оставляем читателю в качестве упражнения. Различные доказательства теоремы 4.9. имеются в книгах [Ло-1], [Тр-1] и других, посвященных симметрическим постранствам.

Алгебра g называется *универсальной оболочкой тройной системы Ли* T.

Алгебра g и ее подалгебра h образуют так называемую *симметрическую пару.* Существует инволютивный автоморфизм $\sigma : g \to g$ такой, что $\sigma(x) = x$, $\sigma(\xi) = -\xi$ для любого x из h и любого ξ из T. Пространства h и T являются инвариантными подпространствами инволютивного оператора σ и соответствуют его собственным значениям $+1$, -1.

6. Рассмотрим W-алгебру три-ткани Бола (см. § 5 гл. 2). Пусть, как и в общем случае, бинарная операция в W-алгебре определяется тензором кручения a^i_{jk}, но тернарную операцию зададим с помощью тензора $R^i_{jk\ell}$, а не $b^i_{jk\ell}$. Напомним, что эти тензоры связаны соотношениями (4.6).

Тернарная операция, как мы уже выяснили в п. 5, образует тройную систему Ли и удовлетворяет соотношениям (4.23). Бинарная и тернарная операции связаны между собой соотношениями (4.11), которые после замены в них величин $b^i_{jk\ell}$ на $R^i_{jk\ell}$ с помощью (4.6) примут вид:

$$R^i_{pjk}a^p_{\ell m} - R^i_{p\ell m}a^p_{jk} - R^p_{k\ell m}a^i_{pj} + R^p_{j\ell m}a^i_{pk} + \frac{1}{2}\, a^i_{pq}a^p_{jk}a^q_{\ell m} = 0,$$

или

$$\langle [\zeta, \theta], \xi, \eta \rangle - \langle [\xi, \eta], \zeta, \theta \rangle - [\langle \eta, \zeta, \theta \rangle, \xi] + [\langle \xi, \zeta, \theta \rangle, \eta] + \frac{1}{2}[[\xi, \eta][\zeta, \theta]] = 0. \tag{4.25}$$

Определение. Линейное пространство T вместе с заданными на нем бинарной и тернарной операциями $[,]$ и $\langle , , \rangle$, удовлетворяющими тождествам (4.23) и (4.25), называется *алгеброй Бола.*

Таким образом, *касательные W-алгебры три-ткани Бола B_m являются алгебрами Бола* [СМ-4].

Система уравнений (4.3), (4.5), (4.14), определяющих три-ткань Бола B_m, замкнута относительно внешнего дифференцирования, если выполнены условия (4.23) и (4.25), характеризующие соответствующие W-алгебры Бола. Следовательно, *три-ткань Бола B_m вполне определяется заданием соответствующих W-алгебр Бола, т. е. полей тензоров a^i_{jk} и $R^i_{jk\ell}$, удовлетворяющих соотношениям* (4.23) *и* (4.25).

7. В заключение укажем две проблемы, возникающие в теории тканей Бола.

(1) Всякое ли симметрическое пространство может быть получено описанным способом из ткани Бола? Если нет, то выделить класс таких пространств.

(2) Сколько неэквивалентных тканей Бола можно присоединить к заданной симметрической связности?

Покажем, что обе задачи сводятся к чисто алгебраической проблеме. Пусть связность $\widetilde{\gamma}$ задана уравнениями (4.5), причем тензор R удовлетворяет тождествам Риччи (4.16) и Бианки (4.17).

Три-ткань B_m восстанавливается с помощью уравнений (4.3), содержащих тензор a^i_{jk}. Этот тензор удовлетворяет только соотношениям (4.25). Поэтому задача отыскания ткани Бола по заданной симметрической связности сводится к нахождению тензора кручения этой ткани из уравнений (4.25). Тензор кривизны вычисляется затем из соотношений (4.6).

Таким образом, указанные проблемы ведут в структурную теорию алгебр Бола, которая пока находится в начальной стадии развития, см. [Бэ-2] и [БэМ-1].

§ 4.2. Изоклинные три-ткани Бола

1. Изоклинные ткани Бола позволяют с помощью красивых и простых геометрических конструкций моделировать различные свойства тканей.

Отметим прежде всего, что поскольку любая ткань Бола является шестиугольной тканью (см. § 1), то по теореме 3.14 изоклинная ткань Бола алгебраизуема. Точнее, справедлива

Теорема 4.10. *Класс изоклинных три-тканей Бола совпадает с классом грассмановых три-тканей, которые порождаются гиперплоскостью и гиперквадрикой.*

☐ Пусть B_m — изоклинная ткань Бола. Так как она алгебраизуема, а следовательно, грассманизуема, то ее тензоры кручения и кривизны могут быть записаны в виде (3.45) и (3.49):

$$a^i_{jk} = a_{[j}\delta^i_{k]}, \tag{4.26}$$

$$b^i_{jk\ell} = b^1_{jk}\delta^i_\ell + b^2_{\ell j}\delta^i_k + b^3_{k\ell}\delta^i_j, \tag{4.27}$$

а сама ткань B_m порождается в проективном пространстве P^{r+1} тремя гиперповерхностями X_α, $\alpha = 1, 2, 3$, принадлежащими одной гиперкубике. Симметрируем выражение (4.27) по индексам k и ℓ и приравняем результат нулю в силу (4.1):

$$(b^1_{jk} + b^2_{jk})\delta^i_\ell + (b^1_{j\ell} + b^2_{j\ell})\delta^i_k + b^3_{k\ell}\delta^i_j = 0.$$

Свернув это равенство сначала по индексам i и j, а затем по индексам i и ℓ, найдем, что

$$b^1_{k\ell} + b^2_{k\ell} + b^3_{k\ell} = 0, \quad (r+1)(b^1_{jk} + b^2_{jk}) + b^3_{jk} = 0.$$

Так как $r = \dim X_\alpha \geqslant 2$, то отсюда следуют равенства

$$b^1_{k\ell} + b^2_{k\ell} = 0, \quad b^3_{k\ell} = 0. \tag{4.28}$$

Вторая серия соотношений (4.28) означает, что асимптотическая квадратичная форма гиперповерхности X_3 тождественно равна нулю, следовательно, эта гиперповерхность является гиперплоскостью. А так как в силу алгебраизуемости рассматриваемой ткани все три гиперповерхности X_1, X_2, X_3 принадлежат одной гиперкубике, то отсюда следует, что гиперповерхности X_1 и X_2 принадлежат одной и той же гиперквадрике Q пространства P^{r+1}.

Обратно, предположим, что гиперповерхность X_3 — гиперплоскость, а X_1 и X_2 — области на некоторой гиперквадрике Q. Тогда, во-первых, $b^3_{k\ell} = 0$. Во-вторых, так как тройка гиперповерхностей X_α принадлежит одной распавшейся гиперкубике, то определяемая ими грассманова три-ткань будет шестиугольной, и ее тензор кривизны удовлетворяет условию $b^i_{(jk\ell)} = 0$ (теорема 3.4). Из этого условия и из (4.27) с учетом $b^3_{k\ell} = 0$ следуют соотношения

$$b^1_{(jk}\delta^i_{\ell)} + b^2_{(jk}\delta^i_{\ell)} = 0.$$

Свернув их по i и j, получим

$$(r+2)(b^1_{k\ell} + b^2_{k\ell}) = 0,$$

откуда

$$b^1_{k\ell} = -b^2_{k\ell} \stackrel{\text{def}}{=} b_{k\ell}.$$

Из (4.27) находим тензор кривизны рассматриваемой три-ткани:

$$b^i_{jk\ell} = b_{jk}\delta^i_\ell - b_{j\ell}\delta^i_k. \tag{4.29}$$

Он удовлетворяет условию $b^i_{j(k\ell)} = 0$, характеризующему средние ткани Бола. ■

2. Выясним, какой вид имеет конфигурация в пространстве P^{r+1}, соответствующая средней фигуре Бола на рассматриваемой изоклинной ткани Бола. Средняя фигура Бола B_m изображена на рис. 39. Соответствующие точки конфигурации будем отмечать теми же буквами, что и слои фигуры B_m.

Точки гиперквадрики Q, которой принадлежат гиперповерхности X_1 и X_2, изображают слои первого и второго слоений ткани B_m, а точки гиперплоскости X_3 — слои третьего слоения. Так как трем слоям ткани, проходящим через одну точку, в P^{r+1} соответствуют три точки гиперповерхностей X_α, лежащие на одной прямой, то фигуре B_m отвечает конфигурация B'_m, изображенная на рис. 40. Замыкание фигуры B_m, изображенной на рис. 39, состоит в том, что

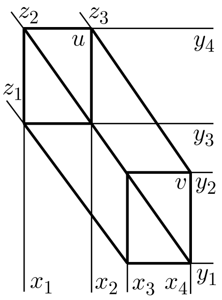

Рис. 39

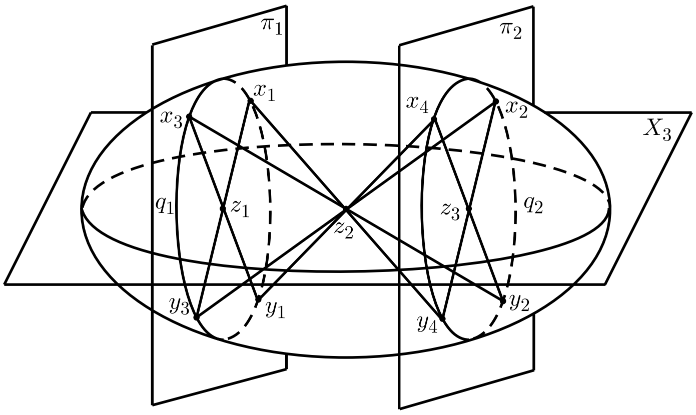

Рис. 40

точки u и v лежат на одном слое Z_3. На конфигурации B'_m этому соответствует совпадение точек пересечения гиперплоскости X_3 с прямыми x_2y_4 и x_4y_2.

Конфигурация B'_m вполне определяется своими точками x_1, x_2, z_1 и z_2, находящимися в общем положении, и целиком лежит в трехмерном пространстве P^3, натянутом на эти точки. Поэтому все дальнейшие построения будем вести в P^3. Пересечения $X_\alpha \cup P^3$ обозначим теми же буквами X_α. В связи с этим рис. 40 в дальнейшем изображает конфигурацию, расположенную в трехмерном пространстве P^3.

Обозначим π_1 двумерную плоскость, в которой лежат точки x_1, x_3, z_1, y_3, y_1, а q_1 — кривую второго порядка, по которой эта плоскость пересекает квадрику Q. Рассмотрим конус второго порядка с вершиной в точке z_2, проходящий через q_1. Его пересечение с квадрикой Q — кривая четвертого порядка — распадается на две кривые второго порядка, q_1 и q_2. Точки x_2, x_1, y_2, y_4 лежат на кривой q_2; следовательно, они лежат в одной плоскости π_2.

Докажем, что точка z_3 пересечения прямых x_2y_4 и x_4y_2 лежит в плоскости X_3. В самом деле, прямая x_2y_4 лежит в плоскости π_3, проходящей через точки x_1, y_3, z_2, а прямая x_4y_2 — в плоскости π_4, проходящей через точки x_4, y_1, z_2. Плоскости π_3 и π_4 пересекаются по прямой z_1z_2. Точка z_3 является точкой пересечения плоскостей π_2, π_3, π_4, поэтому она лежит на прямой z_1z_2 и, следовательно, в плоскости X_3.

Таким образом, мы не только описали конфигурацию B'_m в пространстве P^{r+1}, соответствующую средней фигуре Бола B_m, но и получили еще одно, чисто конструктивное доказательство замыкания этих фигур на изоклинных тканях Бола.

3. Рассмотрим касательную W-алгебру изоклинной ткани Бола. Так как эта ткань грассманизуема, то коммутатор ее W-алгебры записывается в виде (3.27):

$$[\xi, \eta] = a(\eta)\xi - a(\xi)\eta.$$

С учетом формулы (4.29) ассоциатор W-алгебры запишется так:

$$(\xi, \zeta, \eta) = b(\zeta, \eta)\xi - b(\zeta, \xi)\eta,$$

где выражения $a(\xi)$ и $b(\xi,\eta)$ представляют собой соответственно линейную и симметричную билинейную скалярные формы. Отсюда видно, что для любых векторов ξ, η, ζ, принадлежащих W-алгебре, векторы $[\xi,\eta]$ и (ξ,η,ζ) выражаются в виде линейной комбинации только двух векторов ξ и η. Это означает, что обе операции удовлетворяют *аксиоме двумерных плоскостей* (см. § 2 гл. 3).

Ясно, что аналогичным свойством обладают также и W-алгебры изоклинных тканей Бола B_r и B_ℓ.

Если на изоклинной три-ткани W выполняются все три условия Бола B_ℓ, B_r и B_m, то для нее $b^\alpha_{ij}=0$ при $\alpha=1,2,3$, ввиду чего ее тензор кривизны обращается в нуль. Но одновременное выполнение всех трех условий Бола характеризует ткани Муфанг, а обращение в нуль тензора кривизны — групповые ткани. Кроме того, в силу условия $b^\alpha_{ij}=0$ все три гиперповерхности X_α, порождающие рассматриваемую три-ткань, становятся гиперплоскостями. Поэтому справедлива

Теорема 4.11. *Следующие три утверждения равносильны:*

а) *три-ткань W является изоклинной тканью Муфанг;*

б) *три-ткань W является изоклинной групповой тканью;*

в) *три-ткань W грассманизуема и все три порождающие ее гиперповерхности являются гиперплоскостями.*

Заметим еще, что если тензор кручения изоклинной ткани Муфанг отличен от нуля, то три порождающие ее гиперповерхности X_α находятся в общем положении; если этот тензор равен нулю, то они принадлежат одному пучку. В последнем случае ткань будет параллелизуемой, ее W-алгебры тривиальны, а координатные лупы будут абелевыми группами.

4. Вернемся к изоклинной ткани Бола общего вида и найдем уравнения гиперплоскости X_3 и гиперквадрики Q в подвижном репере, присоединенном к этим поверхностям так, как указано в § 3 гл. 3. Теперь точки A_0 и A_{r+1} лежат на квадрике Q, а точка A_0+A_{r+1} — на плоскости X_3 (см. рис. 40). Точки A_i репера расположены на пересечении касательных гиперплоскостей к квадрике Q в точках A_0 и A_{r+1}. Уравнения гиперповерхностей, описываемых точками A_0, A_{r+1} и A_0+A_{r+1}, имеют вид (3.39) и (3.40), а уравнения (3.46) и (3.47) в силу (4.28) запишутся следующим образом:
$$\begin{gathered}\Theta_i^{r+1}=b_{ij}\Theta_0^j,\quad \Theta_i^0=b_{ij}\Theta_{r+1}^j,\\ \nabla a_i+\Theta_i^0-\Theta_i^{r+1}=0.\end{gathered}\tag{4.30}$$

Кроме того, выражение (4.7) для ковариантного дифференциала тензора кривизны с учетом формул (4.26), (4.29) и (4.10) принимает вид:
$$\nabla b_{ij}=-b_{ij}a_k(\underset{1}{\omega}{}^k-\underset{2}{\omega}{}^k).\tag{4.31}$$

Используя уравнения перемещения подвижного репера, полученные в § 3 гл. 3, находим:
$$d(A_0+A_{r+1})=\Theta_{r+1}^{r+1}(A_0+A_{r+1})+(\Theta_0^i+\Theta_{r+1}^i)(A_i+a_iA_0).$$

Таким образом, гиперплоскость X_3 определяется точками A_0+A_{r+1} и $A_i+a_iA_0$, а ее уравнение в репере A_0, A_i, A_{r+1} имеет вид:
$$a_ix^i-x^0+x^{r+1}=0.$$

Покажем, что гиперквадрика Q, которую описывают точки A_0 и A_{r+1} подвижного репера, определяется уравнением
$$b_{ij}x^ix^j-2x^0x^{r+1}=0.$$

Действительно, легко проверяется, что точки A_0 и A_{r+1} лежат на квадрике Q, и она касается гиперплоскостей $x^{r+1}=0$ и $x^0=0$ в этих точках. Остается доказать неподвижность квадрики Q при перемещениях репера, определяемых уравнениями (3.37). Обозначим $b_{\alpha\beta}$ коэффициенты уравнения квадрики, записанного в однородных координатах:
$$(b_{\alpha\beta})=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&b_{ij}&0\\-1&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда условие ее неподвижности запишется в виде

$$db_{\alpha\beta} - b_{\alpha\gamma}\Theta^{\gamma}_{\beta} - b_{\gamma\beta}\Theta^{\gamma}_{\alpha} = \rho b_{\alpha\beta}.$$

Непосредственным вычислением проверяется, что эти условия выполняются в силу соотношений (4.30), (4.31), (3.42) и (3.44) при некоторых значениях ρ и Θ, входящих соответственно в предыдущие уравнения и уравнения (3.42).

5. Вычислим для изоклинной ткани B_m тензор кривизны $R^i_{jk\ell}$ канонической связности $\widetilde{\gamma}$, которая определена на базе третьего слоения. Подставляя в формулу (4.6) выражения (4.26) и (4.29), найдем:

$$R^i_{jkl} = \frac{1}{4}\left(\left(b_{jk} + \frac{1}{2}\,a_j a_k\right)\delta^i_{\ell} - \left(b_{j\ell} + \frac{1}{2}\,a_j a_{\ell}\right)\delta^i_k\right).$$

Так как этот тензор ковариантно постоянен в связности $\widetilde{\gamma}$, то и симметричный тензор

$$g_{jk} = b_{jk} + \frac{1}{2}\,a_j a_k$$

также будет ковариантно постоянен в этой связности.

Предположим, что тензор g_{jk} невырожденный. Тогда он определяет на гиперплоскости X_3 *риманову* или *псевдориманову метрику*, а связность $\widetilde{\gamma}$ будет *связностью Леви–Чивита* этой метрики. Полагая $R_{ijk\ell} = g_{im}R^m_{jk\ell}$, получим

$$R_{ijk\ell} = \frac{1}{4}(g_{i\ell}g_{jk} - g_{ik}g_{j\ell}).$$

Такой вид тензора кривизны характеризует *римановы пространства постоянной кривизны* (см., например, [KH-1]). Можно показать, что метрика g_{ij} индуцируется на гиперплоскости X_3 абсолютом, который представляет собой пересечение $\widetilde{Q}$ гиперплоскости X_3 с гиперквадрикой Q. Невырожденность тензора g_{ij} соответствует невырожденности квадрики $\widetilde{Q}$ (задача 4.5).

Как доказано в § 1, база X_3 третьего слоения средней ткани Бола B_m является симметрическим пространством. Покажем, как реализуется симметрическая структура на X_3 в том случае, когда ткань W будет изоклинной.

Рассмотрим гиперплоскость X_3 и гиперквадрику Q, порождающие в пространстве P^{r+1} эту ткань, и предположим, что квадрика $\widetilde{Q} = Q \cup X_3$ невырожденная. Пусть S — полюс гиперплоскости X_3 относительно Q. Точке p три-ткани B_m соответствует в пространстве P^{r+1} прямая, пересекающая квадрику Q в точках x_1 и x_2, а гиперплоскость X_3 — в точке x_3. Эти точки изображают слои ткани B_m, проходящие через одну точку. Теперь спроектируем точки x_1 и x_2 из полюса S на гиперплоскость X_3. Получающиеся при этом точки y_1 и y_2 будут симметричны относительно точки x_3 в римановой (или псевдоримановой) метрике, определяемой на X_3 абсолютом $\widetilde{Q}$. Это утверждение вытекает из задачи 4.6.

6. Класс изоклинных тканей Бола интересен еще и потому, что в него входят все четырехмерные ткани Бола. А именно, верна

Теорема 4.12. *Всякая четырехмерная три-ткань Бола является изоклинной.*

☐ Рассмотрим четырехмерную ткань Бола B_m. Так как индексы i, j, k принимают теперь только два значения 1 и 2, то вследствие кососимметричности тензоров $a^i_{k\ell}$ и $b^i_{jk\ell}$ по индексам k и ℓ их можно представить в виде:

$$a^i_{k\ell} = a_{[k}\delta^i_{\ell]}, \quad b^i_{jk\ell} = b_{jk}\delta^i_{\ell} - b_{j\ell}\delta^i_k. \tag{4.32}$$

Поэтому структурные уравнения четырехмерной ткани Бола запишутся в следующей форме:

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a_j\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^i,\\
d\underset{2}{\omega}^i &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a_j\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^i,\\
d\omega^i_j &= \omega^j_j \wedge \omega^i_k + b_{jk}\left(\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^i - \underset{1}{\omega}^i \wedge \underset{2}{\omega}^k\right),
\end{aligned} \tag{4.33}$$

а дифференциальное уравнение (4.14) для нее принимает вид

$$\delta^i_k\nabla a_j - \delta^i_j\nabla a_k = \left((b_{kj} - b_{jk})\,\delta^i_{\ell} + \left(b_{j\ell}\delta^i_k - b_{k\ell}\delta^i_j\right)\right)\left(\underset{1}{\omega}^{\ell} - \underset{2}{\omega}^{\ell}\right).$$

Свернем последнее уравнение по индексам i и k и учтем, что $\sum\limits_i \delta_i^i = 2$. В результате получим уравнение

$$\nabla a_j = b_{kj}\left(\underset{1}{\omega}^k - \underset{2}{\omega}^k\right). \tag{4.34}$$

Далее обратимся к соотношениям (4.11), которые связывают тензоры кручения и кривизны ткани Бола. Подставляя в них выражения (4.32), после простых преобразований придем к равенствам

$$b_{[jk]}a_\ell = 0.$$

Если $a_\ell = 0$, то из (4.34) следует, что $b_{kj} = 0$, и в этом случае ткань B_m будет параллелизуемой. Если же $a_\ell \neq 0$, то $b_{[jk]} = 0$, т.е. тензор b_{jk} симметричен. Поскольку он представляет собой ковариантную производную ковектора a_j (см. 4.34), то из теоремы 3.6 следует, что рассматриваемая четырехмерная ткань является изоклинной. ■

Из теорем 4.10 и 4.12 вытекает, что *всякая четырехмерная ткань Бола эквивалентна грассмановой три-ткани, определяемой в трехмерном проективном пространстве плоскостью и квадрикой.* Это позволяет, в частности, классифицировать четырехмерные ткани Бола по виду квадрики Q и ее взаимному расположению с плоскостью π, а также найти уравнения четырехмерных тканей Бола в некоторых локальных координатах, см. [И-2].

§ 4.3. Шестимерные три-ткани Бола

1. Из результатов п. 6 § 2 следует, что неалгебраизуемые три-ткани Бола следует искать при $r \geqslant 3$. Однако классификация тканей B_m при произвольном r весьма затруднительна, так как сводится к классификации тензоров кручения и кривизны, имеющих валентность 3 и 4 соответственно. Тем не менее, шестимерные три-ткани Бола, как сейчас будет показано, могут быть описаны сравнительно просто. В этом параграфе все латинские индексы принимают значения 1, 2, 3.

Нам понадобятся так называемые дискриминантные тензоры $\mathcal{E}_{ijk}$ и $\mathcal{E}^{ijk}$, определяемые при $r = 3$ следующим образом:

$\mathcal{E}_{ijk} = \mathcal{E}^{ijk} = 1$, если подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ четная;

$\mathcal{E}_{ijk} = \mathcal{E}^{ijk} = -1$, если подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ нечетная;

$\mathcal{E}_{ijk} = \mathcal{E}^{ijk} = 0$, если в этой подстановке хотя бы два индекса равны.

Величины $\mathcal{E}_{ijk}$ и $\mathcal{E}^{ijk}$ связаны между собой соотношениями

$$\mathcal{E}_{ik\ell}\mathcal{E}^{jk\ell} = 2\delta_i^j, \quad \mathcal{E}_{ijm}\mathcal{E}^{k\ell m} = 2\delta_{[i}^k\delta_{j]}^\ell. \tag{4.35}$$

Покажем, что тензоры кручения и кривизны шестимерной три-ткани Бола могут быть записаны в следующем виде:

$$a_{jk}^i = \mathcal{E}_{jkp}a^{ip}, \quad b_{jk\ell}^i = \mathcal{E}_{k\ell p}b_j^{ip}. \tag{4.36}$$

В самом деле, так как индексы принимают всего три значения, то в силу кососимметричности тензор a_{jk}^i имеет всего 9 существенных компонент — стольно же, сколько и тензор a^{ij}. Из соотношений (4.36) величины a^{pi} определяются однозначно. Чтобы их найти, нужно свернуть первое равенство (4.36) с тензором $\mathcal{E}^{qjk}$ и воспользоваться первым равенством (4.35). Аналогично, из второго равенства (4.36) величины b_j^{ip} выразятся через $b_{jk\ell}^i$.

Структурные уравнения шестимерной три-ткани Бола получаются из структурных уравнений (1.26), (1.32), если в них подставить выражения (4.36):

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega_j^i + \mathcal{E}_{jk\ell}a^{i\ell}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\ d\underset{2}{\omega}^i &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega_j^i - \mathcal{E}_{jk\ell}a^{i\ell}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \end{aligned} \tag{4.37}$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \mathcal{E}_{k\ell m}b_j^{im}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell. \tag{4.38}$$

При этом тензоры a^{ij} и b^{ij}_k удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla a^{ij} = a^{ij}\omega^p_p + \frac{1}{2}\left(b^{ij}_m - b^{ip}_p\delta^j_m\right)\left(\underset{1}{\omega}^m - \underset{2}{\omega}^m\right), \tag{4.39}$$

$$\nabla b^{ij}_k = b^{ij}_k\omega^p_p + b^{i\ell}_k\mathcal{E}_{pq\ell}\left(2a^{pj}\left(\underset{1}{\omega}^q - \underset{2}{\omega}^q\right) - a^{pq}\left(\underset{1}{\omega}^j - \underset{2}{\omega}^j\right)\right) \tag{4.40}$$

и конечным соотношениям

$$\begin{aligned} &b^{ik}_k = 2\mathcal{E}_{jk\ell}a^{i\ell}a^{jk}, \\ &b^{ij}_p a^{pk} - b^{jk}_p a^{ip} - b^{ik}_p a^{pj} = b^{ip}_p a^{jk} - b^{pk}_p a^{ij}, \end{aligned} \tag{4.41}$$

которые получаются из (4.14), (4.7), (4.10), (1.31) и (4.11) с учетом (4.36). Заметим, что при выводе уравнений (4.39) и (4.40) следует воспользоваться соотношениями

$$\nabla\mathcal{E}_{ijk} = -\mathcal{E}_{ijk}\omega^\ell_\ell, \quad \nabla\mathcal{E}^{ijk} = \mathcal{E}^{ijk}\omega^\ell_\ell,$$

которые проверяются непосредственно.

Тензоры a^{ij} и b^{ij}_k связаны еще одним весьма громоздким соотношением, которое получается из (4.17) с помощью (4.36). Оно нам не понадобится, но желающие могут найти его самостоятельно.

Таким образом, нам удалось снизить валентность тензоров a^i_{jk} и $b^i_{jk\ell}$ на единицу, заменив их тензорами a^{ij} и b^{ij}_k, которые также будем называть тензорами кручения и кривизны. Этот факт позволяет классифицировать шестимерные три-ткани Бола, используя следующее предложение.

Лемма 4.13. *На шестимерной три-ткани Бола можно выбрать такое семейство адаптированных реперов, в которых компоненты тензора a^{ij} постоянны.*

□ Рассмотрим уравнения (4.39). Их всего 9, и они содержат столько же форм ω^i_j. Полагая $da^{ij} = 0$, получаем 9 уравнений на 9 форм ω^i_j. Если полученная система независима, то формы ω^i_j определяются из нее однозначно и имеется единственное поле реперов, удовлетворяющее заключению леммы. Если же ранг ρ системы уравнений на ω^i_j меньше девяти, то в каждой точке таких реперов существует $(9-\rho)$-параметрическое семейство. ■

Из леммы 4.13 вытекает, что классификация шестимерных три-тканей Бола связана с классификацией двухвалентных ковариантных тензоров. Различным, т. е. не эквивалентным тензорам отвечают различные классы тканей.

Если тензор a^{ij} задан, то компоненты тензора b^{ij}_k находим из соотношений (4.41). Так как число этих уравнений больше числа компонент тензора b^{ij}_k (последних 27, а уравнений 30), то ясно, что не для всякого тензора a^{ij} найдется соответствующая ткань Бола.

Предположим, что при некоторых a^{ij} ранг системы (4.41) равен $27-\rho$. Тогда ρ компонент тензора b^{ij}_k можно выбрать произвольно, а остальные найдутся из этой системы. Пусть семейство реперов, относительно которых величины a^{ij} постоянны, зависит от σ параметров. Если $\sigma >$ > 0, то выберем подсемейство реперов, относительно которых будут постоянными максимальное число компонент тензора b^{ij}_k. Остальные — непостоянные компоненты — станут абсолютными инвариантами, и с их помощью проводится окончательная классификация рассматриваемых тканей Бола.

Мы не приводим полную классификацию шестимерных тканей Бола, а ограничиваемся лишь некоторыми наиболее важными случаями.

2. Теорема 4.14. *Шестимерная три-ткань Бола является изоклинной, а следовательно, и алгебраизуемой тогда и только тогда, когда тензор a^{ij} кососимметричен.*

□ Если тензор a^{ij} кососимметричен, то его можно записать следующим образом:

$$a^{ij} = \mathcal{E}^{ijk}a_k,$$

причем величины a_k могут быть найдены путем свертки последнего равенства с тензором $\mathcal{E}_{ij\ell}$. Тогда тензор кручения в силу (4.36) и (4.35) принимает вид:

$$a^i_{jk} = \mathcal{E}_{pjk}a^{pi} = \mathcal{E}_{pjk}\mathcal{E}^{pi\ell}a_\ell = 2\delta^i_{[j}\delta^\ell_{k]}a_\ell = 2\delta^i_{[j}a_{k]}.$$

Так как у нас $r = 3 > 2$, то из теоремы 3.5 следует, что рассматриваемая ткань является изоклинной.

Обратно, пусть дана шестимерная изоклинная ткань Бола. Тогда по той же теореме 3.5 ее тензор кручения запишется в виде:

$$a^i_{jk} = a_{[j}\delta^i_{k]}.$$

Сравнивая с (4.36), получим

$$\mathcal{E}_{jkp}a^{ip} = a_{[j}\delta^i_{k]}.$$

Свернув это равенство с $\mathcal{E}^{jkq}$ и воспользовавшись соотношениями (4.35), найдем, что $a^{ij} = \frac{1}{2}\,a_k\mathcal{E}^{kij}$, т. е. тензор a^{ij} кососимметричен. ■

Теорема 4.15. *Если тензор a^{ij} шестимерной ткани Бола симметричен, и его ранг равен нулю или трем, то эта ткань будет групповой, причем в первом случае — параллелизуемой.*

□ Если $a^{ij} = 0$, то тензор кручения a^i_{jk} также равен нулю, откуда вытекает, что и тензор кривизны обращается в нуль (задача 4.1). Следовательно, такая три-ткань является параллелизуемой.

Пусть теперь тензор a^{ij} симметричен и его ранг равен трем. Тогда первое из соотношений (4.41) вследствие кососимметричности тензора $\mathcal{E}_{ijk}$ примет вид

$$b^{ik}_k = 0. \tag{4.42}$$

Кроме того, альтернация соотношений (4.39) в силу (4.42) дает

$$b^{[ij]}_k = 0. \tag{4.43}$$

С учетом соотношений (4.42) и (4.43) второе равенство (4.41) перейдет в следующее:

$$b^{ij}_p a^{pk} - b^{jk}_p a^{ip} - b^{ik}_p a^{pj} = 0.$$

Симметрируя его по индексам j и k и учитывая (4.43), получим

$$b^{jk}_p a^{ip} = 0. \tag{4.44}$$

В силу этого соотношения второе равенство (4.41) удовлетворяется тождественно.

Так как $\det(a^{ip}) \neq 0$, то из (4.44) находим $b^{ik}_p = 0$. Следовательно, тензор кривизны рассматриваемой ткани равен нулю, и по теореме 1.4 она является групповой тканью. ■

3. Таким образом, нетривиальные классы шестимерных тканей Бола с симметричным тензором a^{ij} могут появиться в случае, когда его ранг равен единице или двум.

Теорема 4.16. *С точностью до изотопии существует одна шестимерная ткань Бола с симметричным тензором a^{ij} ранга* 1. *В локальных координатах ее уравнения могут быть записаны следующим образом*:

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 - (x^2 + y^2)x^3y^3, \\ z^2 &= x^2 + y^2, \\ z^3 &= x^3 + y^3. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Это ткань E_1, рассмотренная в задачах 26 и 27 гл. 2.

□ Выберем семейство реперов на многообразии X так, чтобы в каждой точке матрица a^{ij} имела следующие компоненты: $a^{11} = 1$, $a^{ij} = 0$ при остальных значениях индексов. Подставим эти значения в соотношения (4.42)–(4.44), которые связывают тензоры ткани Бола с симметрическим тензором a^{ij}. В результате найдем:

$$b^{1k}_k = 0, \quad b^{ij}_k = b^{ji}_k, \quad b^{ij}_1 = 0. \tag{4.46}$$

Далее, так как теперь $\mathcal{E}_{jk\ell}a^{jk} = \mathcal{E}_{11\ell}a^{11} = 0$, то уравнения (4.40) принимают вид:

$$\nabla b^{ij}_k = b^{ij}_k\omega^p_p + 2b^{i\ell}_k\mathcal{E}_{1q\ell}a^{1j}\left(\underset{1}{\omega}^q - \underset{2}{\omega}^q\right). \tag{4.47}$$

Альтернация этих уравнений по индексам i и j в силу второго из соотношений (4.46) приводит к равенствам

$$b_k^{i\ell}\mathcal{E}_{1q\ell}a^{1j} = b_k^{j\ell}\mathcal{E}_{1q\ell}a^{1i}.$$

Полагая здесь $i = 1$, $j = 2, 3$, получим $b_k^{j\ell} = 0$, где $\ell = 2, 3$. В результате компоненты тензора b_k^{ij} запишутся так:

$$b_1^{ij} = 0, \quad \left(b_2^{ij}\right) = \begin{pmatrix} b_2^{11} & b_2^{12} & b_2^{13} \\ b_2^{12} & 0 & 0 \\ b_2^{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(b_3^{ij}\right) = \begin{pmatrix} b_3^{11} & b_3^{12} & -b_2^{12} \\ b_3^{12} & 0 & 0 \\ -b_2^{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подставляя найденные значения компонент тензоров a^{ij} и b_k^{ij} в уравнения (1.39) и (4.47), получим уравнения

$$\omega_1^k = \frac{1}{2}b_\ell^{1k}\left(\underset{1}{\omega}^\ell - \underset{2}{\omega}^\ell\right), \quad b_k^{1m}\underset{1}{\omega}^\ell = 0, \quad k, \ell = 2, 3,$$

из которых в силу независимости базисных форм $\underset{1}{\omega}^\ell - \underset{2}{\omega}^\ell$ вытекает $\omega_1^k = 0$, $b_\ell^{1k} = 0$. Таким образом, у тензора b_k^{ij} остаются только две ненулевые компоненты, для которых соответствующие уравнения (4.47) имеют вид:

$$\begin{aligned} &db_2^{11} + b_2^{11}(\omega_1^1 - 2\omega_2^2 - \omega_3^3) - b_3^{11}\omega_2^3 = 0, \\ &db_3^{11} + b_3^{11}(\omega_1^1 - \omega_2^2 - 2\omega_3^3) - b_2^{11}\omega_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Кроме того, из уравнений (4.37) находим:

$$d\omega_2^3 = \omega_2^2 \wedge \omega_2^3, \quad d\omega_3^2 = \omega_3^2 \wedge \omega_2^2.$$

Эти уравнения показывают, что на рассматриваемой три-ткани можно выбрать такое подсемейство реперов, в которых $b_2^{11} = 0$, $b_3^{11} = 1$. В результате из (4.48) получаем уравнения

$$\omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = 0.$$

Вместе с уравнением (4.39), которое теперь примет вид

$$\omega_1^1 - \omega_2^2 - \omega_3^3 = \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\omega}^3 - \underset{2}{\omega}^3\right),$$

это дает:

$$\omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = \underset{1}{\omega}^3 - \underset{2}{\omega}^3, \quad \omega_3^3 = \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\omega}^3 - \underset{2}{\omega}^3\right).$$

Полученные уравнения можно упростить. Из (4.37) вытекает уравнение $d\omega_1^1 = 0$, поэтому форму ω_1^1 можно привести к нулю, сузив семейство реперов. Окончательно получаем:

$$\omega_1^1 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_2^2 = -\underset{1}{\omega}^3 + \underset{2}{\omega}^3, \quad \omega_3^3 = \frac{1}{2}\left(\underset{1}{\omega}^3 - \underset{2}{\omega}^3\right).$$

Структурные уравнения (4.37), (4.38) примут в рассматриваемом случае следующий вид:

$$\begin{aligned} &d\underset{1}{\omega}^1 = \underset{1}{\omega}^2 \wedge \omega_2^1 + \underset{1}{\omega}^3 \wedge \omega_3^1 + 2\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^3, \quad d\underset{1}{\omega}^2 = \underset{1}{\omega}^3 \wedge \omega_3^2 - \underset{1}{\omega}^2 \wedge \Omega, \quad d\underset{1}{\omega}^3 = \frac{1}{2}\underset{1}{\omega}^3 \wedge \Omega, \\ &d\underset{2}{\omega}^1 = \underset{2}{\omega}^2 \wedge \omega_2^1 + \underset{2}{\omega}^3 \wedge \omega_3^1 - 2\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^3, \quad d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^3 \wedge \omega_3^2 - \underset{2}{\omega}^2 \wedge \Omega, \quad d\underset{2}{\omega}^3 = \frac{1}{2}\underset{2}{\omega}^3 \wedge \Omega, \\ &d\omega_2^1 = \omega_2^1 \wedge \Omega, \quad d\omega_3^2 = \frac{3}{2}\Omega \wedge \omega_3^2, \quad d\omega_3^1 = \omega_3^2 \wedge \omega_2^1 + \frac{1}{2}\Omega \wedge \omega_3^1 + \underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^3 - \underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^2, \end{aligned} \tag{4.49}$$

где $\Omega = \underset{1}{\omega}^3 - \underset{2}{\omega}^3$,

Из уравнений (4.49) следует, что $d\Omega = 0$, т. е. форма Ω будет полным дифференциалом. Пусть $\Omega = d\ln\varphi$. Последовательно интегрируя систему (4.49), найдем:

$$\omega_2^1 = \varphi^{-1}du, \quad \omega_3^2 = \varphi^{3/2}dv, \quad \underset{1}{\omega}^3 = \varphi^{-1/2}da^3, \quad \underset{2}{\omega}^3 = \varphi^{-1/2}db^3,$$

где u, v, a^3, b^3 — параметры, причем $a^3 - b^3 = 2\varphi^{1/2}$. Подставляя эти формы в остальные уравнения системы (4.49) и продолжая интегрировать, находим:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\omega}^2 = \varphi(v da^3 + da^2), \quad \underset{2}{\omega}^2 = \varphi(-v db^3 + db^2),\\
&\omega_3^1 = \varphi^{1/2}(a^2 db^3 + b^2 da^3 + v du + dw),\\
&\underset{1}{\omega}^1 = -u da^2 - (w + a^2 b^3) da^3 + a^2 a^3 da^3 + da^1,\\
&\underset{2}{\omega}^1 = -u db^2 - (w + b^2 a^3) db^3 + b^2 b^3 db^3 + db^1,
\end{aligned}$$

где w, a^2, b^2, a^1, b^1 — параметры.

Первое слоение рассматриваемой три-ткани выделяется системой $\underset{1}{\omega}^i = 0$, первые интегралы которой запишутся в виде $a^i = x^i$. Аналогично находим второе слоение: $b^i = y^i$. Третье определяется системой $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$, интегрируя которую, получим:

$$a^3 + b^3 = z^3, \quad a^2 + b^2 = z^2, \quad a^1 + b^1 - z^2 a^3 b^3 = z^1.$$

Исключая переменные a^i и b^i из уравнений трех найденных слоений, придем к уравнениям (4.45). ■

Таким же способом доказывается и

Теорема 4.17. [Ф-4] *Уравнения шестимерной три-ткани Бола с симметричным тензором a^{ij} ранга 2 в некоторых локальных координатах могут быть записаны в виде*:

$$\begin{aligned}
&z^1 = x^1 e^{2\mathcal{E}(x^3+y^3)} + y^1 + 2\mathcal{E} y^3 \left(x^2 + y^2 e^{2\mathcal{E}(x^3+y^3)}\right),\\
&z^2 = x^2 + y^2 e^{2\mathcal{E}(x^3+y^3)},\\
&z^3 = x^3 + y^3, \quad \mathcal{E} = \pm 1.
\end{aligned} \tag{4.50}$$

4. Классификация шестимерных тканей Бола с несимметричным тензором a^{ij} занимает очень много места и поэтому в этой книге не приводится. За подробностями отсылаем читателя к работам В.И. Федоровой. Мы рассмотрим лишь две таких ткани: одну в этом параграфе (с матрицей ранга 3), и одну — в § 3 гл. 7 (с матрицей ранга 1).

Пусть матрица a^{ij} имеет следующий вид [Ф-4]:

$$\left(a^{ij}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.51}$$

(здесь $a^{23} = 1$). Обозначим W_6 соответствующую три-ткань Бола и выясним ее строение.

Прежде всего заметим, что так как тензор a^{ij} не является кососимметрическим, то по теореме 4.14 ткань W_6 не изоклинная. Найдем компоненты ее тензора кривизны. Подставляя значения из (4.51) в соотношения (4.41), получаем:

$$\left(b_1^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \left(b_2^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ -4 & 0 & 0 \\ -p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(b_3^{ij}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где p — произвольная функция. Подставляя далее значения a^{ij} и b_k^{ij} в дифференциальные уравнения (4.39) и (4.40), получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
&\omega_1^1 = 0, \quad \omega_2^1 = \frac{1}{2} p \left(\underset{1}{\omega}^2 - \underset{2}{\omega}^2\right), \quad \omega_3^1 = -2\left(\underset{1}{\omega}^2 - \underset{2}{\omega}^2\right),\\
&\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = 2\left(\underset{1}{\omega}^1 - \underset{2}{\omega}^1\right), \quad \omega_3^2 = 0,\\
&\omega_1^3 = -2\left(\underset{1}{\omega}^2 - \underset{2}{\omega}^2\right), \quad \omega_2^3 = -\frac{1}{4} dp + \frac{1}{2} p \left(\underset{1}{\omega}^1 - \underset{2}{\omega}^1\right), \quad \omega_3^3 = 0.
\end{aligned}$$

Семейство адаптированных реперов три-ткани W_6 можно сузить, положив $p = 0$. Тогда предыдущая система сведется к более простой:

$$\begin{aligned}
&\omega_1^1 = 0, \quad \omega_2^1 = 0, \quad \omega_3^1 = -2\left(\underset{1}{\omega}^2 - \underset{2}{\omega}^2\right),\\
&\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = 2\left(\underset{1}{\omega}^1 - \underset{2}{\omega}^1\right), \quad \omega_3^2 = 0,\\
&\omega_1^3 = -2\left(\underset{1}{\omega}^2 - \underset{2}{\omega}^2\right), \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^3 = 0.
\end{aligned}$$

Подставив эти значения форм в структурные уравнения (4.37) и (4.38), найдем, что последние удовлетворяют тождественно, а первые примут вид:

$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = 2\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^2, \quad d\underset{2}{\omega}^1 = -2\underset{2}{\omega}^3 \wedge \underset{1}{\omega}^2,\\
&d\underset{1}{\omega}^2 = -2\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^1, \quad d\underset{2}{\omega}^2 = 2\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^1,\\
&d\underset{1}{\omega}^3 = 2\underset{1}{\omega}^1 \wedge \left(\underset{2}{\omega}^2 + \underset{1}{\omega}^3\right), \quad d\underset{2}{\omega}^3 = -2\underset{2}{\omega}^1 \wedge \left(\underset{1}{\omega}^2 + \underset{2}{\omega}^3\right).
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Система (4.52) содержит кроме базисных форм только постоянные и вполне интегрируема. Следовательно, она представляет собой структурные уравнения некоторой шестимерной группы Ли G. Таким образом, рассматриваемая три-ткань W_6 реализуется на однородном пространстве и, как некоторые другие рассмотренные выше ткани, является G-тканью.

Построим отображение группы G в группу преобразований трехмерного проективного пространства P^3. Пусть $\{A_u\}$ $(u, v, w, \ldots = 0, 1, 2, 3)$ — подвижной репер в P^3, инфинитезимальные преобразования которого запишем следующим образом:

$$dA_u = \sigma_u^v A_v. \tag{4.53}$$

Формы Пфаффа σ_u^v удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства

$$d\sigma_u^v = \sigma_u^w \wedge \sigma_w^v. \tag{4.54}$$

Рассмотрим подгруппу группы проективных преобразований, оставляющих инвариантной некоторую линейчатую квадрику Q. Обозначим эту подгруппу $O_{2,2}$. Она является группой движений неевклидова пространства ${}^2S^3$, абсолютом которого является квадрика Q, и называется *псевдоортогональной группой.*

Запишем уравнения квадрики Q в виде

$$(x, x) \equiv g_{uv} x^u x^v = 0,$$

и выберем в P^3 подсемейство реперов $\{A_u\}$ так, чтобы прямые A_0A_1, A_0A_2, A_3A_1, A_3A_2 были образующими квадрики Q. Кроме того, нормируем вершины реперов условиями $(A_0A_3) = (A_1A_2) = 1$. Тогда уравнение квадрики Q примет вид

$$x^0x^3 + x^1x^2 = 0,$$

а точки A_u будут связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&(A_0A_0) = (A_1A_1) = (A_2A_2) = (A_3A_3) = 0, \quad (A_0A_3) = (A_1A_2) = 1,\\
&(A_0A_1) = (A_0A_2) = (A_3A_1) = (A_3A_1) = 0.
\end{aligned}$$

Продифференцируем последние равенства, воспользовавшись уравнениями (4.53). В результате получим такие соотношения на формы σ_u^v:

$$\sigma_u^v + \sigma_{3-v}^{3-u} = 0. \tag{4.55}$$

Таким образом, группа $O_{2,2}$ зависит от шести параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых будут инвариантные формы $\sigma_0^0, \sigma_1^1, \sigma_0^1, \sigma_1^0, \sigma_0^2, \sigma_2^0$.

В силу (4.55) деривационные уравнения (4.53) пространства S^3 примут вид:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \sigma_0^0 A_0 + \sigma_0^1 A_1 + \sigma_0^2 A_2, \\ dA_1 &= \sigma_1^0 A_0 + \sigma_1^1 A_1 - \sigma_0^2 A_3, \\ dA_2 &= \sigma_2^0 A_0 - \sigma_1^1 A_2 - \sigma_0^1 A_3, \\ dA_3 &= -\sigma_2^0 A_1 - \sigma_1^0 A_2 - \sigma_0^0 A_3. \end{aligned} \tag{4.53$'$}$$

Структурные уравнения группы $O_{2,2}$ (или пространства ${}^2S^3$) получатся из структурных уравнений (4.54) с учетом соотношений (4.55):

$$\begin{aligned} &d\sigma_0^0 = \sigma_0^1 \wedge \sigma_1^0 + \sigma_0^2 \wedge \sigma_2^0, \quad d\sigma_1^1 = \sigma_1^0 \wedge \sigma_0^1 + \sigma_0^2 \wedge \sigma_2^0, \\ &d\sigma_0^1 = (\sigma_0^0 - \sigma_1^1) \wedge \sigma_0^1, \quad d\sigma_1^0 = \sigma_1^0 \wedge (\sigma_0^0 - \sigma_1^1), \\ &d\sigma_0^2 = (\sigma_0^0 + \sigma_1^1) \wedge \sigma_0^2, \quad d\sigma_2^0 = \sigma_2^0 \wedge (\sigma_0^0 + \sigma_1^1). \end{aligned} \tag{4.56}$$

Непосредственно проверяется, что уравнения (4.52) перейдут в уравнения (4.56), если положить

$$\begin{aligned} &\underset{1}{\omega}^1 = \frac{1}{2}(\sigma_1^1 - \sigma_0^0), \quad \underset{1}{\omega}^2 = \sigma_0^2, \quad \underset{1}{\omega}^3 = \frac{1}{2}(\sigma_1^0 - \sigma_0^1), \\ &\underset{2}{\omega}^1 = \frac{1}{2}(\sigma_1^1 + \sigma_0^0), \quad \underset{2}{\omega}^2 = \sigma_0^1, \quad \underset{2}{\omega}^3 = \frac{1}{2}(\sigma_2^0 - \sigma_0^2). \end{aligned} \tag{4.57}$$

В уравнениях (4.57) инвариантные формы группы G выражаются через инвариантные формы группы $O_{2,2}$ с постоянными коэффициентами. Следовательно, они задают изоморфизм групп G и $O_{2,2}$. Итак, мы получили, что группа G, на которой реализуется три-ткань W_6, изоморфна группе движений неевклидова пространства ${}^2S^3$, поэтому три-ткань W_6 допускает интерпретацию в терминах этого пространства.

Уравнения

$$\underset{1}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

фиксируют точку p на группе G. В группе $O_{2,2}$ соответствующие уравнения имеют вид:

$$\sigma_0^0 = \sigma_1^1 = \sigma_0^1 = \sigma_1^0 = \sigma_2^0 = \sigma_0^2 = 0. \tag{4.58}$$

Как видно из деривационных уравнений (4.53$'$), уравнения (4.58) фиксируют репер пространства ${}^2S^3$. Следовательно, точке p группы G биективно соответствует репер пространства ${}^2S^3$.

Но так как репер пространства ${}^2S^3$ состоит из образующих квадрики Q, то для его фиксации достаточно не четырех вершин, а только трех точек — одной вершины и двух точек, лежащих на ребрах. Действительно, легко убедиться в том, что уравнения (4.58) получаются из условия неподвижности точек $M = A_0$, $N = A_1 + A_3$, $L = A_2 + A_3$:

$$dA_0 = 0, \quad d(A_1 + A_3) = 0, \quad d(A_2 + A_3) = 0.$$

Таким образом, можно считать, что точке p группы G биективно соответствует тройка точек M, N, L на квадрике Q.

Найдем образы слоев ткани W_6 при рассматриваемом отображении. Слой $\mathcal{F}_1$ первого слоения, проходящий через точку p, определяется системой $\underset{1}{\omega}^i = 0$, которая на группе $O_{2,2}$ принимает вид:

$$\sigma_0^0 - \sigma_1^1 = 0, \quad \sigma_0^2 = 0, \quad \sigma_0^1 - \sigma_1^0 = 0. \tag{4.59}$$

Из уравнений (4.53$'$) при этом получаем:

$$d(A_0 + A_1) = (\sigma_0^0 + \sigma_0^1)(A_0 + A_1), \quad d(A_0 - A_1) = (\sigma_0^0 - \sigma_0^1)(A_0 - A_1).$$

Как видно, слою $\mathcal{F}_1$ в пространстве P^3 отвечает неподвижная образующая A_0A_1 абсолюта Q с двумя лежащими на ней неподвижными точками $A_0 + A_1$ и $A_0 - A_1$.

Точно так же устанавливается, что слою $\mathcal{F}_2$ второго слоения ткани W_6, проходящему через точку p, отвечает в P^3 неподвижная образующая A_0A_2 абсолюта Q с двумя неподвижными точками $A_0 + A_2$ и $A_0 - A_2$.

Слой $\mathcal{F}_3$ третьего слоения ткани определяется уравнениями $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$, а на $O_{2,2}$ — системой

$$\sigma_1^1 = 0, \quad \sigma_0^1 + \sigma_0^2 = 0, \quad \sigma_1^0 + \sigma_2^0 = 0.$$

Уравнения $(4.53')$ в этом случае дают $d(A_1 + A_2) = 0$. Таким образом, слою $\mathcal{F}_3$ третьего слоения рассматриваемой ткани соответствует в пространстве P^3 неподвижная точка $(A_1 + A_2)$. Можно считать также, что слою $\mathcal{F}_3$ отвечает плоскость $\pi = [A_0, A_1 - A_2, A_3]$, полярно сопряженная точке $(A_1 + A_2)$ относительно квадрики Q. Эта плоскость может быть определена также точками A_0, T и S, где

$$T = A_0 + (A_1 - A_2) + A_3 = (A_0 - A_1) - (A_2 - A_3),$$
$$S = A_0 - (A_1 - A_2) + A_3 = (A_0 - A_1) + (A_2 - A_3).$$

Образы точки p и трех проходящих через нее слоев $\mathcal{F}_\alpha$ ткани W_6 приводят к конфигурации из восьми образующих квадрики Q, указанной на рис. 41. Как видно, эта конфигурация вполне

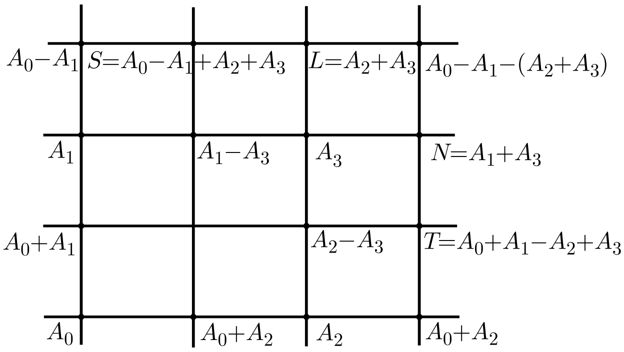

Рис. 41

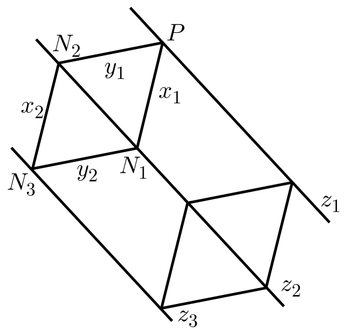

Рис. 42

определяется заданием трех точек M, L и N. В самом деле, если указанные точки заданы, то известно 6 проходящих через них образующих поверхности Q. Две оставшиеся образующие находятся как четвертые гармонические. Таким образом, если заданы точки M, N, L то однозначно находятся геометрические образы, соответствующие слоям $\mathcal{F}_\alpha$ ткани W_6, проходящим через точку p. Это соответствует тому факту, что через точку многообразия, несущего три-ткань, проходит по одному и только по одному слою из каждого слоения.

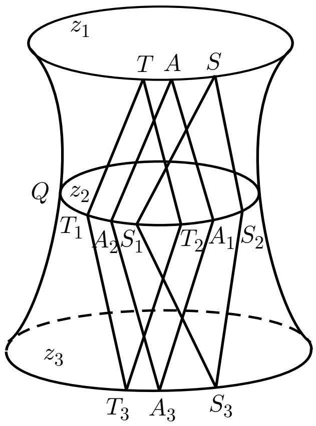

Рис. 43

Найдем на квадрике Q конфигурацию, отвечающую средней фигуре Бола, изображенной на рис. 42. Слоям z_1 и z_2 третьего слоения в нашей интерпретации соответствуют две плоскости. Они пересекают квадрику Q по кривым второго порядка, которые также обозначим z_1 и z_2 (рис. 43). Точке p, лежащей на слое z_1, на рис. 43 отвечает тройка точек (A, S, T). Через них проходят две серии образующих: AA_1, SS_2, TT_2 и AA_2, SS_1, TT_1. При этом тройка образующих AA_1, SS_1, TT_1 соответствует слою x_1 первого слоения, а тройка образующих AA_2, SS_2, TT_2 — слою y_1 второго слоения. Тройка точек (A_1, S_1, T_1) изображает точку N_1 пересечения слоев z_2 и x_1, а тройка (A_2, S_2, T_2) — точку $N_2 = z_2 \cup y_1$. Кривая второго порядка на квадрике Q, определяемая точками A_3, S_3, T_3, соответствует слою z_3.

Итак, четырехугольнику, образованному слоями x_1, y_1, x_2, y_2 ткани W_6, соответствует конфигурация на поверхности Q, образованная тремя кривыми второго порядка и тремя четырехугольниками, составленными из образующих.

Условие замыкания B_m состоит в том, что четырехугольник x_1, y_1, x_2, y_2 можно перемещать так, что его вершины скользят по слоям z_1, z_2 и z_3. В построенной интерпретации это означает следующее: положение кривой z_3 на рис. 43 не зависит от выбора исходной тройки точек

A, S, T на кривой z_1. Указанное свойство линейчатой квадрики Q связано с тем, что ее плоские сечения z_1 и z_3 будут соответствовать друг другу в гомологии H, определяемой плоскостью π, содержащей кривую z_2, и полюсом P этой плоскости относительно квадрики Q. Тем самым геометрически доказывается замыкание фигур Бола B_m на ткани W_6.

5. В работе [Ч-3] Черн приводит гипотезу Гриффитса о том, что всякая шестиугольная три-ткань алгебраизуема. Как показывают результаты настоящего параграфа, эта гипотеза не подтверждается. Действительно, здесь доказано существование тканей Бола, тензор a^{ij} которых не является кососимметричным. Но в силу теоремы 4.14 такие ткани не будут алгебраизуемыми. Так как всякая ткань Бола является шестиугольной, то тем самым доказано существование неалгебраизуемых шестиугольных три-тканей.

С другой стороны, в § 2 гл. 5 будет доказано, что всякая четырехмерная шестиугольная три-ткань алгебраизуема. Отсюда следует, что гипотеза Гриффитса подтверждается для четырехмерных три-тканей, но не подтверждается для три-тканей большей размерности.

§ 4.4. Три-ткани Муфанг

1. Напомним, что три-ткань называется три-тканью Муфанг, если в ее координатных лупах выполняется тождество Муфанг

$$(u \cdot v) \cdot (w \cdot u) = x \cdot ((y \cdot z) \cdot x), \tag{4.60}$$

или какое-либо из эквивалентных ему тождеств, указанных в задаче 2.7. Тензор кривизны ткани Муфанг удовлетворяет соотношению $b = \operatorname{alt} b$ (таблице 2.2 на стр. 59). Сравнивая его с равенством (1.31), связывающим тензоры кривизны и кручения произвольной три-ткани, находим, что тензор кривизны ткани Муфанг выражается через ее тензор кручения:

$$b^i_{jk\ell} = -2a^m_{[jk}a^i_{\ell]m}. \tag{4.61}$$

Так как класс тканей Муфанг совпадает с классом тканей, на которых выполняются все три условия замыкания B_ℓ, B_r и B_m, то из теорем 4.4 и 4.5 вытекает, что *соотношения* (4.61) *не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы три-ткань W была тканью Муфанг.*

Ввиду (4.61) уравнения (1.33) примут вид:

$$\nabla a^i_{jk} = 2a^m_{[jk}a^i_{\ell]m}\left(\underset{1}{\omega}^\ell - \underset{2}{\omega}^\ell\right), \tag{4.62}$$

т. е. через тензор кручения выражаются и его ковариантные производные. Из (4.61) и (4.62) вытекает, что *ковариантные производные любого порядка от тензоров кручения и кривизны ткани Муфанг выражаются через тензор кручения.* Это означает, что *G-структура, определяемая три-тканью Муфанг, является замкнутой G-структурой второго класса* (см. главу 5).

Найдем структурные уравнения три-ткани Муфанг. Поскольку она является одновременно тканью B_ℓ, B_r и B_m, то для ее описания воспользуемся связностью $\overset{*}{\Gamma}$, средней по отношению к связностям $\widetilde{\Gamma}_{12}$, $\widetilde{\Gamma}_{31}$, $\widetilde{\Gamma}_{23}$ (§ 8 гл. 1). Эта связность определяется формами

$$\overset{*}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j + \frac{2}{3}a^i_{jk}\left(\underset{1}{\omega}^k - \underset{2}{\omega}^k\right) \tag{4.63}$$

(см. (1.87)), удовлетворяющими структурным уравнениям (1.91). В них входит тензор

$$\overset{*}{b}{}^i_{jk\ell} = b^i_{jk\ell} + 2a^m_{[jk}a^i_{\ell]m},$$

который в силу (4.61) обращается в нуль. В результате структурные уравнения ткани Муфанг принимают вид:

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \overset{*}{\omega}{}^i_j + \frac{1}{3}\,a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \left(\underset{2}{\omega}^k - \underset{3}{\omega}^k\right),\\
d\underset{2}{\omega}^i &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \overset{*}{\omega}{}^i_j + \frac{1}{3}\,a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \left(\underset{3}{\omega}^k - \underset{1}{\omega}^k\right),\\
d\underset{3}{\omega}^i &= \underset{3}{\omega}^j \wedge \overset{*}{\omega}{}^i_j + \frac{1}{3}\,a^i_{jk}\underset{3}{\omega}^j \wedge \left(\underset{1}{\omega}^k - \underset{2}{\omega}^k\right);
\end{aligned} \tag{4.64}$$

$$d\overset{*}{\omega}{}^i_j - \overset{*}{\omega}{}^k_j = -\frac{1}{3}\, A^i_{jk\ell}\left(\underset{1}{\omega}{}^k \wedge \underset{2}{\omega}{}^\ell + \underset{2}{\omega}{}^k \wedge \underset{3}{\omega}{}^\ell + \underset{3}{\omega}{}^k \wedge \underset{1}{\omega}{}^\ell\right), \tag{4.65}$$

где

$$A^i_{jk\ell} = -A^i_{j\ell k} = \frac{2}{3}\left(a^m_{jk}a^i_{m\ell} + a^m_{\ell j}a^i_{mk} - a^m_{k\ell}a^i_{mj}\right) \tag{4.66}$$

— тензор кривизны связности $\overset{*}{\Gamma}$. К этим уравнениям нужно добавить еще уравнения (4.62), которые после замены в них форм ω^i_j на формы $\overset{*}{\omega}{}^i_j$ с помощью (4.63) примут простой вид:

$$\overset{*}{\nabla} a^i_{jk} = 0. \tag{4.67}$$

Ввиду этого из (4.61) и (4.66) вытекают уравнения $\overset{*}{\nabla} b^i_{jk\ell} = 0$ и уравнения

$$\overset{*}{\nabla} A^i_{jk\ell} = 0. \tag{4.68}$$

Напомним, что многообразие X с заданной на нем аффинной связностью Γ называется *редуктивным пространством*, если тензоры кручения и кривизны связности Γ ковариантно постоянны. Таким образом, мы получили, что *многообразие X, несущее три-ткань Муфанг, является редуктивным пространством, а средняя связность $\overset{*}{\Gamma}$ будет его канонической связностью.*

Внешнее дифференцирование уравнений (4.67) и (4.68) приводит к соотношениям

$$a^i_{pk}A^p_{j\ell m} + a^i_{jp}A^p_{k\ell m} - a^p_{jk}A^i_{p\ell m} = 0 \tag{4.69}$$

и

$$A^p_{mjk}A^m_{\ell pq} + A^i_{\ell mk}A^m_{jpq} + A^i_{\ell jm}A^m_{kpq} - A^m_{\ell jk}A^i_{mpq} = 0, \tag{4.70}$$

смысл которых выясняется в следующей теореме.

Теорема 4.18. *Касательная W-алгебра три-ткани Муфанг является алгеброй Мальцева.*

☐ Согласно определению (§ 5 гл. 2) касательная W-алгебра три-ткани W содержит две операции — бинарную и тернарную, первая из которых определяется тензором кручения, а вторая — тензором кривизны. Так как тензор кривизны ткани Муфанг выражается через ее тензор кручения, то в W-алгебре ткани Муфанг имеется лишь одна независимая операция:

$$[\xi, \eta]^i = -2a^i_{jk}\xi^j\eta^k. \tag{4.71}$$

Напомним далее, что *алгеброй Мальцева* называется некоммутативная алгебра, в которой выполняется тождество

$$[[\xi,\eta],[\xi,\zeta]] = [[[\xi\eta]\,\zeta]\,\xi] + [[[\eta\zeta]\,\xi]\,\xi] + [[[\zeta\xi]\,\xi]\,\eta], \tag{4.72}$$

см. [Се-1]. Рассмотрим соотношения (4.69). Если внести в них выражения (4.66), то придем к соотношениям:

$$a^i_{jp}a^p_{mq}a^q_{\ell k} + a^i_{jp}a^p_{\ell q}a^q_{km} + a^i_{jp}a^p_{kq}a^q_{\ell m} + a^i_{kp}a^p_{mq}a^q_{j\ell} + a^i_{kp}a^p_{\ell q}a^q_{mj} + a^i_{kp}a^p_{jq}a^q_{m\ell} + a^i_{\ell p}a^p_{mq}a^q_{jk} + a^i_{mp}a^p_{\ell q}a^q_{kj} = \\ = a^i_{pq}a^p_{jk}a^q_{\ell m}. \tag{4.73}$$

Обозначим

$$a^i_{jk\ell m} = a^i_{pq}a^p_{jk}a^q_{\ell m}, \quad A^i_{jk\ell m} = a^i_{jp}a^p_{kq}a^q_{\ell m} + a^i_{kp}a^p_{\ell q}a^q_{mj} + a^i_{\ell p}a^p_{mq}a^q_{jk} + a^i_{mp}a^p_{jq}a^q_{k\ell}. \tag{4.74}$$

Тогда равенства (4.73) запишутся в виде:

$$A^i_{jm\ell k} + A^i_{j\ell km} + A^i_{jk\ell m} = a^i_{jk\ell m}. \tag{4.75}$$

При этом тензоры $A^i_{jk\ell m}$ и $a^i_{jk\ell m}$ удовлетворяют очевидным соотношениям

$$A^i_{j(k\ell m)} = 0, \quad a^i_{jk\ell m} = -a^i_{kj\ell m} = -a^i_{jkm\ell} = -a^i_{\ell mjk}. \tag{4.76}$$

Циклируя равенства (4.75) по индексам i, k, ℓ, m и складывая полученные четыре серии соотношений, с учетом (4.76) придем к соотношениям

$$A^i_{jk\ell m} + A^i_{jm\ell k} = 0. \tag{4.77}$$

Вычитая последние равенства из (4.75), получим

$$A^i_{j\ell km} = a^i_{jk\ell m},$$

или с учетом обозначений (4.74),

$$a^i_{jp}a^p_{\ell q}a^q_{km} + a^i_{kp}a^p_{mq}a^q_{j\ell} + a^i_{\ell p}a^p_{kq}a^q_{mj} + a^i_{mp}a^p_{jq}a^q_{\ell k} = a^i_{pq}a^p_{jk}a^q_{\ell m}. \tag{4.78}$$

Эти соотношения более обозримы в векторной форме. Свернув их с координатами ξ^i, η^i, ζ^i, θ^i векторов ξ, η, ζ, θ, придем к тождеству

$$[\xi\,[\zeta\,[\eta\theta]]] + [\eta\,[\theta\,[\xi\zeta]]] + [\zeta\,[\eta\,[\theta\xi]]] + [\theta\,[\xi\,[\zeta\eta]]] = [[\xi\eta][\zeta\theta]], \tag{4.79}$$

которое называется *тождеством Сейгла.* Полагая в нем $\theta = \xi$, придем к тождеству (4.72), характеризующему алгебры Мальцева. ■

2. Рассмотрим систему уравнений (4.64), (4.65), (4.67), определяющую три-ткань Муфанг. Входящий в нее тензор a^i_{jk} удовлетворяет соотношениям (4.69), (4.70), (4.72) и тождеству Сейгла (4.79). Но равенства (4.70) вытекают из (4.69), так как уравнения (4.68) являются дифференциальным следствием уравнений (4.67). Покажем, что системы (4.69) и (4.72) эквивалентны. В одну сторону ((4.69)⇒(4.72)) это было доказано в теореме 4.18. Приведем обратные рассуждения.

Соотношение (4.79) может быть выведено из соотношения (4.72) с помощью линеаризации последнего (см. [Се-1]). Далее, из соотношений (4.78), эквивалентных тождеству (4.79), симметрированием по индексам ℓ и m получим равенства (4.77), которые вместе с (4.78) дают соотношения (4.75). Но последние только формой записи отличаются от (4.73) и (4.69), поэтому из (4.79) следует (4.69).

Итак, структурные уравнения ткани Муфанг состоят из уравнений (4.64), (4.65), (4.67), и тождества (4.72). Эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования, в результате чего верна следующая

Теорема 4.19. *Три-ткань Муфанг вполне определяется заданием поля тензора кручения* a^i_{jk}, *удовлетворяющего тождеству* (4.72).

Используя ковариантное постоянство тензора кручения относительно связности $\overset{*}{\Gamma}$, докажем более сильное утверждение: *ткань Муфанг, как и групповая ткань, вполне определяется набором структурных констант.* Пусть $\mathcal{R}(W)$ — расслоение адаптированных реперов G_W-структуры, определяемой тканью Муфанг $W = (X, \lambda_\alpha)$ на многообразии X. Напомним, что структурной группой G_W-структуры является группа $\mathbf{GL}(r)$. Базисными формами на $\mathcal{R}(W)$ являются формы $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$, $\overset{*}{\omega}{}^i_j$, удовлетворяющие структурным уравнениям (4.64), (4.65). Рассмотрим на $\mathcal{R}(W)$ распределение $\overset{*}{S}$, которое задается соотношениями

$$\overset{*}{\omega}{}^i_j = \frac{1}{3}\, A^i_{jk\ell}\, \theta^{k\ell}, \tag{4.80}$$

где, как и в § 1, $\theta^{k\ell}$ суть параметры. С помощью соотношений (4.69) и (4.70) точно так же, как и в § 1, доказывается, что:

а) на распределении $\overset{*}{S}$ компоненты тензора a^i_{jk} кручения постоянны;

б) распределение $\overset{*}{S}$ инволютивно на $\mathcal{R}(W)$, и его максимальными интегральными многообразиями будут расслоения голономии, определяемой связностью $\overset{*}{\Gamma}$;

в) произвольное максимальное интегральное многообразие $\mathcal{R}'(W)$ распределения $\overset{*}{S}$ накрывает многообразие X, поэтому три-ткань Муфанг, определенная на X, вполне задается набором постоянных — значений тензора a^i_{jk} на $\mathcal{R}'(W)$, т. е. структурным тензором некоторой алгебры Мальцева A;

г) алгебра голономии $\overset{*}{h}$ связности $\overset{*}{\Gamma}$ порождается линейными преобразованиями вида

$$\overset{*}{d}{}^i_j = A^i_{jk\ell}\xi^k\eta^\ell,$$

которые являются дифференцированиями алгебры Мальцева A.

Рассмотрим интегральное многообразие $\mathcal{R}'(W)$ распределения $\overset{*}{S}$. Базисными формами на нем будут формы $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$ и $\overset{*}{\theta}{}^i_j = \overset{*}{\omega}{}^i_j\big|_{\overset{*}{S}}$. Они удовлетворяют структурным уравнениям (4.64) и (4.65), причем входящие в эти уравнения величины a^i_{jk} постоянны и образуют структурный тензор алгебры Мальцева A. Указанная система структурных уравнений (обозначим ее также через $\overset{*}{S}$) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Действительно, внешнее дифференцирование уравнений (4.64) и (4.65) приводит только к соотношениям (4.80), так как уравнения (4.67) на $\mathcal{R}'(W)$ обращаются в тождества. Но, дифференцируя соотношения (4.80), мы в силу (4.67) также получим тождества. Таким образом, система $\overset{*}{S}$ представляет собой структурные уравнения (уравнения Маурера–Картана) некоторой группы Ли G, а соотношения Сейгла (4.78) эквивалентны тождеству Якоби для соответствующей алгебры Ли.

Уравнения (4.64) показывают, что подсистема $\underset{1}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^i = 0$ вполне интегрируема на $\overset{*}{S}$. Следовательно, она выделяет в G некоторую подгруппу $\overset{*}{H}$, структурные уравнения которой получаются из (4.65) и имеют вид

$$\delta\pi^i_j = \pi^k_j \wedge \pi^i_k,$$

где $\pi^i_j = \overset{*}{\omega}{}^i_j\big|_{\underset{1}{\omega}^i=\underset{2}{\omega}^i=0}$. Формы π^i_j, как и формы $\overset{*}{\omega}{}^i_j$, записываются в виде (4.80). Так как именно эти формы порождают определенную выше алгебру голономии $\overset{*}{h}$, то *группа $\overset{*}{H}$ совпадает с группой голономии связности $\overset{*}{\Gamma}$.*

С другой стороны, система $\underset{1}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^i = 0$ фиксирует точку на многообразии X, несущем ткань Муфанг. Следовательно, X есть однородное пространство $G/\overset{*}{H}$.

3. Покажем, что группа G и ткань Муфанг M строятся по заданной алгебре Мальцева. Для этого перейдем от связности $\overset{*}{\Gamma}$ к связности $\widetilde{\Gamma}$, рассмотренной в § 1. Формы $\overset{*}{\omega}{}^i_j$ и $\widetilde{\omega}^i_j$ этих связностей удовлетворяют соотношениям

$$\overset{*}{\omega}{}^i_j = \widetilde{\omega}^i_j - \frac{1}{3}\, a^i_{jk}\left(\underset{1}{\omega}^k - \underset{2}{\omega}^k\right).$$

вытекающим из (4.2) и (4.63). Заметим, что поскольку на G величины a^i_{jk} постоянны, то последние уравнения обозначают преобразование базиса инвариантных форм группы G. Сравнивая их с уравнениями (4.80), находим, что распределение $\overset{*}{S}$ задается в терминах связности $\widetilde{\Gamma}$ уравнениями

$$\widetilde{\omega}^i_j = \frac{1}{3}\, A^i_{jk\ell}\theta^{k\ell} + \frac{1}{3}\, a^i_{jk}\left(\underset{1}{\omega}^k - \underset{2}{\omega}^k\right). \tag{4.81}$$

Поскольку ткань Муфанг является тканью Бола, ее структурные уравнения имеют вид (4.3), (4.5). Структурные уравнения группы G получаются ограничением этих уравнений на распределение $\overset{*}{S}$ и могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \widetilde{\theta}^i_j + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \widetilde{\theta}^i_j - a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ d\widetilde{\theta}^i_j &= \widetilde{\theta}^k_j \wedge \widetilde{\theta}^i_k + R^i_{jk\ell}\left(\underset{1}{\omega}^k + \underset{2}{\omega}^k\right) \wedge \left(\underset{1}{\omega}^\ell + \underset{2}{\omega}^\ell\right). \end{aligned} \tag{4.82}$$

Здесь $\widetilde{\theta}^i_j$ обозначает ограничение форм $\widetilde{\omega}^i_j$ на $\overset{*}{S}$.

Тензор кривизны $R^i_{jk\ell}$ связности $\widetilde{\Gamma}$ для ткани Муфанг выражается через тензор a^i_{jk}. Из (4.6) и (4.61) имеем:

$$R^i_{jk\ell} = \frac{1}{6}\left(a^m_{jk}a^i_{m\ell} + a^m_{\ell j}a^i_{mk} - 2a^i_{mj}a^m_{k\ell}\right), \tag{4.83}$$

так что тернарная операция (4.22)–(4.23), определяющая тройную систему Ли, выразится через бинарную операцию (4.71) алгебры Мальцева следующим образом: [1])

$$d_{\eta,\zeta}(\xi) = \langle \xi, \eta, \zeta \rangle = R(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{24}\left(2\,[[\xi\eta]\zeta] - [[\eta\zeta]\xi] - [[\zeta\xi]\eta]\right). \tag{4.84}$$

Тройная система Ли в этом случае обозначается T_A.

Рассмотрим пространство

$$g = A_1 \dotplus A_2 \dotplus h,$$

где A_1 и A_2 — алгебры, изоморфные данной алгебре Мальцева A, а h обозначает алгебру внутренних дифференцирований тройной системы Ли T_A, порожденную операторами $d_{\eta,\zeta}$ (см. п. 5 § 1). Пусть изоморфизм $\varphi : A_1 \to A_2$ установлен так, что соответствующие векторы имеют одинаковые координаты, и пусть $\xi_1, \eta_1 \in A_1$, $\xi_2, \eta_2 \in A_2$, $x, y \in h$. Определим коммутатор $(\,,)$ в g следующим образом:

$$\begin{aligned}
(\xi_\nu, \eta_\nu) &= -2d_{\xi_\nu,\eta_\nu} \in h, \quad \nu = 1, 2,\\
(x, \xi_\nu) &= -(\xi_\nu, x) = x(\xi_\nu) \in A_\nu,\\
(x, y) &= x \circ y - y \circ x \in h,\\
(\xi_1, \eta_2) &= -(\eta_2, \xi_1) = \frac{1}{2}\left[\xi_1, \varphi^{-1}(\eta_2)\right] - \frac{1}{2}\left[\varphi(\xi_1), \eta_2\right] - 2d_{\xi_1,\eta_2}.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Лемма 4.20. *Пространство g относительно операции $(\,,)$ образует алгебру Ли, касательную к группе G.*

□ Если структурные уравнения некоторой группы Ли записаны в виде

$$d\omega^u = -\frac{1}{2}\,C^u_{vw}\omega^v \wedge \omega^w,$$

то для любой пары инвариантных векторных полей X и Y на ней выполняются соотношения

$$d\omega^u(X, Y) = C^u_{vw}X^vY^w = -(X, Y)^u, \tag{4.86}$$

где (X, Y) — коммутатор в алгебре Ли этой группы. Вычислим коммутатор группы G, пользуясь ее структурными уравнениями (4.82). Пусть $X = \xi_1 + \xi_2 + x$ и $Y = \eta_1 + \eta_2 + y$ — инвариантные векторные поля на G, дуальные базису инвариантных форм $\underset{1}{\omega}{}^i$, $\underset{2}{\omega}{}^i$, $\widetilde{\theta}^i_j$. Тогда из (4.82) с учетом (4.71) и (4.84) имеем:

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}{}^i(X, Y) &= \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \widetilde{\theta}^i_j(\xi_1 + \xi_2 + x, \eta_1 + \eta_2 + y) + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k(\xi_1 + \xi_2 + x, \eta_1 + \eta_2 + y) =\\
&= \xi^j_1 y^i_j - \eta^j_1 x^i_j + a^i_{jk}\xi^j_1\eta^k_2 - a^i_{jk}\eta^j_1\xi^k_2 = \Big(y(\xi_1) - x(\eta_1) - \frac{1}{2}\left[\xi_1, \varphi^{-1}(\eta_2)\right] + \frac{1}{2}\left[\eta_1, \varphi^{-1}(\xi_2)\right]\Big)^i;\\
d\underset{2}{\omega}{}^i(X, Y) &= \xi^j_2 y^i_j - \eta^j_2 x^i_j - a^i_{jk}\xi^j_1\eta^k_2 + a^i_{jk}\eta^j_1\xi^k_2 = \Big(y(\xi_2) - x(\eta_2) + \frac{1}{2}\left[\varphi(\xi_1), \eta_2\right] - \frac{1}{2}\left[\varphi(\eta_1), \xi_2\right]\Big)^i;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\theta}^i_j(X, Y) &= x^k_j y^i_k - y^k_j x^i_k + R^i_{jk\ell}\left(\xi^k_1\eta^\ell_1 - \eta^k_1\xi^\ell_1\right) +\\
&+ R^i_{jk\ell}\left(\xi^k_1\eta^\ell_2 - \eta^k_1\xi^\ell_2\right) + R^i_{jk\ell}\left(\xi^k_2\eta^\ell_1 - \eta^k_2\xi^\ell_1\right) + R^i_{jk\ell}\left(\xi^k_2\eta^\ell_2 - \eta^k_2\xi^\ell_2\right) =\\
&= (y \circ x)^i_j - (x \circ y)^i_j + 2(d_{\xi_1,\eta_1})^i_j + 2(d_{\xi_1,\eta_2})^i_j + 2(d_{\xi_2,\eta_1})^i_j + 2(d_{\xi_2,\eta_2})^i_j =\\
&= (y \circ x - x \circ y + 2d_{\xi_1,\eta_1} + 2d_{\xi_1,\eta_2} + 2d_{\xi_2,\eta_1} + 2d_{\xi_2,\eta_2})^i_j.
\end{aligned}$$

Вычислим теперь коммутатор (X, Y), пользуясь определением (4.85):

$$\begin{aligned}
(X, Y) &= (\xi_1 + \xi_2 + x, \eta_1 + \eta_2 + y) = -2d_{\xi_1,\eta_1} - 2d_{\xi_2,\eta_2} + x \circ y - y \circ x + \frac{1}{2}\left[\xi_1, \varphi^{-1}(\eta_2)\right] - \frac{1}{2}\left[\varphi(\xi_1), \eta_2\right] -\\
&- 2d_{\xi_1,\eta_2} - \Big(\frac{1}{2}\left[\xi_1, \varphi^{-1}(\eta_2)\right] - \frac{1}{2}\left[\varphi(\eta_1), \xi_2\right] - 2d_{\eta_1,\xi_2}\Big) + x(\eta_1) + x(\eta_2) - y(\xi_1) - y(\xi_2) =\\
&= -\Big(-y(\xi_1) - x(\eta_1) - \frac{1}{2}\left[\xi_1, \varphi^{-1}(\eta_2)\right] + \frac{1}{2}\left[\eta_1, \varphi^{-1}(\xi_2)\right]\Big) =
\end{aligned}$$

---

[1]) В книге [Ло-1] выражение (4.84) дано без коэффициента $\frac{1}{24}$.

$$= -\left(-y(\xi_2) - x(\eta_2) + \frac{1}{2}\,[\varphi(\xi_1), \eta_2] - \frac{1}{2}\,[\varphi(\eta_1), \xi_2]\right) - \\ - \left(2d_{\xi_1,\eta_1} + 2d_{\xi_2,\eta_2} + 2d_{\xi_1,\eta_2} + 2d_{\xi_2,\eta_1} + y \circ x - x \circ y\right).$$

Сравнивая с предыдущей серией равенств, видим, что коммутаторы, вычисленные с помощью формул (4.82) и (4.85), удовлетворяют соотношению (4.86), т. е. определяют одну и ту же алгебру Ли. ■

	A_1	A_2	h
A_1	h		A_1
A_2		h	A_2
h	A_1	A_2	h

Рис. 44

Таблица умножения алгебры g приведена на рис. 44. Из нее видно, что в g есть две подалгебры: $A_1 \dotplus h$ и $A_2 \dotplus h$. Соответствующие подгруппы G_1 и G_2 выделяются в группе G уравнениями $\underset{2}{\omega}^i = 0$ и $\underset{1}{\omega}^i = 0$. Кроме того, на три-ткани M вполне интегрируема система $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$, определяющая слои третьего слоения. Поскольку формы $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ являются инвариантными формами группы G, то система $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$ определяет на G некоторую подгруппу G_3. Касательная алгебра к ней выделяется в g уравнением $\xi_1 + \xi_2 = 0$.

Подгруппы G_α, $\alpha = 1, 2, 3$, пересекаются по подгруппе $\overset{*}{H}$ (напомним, что она выделяется уравнениями $\underset{1}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^i = 0$), а так как подгруппы G_α задаются на группе G теми же уравнениями, что и слоения ткани Муфанг, на многообразии $X = G/\overset{*}{H}$, то получается следующая

Теорема 4.21. *Пусть A — некоторая вещественная r-мерная алгебра Мальцева, h — алгебра внутренних дифференцирований присоединенной к ней тройной системы Ли, A_1 и A_2 — два изоморфных экземпляра алгебры A, φ — изоморфизм из A_1 в A_2, причем соответствующие векторы имеют одинаковые координаты. Введем на пространстве $g = A_1 \dotplus A_2 \dotplus h$ структуру алгебры Ли по формулам* (4.85) *и обозначим через G соответствующую этой алгебре группу Ли,* $\dim G = 2r + \rho$, $\rho = \dim h$. *Тогда на однородном пространстве $X = G/H$, где H — подгруппа с касательной алгеброй h, возникает три-ткань Муфанг размерности $2r$. Ее слоями будут фактор-многообразия gG_α/gH, где G_α — $(r+\rho)$-мерные подгруппы группы G, соответствующие подалгебрам $g_1 = A_1 \dotplus h$, $g_2 = A_2 \dotplus h$ и диагональной подалгебре g_3, определяемой на g уравнениями $\xi_1 + \xi_2 = 0$, Алгебра A будет касательной W-алгеброй этой ткани.*

4. Симметрическая связность $\widetilde{\gamma}$, возникающая на базе X_3 третьего слоения три-ткани Бола (см. § 1), приобретает в случае ткани Муфанг дополнительные свойства.

Теорема 4.22. *Пусть три-ткань Муфанг M задана, как и в теореме* 4.21, *с помощью трех $(r+\rho)$-мерных подгрупп G_α на группе Ли G размерности $2r + \rho$. Тогда G/G_3 есть симметрическое пространство.*

□ Рассмотрим в алгебре g линейное преобразование σ_3 такое, что

$$\sigma_3(\xi_1 + \xi_2 + x) = -\varphi^{-1}(\xi_2) - \varphi(\xi_1) + x.$$

Используя формулы (4.85), проверяем, что σ_3 — автоморфизм в g (задача 4.10). Поскольку $\sigma_3^2 = \mathrm{id}$, то σ_3 — инволютивный автоморфизм. Далее, так как подалгебра g_3 выделяется уравнением $\xi_1 + \xi_2 = 0$, то она (и только она) инвариантна относительно σ_3: $\sigma_3(g_3) = g_3$. Следовательно, (g, g_3) — симметрическая пара, откуда в силу известных фактов из теории симметрических пространств следует, что G/G_3 — симметрическое пространство. Так как подгруппа G_3 выделяется на G уравнениями $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$, то точками этого симметрического пространства являются слои третьего слоения ткани M. Следовательно, это пространство с канонической связностью $\widetilde{\gamma}$, рассмотренное в § 1. ■

Инволютивный автоморфизм σ_3 алгебры g порождает автоморфизм τ_3 соответствующей группы G такой, что $\tau_3(G_3) = G_3$. Кроме того, из определения автоморфизма вытекает, что $\sigma_3(g_2) = g_1$ и $\sigma_3(g_1) = g_2$. Отсюда, в свою очередь, следует, что $\tau_3(G_2) = G_1$, $\tau_3(G_1) = G_2$. Далее, поскольку слоения λ_α, образующие три-ткань Муфанг M, равноправны, то получаем, что на группе G, порождающей эту ткань, имеется три инволютивных автоморфизма τ_α, $\alpha = 1, 2, 3$, таких, что $\tau_\alpha(G_\alpha) = G_\alpha$, $\tau_\alpha(G_\beta) = G_\gamma$, $\beta \neq \alpha \neq \gamma$. Автоморфизмы τ_α порождают симметрическую группу S_3 (внешних) автоморфизмов группы G.

Перечисленные свойства тканей Муфанг указывают путь к их классификации.

§ 4.5. Три-ткани Муфанг минимальной размерности

Три-ткань Муфанг минимальной размерности, не являющаяся групповой, будет восьмимерной, так как наименьшая размерность нелиевой алгебры Мальцева равна четырем (см. [К-2]). Обозначим эту алгебру A_4. В подходящем базисе структурный тензор алгебры A_4 имеет следующие ненулевые компоненты:

$$a^1_{14} = a^2_{24} = -a^3_{34} = 1, \quad a^3_{12} = 1. \tag{4.87}$$

Подставляя их в формулы (4.61), вычислим ненулевые компоненты тензора кривизны восьмимерной ткани Муфанг M:

$$b^3_{124} = b^3_{241} = b^3_{412} = -2, \quad b^3_{214} = b^3_{142} = b^3_{421} = 2. \tag{4.88}$$

Из (4.61) и (4.66) получим формулу:

$$A^i_{jk\ell} = b^i_{jk\ell} - \frac{4}{3}\, a^m_{k\ell} a^i_{mj}.$$

Подставляя сюда значения тензоров a и b, находим ненулевые компоненты тензора $A^i_{jk\ell}$ (в этом параграфе латинские индексы принимают значения 1,2,3,4):

$$\begin{aligned} &A^1_{414} = A^2_{424} = A^3_{434} = -\frac{4}{3}, \quad A^1_{441} = A^2_{442} = A^3_{443} = \frac{4}{3},\\ &A^3_{124} = A^3_{241} = A^3_{412} = -\frac{2}{3}, \quad A^3_{142} = A^3_{214} = A^3_{421} = \frac{2}{3}. \end{aligned} \tag{4.89}$$

Из соотношений (4.61), (4.66) и (4.83) получается следующее выражение для тензора $R^i_{jk\ell}$:

$$R^i_{jk\ell} = \frac{3}{8}\, A^i_{jk\ell} - \frac{1}{8}\, b^i_{jk\ell}. \tag{4.90}$$

Для рассматриваемой ткани

$$R^1_{414} = R^2_{424} = R^3_{434} = -\frac{1}{2}, \quad R^1_{441} = R^2_{442} = R^3_{443} = \frac{1}{2}, \tag{4.90$'$}$$

остальные компоненты тензора $R^i_{jk\ell}$ равны нулю.

Уравнения (4.81), выделяющие на многообразии реперов группу G, в данном случае имеют вид:

$$\overset{*}{\omega}{}^1_4 = -\frac{8}{3}\,\theta^{14}, \quad \overset{*}{\omega}{}^2_4 = -\frac{8}{3}\,\theta^{24}, \quad \overset{*}{\omega}{}^3_4 = -\frac{4}{3}\,\theta^{12} - \frac{8}{3}\,\theta^{34}, \quad \overset{*}{\omega}{}^3_1 = -\frac{4}{3}\,\theta^{24}, \quad \overset{*}{\omega}{}^3_2 = \frac{4}{3}\,\theta^{14},$$

а остальные формы $\overset{*}{\omega}{}^i_j$ равны нулю. Исключая параметры $\theta^{k\ell}$, получаем 13 уравнений на 16 форм $\overset{*}{\omega}{}^i_j$:

$$\overset{*}{\omega}{}^1_4 + 2\overset{*}{\omega}{}^3_2 = 0, \quad \overset{*}{\omega}{}^2_4 - 2\overset{*}{\omega}{}^3_1 = 0, \quad \overset{*}{\omega}{}^4_i = 0, \quad \overset{*}{\omega}{}^1_1 = \overset{*}{\omega}{}^1_2 = \overset{*}{\omega}{}^1_3 = 0, \quad \overset{*}{\omega}{}^2_1 = \overset{*}{\omega}{}^2_2 = \overset{*}{\omega}{}^2_3 = 0, \quad \overset{*}{\omega}{}^3_3 = 0. \tag{4.91}$$

Следовательно, группа G, порождающая ткань Муфанг (см. § 4), имеет размерность 11, и базисными формами на ней будут формы $\underset{1}{\omega}{}^i$, $\underset{2}{\omega}{}^i$, $\overset{*}{\omega}{}^1_4$, $\overset{*}{\omega}{}^2_4$, $\overset{*}{\omega}{}^3_4$. Стационарная подгруппа H, выделяемая уравнениями $\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^i = 0$, будет трехмерной, и на ней базисными являются формы $\overset{*}{\omega}{}^1_4$, $\overset{*}{\omega}{}^2_4$, $\overset{*}{\omega}{}^3_4$.

Чтобы получить уравнения рассматриваемой ткани Муфанг в некоторых локальных координатах, следует записать систему (4.64), (4.65) с учетом соотношений (4.87) и (4.91), и затем ее проинтегрировать. Однако прежде сделаем важное замечание, обобщающее результаты § 4, которое позволяет алгоритмизировать процедуру решения подобных задач.

Как следует из § 4, изучение тканей Муфанг существенно упрощает тот факт, что многообразие X, несущее три-ткань, является однородным пространством G/H. При этом группы G и H были определены в § 4 внутренним образом, т. е. в терминах соответствующей алгебры Мальцева. Однако вовсе не обязательно выбирать их именно таким образом. Подойдут, вообще говоря, любые две группы G и H такие, что $X = G/H$. Группа G должна удовлетворять лишь единственному требованию: на определяемом ею расслоении реперов компоненты a^i_{jk} тензора кручения должны быть постоянными. Уравнения, выделяющие группу G максимальной размерности с таким свойством, получаются внесением в уравнения (4.67) значений заданных постоянных a^i_{jk}. В результате получаются уравнения

$$a^m_{jk}\overset{*}{\omega}{}^i_m = a^i_{mk}\overset{*}{\omega}{}^m_j + a^i_{jm}\overset{*}{\omega}{}^m_k\,, \tag{4.92}$$

из которых вытекает, что формы $\overset{*}{\omega}{}^i_j$ являются дифференцированиями алгебры A (в алгебраическом смысле, как и выше в §§ 1,4). Следовательно, эти формы являются инвариантными формами представления группы $\operatorname{Aut} M$ всех автоморфизмов лупы Муфанг M, для которой алгебра A является касательной алгеброй. На прямой сумме $g = A_1 \dot{+} A_2 \dot{+} \operatorname{Der} A$ можно ввести структуру алгебры Ли подобно тому, как это сделано в § 4, где использовалась не вся алгебра $\operatorname{Der} A$, а подалгебра внутренних дифференцирований. Элементы вида $(0, 0, d)$ из g, $d \in \operatorname{Der} A$, образуют подалгебру в g. Три-ткань Муфанг определена на однородном пространстве $X = G/H$, где G и H — группы Ли, соответствующие алгебрам g и $\operatorname{Der} A$.

В рассматриваемом четырехмерном случае уравнения (4.92) принимают следующий вид:

$$\overset{*}{\omega}{}^4_i = 0,\quad \overset{*}{\omega}{}^1_3 = \overset{*}{\omega}{}^2_3 = 0,\quad -\overset{*}{\omega}{}^1_1 - \overset{*}{\omega}{}^2_2 + \overset{*}{\omega}{}^3_3 = 0,\quad 2\overset{*}{\omega}{}^3_1 - \overset{*}{\omega}{}^2_4 = 0,\quad 2\overset{*}{\omega}{}^3_2 + \overset{*}{\omega}{}^1_4 = 0. \tag{4.93}$$

В этой системе 9 уравнений на 16 форм $\overset{*}{\omega}{}^i_j$. Следовательно, группа H будет семимерной. Обозначим ее H_7.

Как уже сказано, вместо группы H_7 можно взять любую ее подгруппу. Например, годится трехмерная подгруппа, определенная уравнениями (4.91). Оптимальный вариант состоит в том, чтобы выбрать подгруппу минимальной размерности. Укажем, как это сделать на примере рассматриваемой три-ткани.

Для упрощения рассуждений перейдем от связности $\overset{*}{\Gamma}$ к связности Черна Γ, так как тензор $b^i_{jk\ell}$ имеет меньше ненулевых компонент, чем тензор $A^i_{jk\ell}$. Пользуясь формулой (4.63), связывающей формы $\overset{*}{\omega}{}^i_j$ и ω^i_j, и учитывая (4.87), перепишем систему (4.93), определяющую группу H_7, в виде:

$$\begin{gathered}\omega^4_2 = 0,\quad \omega^1_3 = \omega^2_3 = 0,\quad -\omega^1_1 - \omega^2_2 + \omega^3_3 = 2(\underset{1}{\omega}{}^4 - \underset{2}{\omega}{}^4),\\ 2\omega^3_1 - \omega^2_4 = -2(\underset{1}{\omega}{}^2 - \underset{2}{\omega}{}^2),\quad 2\omega^3_2 + \omega^1_4 = 2(\underset{1}{\omega}{}^1 - \underset{2}{\omega}{}^1).\end{gathered} \tag{4.94}$$

Формы ω^i_j удовлетворяют структурным уравнениям (1.32), из которых, в частности, с учетом (4.88) получаем:

$$\begin{gathered}d\omega^1_1 = \omega^2_1 \wedge \omega^1_2,\quad d\omega^2_1 = (\omega^1_1 - \omega^2_2) \wedge \omega^2_1,\qquad d\omega^1_2 = \omega^1_2 \wedge (\omega^1_1 - \omega^2_2),\quad d\omega^2_2 = \omega^1_2 \wedge \omega^2_1,\\ d\omega^1_4 = \omega^1_4 \wedge \omega^1_1 + \omega^2_4 \wedge \omega^1_2,\quad d\omega^2_4 = \omega^1_4 \wedge \omega^2_1 + \omega^2_4 \wedge \omega^2_2.\end{gathered}$$

Эти уравнения показывают, что система Пфаффа

$$\omega^1_1 = \omega^2_1 = \omega^1_2 = \omega^2_2 = \omega^1_4 = \omega^2_4 = 0 \tag{4.95}$$

вполне интегрируема. Следовательно, она выделяет в H_7 одномерную подгруппу H_1, и многообразие X ткани M будет однородным пространством G_9/H_1, $\dim G_9 = 9$. Инвариантной формой на H_1 будет форма $\pi^3_4 = \omega^3_4\big|_{\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^i = 0}$. Касательная алгебра g' группы G_9 имеет вид $g' = A_4 \dot{+} A_4 \dot{+} h'$, $\dim h' = 1$.

Выясним, как связана алгебра h' с исходной алгеброй A_4.

J-ядром алгебры Мальцева A называется множество таких ζ из A, для которых якобиан

$$J(\xi, \eta, \zeta) = [[\xi, \eta], \zeta] + [[\eta, \zeta], \xi] + [[\zeta, \xi], \eta]$$

обращается в нуль при любых ξ и η из A. В силу соотношений (4.61) отсюда получаем для определения координат вектора ζ уравнения

$$b^i_{jk\ell}\zeta^\ell = 0. \tag{4.96}$$

Найдем J-ядро рассматриваемой алгебры A_4. В силу (4.88) из (4.96) получаем $\zeta^1 = \zeta^2 = \zeta^4 = 0$, так что J-ядро будет одномерным, с базисным вектором e_3.

Пусть теперь η — произвольный вектор из A_4. Паре η, e_3 отвечает следующее однопараметрическое семейство внутренних автоморфизмов тройной системы T_A (см. (4.90′)):

$$\left(R^i_{jk\ell}\eta^k\zeta^\ell\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\eta^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в этой матрице единственный отличный от нуля элемент есть R^3_4, то она представляет искомую одномерную подалгебру h'.

Запишем уравнения Маурера–Картана группы G_9. Для этого внесем соотношения (4.94) и (4.95) в структурные уравнения три-ткани (1.26) и (2.32). В результате получим:

$$\begin{gathered} d\underset{1}{\omega}^4 = 0,\quad d\underset{2}{\omega}^4 = 0,\qquad d\underset{1}{\omega}^1 = 2\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^4,\quad d\underset{2}{\omega}^1 = -2\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^4,\qquad d\underset{1}{\omega}^2 = 2\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^4,\quad d\underset{2}{\omega}^2 = -2\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^4, \\ d\underset{1}{\omega}^3 = \underset{1}{\omega}^4 \wedge \omega^3_4 - 2\underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^4 + \Omega,\quad d\underset{2}{\omega}^3 = \underset{2}{\omega}^4 \wedge \omega^3_4 + 2\underset{2}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^4 - \Omega,\qquad d\omega^3_4 = 2\omega^3_4 \wedge (\underset{1}{\omega}^4 - \underset{2}{\omega}^4) - \Omega, \end{gathered} \tag{4.97}$$

где обозначено $\Omega = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^2 - \underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^1$.

Полученная система имеет треугольный вид. Это связано с разрешимостью алгебры A_4 (см. задачу 4). Последовательно интегрируя, найдем инвариантные формы $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$, ω^3_4 группы G_9:

$$\begin{gathered} \underset{1}{\omega}^4 = dp^4,\quad \underset{2}{\omega}^4 = dq^4,\qquad \underset{1}{\omega}^1 = e^{-2p^4}dp^1,\quad \underset{2}{\omega}^1 = e^{2q^4}dq^1,\qquad \underset{1}{\omega}^2 = e^{-2p^4}dp^2,\quad \underset{2}{\omega}^2 = e^{2q^4}dq^2, \\ \underset{1}{\omega}^3 = -e^{2q^4}(e^{-2p^4}\omega + dp^3),\quad \underset{2}{\omega}^3 = e^{-2p^4}(e^{2q^4}\omega + dq^3),\qquad \omega^3_4 = 2e^{2(q^4-p^4)}\omega, \end{gathered} \tag{4.98}$$

где

$$\omega = -\frac{1}{2}\left(q^2dp^1 - p^1dq^2 + p^2dq^1 - q^1dp^2\right) + d\tau,$$

а p^i, q^i, τ — параметры.

Согласно теореме 4.21 слоения ткани M представляют собой фактор-многообразия gG_α/gH_1. Уравнения подгрупп H_1 и G_α получаются интегрированием системы Пфаффа $\underset{1}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^i = 0$, $\underset{1}{\omega}^i = \omega^3_4 = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = \omega^3_4 = 0$, $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = \omega^3_4 = 0$, однако мы их искать не будем. Поступим проще: укажем на группе G_9 какое-либо восьмимерное подмногообразие X', трансверсальное смежным классам gH_1. Оно будет диффеоморфно факторпространству $X = G_9/H_1$, а слоения ткани определяются на нем системами $\underset{1}{\omega}^i\big|_{X'} = 0$, $\underset{2}{\omega}^i\big|_{X'} = 0$, $(\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i)\big|_{X'} = 0$.

Многообразие X' определим уравнением $d\tau = 0$. Первое слагаемой ткани найдем, интегрируя систему $\underset{1}{\omega}^i = 0$ при условии $d\tau = 0$. Обозначая первые интегралы системы x^i, в результате интегрирования получим:

$$p^4 = x^4,\quad p^1 = x^1,\quad p^2 = x^2,\quad \frac{1}{2}e^{2x^4}(x^2q^1 - x^1q^2) + p^3 = x^3. \tag{4.99}$$

Интегрирование системы $\underset{2}{\omega}^i\big|_{d\tau=0} = 0$, определяющей второе слоение, дает:

$$q^4 = y^4,\quad q^1 = y^1,\quad q^2 = y^2,\quad \frac{1}{2}e^{2y^4}(y^2p^1 - y^1p^2) + q^3 = y^3, \tag{4.100}$$

а интегрирование системы $(\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i)\big|_{d\tau=0} = 0$ приводит к уравнениям

$$e^{-z^4}p^1 + e^{z^4}q^1 = z^1,\quad e^{-z^4}p^2 + e^{z^4}q^2 = z^2,\quad -e^{z^4}p^3 + e^{-z^4}q^3 = z^3,\quad p^4 + q^4 = z^4. \tag{4.101}$$

Напомним, что уравнения три-ткани (или, что то же самое, ее координатной квазигруппы) связывают параметры слоев, проходящих через одну точку. Поэтому уравнения рассматриваемой ткани получаются исключением из уравнений (4.99)–(4.101) локальных координат p^i, q^i многообразия X'. После исключения придем к уравнениям

$$\begin{aligned} &z^1 = x^1 e^{-z^4} + y^1 e^{z^4}, \quad z^2 = x^2 e^{-z^4} + y^2 e^{z^4}, \\ &z^3 = -x^3 e^{z^4} + y^3 e^{-z^4} - e^{y^4 - x^4}(x^1 y^2 - x^2 y^1), \quad z^4 = x^4 + y^4. \end{aligned} \tag{4.102}$$

Найдем координатную лупу рассматриваемой ткани, единица в которой имеет нулевые координаты. В соответствии с общей теорией (см. § 2 гл. 2) перейдем к LP-изотопу координатной квазигруппы с помощью сдвигов, которые, как следует из соотношений (4.102), имеют вид:

$$\begin{aligned} &u^1 = x^1 e^{-x^4}, \quad v^1 = y^1 e^{y^4}, \qquad u^2 = x^2 e^{-x^4}, \quad v^2 = y^2 e^{y^4}, \\ &u^3 = -x^4 e^{x^4}, \quad v^3 = y^3 e^{-y^4}, \qquad u^4 = x^4, \quad v^4 = y^4. \end{aligned}$$

После замены переменных уравнения (4.86) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} &z^1 = u^1 e^{-v^4} + v^1 e^{u^4}, \quad z^2 = u^2 e^{-v^4} + v^2 e^{u^4}, \\ &z^3 = u^3 e^{v^4} + v^3 e^{-u^4} - (u^1 v^2 - u^2 v^1), \quad z^4 = u^4 + v^4. \end{aligned} \tag{4.103}$$

Мы получили уравнения четырехмерной лупы Муфанг минимальной размерности. Эти же уравнения определяют восьмимерную три-ткань Муфанг в стандартной параметризации (см. § 5 гл. 2).

ЗАДАЧИ

4.1. Если тензор кручения средней ткани Бола равен нулю, то она является тканью T.

Указание. Воспользуйтесь уравнениями (4.14).

4.2. Алгебраический смысл соотношений (4.17) состоит в том, что алгебра, порожденная дифференцированиями $d_{\xi,\eta}$, совпадает с их линейной оболочкой. Докажите.

4.3. Найдите конечные уравнения четырехмерной три-ткани Бола при следующем расположении квадрики и плоскости:

а) квадрика Q — овальная и не пересекает плоскость π; б) квадрика Q — овальная и касается плоскости π; в) квадрика Q — линейчатая и касается плоскости π.

Решение. Рассмотрим, например, случай а). Согласно определению грассмановой три-ткани, ее уравнения связывают координаты трех точек, в которых текущая прямая ℓ пересекает поверхности, определяющие эту ткань. Выберем аффинную систему координат так, чтобы плоскость π определялась уравнениями $x^3 = 0$, а квадрика Q — уравнением

$$x^3 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 1.$$

Пусть прямая ℓ пересекает квадрику Q и плоскость π соответственно в точках $x(x^i)$, $y(y^i)$, $z(z^1, z^2, 0)$. Тогда координаты z^i выражаются через x^i и y^i следующим образом:

$$z^i = \frac{x^i y^3 - x^3 y^i}{y^3 - x^3}, \quad i = 1, 2, \tag{4.104}$$

причем координаты точек x и y связаны между собой еще уравнением квадрики Q:

$$x^3 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + 1, \quad y^3 = (y^1)^2 + (y^2)^2 + 1.$$

Подставляя x^3 и y^3 в (4.104), получим:

$$z^i = \frac{x^i((y^1)^2 + (y^2)^2 + 1) - y^i((x^1)^2 + (x^2)^2 + 1)}{(y^1)^2 + (y^2)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2}.$$

В остальных случаях рассуждения аналогичны.

4.4. Докажите, что в подвижном репере, присоединенном к грассмановой три-ткани B_m (см. § 2 гл. 4), уравнения гиперплоскости X_3 и квадрики Q, порождающих эту ткань, записывают-

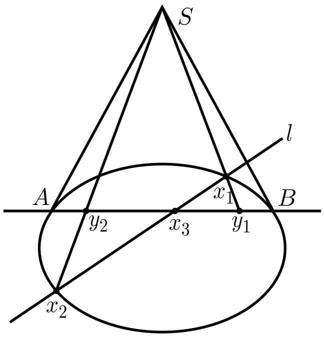

Рис. 45

ся в следующем виде:

$$a^i x^i - x^0 + x^{r+1} = 0, \quad b_{ij} x^i x^j - 2x^0 x^{r+1} = 0.$$

Указание. Плоскость X_3 определяется точкой $A_0 + A_{r+1}$ и точками, лежащими в пересечении касательных плоскостей к квадрике в точках A_0 и A_{r+1}; уравнение квадрики Q находится из условия стационарности подобно тому, как это сделано в § 4 гл. 2.

4.5. Квадрика $\widetilde{Q} = Q \cup X_3$, являющаяся абсолютом плоскости X_3 (см. п. 2 § 2), будет невырожденной тогда и только тогда, когда невырожден тензор $g_{ij} = b_{ij} + \dfrac{1}{2}\, a_i a_j$.

4.6. Пусть q — невырожденная кривая второго порядка на плоскости, AB — ее хорда, S — полюс прямой AB относительно кривой q, ℓ — произвольная прямая на плоскости. Обозначим x_1 и x_2 ее точки пересечения с кривой q, x_3 — с прямой AB, а y_1 и y_2 — проекции точек x_1 и x_2 на прямую AB из полюса S (рис. 45). Доказать, что двойные отношения $(A, B; y_2, x_3)$ и $(A, B; x_3, y_1)$ равны между собой.

Указание. Рассмотрите проективное преобразование плоскости, которое кривую q переводит в окружность, прямую AB — в ее диаметр, а точку x_3 — в ее центр.

4.7. Докажите, что группа G, определяемая структурными уравнениями (4.52), является прямым произведением двух простых трехмерных групп, каждая из которых изоморфна группе проективных преобразований прямой.

4.8. Дайте геометрическое доказательство того факта, что кривая z_3, изображенная на рис. 43, не зависит от выбора тройки точек A, S, T на кривой z_1.

4.9. Выведите тождество (4.79) из тождества (4.72).

4.10. Докажите, что введенное при доказательстве теоремы 4.22 линейное преобразование σ_3 является автоморфизмом группы g.

4.11. Найдите в алгебре g, рассмотренной в задаче 4.10, инвариантное подпространство преобразования σ_3, соответствующее собственному значению -1.

4.12. Установите соответствие между связностями пучка $\gamma(W)$ три-ткани Муфанг и инвариантным базисом на группе G, порождающей эту ткань (см. § 8 гл. 1 и § 4 этой главы).

4.13. Докажите, что алгебра Мальцева A_4, заданная структурным тензором (4.87), является разрешимой.

4.14. J-ядро алгебры Мальцева A является идеалом в A.

□ Соотношение (4.72), характеризующее алгебры Мальцева, может быть записанно в виде

$$J(x, y, xz) = J(x, y, z)x \quad \text{или} \quad J(x, xy, z) = J(x, y, z)x, \tag{4.105}$$

где $J(x, y, z)$ — якобиан алгебры A. Линеаризация $x \to x + w$ первого из этих равенств с учетом (4.105) приводит к тождеству

$$J(x, y, wz) + J(w, y, xz) = J(x, y, z)w + J(w, y, z)x. \tag{4.106}$$

Пусть теперь z и w принадлежат J-ядру, т. е. $J(x, y, z) = 0$ и $J(x, y, w) = 0$. Тогда из (4.106) следует $J(x, y, wz) = 0$, что и доказывает утверждение. ■

4.15. Если вектор (z^ℓ) принадлежит J-ядру алгебры Мальцева A, то внутреннее дифференцирование $A^i_{jk\ell}\xi^k z^\ell$ алгебры A является также внутренним дифференцированием присоединенной к A тройной системы Ли.

Указание. Воспользуйтесь соотношением (4.90).

4.16. Найдите общий вид матриц $A^i_{jk\ell}\xi^k z^\ell$ и $R^i_{jk\ell}\xi^k z^\ell$ четырехмерной алгебры Мальцева A_4.

4.17. Найдите допустимое преобразование переменных, при котором уравнения (4.103) перейдут в уравнения

$$z^1 = x^1 + y^1 + y^1 x^4, \qquad z^2 = x^2 + y^2 + y^2 x^4,$$
$$z^3 = x^3 + y^3 + x^3 y^4 - x^1 y^2 + x^2 y^1, \qquad z^4 = x^4 + y^4 + x^4 y^4.$$

4.18. Ядром лупы Муфанг M называется множество таких элементов z из M, для которых выполняется тождество ассоциативности $(xy)z = x(yz)$ при любых x и y из M. Докажите, что: а) ядро есть ассоциативная подлупа (т. е. группа) в M; б) касательная алгебра Ли к ядру локальной аналитической лупы Муфанг M совпадает с J-ядром касательной к этой лупе алгебры Мальцева.

4.19. Регулярное представление P алгебры Мальцева A определяется по формуле $P(x) = [x, a]$, где коммутатор имеет вид (4.71). Докажите, что образ J-ядра алгебры A_4 при регулярном представлении содержится в алгебре внутренних дифференцирований как самой алгебры A_4, так и ее тройной системы Ли.

ПРИМЕЧАНИЯ

4.1. Необходимость выполнения соотношений (4.1) для тканей B_m и аналогичных равенств для тканей B_ℓ и B_r (см. теорему 4.5) доказана в совместной работе авторов [АШ-1]. Достаточность этих соотношений доказана в [Ф-3] *Федоровой*, которая систематически исследовала многомерные три-ткани Бола. В частности, ей принадлежат утверждения, содержащиеся в теоремах 4.1–4.3, 4.5, однако тождества Бианки остались вне ее поля зрения. Позднее на них указали *Михеев* и *Сабинин* в связи с исследованием аналитических луп Бола [СМ-2].

Связь локально симметрических пространств с тройными системами Ли хорошо известна, см., например, [Ло-1], [Тр-1], [МхС-1]. Мы исследуем свойства симметрического пространства, связанного с тканью B_m, следуя схеме, предложенной в [Ш-20].

Алгебра Бола определена в [СМ-2].

4.2. Изоклинные три-ткани Бола впервые рассматривались в [А-3]. Подробная классификация четырехмерных тканей Бола проведена *Ивановым* [И-1]–[И-4].

4.3. Результаты третьего параграфа получены впервые в работах *Федоровой*.

4.4. Соотношения (4.61), которым удовлетворяет тензор кривизны три-ткани Муфанг, найдены в [АШ-1]. Достаточность этих соотношений, а также теоремы 4.18 и 4.19 доказаны в [АШ-2]. Другие свойства тканей Муфанг, отмеченные в § 4, получены в [Ш-20].

Связь между алгебрами Мальцева и тройными алгебрами Ли исследовались многими авторами, см. обзор [МхС-1]. Структура редуктивного пространства, возникающего на три-ткани Муфанг, впервые описана в [Ш-20].

4.5. Уравнения восьмимерной три-ткани Муфанг найдены в § 5 тем же способом, что и в работе [А-9]. Интерпретация этих результатов в терминах соответствующей алгебры Мальцева дана в [Ш-20].

Глава 5

ЗАМКНУТЫЕ G-СТРУКТУРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ТРИ-ТКАНЯМИ

§ 5.1. Замкнутые G-структуры на гладком многообразии

1. Согласно § 1 гл. 1., G-структура X_G на гладком многоообразии X размерности n представляет собой подрасслоение расслоения реперов $\mathcal{R}(X)$ первого порядка, имеющее ту же базу X и определяемое некоторой группой Ли G — подгруппой полной линейной группы $\mathbf{GL}(n)$. Это подрасслоение задается дифференциальными уравнениями (1.8). Входящие в них формы σ^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, \rho$, при фиксированной точке $p \in X$ представляют собой инвариантные формы группы G.

Структурные уравнения G-структуры X_G записываются в виде:

$$d\omega^u = c^u_{v\alpha}\omega^v \wedge \sigma^\alpha + a^u_{vw}\omega^v \wedge \omega^w, \tag{5.1}$$

где ω^u $(u, v, w, x, y, z = 1, \ldots, n)$ — базисные формы многообразия X, $c^u_{v\alpha}$ — постоянные. Коэффициенты $c^u_{v\alpha}$ определяют вложение группы G в группу $\mathbf{GL}(n)$, а величины a^u_{vw} образуют *первый структурный объект* G-структуры X_G. Он связан с дифференциальной окрестностью второго порядка точки p многообразия X.

Формы σ^α удовлетворяют уравнениям

$$d\sigma^\alpha = c^\alpha_{\beta\gamma}\sigma^\beta \wedge \sigma^\gamma + \omega^u \wedge \sigma^\alpha_u, \tag{5.2}$$

которые при $\omega^u = 0$ превращаются в структурные уравнения (1.6) группы Ли G.

Дифференцируя внешним образом уравнения (5.1), получим:

$$(\nabla a^u_{vw} - c^u_{v\alpha}\sigma^\alpha_w) \wedge \omega^v \wedge \omega^w + 2a^x_{vw}a^u_{xz}\omega^v \wedge \omega^w \wedge \omega^z = 0, \tag{5.3}$$

где

$$\nabla a^u_{vw} = da^u_{vw} - a^u_{zw}c^z_{v\alpha}\sigma^\alpha - a^u_{vz}c^z_{w\alpha}\sigma^\alpha + a^z_{vw}c^u_{z\alpha}\sigma^\alpha. \tag{5.4}$$

Из уравнений (5.3) следует, что формы, стоящие в скобках, являются главными, т. е. выражаются только через базисные формы ω^u:

$$\nabla a^u_{vw} - c^u_{[v|\alpha|}\sigma^\alpha_{w]} = a^u_{vwz}\omega^z. \tag{5.5}$$

Подставляя их в (5.3), получим соотношения

$$a^u_{[vwz]} + 2a^x_{[vw}a^u_{|x|z]} = 0, \tag{5.6}$$

которые называются *тождествами Бианки–Картана* рассматриваемой G-структуры. Величины a^u_{vwz}, входящие в уравнения (5.5), связаны с окрестностью третьего порядка точки многообразия X. Вместе с величинами a^u_{vw} они образуют *второй структурный объект* G-структуры X_G.

2. Рассмотрим более подробно соотношения (5.5). При фиксированной точке $p \in X$, т. е. при $\omega^u = 0$, они принимают вид

$$\nabla_\delta a^u_{vw} = c^u_{[v|\alpha|}\theta^\alpha_{w]},$$

где $\theta^\alpha_w = \sigma^\alpha_w|_{\omega^u=0}$, а символ δ, как и в § 1 гл. 1, обозначает дифференцирование по вторичным параметрам.

Как видно из последних уравнений, за счет выбора величин a^u_{vw} формы, стоящие в правой части, можно привести к нулю. Тогда формы $c^u_{[v|\alpha|}\theta^\alpha_{w]}$ становятся главными, то есть выражаются через формы ω^u, а оставшиеся после канонизации ненулевые компоненты объекта a^u_{vw} образуют тензор, который называется *первым структурным тензором* рассматриваемой G-структуры X_G.

Если, кроме того, линейная оболочка L' форм $c^u_{[v|\alpha|}\theta^\alpha_{w]}$ совпадает с линейной оболочкой L форм θ^α_w, то главными будут и формы σ^α_w. Выразив их через формы ω^u, приведем уравнения (5.2) к виду:

$$d\sigma^\alpha = c^\alpha_{\beta\gamma}\sigma^\beta \wedge \sigma^\gamma + b^\alpha_{uv}\omega^u \wedge \omega^v. \tag{5.7}$$

Как показывают уравнения (5.7), в этом случае на G-структуре X_G возникает связность, называемая *G-связностью.* G-структура X_G в этом случае называется *G-структурой типа* 1, а величины b^α_{uv} образуют ее тензор кривизны.

Если же $L' \subset L$, т. е. $\dim L' < \dim L$, то часть форм σ^α_v остается линейно независимой на X_G. Тогда последовательные продолжения уравнений (5.2) вводят ряд новых форм $\sigma^\alpha_{v_1v_2}$, $\sigma^\alpha_{v_1v_2v_3}, \ldots$, которые при $\omega^u = 0$ симметричны по нижним индексам и являются вместе с формами θ^α и θ^α_v инвариантными формами дифференциальных продолжений G', $G'', \ldots$ структурной группы G рассматриваемой G-структуры X_G. При последовательных продолжениях уравнений (5.5) возникают новые величины $a^u_{v_1v_2v_3v_4}$, $a^u_{v_1v_2v_3v_4v_5}, \ldots$, связанные с окрестностями четвертого, пятого и т. д. порядков точки p многообразия X и образующие вместе с величинами a^u_{vw}, a^u_{vwz} третий, четвертый и т. д. структурные объекты G-структуры X_G. При этом возможны две ситуации.

1) В результате канонизации структурного объекта a^u_{vw}, $a^u_{v_1v_2v_3}, \ldots, a^u_{v_1\ldots v_s}$ *все* формы $\sigma^\alpha_{v_1\ldots v_s}$ могут быть выражены через базисные формы ω^u. В этом случае структуру X_G называют *структурой конечного типа s.* Что касается форм $\sigma^\alpha_{v_1\ldots v_q}$ при $q < s$, то для структуры типа s часть этих форм или все они могут оказаться независимыми от базисных форм ω^u многообразия X. Тогда формы σ^α_v, $\sigma^\alpha_{v_1\ldots v_q}$, $q < s$, определяют группу $\widehat{G}$, являющуюся продолжением структурной группы G структуры X_G, и на многообразии X возникает *$\widehat{G}$-связность.*

2) На любом шаге после канонизации структурного объекта часть форм σ^α_v, $\sigma^\alpha_{v_1v_2}, \ldots, \sigma^\alpha_{v_1\ldots v_s}$ будет оставаться независимой от базисных форм многообразия X. В этом случае структура X_G называется *структурой бесконечного типа.*

Например, риманова структура задается на многообразии X невырожденной инвариантной квадратичной формой $g(\xi,\xi)$, где $\xi \in T_p(X)$, и является G-структурой типа 1, так как определяет инвариантную связность Леви–Чивита в расслоении реперов первого порядка над X.

Конформная структура задается на X невырожденной относительно инвариантной квадратичной формой $g(\xi,\xi)$ и является G-структурой типа 2, так как она определяет инвариантную связность только на расслоении реперов второго порядка. Точно так же *почти грассманова структура* является G-структурой типа 2.

Почти комплексная структура, определяемая на многообразии X четной размерности полем аффинора J, удовлетворяющего условию $J^2 = -\mathrm{id}$, будет структурой бесконечного типа, так как с помощью канонизации последовательности основных объектов на ней нельзя построить инвариантную связность.

G-структура, определяемая три-тканью $W = (X, \lambda_\alpha)$ на многообразии X размерности $n = 2r$, будет структурой типа 1, так как инвариантные связности на ней определяются в подрасслоении расслоения реперов первого порядка. Эту структуру мы назвали в гл. 1 G_W-структурой.

3. Пусть X_G — G-структура типа 1. Ее структурные уравнения имеют вид (5.1) и (5.7), где a^u_{vw} — тензор, полученный с помощью канонизации первого структурного объекта. Тензор a^u_{vw} называется тензором кручения рассматриваемой G-структуры, а тензор b^α_{uv}, входящий в уравнения (5.7), — ее тензором кривизны. При ковариантном дифференцировании этих тензоров в связности, построенной на структуре X_G, мы получим две последовательности тензоров:

$$a^u_{v_1\ldots v_s}, \quad b^\alpha_{v_1\ldots v_{s-1}}, \quad s \geqslant 3. \tag{5.8}$$

Они связаны с окрестностью порядка s структуры X_G и удовлетворяют целому ряду конечных соотношений типа (5.6).

Определение. G-структура X_G типа 1 называется *замкнутой G-структурой класса k*, если тензоры (5.8) порядка $s = k + 1$ являются комитантами тензоров порядков $s \leqslant k$. То есть, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} a^u_{v_1\ldots v_k v_{k+1}} &= \mathcal{F}^u_{v_1\ldots v_{k+1}}(a^u_{vw}, b^\alpha_{vw}, a^u_{v_1v_2v_3}, \ldots b^\alpha_{v_1\ldots v_{k-1}}, a^u_{v_1v_2\ldots v_k}),\\ b^\alpha_{v_1\ldots v_k} &= \mathcal{F}^\alpha_{v_1\ldots v_k}(a^u_{vw}, b^\alpha_{vw}, a^u_{v_1v_2v_3}, \ldots b^\alpha_{v_1\ldots v_k}, a^u_{v_1v_2\ldots v_k}), \end{aligned} \tag{5.9}$$

инвариантные относительно структурной группы G, в которых правые части получаются с помощью тензорных операций над входящими туда объектами.

Примерами замкнутых G-структур являются, прежде всего, *параллелизуемые* G-структуры (называемые также *локально плоскими*), которые характеризуются условиями

$$a^u_{vw} = 0, \quad b^\alpha_{vw} = 0.$$

Это структуры класса 1.

G-структура, определяемая r-мерной группой Ли, будет замкнутой структурой класса 2, так как для нее $\omega^u = 0$, $b^\alpha_{uv} = 0$, и она определяется структурными уравнениями

$$d\sigma^\alpha = c^\alpha_{\beta\gamma}\sigma^\beta \wedge \sigma^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, r.$$

Пример замкнутой G-структуры класса 3 дают локально симметрические пространства аффинной связности (в частности, локально симметрические римановы пространства), которые определяются структурными уравнениями

$$d\omega^u = \omega^v \wedge \sigma^u_v, \quad d\sigma^u_v = \sigma^w_v \wedge \sigma^u_w + R^u_{vwz}\omega^w \wedge \omega^z, \quad \nabla R^u_{vwz} = 0. \tag{5.10}$$

Новые примеры замкнутых G-структур мы получим при дальнейшем изучении многомерных три-тканей.

Замкнутая G-структура класса k определяется уравнениями (5.1), (5.7) и уравнениями Пфаффа

$$\nabla a^u_{v_1\ldots v_s} = a^u_{v_1\ldots v_s v_{s+1}}\omega^{v_{s+1}}, \quad s = 2, \ldots, k, \qquad \nabla b^\alpha_{v_1\ldots v_{s-1}} = b^\alpha_{v_1\ldots v_{s-1}v_s}\omega^{v_s}, \quad s = 3, \ldots, k, \tag{5.11}$$

где тензоры $a^u_{v_1\ldots v_k v_{k+1}}$, $b^\alpha_{v_1\ldots v_k}$ выражаются по формулам (5.9). При этом тензоры a^u_{vw}, b^α_{vw}, $a^u_{v_1v_2v_3} \ldots b^\alpha_{v_1\ldots v_{k-1}}$, $a^u_{v_1\ldots v_k}$ связаны рядом алгебраических соотношений

$$\Phi_\omega(a^u_{vw}, b^\alpha_{vw}, a^u_{v_1v_2v_3} \ldots b^\alpha_{v_1\ldots v_{k-1}}, a^u_{v_1\ldots v_k}) = 0, \tag{5.12}$$

где индекс ω пробегает некоторое конечное множество значений. В систему (5.12) входят соотношения (5.6) и аналогичные соотношения порядков $s \leqslant k$. Система (5.11), (5.12) должна быть замкнута относительно операции дифференцирования, т. е. при ее дифференцировании не должно получаться новых соотношений, не входящих в (5.12).

Например, для симметрического пространства аффинной связности система уравнений (5.12) записывается в виде

$$R^u_{v(wz)} = 0, \quad R^u_{[vwz]} = 0, \qquad -R^w_{v_1v_2v_3}R^u_{wv_4v_5} + R^u_{wv_2v_3}R^w_{v_1v_4v_5} + R^u_{v_1wv_3}R^w_{v_2v_4v_5} + R^u_{v_1v_2w}R^w_{v_3v_4v_5} = 0. \tag{5.13}$$

Эти уравнения получаются при внешнем дифференцировании уравнений (5.10), а при дифференцировании (5.13) получаются тождества в силу последнего из уравнений (5.10). Следовательно, система уравнений (5.10), (5.13) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования.

В общем случае система уравнений (5.1), (5.7), (5.11), (5.12) произвольной замкнутой G-струкуры X_G замкнута относительно операции внешнего дифференцирования и не содержит никаких внешних квадратичных уравнений, кроме уравнений структуры (5.1) и (5.7). Такие системы называются *формально вполне интегрируемыми.* Для них справедлива

Теорема 5.1. *Замкнутая G-структура класса k определяется формально вполне интегрируемой системой дифференциальных уравнений* (5.1), (5.7), (5.11), (5.12) *и существует с призволом N постоянных, где N — число независимых уравнений Пфаффа, содержащихся в системе* (5.11).

§ 5.2. Замкнутые G-структуры, определяемые многомерными три-тканями

Замкнутые G-структуры, определяемые три-тканями, представляют особый интерес, в частности, потому, что приводят к классам гладких луп, являющихся обобщением групп Ли. Замкнутость G_W-структуры отражается на строении координатных луп ткани W: их каноническое разложение вполне определяется джетом конечного порядка, то есть первыми k членами. Для коммутативных групп Ли $k = 1$. Для некоммутативных групп Ли $k = 2$, и все члены их канонического разложения выражаются через коммутатор по формуле *Кэмпбелла–Хаусдорфа*. Аналогичное строение имеет и каноническое разложение для луп Муфанг. В настоящей главе мы рассматриваем три-ткани, определяющие замкнутые G-структуры порядка $k = 3, 4$, а также некоторые более общие результаты.

1. В этом параграфе мы используем более лаконичную — векторную или безиндексную форму записи структурных уравнений три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$. Уравнения (1.26) и (1.32) запишем в виде:

$$d\underset{1}{\omega} = -\omega \wedge \underset{1}{\omega} + a\,\underset{1}{\omega} \wedge \underset{1}{\omega}, \qquad d\underset{2}{\omega} = -\omega \wedge \underset{2}{\omega} - a\,\underset{2}{\omega} \wedge \underset{2}{\omega}, \tag{5.14}$$

$$d\omega = -\omega \wedge \omega + b\,\underset{1}{\omega} \wedge \underset{2}{\omega}, \tag{5.15}$$

где $\underset{\alpha}{\omega} = (\underset{\alpha}{\omega}{}^i)$ — векторнозначные 1-формы со значениями в r-мерном пространстве, $\omega = (\omega^i_j)$ — матричная 1-форма, а символ $\wedge$ означает матричное внешнее умножение. Напомним, что тензор кручения $a = (a^i_{jk})$ кососимметричен,

$$a(\xi, \eta) = -a(\eta, \xi), \tag{5.16}$$

и связан с тензором кривизны $b = (b^i_{jk\ell})$ соотношением

$$\mathrm{alt}\ \ (b(\xi, \eta, \zeta) - 2a(a(\xi, \eta), \zeta)) = 0. \tag{5.17}$$

Дифференциальные продолжения уравнений (5.14) и (5.15), т. е. уравнения (1.33) и (1.38) запишем в виде:

$$\nabla a = \underset{1}{b}\,\underset{1}{\omega} + \underset{2}{b}\,\underset{2}{\omega}, \quad \nabla b = \underset{1}{c}\,\underset{1}{\omega} + \underset{2}{c}\,\underset{2}{\omega}, \tag{5.18}$$

где ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в канонической связности Γ,

$$\underset{1}{b} = (b^i_{[j|\ell|k]}), \quad \underset{2}{b} = (b^i_{[jk]\ell}), \quad \underset{1}{c} = (\underset{1}{c}{}^i_{jk\ell m}), \quad \underset{2}{c} = (\underset{2}{c}{}^i_{jk\ell m}).$$

Напомним, что тензоры $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$ связаны с тензорами a и b соотношениями (1.39), (1.40).

Для единообразия записи введем для основных тензоров ткани новые обозначения: $a = c_2$, $b = c_3$, $c_4 = (\underset{1}{c}, \underset{2}{c})$, и будем записывать уравнения (5.18) более кратко так:

$$\nabla c_2 = \mathrm{alt}\, c_3\, \theta, \quad \nabla c_3 = c_4\, \theta, \tag{5.19}$$

где буквой θ обозначена 1-форма $(\underset{1}{\omega}, \underset{2}{\omega})$ со значениями в $2r$-мерном пространстве $T_p(X)$. Дифференциальные продолжения уравнений (5.19) запишутся аналогично:

$$\nabla c_s = c_{s+1}\, \theta. \tag{5.20}$$

Тензоры c_s мы назвали в гл. 1 основными тензорами ткани W. Тензор c_s типа $(1, s)$ связан с окрестностью порядка s точки p многообразия X.

Основные тензоры связаны рядом алгебраических соотношений типа (5.12):

$$\begin{gathered} \varphi_2(c_2) = 0, \\ \varphi_3(c_2, c_3) = 0, \\ \cdots\cdots \\ \varphi_s(c_2, c_3, \ldots, c_s) = 0, \quad \ldots \end{gathered} \tag{5.21}$$

Первое из этих соотношений равносильно тождеству (5.16), второе — тождеству (5.17), а остальные получаются при дифференцировании уравнений (5.20), а также предыдущих конечных соотношений. Соотношения (5.21) инвариантны относительно структурной группы $G = \mathbf{GL}(r)$ G_W-структуры, определяемой три-тканью W на многообразии X.

2. Пусть три-ткань W параметризована в окрестности точки p стандартным способом (§ 5 гл. 2). Тогда можно считать, что значения $c_s(p)$ основных тензоров ткани W в точке p заданы в касательном пространстве T_e единицы e координатной лупы ℓ_p. Так как это тензоры типа $(1, s)$, то они определяют в T_e операции соответствующей арности. Тензоры $c_2 = a$ и $c_3 = b$ определяют бинарную и тернарную операции, которые вместе образуют W-алгебру (§ 5 гл. 2); тензор $c_4 = (\underset{1}{c}, \underset{2}{c})$ определяет две кватернарные операции и т.д.

Определение. Касательное пространство T_e к координатной лупе ℓ_p три-ткани W вместе с совокупностью операций до арности k включительно, определенных основными тензорами этой ткани, назовем *касательной W_k-алгеброй ткани W* в точке p.

С другой стороны, в касательном пространстве T_e к лупе ℓ_p определена еще одна последовательность алгебр, а именно Λ_k-алгебры этой лупы. Напомним (см. § 6 гл. 2), что операции в них задаются коэффициентами канонического разложения лупы ℓ_p, причем имеется одна бинарная операции, две тернарные и т. д. $k-1$ операций арности k.

Бинарные операции в W_2-алгебре и Λ_2-алгебре определяются соответственно тензором a и формой $\underset{2}{\Lambda}$ и отличаются только знаком (см. (2.48)). Операции в W_3-алгебре и Λ_3-алгебре определяются соответственно тензором b и формами $\underset{2,1}{\Lambda}$ и $\underset{1,2}{\Lambda}$. Они также выражаются друг через друга (задача 2.37). Оказывается, что аналогичный факт имеет место и при любых k, т. е. верна

Теорема 5.2. *При любых k касательная W_k-алгебра три-ткани W в точке p и Λ_k-алгебра ее координатной лупы ℓ_p эквивалентны, т. е. операции одной алгебры выражаются через операции другой и обратно.*

□ Доказательство в одну сторону очевидно. Действительно, как следует из результатов § 6 гл. 2, все тензоры три-ткани W, принадлежащие дифференциальной окрестности порядка k, выражаются через частные производные не выше k-го порядка функций $z^i = f^i(x^j, y^k)$, задающих эту ткань в локальных координатах. С другой стороны, можно считать, что уравнение $z = f(x, y)$ определяет операцию в координатной лупе ℓ_p ткани в окрестности точки $p(0, 0, \ldots, 0)$, а координаты x^i канонические. Разложив функцию $f(x, y)$ в ряд Тейлора в окрестности точки p, получим каноническое разложение лупы ℓ_p. Его членами являются формы $\underset{s}{\Lambda}$, коэффициентами которых будут частные производные f (в точке p). А так как через них выражаются основные тензоры ткани W, то в одну сторону теорема 5.2 доказана.

Доказательство обратного утверждения можно найти в [Ш-11]. Мы его не приводим, поскольку оно связано с длинными вычислениями. ■

Теорема 5.2 распространяет соответствие между три-тканями и их координатными лупами на связанные с ними инфинитезимальные структуры — касательные алгебры. В частности, ввиду теоремы 5.1 очевидна эквивалентность двух ранее доказанных утверждений: (1) трансверсальный вектор ξ является собственным вектором тензора $b^i_{jk\ell}$ и его ковариантных производных (§ 9 гл. 1) и (2) теорема 2.21: касательный вектор к однопараметрической подлупе есть собственный вектор для всех тензоров $\underset{k,\ell}{\Lambda}$.

3. Предположим теперь, что G_W-структура, определяемая три-тканью W на многообразии X, будет замкнутой структурой класса k. Тогда, в соответствии с общим определением ее структурный тензор c_{k+1} порядка $k+1$ будет комитантом тензоров $c_2, \ldots, c_k$:

$$c_{k+1} = \mathcal{F}(c_2, c_3, \ldots, c_k). \tag{5.22}$$

Рассматриваемая три-ткань определяется системой внешних уравнений (5.14), (5.15), системой уравнений Пфаффа (5.20), в которой $s = 2, \ldots, k$ и тензор c_{k+1} выражается по формуле (5.22), а также системой алгебраических соотношений

$$\Phi_\omega(c_2, c_3, \ldots, c_k) = 0, \tag{5.23}$$

полученной дифференцированием уравнений (5.14), (5.15) и (5.20). Кроме того, будем считать, что в систему (5.23) входят все уравнения, полученные при ковариантном дифференцировании уравнений этой системы с применением формул (5.20), так что эта система, а вместе с ней и вся система (5.14), (5.15), (5.20) и (5.23), замкнута относительно внешнего дифференцирования. Наконец, предположим, что система (5.23) является непротиворечивой. Верна

Теорема 5.3. *Пусть в точке p_0 C^{k+1}-многообразия X размерности $2r$*

а) заданы три r-мерные подпространства $\underset{\alpha}{T}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ касательного пространства $T_{p_0}(X)$, находящиеся в общем положении;

б) векторные реперы $\underset{\alpha}{e}_i$ в подпространствах $\underset{\alpha}{T}$, связаны условием $\underset{1}{e}_i + \underset{2}{e}_i + \underset{3}{e}_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, r)$ и допускают согласованные преобразования, образующие группу $G = \mathbf{GL}(r)$;

в) в указанных в пункте б) реперах значения тензоров $c_2^0, c_3^0, \ldots, c_k^0$ удовлетворяют конечным соотношениям (5.23).

Тогда в некоторой окрестности точки p_0 на многообразии X существует единственная три-ткань W, обладающая замкнутой G_W-структурой класса k, для которой:

1) слои ткани, проходящие через точку p_0, касаются подпространств $\underset{\alpha}{T}$;

2) структурные тензоры $c_2, \ldots, c_k$ в точке p_0 имеют заданные значения $c_2^0, \ldots, c_k^0$ и в указанной окрестности точки p_0 удовлетворяют соотношениям (5.23).

□ Рассмотрим систему (5.14), (5.15), (5.20) и (5.23) и будем считать в ней неизвестными формы $\underset{1}{\omega}$, $\underset{2}{\omega}$, ω и тензоры $c_2, \ldots, c_k$. Так как эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования, то она является вполне интегрируемой, и для определения ее решения нужно знать значения неизвестных в точке p_0 для некоторого начального семейства реперов, заданного в условии теоремы. Начальные значения $c_2^0, \ldots, c_k^0$ искомых тензоров в точке p_0 заданы в пункте *в*) условия теоремы. Положим $\underset{\alpha}{\omega}|_{p_0}(T_\alpha) = 0$, $\omega|_{p_0} = \pi$, где $\pi = (\pi_j^i)$ — структурные формы группы $\mathbf{GL}(r)$ допустимых преобразований этих реперов. Эти начальные условия позволяют найти единственное решение системы (5.14), (5.15), (5.20) и (5.23) в некоторой окрестности точки p_0, т. е. определить в этой окрестности три-ткань, обладающую указанными в условии теоремы свойствами. ■

Отметим, что значения тензоров $c_2^0, \ldots, c_k^0$, удовлетворяющие соотношениям (5.23), определяют касательную W_k-алгебру искомой три-ткани в точке p_0 (см. п.2). Ввиду этого теорему 5.3 можно сформулировать так: *касательная W_k-алгебра, заданная в точке p_0 многообразия X и удовлетворяющая условиям замкнутости* (5.23), *определяет в некоторой окрестности U точки p_0 три-ткань W с замкнутой G_W-структурой класса k.*

Рассмотрим далее каноническое разложение локальной лупы ℓ_p три-ткани W с замкнутой G_W-структурой класса k. Вследствие замкнутости тензор c_{k+1} выражается через тензоры $c_2 \ldots c_k$ по формуле (5.22). Дифференцируя это соотношение и исключая из правых частей полученных равенств величины c_{k+1} с помощью тех же равенств (5.22), найдем выражение тензора c_{k+2} через тензоры $c_2 \ldots c_k$. Продолжая этот процесс, мы выразим все тензоры c_s при $s \geqslant k+1$ через тензоры $c_2, \ldots, c_k$. По теореме 5.2 все коэффициенты $\underset{2}{\Lambda}$, $\underset{3}{\Lambda}, \ldots$, $\underset{k}{\Lambda}$ канонического разложения локальной лупы ℓ_p выразятся через тензоры $c_2, \ldots, c_k$, заданные в точке p. Но по той же теореме 5.2 тензоры $c_2(p), \ldots, c_k(p)$ выражаются через формы $\underset{2}{\Lambda}, \ldots, \underset{k}{\Lambda}$. Поэтому получаем, что все формы $\underset{s}{\Lambda}$ канонического разложения выразятся через первые ее $k-1$ форм $\underset{2}{\Lambda}, \ldots, \underset{k}{\Lambda}$.

Полученный при этом степенной ряд будет сходиться в некоторой окрестности единицы лупы ℓ_p, так как эта лупа является локальной лупой три-ткани, существование которой доказано в теореме 5.3.

Поскольку формы $\underset{2}{\Lambda}, \ldots, \underset{k}{\Lambda}$, удовлетворяющие уравнениям, эквивалентным (5.23), задают локальную $\underset{k}{\Lambda}$-алгебру в точке p, то верна

Теорема 5.4. *Локальная $\underset{k}{\Lambda}$-алгебра вполне определяет локальную лупу ℓ_p три-ткани W с замкнутой G_W-структурой класса k, а, следовательно, определяет и саму три-ткань W.*

Эта теорема является обобщением третьей теоремы Ли, по которой локальная группа Ли вполне определяется своей алгеброй Ли.

Из теоремы 5.4 вытекает, в частности, что если три-ткань W с замкнутой G_W-структурой класса k является k раз дифференцируемой, то она будет и бесконечно дифференцируемой.

4. Покажем, что замкнутой G_W-структурой обладают три-ткани, на которых выполнено одно из указанных в гл. 2 классических условий замыкания.

Теорема 5.5. *Три-ткани, на которых выполнено одно из условий замыкания $T, R, M, B_\ell, B_r, B_m, E, H$ определяют на многообразии X замкнутую G_W-структуру. При этом для ткани T эта структура будет класса* 1, *для тканей R и M — класса* 2, *а для тканей B_ℓ, B_r, B_m и E — класса* 3, *для тканей H — класса* 4. *Канонические разложения для локальных луп ℓ_p ткани T будут тривиальными, для тканей R и M — вполне определяются их тензором кручения, для тканей B_ℓ, B_r, B_m и E — тензорами кручения и кривизны, для тканей H — тензорами кручения, кривизны и ковариантными призводными тензора кривизны, заданными в точке p и удовлетворяющими конечным соотношениям типа* (5.23).

☐ Действительно, выполнение условия T равносильно параллелизуемости три-ткани W и обращению в нуль ее тензоров кручения и кривизны. Система (5.14), (5.15) принимает в этом случае вид
$$d\underset{\alpha}{\omega} = -\omega \wedge \underset{\alpha}{\omega}, \quad d\omega = -\omega \wedge \omega$$
и является, как нетрудно доказать, замкнутой относительно операции внешнего дифференцирования. Ввиду этого G_W-структура, определяемая на многообразии X рассматриваемой тканью, будет замкнутой G-структурой класса 1. Как уже было доказано ранее, локальные лупы ткани T будут абелевыми группами, и их каноническое разложение имеет вид
$$u \cdot v = u + v.$$

Три-ткань, на которой выполнено условие замыкания R, характеризуется равенством нулю ее тензора кривизны, в силу чего система структурных уравнений состоит из уравнений (5.14), а также уравнения
$$d\omega = -\omega \wedge \omega, \tag{5.24}$$
в которое переходит уравнение (5.15) при $b = 0$. Но тогда уравнения (5.18) записываются в виде:
$$\nabla a = 0. \tag{5.25}$$

Система (5.14), (5.24), и (5.25) замкнута относительно операции дифференцирования. Ввиду этого G_W-структура, определяемая на X групповой три-тканью, замкнута, а так как тензор a определяется окрестностью второго порядка, то класс G_W-структуры равен двум. Конечные соотношения (5.23) сводятся в этом случае к тождествам Якоби, которым удовлетворяет тензор кручения ткани R (§ 5 гл. 1). Как уже было доказано ранее, локальные W-алгебры ткани будут алгебрами Ли, ее локальные лупы — группами Ли, так что коэффициенты их канонического разложения
$$u \cdot v = u + v + \frac{1}{2}[u, v] + \frac{1}{12}[[uv]v] + \ldots, \tag{5.26}$$
определяются классической формулой Кемпбелла–Хаусдорфа (здесь $[u, v] = -2a(u, v)$ — коммутатор в соответствующей алгебре Ли).

Тензор кривизны три-ткани M выражается через тензор кручения по формуле (4.61), поэтому структурные уравнения этой ткани имеют вид (5.14), (5.15), где
$$b = (2a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]}) = \frac{2}{3}J(a). \tag{5.27}$$

Ввиду этого ковариантный дифференциал ∇a тензора кручения в связности Γ будет отличным от нуля, но, как было доказано в § 4 гл. 4, он будет равен нулю в средней связности $\overset{*}{\Gamma}$:
$$\overset{*}{\nabla} a = 0. \tag{5.28}$$

Ввиду этого система уравнений (5.14), (5.15), где тензор b выражается по формуле (5.27), будет замкнута по отношению к операции дифференцирования, и класс определяемой ею G-структуры равен двум. Тензор a ткани M удовлетворяет тождеству Сейгла (4.79), к которому в рассматриваемом случае сводятся конечные соотношения (5.23). Локальные W-алгебры ткани Муфанг являются алгебрами Мальцева, а их локальные лупы — лупами Муфанг.

Каноническое разложение для луп Муфанг имеет тот же вид (5.26), что и для групп Ли, так как алгебра Мальцева являются бинарно-лиевыми, т. е. любые два вектора в них порождают подалгебру Ли.

Для тканей Бола B_ℓ, B_r и B_m тензор c_4, связанный с окрестностью четвертого порядка, выражается через тензоры a и b. Для тканей B_m это выражение имеет вид (4.10). Так как тензор b связан с окрестностью третьего порядка рассматриваемой ткани, то G_W-структура, определяемая тканью Бола на многообразии X, будет замкнутой структурой класса 3.

Для ткани Бола B_m с помощью тензоров a и b по формуле (4.6) строится тензор R, который ковариантно постоянен относительно связности $\widetilde{\Gamma}$: $\widetilde{\nabla} R = 0$. Локальные W-алгебры ткани Бола B_m, определяемые тензорами a и b, эквивалентны алгебрам Бола, в которых операции задаются тензорами a и R и удовлетворяют соотношениям (4.23) и (4.25).

Как было доказано в § 2 гл. 2, локальные лупы три-ткани Бола являются лупами Бола. Коэффициенты их канонического разложения выражаются через тензоры a и b, либо через тензоры a и R, удовлетворяющие указанным выше конечным соотношениям. Заметим, однако, что формулы для вычисления коэффициентов канонического разложения лупы Бола, аналогичные формуле Кэмпбелла–Хаусдорфа, до сих пор не получены.

Замкнутость G–структуры, определяемой тканями H, была доказана для произвольной размерности в работе [Ш-11], для размерности 4 — в работе [Бц-3] (эти доказательства приводятся в §§ 3,4). Как оказалось, при $r > 1$ класс G_W–структуры для тканей H равен четырем. При $r = 1$ класс тканей H совпадает с классом параллелизуемых тканей, а класс замкнутой G_W–структуры в этом случае равен единице. ■

§ 5.3. Четырехмерные шестиугольные три-ткани

1. В этом параграфе будет показано, что четырехмерные шестиугольные три-ткани являются алгебраизуемыми, а определяемая ими G_W-структура является замкнутой.

Как было указано в § 2 гл. 3, тензор кручения четырехмерной ткани всегда имеет вид

$$a^i_{jk} = a_{[j}\delta^i_{k]},$$

в силу чего ее структурные уравнения (1.26) записываются в следующей форме:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a_j \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^i, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega^i_j - a_j \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^i \tag{5.29}$$

(здесь и далее в этом параграфе латинские индексы $i, j, k, \ell, \dots$ принимают значения 1 и 2). Дифференцируя уравнения (5.29) внешним образом, придем к уравнениям:

$$\Omega^i_j \wedge \underset{1}{\omega}^j - \nabla a_j \wedge \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \Omega^i_j \wedge \underset{2}{\omega}^j + \nabla a_j \wedge \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^i = 0, \tag{5.30}$$

где, как и ранее, ∇ — оператор ковариантного дифференцирования в канонической связности Γ, а $\Omega^i_j = d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k$ — формы кривизны этой связности. Отсюда следует, что формы Ω^i_j и ∇a_j имеют вид:

$$\Omega^i_j = b^i_{jk\ell} \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell, \tag{5.31}$$

$$\nabla a_j = p_{jk} \underset{1}{\omega}^k + q_{jk} \underset{2}{\omega}^k. \tag{5.32}$$

Здесь p_{jk} и q_{jk}, в отличие от аналогичных величин в § 2 гл. 3, вообще говоря, не симметричны по индексам j и k. Подставляя эти разложения в уравнения (5.30), получим:

$$b^i_{[jk]\ell} = q_{[j|\ell|}\delta^i_{k]}, \quad b^i_{[j|\ell|k]} = p_{[j|\ell|}\delta^i_{k]}. \tag{5.33}$$

Предположим далее, что рассматриваемая три-ткань W является шестиугольной. Как было доказано в § 3.1, такие ткани характеризуются условием

$$b^i_{(jk\ell)} = 0. \tag{5.34}$$

С помощью формул (5.33) и (5.34) выражение (3.22) для тензора кривизны приводится к виду

$$b^i_{jk\ell} = 2b^1_{[j|k|}\delta^i_{\ell]} + 2b^2_{[j|\ell|}\delta^i_{k]}, \tag{5.35}$$

где

$$b^1_{jk} = \frac{2}{3}\,p_{jk} - \frac{1}{3}\,q_{jk}, \quad b^2_{jk} = -\frac{1}{3}\,p_{jk} + \frac{2}{3}\,q_{jk}. \tag{5.36}$$

Отсюда выразим величины p_{jk} и q_{jk}:

$$p_{jk} = 2b^1_{jk} + b^2_{jk}, \quad q_{jk} = b^1_{jk} + 2b^2_{jk}.$$

Положим

$$b^3_{jk} = -b^1_{jk} - b^2_{jk}. \tag{5.37}$$

Тогда предыдущие равенства перепишутся так:

$$p_{jk} = b^1_{jk} - b^3_{jk}, \quad q_{jk} = b^2_{jk} - b^3_{jk},$$

а уравнения (5.31) и (5.32) запишутся следующим образом:

$$d\omega^i_j - \omega^k_j \wedge \omega^i_k = 2(b^1_{[j|k|}\delta^i_{\ell]} + b^2_{[j|\ell|}\delta^i_{k]})\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell, \tag{5.38}$$

$$\nabla a_j = (b^1_{jk} - b^3_{jk})\underset{1}{\omega}^k + (b^2_{jk} - b^3_{jk})\underset{2}{\omega}^k. \tag{5.39}$$

Уравнения (5.29), (5.38) и (5.39) представляют собой структурные уравнения четырехмерных шестиугольных три-тканей. Заметим еще, что соотношения (1.31), связывающие тензор кручения и кривизны три-ткани, для четырехмерной ткани выполняются автоматически, так как индексы j, k, ℓ, по которым производится альтернирование, принимают только значения 1 и 2.

2. Теорема 5.6. *G_W-структура, определяемая на четырехмерном многообразии X шестиугольной три-тканью, будет замкнутой G-структурой класса* 4.

□ Найдем дифференциальные продолжения уравнений (5.38) и (5.39). Их внешнее дифференцирование приводит к соотношениям:

$$\overset{\circ}{\nabla}(b^1_{[j|k|}\delta^i_{\ell]} + b^2_{[j|\ell|}\delta^i_{k]}) \wedge \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = 0, \tag{5.40}$$

$$\overset{\circ}{\nabla}(b^1_{jk} - b^3_{jk}) \wedge \underset{1}{\omega}^k + \overset{\circ}{\nabla}(b^2_{jk} - b^3_{jk}) \wedge \underset{2}{\omega}^k + (b^3_{j(k}a_{\ell)} - a_j b^1_{\ell k} - a_j b^2_{k\ell})\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = 0, \tag{5.41}$$

где $\overset{\circ}{\nabla}$ обозначает оператор ковариантного дифференцирования в связности $\overset{\circ}{\Gamma}$, определяемой формами

$$\overset{\circ}{\omega}{}^i_j = \omega^i_j - \frac{1}{2}\,\delta^i_j a_k(\underset{1}{\omega}^k - \underset{2}{\omega}^k)$$

(см. § 2 гл. 3).

Из уравнений (5.40) и (5.41) следует, что выражения $\overset{\circ}{\nabla} b^\alpha_{ij}$ будут линейными комбинациями базисных форм $\underset{1}{\omega}^k$, $\underset{2}{\omega}^k$. После длинных, но несложных вычислений получим для них следующие разложения:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\nabla} b^1_{jk} &= -\Big(c_{jk\ell} - 2b^1_{j(k}a_{\ell)} - \frac{2}{3}\,a_j b^1_{(k\ell)} - \frac{1}{3}\,a_j b^1_{\ell k}\Big)\underset{1}{\omega}^\ell - 2\Big(c_{j[k\ell]} + \frac{1}{3}\,a_j b^2_{[k\ell]}\Big)\underset{2}{\omega}^\ell,\\
\overset{\circ}{\nabla} b^2_{jk} &= -\Big(c_{j[\ell k]} + \frac{1}{3}\,a_j b^1_{[\ell k]}\Big)\underset{1}{\omega}^\ell - \Big(c_{j\ell k} + 2b^2_{j(k}a_{\ell)} + \frac{2}{3}\,a_j b^2_{(k\ell)} + \frac{1}{3}\,a_j b^2_{k\ell}\Big)\underset{2}{\omega}^\ell,
\end{aligned} \tag{5.42}$$

где $c_{jk\ell}$ — тензор, связанный с окрестностью четвертого порядка.

Дифференциальное продолжение уравнений (5.42) приведет к уравнениям

$$\overset{\circ}{\nabla} c_{ijk} = \underset{1}{c}_{ijk\ell}\underset{1}{\omega}^\ell + \underset{2}{c}_{ijk\ell}\underset{2}{\omega}^\ell, \tag{5.43}$$

где

$$\begin{aligned}
\underset{1}{c}_{ijk\ell} = 2a_k c_{i[\ell j]} &+ \frac{2}{3}\,a_i(c_{[\ell|j|k]} + c_{k[\ell j]}) + \frac{1}{2}\,c_{ijk}a_\ell - 3b^2_{(ij}b^1_{k)\ell} + \\
&+ \frac{2}{3}\,b^3_{[jk]}(b^1_{i\ell} - b^3_{i\ell}) + \frac{2}{3}\,(b^1_{ik} - b^2_{ik})(b^1_{[j\ell]} - b^3_{[j\ell]}) - 2b^2_{[ij]}b^1_{k\ell} + 2b^2_{ij}b^1_{[k\ell]} - \frac{8}{9}\,a_i b^1_{[jk]}a_\ell,
\end{aligned} \tag{5.44}$$

$$\underset{2}{c}_{ijk\ell} = -2a_j c_{i[k\ell]} - \frac{2}{3}\, a_i (c_{j[k\ell]} + c_{[\ell j]k}) - \frac{1}{2}\, c_{ijk} a_\ell + 3b^1_{(ij} b^2_{k)\ell} +$$
$$+ \frac{2}{3}\, b^3_{[jk]} (b^2_{i\ell} - b^3_{i\ell}) + \frac{2}{3}\, (b^1_{ij} - b^2_{ij})(b^1_{[k\ell]} - b^3_{[k\ell]}) + 2b^1_{[ik]} b^2_{j\ell} - 2b^1_{ik} b^2_{[j\ell]} + \frac{8}{9}\, a_i b^2_{[jk]} a_\ell. \quad (5.45)$$

Кроме того, при дифференциальном продолжении уравнений (5.42) получаются следующие соотношения на тензоры a_i, b^α_{ij} и c_{ijk}:

$$-a_i a_j b^3_{[k\ell]} + 2a_j c_{i[k\ell]} + a_i c_{j[k\ell]} + 2b^2_{ij} b^1_{[k\ell]} - 2b^1_{ij} b^2_{[k\ell]} = 0. \quad (5.46)$$

Равенства (5.44) и (5.45) показывают, что тензоры $\underset{1}{c}_{ijk\ell}$ и $\underset{2}{c}_{ijk\ell}$, связанные с окрестностью пятого порядка, выражаются через тензоры a_i, b^α_{ij} и c_{ijk}, связанные с окрестностями второго, третьего и четвертого порядков. Это означает, что G_W-структура, определяемая четырехмерной шестиугольной три-тканью на многообразии X, будет замкнутой структурой класса 4. ■

3. Четырехмерная шестиугольная три-ткань определяется замкнутой системой дифференциальных уравнений (5.29), (5.39) и уравнений Пфаффа (5.38), (5.42), (5.43), где тензоры $\underset{\alpha}{c}_{ijk\ell}$ выражаются по формулам (5.44), (5.45), конечных уравнений (5. 46), а также конечных уравнений, которые получаются при дифференцировании уравнений (5.43) и (5.46).

Исследование конечных соотношений, определяющих четырехмерную шестиугольную три-ткань, позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 5.7. *Всякая четырехмерная шестиугольная три-ткань является изоклинной.*

□ Полное доказательство этой теоремы слишком сложно и выходит за рамки настоящей книги. Приведем лишь его основные этапы.

Условием изоклинности четырехмерной три-ткани, как доказано в теореме 3.6, является симметрия ковариантных производных p_{jk} и q_{jk} ковектора a_j. А это условие в силу (5.36) и (5.37) равносильно симметрии тензоров b^α_{jk}. Докажем, что из симметрии одного из этих тензоров следует симметрия двух остальных. Действительно, предположим, например, что

$$b^1_{[jk]} = 0. \quad (5.47)$$

Тогда из (5.37) следует, что

$$b^2_{[jk]} = -b^3_{[jk]}. \quad (5.48)$$

Продифференцируем соотношение (5.47) с помощью оператора $\overset{\circ}{\nabla}$. Тогда из (5.42) получим равенства

$$c_{j[k\ell]} = \frac{1}{3}\, a_j b^3_{[k\ell]}.$$

Подставляя эти выражения в (5.46) и учитывая равенства (5.47), (4.48), придем к соотношениям

$$b^1_{ij} b^2_{[k\ell]} = 0.$$

Отсюда либо $b^2_{[k\ell]} = 0$ и наше утверждение доказано, либо $b^1_{ij} = 0$. В последнем случае из уравнений (5.42) следует, что

$$c_{jk\ell} = 0, \quad a_j b^2_{[k\ell]} = 0.$$

Отсюда либо $b^2_{[k\ell]} = 0$ и наше утверждение снова доказано, либо $a_j = 0$. Но в последнем случае $b^\alpha_{ij} = 0$ и рассматриваемая три-ткань будет параллелизуемой, так как ее тензоры кручения и кривизны равны нулю. Этот случай мы исключаем из рассмотрения и считаем, что ковектор a_j отличен от нуля.

Итак, тензоры $b^\alpha_{[jk]}$ при $\alpha = 1, 2, 3$ либо одновременно обращаются в нуль и тогда рассматриваемая три-ткань изоклинная, либо ни один из них не равен нулю. Рассмотрим последний случай. Так как индексы j и k принимают всего два значения, то у каждого из тензоров $b^\alpha_{[jk]}$ имеется только одна существенная компонента ($b^\alpha_{[12]}$), так что можно положить

$$b^1_{[jk]} = f b^3_{[jk]}, \quad b^2_{[jk]} = g b^3_{[jk]}. \quad (5.49)$$

При этом в силу (5.37) выполняется равенство $f+g+1=0$. Точно так же кососимметричный тензор $c_{j[k\ell]}$, входящий в уравнение (5.46), может быть представлен в виде

$$c_{j[k\ell]} = c_j b^3_{[k\ell]}.$$

Подставляя это выражение, а также выражения (5.49) в соотношение (5.46) и сокращая на отличную от нуля величину $b^3_{[jk]}$, получим:

$$-a_i a_j + 2a_j c_i + a_i c_j + 2 + b^2_{ij} - 2g b^1_{ij} = 0. \tag{5.50}$$

Альтернируя эти равенства по индексам i и j и используя (5.49), найдем, что $a_{[i}c_{j]} = 0$, откуда следуют равенства

$$c_j = c a_j, \quad c_{j[k\ell]} = c a_j b^3_{[k\ell]}. \tag{5.51}$$

Ввиду этого соотношения (5.50) принимают вид:

$$(3c-1)a_i a_j + 2f b^2_{ij} - 2g b^1_{ij} = 0.$$

Последнее равенство вместе с соотношением (5.37) дает

$$b^1_{ij} = \frac{1}{2}(1-3c)a_i a_j + f b^3_{ij}, \quad b^2_{ij} = \frac{1}{2}(1-3c)a_i a_j + g b^3_{ij}. \tag{5.52}$$

Далее, дифференцируя второе из соотношений (5.51) с помощью оператора $\overset{\circ}{\nabla}$ и используя равенства (5.52), мы придем к противоречию, которое и показывает, что три-тканей, на которых хотя бы один из тензоров $b^\alpha_{[ij]}$ отличен от нуля, не существует. ■

Так как всякая шестиугольная три-ткань является трансверсально-геодезической, а четырехмерная шестиугольная ткань, как только что доказано, является также и изоклинной, то в силу теоремы 3.14 эта ткань будет алгебраизуемой, т. е. эквивалентна четырехмерной грассмановой три-ткани, определяемой кубической поверхностью в проективном пространстве P^3. Ввиду этого справедлива

Теорема 5.8. *Всякая четырехмерная шестиугольная три-ткань эквивалентна грассмановой три-ткани, определяемой кубической поверхностью трехмерного проективного пространства.*

В заключение параграфа вернемся к определению замкнутой G-структуры, данному в § 1. Доказательство теоремы 5.6 позволяет расширить и уточнить это понятие. В самом деле, замкнутость G-структуры, определяемой четырехмерной шестиугольной три-тканью, вытекает из того факта, что все основные тензоры этой ткани выражаются через тензоры a_i, b^α_{ij}, c_{ijk}, ковариантные производные которых выражаются через эти же тензоры. Поэтому G-структуру X_G будем называть замкнутой также и в том случае, когда определенные на ней тензоры кручения, кривизны и их производные всех порядков выражаются через конечное число тензоров, определенных на X_G.

§ 5.4. Замкнутость структуры, определяемой многомерной шестиугольной три-тканью

Проведенное в предыдущем параграфе доказательство замкнутости G_W-структуры, определяемой четырехмерной шестиугольной три-тканью, нельзя распространить на шестиугольные ткани любой размерности, так как в рассуждениях существенно используется четырехмерность. С другой стороны, из доказательства видно, какие вычислительные трудности возникают при переходе к большим размерностям. Поэтому в настоящем параграфе предлагается другой метод доказательства замкнутости, который годится для любой размерности. Он менее конструктивен и не позволяет непосредственно выписать, как в § 3, все уравнения, характеризующие замкнутую структуру. Зато этот метод допускает широкие обобщения, см. [Ш-11].

Рассмотрим структурные уравнения произвольной три-ткани, найденные в § 4 гл. 1:

$$\nabla b^i_{jk\ell} = \underset{1}{c}{}^i_{jk\ell m} \underset{1}{\omega}{}^m + \underset{2}{c}{}^i_{jk\ell m} \underset{2}{\omega}{}^m, \tag{5.53}$$

$$\underset{1}{c}{}^i_{j[k|\ell|m]} = b^i_{jp\ell}a^p_{km}, \quad \underset{2}{c}{}^i_{jk[\ell m]} = -b^i_{jkp}a^p_{\ell m}, \tag{5.54}$$

$$\underset{1}{c}{}^i_{[jk]m\ell} - \underset{2}{c}{}^i_{[j|\ell|k]m} = B^i_{jk\ell m}, \tag{5.55}$$

где

$$B^i_{jk\ell m} = a^p_{jk}b^i_{p\ell m} - a^i_{pk}b^p_{j\ell m} - a^i_{jp}b^p_{k\ell m}. \tag{5.56}$$

Положим

$$\nabla \underset{1}{c}{}^i_{jk\ell m} = X^i_{jk\ell mn}\underset{1}{\omega}{}^n + \underset{2}{Z}{}^i_{jk\ell mn}\underset{2}{\omega}{}^n, \quad \nabla \underset{2}{c}{}^i_{jk\ell m} = \underset{1}{Z}{}^i_{jk\ell mn}\underset{1}{\omega}{}^n + Y^i_{jk\ell mn}\underset{2}{\omega}{}^n. \tag{5.57}$$

Дифференцируя уравнения (5.53) и используя (5.57), придем к соотношениям:

$$X^i_{jk\ell[mn]} = \underset{1}{c}{}^i_{jk\ell p}a^p_{mn}, \quad Y^i_{jk\ell[mn]} = -\underset{1}{c}{}^i_{jk\ell p}a^p_{mn}, \tag{5.58}$$

$$-\underset{2}{Z}{}^i_{jk\ell mn} + \underset{1}{Z}{}^i_{jk\ell nm} = B^i_{jk\ell mn}, \tag{5.59}$$

где

$$B^i_{jk\ell mn} = b^p_{jk\ell}b^i_{pmn} - b^i_{pk\ell}b^p_{jmn} - b^i_{jp\ell}b^p_{kmn} - b^i_{jkp}b^p_{\ell mn}. \tag{5.60}$$

Тензоры X, Y, $\underset{1}{Z}$, $\underset{2}{Z}$ связаны еще рядом соотношений, которые получаются в результате дифференцирования равенств (5.54) и (5.55) с помощью оператора ∇. Дифференцируя (5.54), находим:

$$\begin{aligned} X^i_{j[k|\ell|m]n} &= \underset{1}{c}{}^i_{jp\ell n}a^p_{km} + b^i_{jp\ell}b^p_{[k|n|m]}, \quad \underset{2}{Z}{}^i_{j[k|\ell|m]n} = \underset{2}{c}{}^i_{jp\ell n}a^p_{km} + b^i_{jp\ell}b^p_{[km]n}, \\ Y^i_{jk[\ell m]n} &= -\underset{2}{c}{}^i_{jkpn}a^p_{\ell m} - b^i_{jkp}b^p_{[\ell m]n}, \quad \underset{1}{Z}{}^i_{jk[\ell m]n} = -\underset{1}{c}{}^i_{jkpn}a^p_{\ell m} - b^i_{jkp}b^p_{[\ell|n|m]}, \end{aligned} \tag{5.61}$$

а дифференцирование уравнений (5.55) дает:

$$X^i_{[jk]m\ell n} - \underset{1}{Z}{}^i_{[j|\ell|k]mn} = \underset{1}{B}{}^i_{jk\ell mn}, \quad \underset{2}{Z}{}^i_{[jk]m\ell n} - Y^i_{[j|\ell|k]mn} = \underset{2}{B}{}^i_{jk\ell mn}, \tag{5.62}$$

где $\underset{1}{B}$ и $\underset{2}{B}$ суть ковариантные производные тензора $B^i_{jk\ell m}$:

$$\nabla B^i_{jk\ell m} = \underset{1}{B}{}^i_{jk\ell mn}\underset{1}{\omega}{}^n + \underset{2}{B}{}^i_{jk\ell mn}\underset{2}{\omega}{}^n.$$

Теорема 5.9. *G_W-структура, определяемая многомерной шестиугольной три-тканью ($r > 1$), есть замкнутая G-структура класса* 4.

□ Согласно гл. 3 шестиугольная три-ткань характеризуется соотношением $b^i_{(jk\ell)} = 0$ на тензор кривизны. Это равенство вместе с (1.31) дает соотношения:

$$b^i_{jk\ell} + b^i_{k\ell j} + b^i_{\ell jk} = 2(a^m_{jk}a^i_{m\ell} + a^m_{k\ell}a^i_{mj} + a^m_{\ell j}a^i_{mk}) \overset{\text{def}}{=} 2J^i_{jk\ell}. \tag{5.63}$$

Дважды дифференцируя (5.63) с помощью оператора ∇ и используя затем (5.53) и (5.57), получим следующую серию соотношений:

$$\begin{aligned} X^i_{jk\ell mn} + X^i_{k\ell jmn} + X^i_{\ell jkmn} &= 2\underset{1}{\nabla}_n\underset{1}{\nabla}_m J^i_{jk\ell}, \qquad \underset{2}{Z}{}^i_{jk\ell mn} + \underset{2}{Z}{}^i_{k\ell jmn} + \underset{2}{Z}{}^i_{\ell jkmn} = 2\underset{2}{\nabla}_n\underset{1}{\nabla}_m J^i_{jk\ell}, \\ Y^i_{jk\ell mn} + Y^i_{k\ell jmn} + Y^i_{\ell jkmn} &= 2\underset{2}{\nabla}_n\underset{2}{\nabla}_m J^i_{jk\ell}, \qquad \underset{1}{Z}{}^i_{jk\ell mn} + \underset{1}{Z}{}^i_{k\ell jmn} + \underset{1}{Z}{}^i_{\ell jkmn} = 2\underset{1}{\nabla}_n\underset{2}{\nabla}_m J^i_{jk\ell}. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Итак, тензоры X, Y, $\underset{1}{Z}$, $\underset{2}{Z}$ шестиугольной три-ткани W удовлетворяют уравнениям (5.58), (5.59), (5.61), (5.62) и (5.64). Докажем, что из них указанные тензоры можно выразить через тензоры a, b, $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$, связанные с окрестностью не выше четвертого порядка. При этом мы не будем находить формулы для X, Y, $\underset{1}{Z}$ и $\underset{2}{Z}$, так как они необычайно громоздки (каждая занимает несколько страниц). В связи с этим в последующих рассуждениях вместо системы (5.58)–(5.64) будет рассматриваться соответствующая ей присоединенная однородная система: правые части рассматриваемых уравнений, содержащие тензоры a, b, $\underset{1}{c}$, $\underset{2}{c}$, заменим нулями. Замкнутость G_W-структуры будет доказана, если будет показано, что полученная таким образом однородная система имеет только тривиальное решение.

Сделаем еще одно упрощение. Наряду с тензорами X, Y, $\underset{1}{Z}$ и $\underset{2}{Z}$ будем рассматривать соответствующие им полилинейные формы, например:

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = X^i_{jk\ell mn}\xi^j_\alpha\xi^k_\beta\xi^\ell_\gamma\xi^m_\delta\xi^n_\varepsilon\eta_i.$$

Рассмотрим прежде всего уравнение (5.59). Ему отвечает однородное уравнение $\underset{1}{Z}_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = \underset{2}{Z}_{\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta}$. Обозначим $\underset{2}{Z} = Z$. Тогда однородные уравнения, соответствующие первым уравнениям (5.58), (5.61), (5. 64), приводятся к виду:

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = X_{\alpha\delta\gamma\beta\varepsilon} = X_{\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta}, \quad X_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} + X_{\beta\gamma\alpha\delta\varepsilon} + X_{\gamma\alpha\beta\delta\varepsilon} = 0; \tag{5.65}$$

для второго и четвертого уравнений (5.61) и второго уравнения (5.64) имеем:

$$Z_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = Z_{\alpha\delta\gamma\beta\varepsilon} = Z_{\alpha\beta\varepsilon\delta\gamma}, \quad Z_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} + Z_{\beta\gamma\alpha\delta\varepsilon} + Z_{\gamma\alpha\beta\delta\varepsilon} = 0; \tag{5.66}$$

для второго уравнения (5.58) и третьих уравнений (5.61), (5.64) имеем:

$$Y_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = Y_{\alpha\beta\delta\gamma\varepsilon} = Y_{\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta}, \quad Y_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} + Y_{\beta\gamma\alpha\delta\varepsilon} + Y_{\gamma\alpha\beta\delta\varepsilon} = 0; \tag{5.67}$$

уравнения (5.62) дают систему:

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} - X_{\beta\alpha\gamma\delta\varepsilon} = Z_{\alpha\delta\beta\varepsilon\gamma} - Z_{\beta\delta\alpha\varepsilon\gamma}, \qquad Y_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} - Y_{\gamma\beta\alpha\delta\varepsilon} = Z_{\alpha\gamma\delta\beta\varepsilon} - Z_{\gamma\alpha\delta\beta\varepsilon}. \tag{5.68}$$

Рассмотрим сначала систему (5.65). Так как в силу первого уравнения (5.61) тензор X симметричен по индексам β, δ, ε, то положим $X_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = X_{\alpha\gamma}$. Тогда из второго уравнения (5.62) следует $X_{\alpha\beta} + X_{\beta\gamma} + X_{\gamma\alpha} = 0$, $X_{\beta\alpha} + X_{\alpha\gamma} + X_{\gamma\beta} = 0$, откуда $X_{(\alpha\beta)} + X_{(\beta\gamma)} + X_{(\gamma\alpha)} = 0$. Для различных наборов индексов имеем:

$$X_{(\alpha\beta)} + X_{(\beta\gamma)} + X_{(\gamma\alpha)} = 0, \quad X_{(\alpha\beta)} + X_{(\beta\delta)} + X_{(\delta\alpha)} = 0,$$
$$X_{(\beta\gamma)} + X_{(\gamma\delta)} + X_{(\delta\beta)} = 0, \quad X_{(\gamma\delta)} + X_{(\delta\alpha)} + X_{(\alpha\gamma)} = 0.$$

Если сложить первые три равенства и вычесть четвертое, получим

$$X_{(\alpha\beta)} + X_{(\gamma\beta)} + X_{(\delta\beta)} = 0. \tag{5.69}$$

Для другого набора индексов имеем:

$$X_{(\alpha\beta)} + X_{(\gamma\beta)} + X_{(\varepsilon\beta)} = 0.$$

Из двух последних равенств получаем $X_{(\delta\beta)} = X_{(\varepsilon\beta)}$, где ε, δ, β все различны. Поэтому $X_{(\alpha\beta)} = X_{(\gamma\beta)} = X_{(\delta\beta)}$ и из (5.69) следует $X_{(\alpha\beta)} = 0$. Отсюда, так как $X_{\alpha\beta} = X_{\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon}$, получаем

$$X_{\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon} = -X_{\beta\gamma\alpha\delta\varepsilon}. \tag{5.70}$$

С помощью аналогичных рассуждений из (5.67) находим, что тензор Y удовлетворяет условию

$$Y_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = -Y_{\beta\alpha\gamma\delta\varepsilon}. \tag{5.71}$$

Далее, из второго уравнения (5.65) и равенства (5.70) следует, что

$$X_{\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon} - X_{\gamma\alpha\beta\delta\varepsilon} = X_{\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon} + X_{\beta\gamma\alpha\delta\varepsilon} + X_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = X_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}.$$

Поэтому первое из равенств (5.68) примет следующий вид:

$$X_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = Z_{\alpha\delta\gamma\varepsilon\beta} - Z_{\gamma\delta\alpha\varepsilon\beta}. \tag{5.72}$$

Из второго равенства (5.67), равенства (5.71) и второго равенства (5.68) получаем аналогичное равенство:

$$Y_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = Z_{\alpha\beta\delta\gamma\varepsilon} - Z_{\beta\alpha\delta\gamma\varepsilon}. \tag{5.73}$$

Так как первое равенство (5.65) дает $X_{\alpha\gamma\beta\delta\varepsilon} = X_{\alpha\varepsilon\beta\delta\gamma}$, то из (5.72) следует равенство

$$Z_{\alpha\delta\beta\varepsilon\gamma} - Z_{\beta\delta\alpha\varepsilon\gamma} = Z_{\alpha\delta\beta\gamma\varepsilon} - Z_{\beta\delta\alpha\gamma\varepsilon}.$$

Запишем его в виде

$$Z_{\alpha\delta\beta[\gamma\varepsilon]} = Z_{\beta\delta\alpha[\gamma\varepsilon]}. \tag{5.74}$$

Подобным способом из второго равенства (5.65) и равенства (5.72) получим

$$Z_{\alpha\beta\delta[\gamma\varepsilon]} = Z_{\beta\alpha\delta[\gamma\varepsilon]}. \tag{5.75}$$

Из (5.74) и (5.75) следует, что величины $Z_{\alpha\beta\gamma[\delta\varepsilon]}$ симметричны по первым трем индексам.

Рассмотрим теперь второе из соотношений (5.66). Из него получим равенство

$$Z_{\alpha\beta\gamma[\delta\varepsilon]} + Z_{\gamma\alpha\beta[\delta\varepsilon]} + Z_{\beta\gamma\alpha[\delta\varepsilon]} = 0.$$

Так как величины $Z_{\alpha\beta\gamma[\delta\varepsilon]}$ симметричны по первым трем индексам, то из последнего равенства вытекает, что $Z_{\alpha\beta\gamma[\delta\varepsilon]} = 0$, т. е. величины $Z_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$ симметричны и по последним двум индексам.

Но вместе с первым соотношением (5.66) это дает, что Z симметричны по всем индексам. Поэтому из второй серии равенств (5.66) вытекает, что $Z_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = 0$, а из (5.72) и (5.73) — $X_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = 0$ и $Y_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = 0$. ■

§ 5.5. Три-ткани и тождества в лупах

1. Каждый из классов тканей T, R, M, B, H, обладающих замкнутой G_W-структурой, характеризуется некоторым тождеством в координатных лупах этих тканей. Возникает естественный вопрос: какие еще тождества приводят к замкнутости G_W-структуры?

Произвольное тождество в лупе $Q(\cdot)$ записывается в виде

$$S_1(u, v, \ldots, w) = S_2(u, v, \ldots, w). \tag{5.76}$$

Здесь S_1 и S_2 — слова, т. е. произведения букв $u, v, \ldots, w$, в которых каким-либо образом расставлены скобки. Предполагается, что слова S_1 и S_2 не содержат обратных операций.

В гладких лупах имеют смысл только *уравновешенные тождества*, т. е. такие, что каждое из переменных входит в слова S_1 и S_2 с одной и той же кратностью. В самом деле, пусть единица e лупы Q имеет нулевые координаты. Тогда (см. § 6 гл. 2) произведение $u \cdot v$ в Q раскладывается в ряд Тейлора в окрестности точки e следующим образом:

$$u \cdot v = u + v + \underset{2}{\Lambda}(u, v) + \frac{1}{2}\underset{2,1}{\Lambda}(u, u, v) + \frac{1}{2}\underset{1,2}{\Lambda}(u, v, v) + \ldots. \tag{5.77}$$

Будем считать, что члены второго порядка этого разложения приведены к каноническому виду, т. е. выполняется первое из условий (2.66). Оно эквивалентно кососимметричности формы $\underset{2}{\Lambda}$:

$$\underset{2}{\Lambda}(u, v) = -\underset{2}{\Lambda}(v, u). \tag{5.78}$$

Так как произвольное слово $S(u, v, \ldots, w)$ представляет собой композицию произведений $u \cdot v$, то его разложение в ряд начинается так:

$$S(u, v \ldots w) = \alpha u + \beta v + \ldots + \gamma w + \{2\},$$

где $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$ — кратности, с которыми переменные $u, v, \ldots, w$ входят в S, и символом 2 обозначены члены выше первого порядка.

Предположим, что в лупе Q выполняется тождество (5.76). Сравнивая члены первого порядка в разложениях для S_1 и S_2, находим, что соответствующие кратности равны. Отсюда вытекает также, что слова S_1 и S_2 имеют одинаковую длину: $|S_1| = |S_2|$.

Если порядок следования переменных в словах S_1 и S_2 одинаковый, то будем говорить, что тождество (5.76) не имеет инверсий. Уравновешенное тождество без инверсий назовем *правильным.*

Ткани R, M, B, H характеризуются правильными тождествами. Простейшее из неправильных — тождество коммутативности — определяет параллелизуемые, т. е. наиболее простые ткани. Что же касается других тождеств с инверсиями, то простое рассуждение показывает, что они, как правило, также приводят к параллелизуемости.

Рассмотрим, например, тождества вида

$$S_1(\ldots u \ldots v \ldots) = S_2(\ldots v \ldots u \ldots)$$

с одной инверсией $u \leftrightarrow v$. Предположим, что переменные u и v входят с кратностью 1. Тогда, полагая остальные переменные равными единице лупы, получим тождество коммутативности и, следовательно, придем к классу тканей T. Ясно, что тот же самый результат будет получаться и при менее сильных предположениях об исходном тождестве. Поэтому наиболее интересны ткани, определяемые правильными тождествами.

Из рассмотрения исключим такие тождества, которые сводятся к эквивалентным им тождествам меньшей длины. Это либо сократимые тождества вида $S_1 \cdot S = S_2 \cdot S$, либо такие, в которых сведе́ние достигается заменой переменных. Например, тождество $uv \cdot wt = u(v \cdot wt)$ эквивалентно тождеству $(uv)w = u(vw)$, но тождества $u^2 \cdot u^2 = u \cdot (u \cdot u^2)$ и $u^2 \cdot v = u(uv)$ не эквивалентны.

2. Правильные тождества классифицируются прежде всего по длине составляющих их слов и числу различных переменных (рангу).

Из слов длины 3 наименее изучено тождество эластичности $(uv)u = u(vu)$. Определяемый им класс тканей E будет рассматриваться в гл. 7.

Рассмотрим правильные тождества длины 4. Слов длины 4 с четырьмя различными переменными всего 5:

$$S_1 = (uv \cdot w)t,\ S_2 = u(v \cdot wt),\ S_3 = (u \cdot vw)t,\ S_4 = u(vw \cdot t),\ S_5 = (uv)(wt). \tag{5.79}$$

Найдем их тейлоровские разложения с точностью до членов третьего порядка включительно, используя ряд (5.75). Обозначим

$$\begin{aligned}
\Theta^j &= u^j + v^j + w^j + t^j,\\
\Theta^{jk} &= u^j v^k + u^j w^k + u^j t^k + v^j w^k + v^j t^k + w^j t^k,\\
\Theta^{jk\ell} &= u^j v^k w^\ell + u^j v^k t^\ell + u^j w^k t^\ell + v^j w^k t^\ell,\\
\Theta_1^{jk\ell} &= u^j u^k v^\ell + u^j u^k w^\ell + u^j u^k t^\ell + v^j v^k w^\ell + v^j v^k t^\ell + w^j w^k t^\ell,\\
\Theta_2^{jk\ell} &= u^j v^k v^\ell + u^j w^k w^\ell + u^j t^k t^\ell + v^j w^k w^\ell + v^j t^k t^\ell + w^j t^k t^\ell,\\
\Xi^i &= \Theta^i + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{jk}\Theta^{j\ell} + \frac{1}{2}\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{jk\ell}\Theta_1^{jk\ell} + \frac{1}{2}\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{jk\ell}\Theta_2^{jk\ell}.
\end{aligned} \tag{5.80}$$

Непосредственные вычисления приводят к следующему результату.

Лемма 5.10. *Для слов S_1–S_5 имеют место следующие разложения:*

$$\begin{aligned}
&S_1^i(u,v,w,t) = \Xi^i + (\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{jk\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{p\ell}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{jk})\Theta^{jk\ell} + \{4\},\\
&S_2^i(u,v,w,t) = \Xi^i + (\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{jk\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{jp}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{k\ell})\Theta^{jk\ell} + \{4\},\\
&S_3^i(u,v,w,t) = \Xi^i + (\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{jk\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{p\ell}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{jk})\Theta^{jk\ell} - \beta^i_{jk\ell}u^j v^k w^\ell + \{4\},\\
&S_4^i(u,v,w,t) = \Xi^i + (\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{jk\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{jp}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{k\ell})\Theta^{jk\ell} + \beta^i_{jk\ell}v^j w^k t^\ell + \{4\},\\
&S_5^i(u,v,w,t) = \Xi^i + (\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{jk\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{p\ell}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{jk})(u^j v^k w^\ell + u^j v^k t^\ell) + (\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{jk\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{jp}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{k\ell})(u^j w^k t^\ell + v^j w^k t^\ell) + \{4\},
\end{aligned} \tag{5.81}$$

где выражение для $\beta^i_{jk\ell}$ дается формулой (2.32).

Всякая пара слов из списка (5.79) дает правильное тождество длины 4 ранга 4. Имеется всего 5 тождеств, не сводящихся к тождествам меньшей длины путем сокращения или замены переменных:

$$\begin{aligned}
S_1 = S_2 :&\quad (uv \cdot w)t = u(v \cdot wt);\\
S_1 = S_4 :&\quad (uv \cdot w)t = u(vw \cdot t);\\
S_2 = S_3 :&\quad u(v \cdot wt) = (u \cdot vw)t;\\
S_3 = S_5 :&\quad (u \cdot vw)t = (uv)(wt);\\
S_4 = S_5 :&\quad u(vw \cdot t) = (uv)(wt).
\end{aligned} \tag{5.82}$$

Пользуясь разложениями (5.81) и формулой (2.49), находим:

$$\begin{aligned}
S_1^i - S_2^i &= -b^i_{kj\ell}(u^j v^k w^\ell + u^j v^k t^\ell + u^j w^k t^\ell + v^j w^k t^\ell) + \{4\},\\
S_1^i - S_4^i &= -b^i_{kj\ell}(u^j v^k w^\ell + u^j v^k t^\ell + u^j w^k t^\ell) + \{4\},\\
S_2^i - S_3^i &= b^i_{kj\ell}(u^j v^k t^\ell + u^j w^k t^\ell + v^j w^k t^\ell) + \{4\},\\
S_3^i - S_5^i &= b^i_{kj\ell}(u^j v^k w^\ell - u^j w^k t^\ell - v^j w^k t^\ell) + \{4\},\\
S_4^i - S_5^i &= b^i_{kj\ell}(u^j v^k w^\ell + u^j v^k t^\ell - v^j w^k t^\ell) + \{4\}.
\end{aligned} \tag{5.83}$$

Из этих равенств в силу теоремы 1.5 непосредственно вытекает, что три-ткань W, в координатных лупах которой выполняется одно из тождеств (5.82), есть ткань R.

Правильные тождества длины 4 ранга 3 называются *тождествами типа Бола.* Покажем, что *три-ткань W, в координатных лупах которой выполняется тождество типа Бола, будет тканью одного из следующих типов:* B_r, B_ℓ, M, или R.

Действительно, всякое тождество типа Бола получается из некоторого тождества длины 4 ранга 4 отождествлением каких-либо двух из четырех независимых переменных. Пусть, например, в координатных лупах ткани W выполняется первое из тождеств (5.82) при $u = v$. Тогда первая из формул (5.83) дает

$$b^i_{kj\ell}(u^j u^k w^\ell + u^j u^k t^\ell + 2u^j w^k t^\ell) = 0.$$

Так как переменные u, w, t независимы, то отсюда следует $b^i_{jk\ell} = 0$, и мы приходим к тканям R.

Полагая в том же первом тождестве (5.80) $w = u$ или $v = t$, получим известные тождества Муфанг (см. задачу 2.7). При $u = t$ первое тождество (5.82) перейдет в так называемое экстра-тождество [Фн-2]:

$$(uv \cdot w)u = u(v \cdot wu).$$

Для него из первого равенства (5.83) имеем:

$$b^i_{kj\ell}(u^j v^k w^\ell + v^j w^k u^\ell) + b^i_{kj\ell} u^j v^k u^\ell + b^i_{kj\ell} u^j w^k u^\ell = 0.$$

Отсюда следуют соотношения $b^i_{k(j\ell)} = 0, \quad b^i_{kj\ell} + b^i_{\ell kj} = 0$. Вычитая из первого второе, получим $b^i_{k\ell j} = b^i_{\ell kj}$. Таким образом, тензор b по первым двум индексам симметричен, а по последним двум — кососимметричен. Значит, он равен нулю, и рассматриваемый класс тканей совпадает с классом тканей R.

При $y = z$ первое тождество (5.82) перейдет в тождество

$$(uv \cdot v)t = u(v \cdot vt).$$

При $t = e$ отсюда получается тождество правой альтернативности, характеризующее правые ткани Бола.

При $w = t$ из первого тождества (5.82) получаем тождество

$$(uv \cdot w)w = u(v \cdot ww),$$

которое при $u = e$ также дает тождество правой альтернативности. Анализируя первое соотношение (5.83), легко убедится в том, что оба последних класса совпадают с классом тканей R.

Точно так же перечисляются тождества, получающиеся из остальных тождеств (5.82). Во всех случаях мы придем к одному из классов M, B_ℓ, B_r или R. В частности, тождество B_r получится из второго тождества (5.82) при $v = t$; тождество B_ℓ — из третьего тождества (5.82) при $u = v$; тождество Муфанг (см. табл. 2.1 на стр. 43) — из пятого тождества (5.82) при $u = t$.

Кроме тождеств (5.82) имеются еще другие тождества длины 4 и ранга 4, сводящиеся заменой переменных к тождеству длины 3, например:

$$(uv \cdot w)t = (uv)(wt).$$

Однако и такие тождества, как легко проверить, приведут к тем же классам тканей B_ℓ, B_r, M или R.

Правильные тождества длины 4 с двумя различными переменными получаются из тождеств длины 4 ранга 4 при отождествлении двух пар переменных. Для каждого из полученных таким образом классов тканей легко найти описанным выше способом соответствующее тензорное условие. Тождества длины 4 ранга 2 рассматриваются в задачах 5.2 и 5.3.

Рассмотрим теперь ткани, определяемые тождеством длины 4 ранга 1 (т. е. с одной переменной), и покажем, что они будут шестиугольными.

Действительно, отождествляя все переменные в любом из тождеств (5.82), придем к соотношениям $b^i_{(jk\ell)}u^j u^k u^\ell = 0$, откуда $b^i_{(jk\ell)} = 0$. Это тензорное равенство, как показано в гл. 3, характеризует ткани H.

Обратно, в координатных лупах ткани H выполняется тождество ассоциативности степеней $u^m \cdot u^n = u^{m+n}$ для всех $m, n \in Z$. Следовательно, в них выполняются и тождества длины 4 с одной переменной.

3. Все ткани, рассмотренные в этом параграфе, являются шестиугольными. Чтобы получить более широкие классы тканей с замкнутой G_W-структурой, включающие в себя ткани H, обратимся к тождествам порядка k с одной переменной, обобщающим тождество моноассоциативности.

Пусть как и выше, $Q(\cdot)$ — аналитическая лупа, $S(u)$ — слово длины n ранга 1 в Q. Предположим, что произведение $u \cdot v$ в Q записано в виде ряда (5.77), где члены порядка s имеют вид (2.54):

$$\underset{s}{\Lambda}(u,v) = \sum_{i=1}^{s-1} \frac{1}{(s-i)!i!} \underset{s-i,i}{\Lambda}(u,\ldots,u,\,v,\ldots,v).$$

Тогда ряд Тейлора слова $S(u)$ запишется следующим образом:

$$S(u) = nu + \sum_{s=3}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(s-i)!i!} \underset{s-i,i}{A} \underset{s-i,i}{\Lambda}(u) + \underset{s}{R}(u) \right), \tag{5.84}$$

где $\underset{s-i,i}{A}$ — некоторые целые числа (характеристики), зависящие от скобочной структуры слова $S(u)$, а $\underset{s}{R}(u)$ — комитанты от тех членов разложения (5.77), порядок которых меньше s.

Пусть $S_1(u)$ и $S_2(u)$ — два слова длины n ранга 1 в лупе Q. Будем говорить, что они *k-эквивалентны* $\left(S_1(u) \overset{k}{\sim} S_2(u)\right)$, если их тейлоровские разложения совпадают с точностью до членов порядка k включительно. Тождество

$$S: \quad S_1(u) = S_2(u)$$

назовем *тождеством порядка k*, если $S_1(u) \overset{k}{\sim} S_2(u)$.

Пусть разложения слов $S_1(u)$ и $S_2(u)$, составляющих тождество S, записаны в виде (5.84). Вычитая одно из этих равенств из другого, получим:

$$S_1(u) - S_2(u) = \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\nu_{k+1-i,i}}{(k+1-i)!i!} \underset{s+1-i,i}{\Lambda}(u) + \underset{k+1}{R}{}'(u) \right) + \{k+2\}, \tag{5.85}$$

где $\nu_{j,i} = \underset{j,i}{A}{}_1 - \underset{j,i}{A}{}_2$ (разность характеристик слов $S_1(u)$ и $S_2(u)$).

Будем говорить, что совокупность m тождеств порядка k

$$S_1^p(u) = S_2^p(u), \quad p = 1, 2, \ldots, m,$$

имеет ранг ρ, если ранг ρ имеет соответствующая матрица из чисел $\nu^p_{i,j} = \underset{i,j}{A}{}^p_1 - \underset{i,j}{A}{}^p_2$. Доказательство следующего утверждения мы не приводим, так как оно выходит за рамки этой книги.

Теорема 5.11 [Ш-22] *Если в координатных лупах аналитической три-ткани W выполняются $k-1$ независимых тождеств порядка k, то G_W-структура, определяемая этой тканью, будет замкнутой G-структурой класса не выше $2k$.*

Рассмотрим некоторые частные случаи. Единственное тождество длины 3 ранга 1 есть тождество моноассоциативности. Ему отвечают ткани H, обладающие, как уже отмечалось выше, замкнутой G_W-структурой класса 4. Этот результат следует из теоремы 5.11 при $k = 2$.

Тождества порядка 3 появляются при $n \geqslant 5$. Например, следующие 2 тождества порядка 3 независимы:
$$u^2(u^2u) = u((u^2u)u), \quad (u^2u)u^2 = (u(u^2u))u.$$
Согласно теореме 5.11 им отвечает замкнутая G_W-структура класса не выше шести.

Тождества порядка 4 появляются при $n \geqslant 10$. Для обнаружения этого факта пришлось прибегнуть к помощи ЭВМ. Например, следующие 3 тождества (одно длины 10, два — длины 11) имеют порядок 4 и независимы:
$$\begin{aligned} u(u^2(u^2(u(u(uu^2))))) &= u^2(u(u(u(u^2(u^2u))))),\\ u(u^2(u((uu^2)(u(uu^2))))) &= u^2(u(u(u^2((u(uu^2))u)))),\\ u(u((u^2(u(uu^2)))(uu^2))) &= u^2((u^2(u((u(uu^2))u)))u). \end{aligned} \tag{5.86}$$
Им соответствует замкнутая G_W-структура класса не выше восьми.

В заключение напомним, что согласно теореме 5.2 каноническое разложение координатных луп тканей, удовлетворяющих условию теоремы 5.11, вполне определяется частичной суммой, содержащей члены порядка не выше $2k$.

ЗАДАЧИ

5.1. Докажите следующее утверждение.

Пусть $S(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — слово в лупе Q, ряд Тейлора которой записан в виде (5.77). Тогда ряд Тейлора для S имеет вид:
$$S(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \sum_{i=1,\, i<j}^{n-1} \underset{2}{\Lambda}(u_i, u_j) + \{3\}, \tag{5.87}$$
где $\{3\}$ обозначает члены выше второго порядка.

Доказательство проводится индукцией по n. При $n = 2$ получаем формулу (5.77), что дает базу индукции. Далее, любое слово S всегда можно представить в виде произведения двух слов меньшей длины: $S = S_1 \cdot S_2$, для которых по предположению индукции формула (5.87) верна. Поэтому в силу (5.77) имеем
$$\begin{aligned} S = S_1 + S_2 + \underset{2}{\Lambda}(S_1, S_2) + \{3\} = (u_1 + \ldots + u_k) + (u_{k+1} + \ldots + u_n) +\\ + \sum_{i=1,\, i<j}^{k} \underset{2}{\Lambda}(u_i, u_j) + \sum_{i=k+1,\, i<j}^{n-1} \underset{2}{\Lambda}(u_i, u_j) + \underset{2}{\Lambda}(u_1 + \ldots + u_k, u_{k+1} + \ldots + u_n) + \{3\}. \end{aligned}$$
Группируя надлежащим образом слагаемые, придем к (5.87).

Следствие: Для слова $S(u)$ длины n с одной переменной u в силу кососимметричности формы $\underset{2}{\Lambda}(u, v)$ получаем
$$S(u) = nu + \{3\}. \tag{5.88}$$

5.2. Ниже выписаны (с точностью до моноассоциативности) все правильные тождества длины 4 ранга 2. Докажите, используя (5.83), что если в координатных лупах ткани W выполняется какое-либо из этих тождеств, то тензор кривизны ткани W удовлетворяет условию, указанному справа:

$H_1\colon\ u^3v = u(u \cdot uv),\ b^i_{(jk)\ell} = 0;$

$H_2\colon\ (uv \cdot u)u = u(v \cdot u^2),\ 2b^i_{k(j\ell)} + b^i_{(j|k|\ell)} = 0;$

$H_3\colon\ (u^2v)u = u(u \cdot vu),\ b^i_{(jk)\ell} + 2b^i_{\ell(jk)} = 0;$

$H_4\colon\ (vu^2)u = vu^3,\ b^i_{(j|k|\ell)} = 0;$

$H_5\colon\ u^3v = u \cdot (u^2v),\ b^i_{(jk)\ell} = 0;$

$H_6\colon\ (uv \cdot u)u = u(vu \cdot u),\ b^i_{j(k\ell)} = 0;$

$H_7\colon\ (u^2 \cdot v)u = u(uv \cdot u),\ b^i_{(jk)\ell} + b^i_{\ell(jk)} = 0;$

$H_8\colon\ (vu \cdot u)u = vu^3,\ b^i_{(j|k|\ell)} = 0;$

$H_9\colon\ u(vu^2) = (u \cdot vu)u,\ b^i_{k(j\ell)} + b^i_{(j|k|\ell)} = 0;$

$H_{10}\colon\ u(u \cdot vu) = (u \cdot uv)u,\ b^i_{j(k\ell)} = 0;$

$H_{11}\colon\ u^3v = u^2\cdot uv,\ b^i_{(jk)\ell}=0;$

$H_{12}\colon\ (u\cdot vu)u = uv\cdot u^2,\ b^i_{k(j\ell)} - b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{13}\colon\ (u\cdot uv)u = u^2\cdot vu,\ b^i_{(jk)\ell} - 2b^i_{\ell(jk)}=0;$

$H_{14}\colon\ (v\cdot u^2)u = vu\cdot u^2,\ b^i_{(jk\ell)}=0;$

$H_{15}\colon\ u(u^2v) = u^2\cdot uv,\ b^i_{(jk\ell)}=0;$

$H_{16}\colon\ u(vu\cdot u) = uv\cdot u^2,\ 2b^i_{k(j\ell)} - b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{17}\colon\ u(uv\cdot u) = u^2\cdot vu,\ b^i_{(jk)\ell} - b^i_{(j|\ell|k)}=0;$

$H_{18}\colon\ v\cdot u^3 = vu\cdot u^2,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{19}\colon\ (uv\cdot u)u = uv\cdot u^2,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{20}\colon\ (u^2v)u = u^2(vu),\ b^i_{j(k\ell)}=0;$

$H_{21}\colon\ (vu\cdot u)u = vu\cdot u^2,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{22}\colon\ u(u\cdot uv) = u^2\cdot uv,\ b^i_{(jk)\ell}=0;$

$H_{23}\colon\ u(vu^2) = uv\cdot u^2,\ b^i_{j(k\ell)}=0;$

$H_{24}\colon\ u(u\cdot vu) = u^2\cdot vu,\ b^i_{(jk)\ell}=0;$

$H_{25}\colon\ (u\cdot vu)u = u(vu\cdot u),\ b^i_{j(k\ell)}=0;$

$H_{26}\colon\ (u\cdot uv)u = u(uv\cdot u),\ b^i_{(jk)\ell} + b^i_{(j|\ell|k)}=0;$

$H_{27}\colon\ uv\cdot uv = u(v\cdot uv),\ b^i_{(j|k|\ell)}=0,\ b^i_{j(k\ell)}=0;$

$H_{28}\colon\ uv\cdot uv = u(vu\cdot u),\ b^i_{j(k\ell)}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{29}\colon\ uv\cdot uv = (uv\cdot u)v,\ b^i_{(jk)\ell}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{30}\colon\ uv\cdot uv = (u\cdot vu)v,\ b^i_{(k|j|\ell)}=0,\ b^i_{j(k\ell)}=0;$

$H_{31}\colon\ u(v\cdot uv) = (uv\cdot u)v,\ b^i_{(jk)\ell} + b^i_{\ell(jk)}=0,\ b^i_{(k|j|\ell)} + b^i_{j(k\ell)}=0;$

$H_{32}\colon\ u(v\cdot uv) = (u\cdot vu)v,\ b^i_{(jk)\ell}=0;$

$H_{33}\colon\ u(vu\cdot v) = (uv\cdot u)v,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{34}\colon\ u(vu\cdot v) = (u\cdot vu)v,\ b^i_{k(j\ell)}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{35}\colon\ uv\cdot vu = u(v^2u),\ b^i_{j(k\ell)}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{36}\colon\ uv\cdot vu = u(v\cdot vu),\ b^i_{j(k\ell)}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{37}\colon\ uv\cdot vu = (uv\cdot v)u,\ b^i_{(jk)\ell}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{38}\colon\ uv\cdot vu = (uv^2)u,\ b^i_{j(k\ell)}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)} - b^i_{(j\ell)k}=0;$

$H_{39}\colon\ u(v^2\cdot u) = (uv\cdot v)u,\ b^i_{j(k\ell)}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{40}\colon\ u(v^2u) = (u\cdot v^2)u,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0,\ b^i_{j(k\ell)}=0;$

$H_{41}\colon\ u(v\cdot vu) = (uv\cdot v)u,\ b^i_{j(k\ell)}=0;$

$H_{42}\colon\ u(v\cdot vu) = (u\cdot v^2)u,\ b^i_{j(k\ell)}=0,\ b^i_{(jk)\ell}=0;$

$H_{43}\colon\ u^2\cdot v^2 = (u^2\cdot v)v,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{44}\colon\ u^2\cdot v^2 = (u\cdot uv)v,\ b^i_{j(k\ell)}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{45}\colon\ u^2\cdot v^2 = u(u\cdot v^2),\ b^i_{(jk)\ell}=0;$

$H_{46}\colon\ u^2\cdot v^2 = u(uv\cdot v),\ 2b^i_{(jk)\ell}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{47}\colon\ (u^2v)v = u(uv^2),\ b^i_{(jk)\ell}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{48}\colon\ (u^2v)v = u(uv\cdot v),\ b^i_{(j|k|\ell)}=0,\ b^i_{(jk)\ell}=0;$

$H_{49}\colon\ (u\cdot uv)v = u(u\cdot v^2),\ b^i_{(jk)\ell}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0;$

$H_{50}\colon\ (u\cdot uv)v = u(uv\cdot v),\ b^i_{(jk)\ell}=0,\ b^i_{(j|k|\ell)}=0.$

5.3. Докажите, что классы H_i связаны с известными классами B, M, и E следующим образом:

1) $H_1 = H_5 = H_9 = H_{11} = H_{22} = H_{24} = H_{32} = H_{45} = B_\ell$;
2) $H_4 = H_7 = H_8 = H_{18} = H_{19} = H_{21} = H_{33} = H_{43} = B_r$;
3) $H_{25} = H_{26} = E$; 4) $H_{14} = B_r$; 5) $H_{15} = B_\ell$;
6) Для $i = 2, 3, 12, 13, 16, 17$ $\quad H_i \cup E = M$; 7) Для $i = 6, 10, 20, 23$ $\quad E \subset H_i \subset B_m$;
8) Для $i = 27-31, 34-40, 42, 44, 46-50$ $\quad H_i = M$;
9) $M \subset H_{41} \subset B_m$, $\quad H_{41}\cap B_\ell = M$, $\quad H_{41}\cap B_r = M$.

□ Выпишем из таблицы 2.1 и задачи 2.7 тождества, характеризующие ткани B_ℓ, B_r и M:

$$\begin{gathered} B_\ell:\ (u\cdot vu)w = u(v\cdot uw),\quad B_r:\ u(vw\cdot v) = (uv\cdot w)v,\\ M:\ u(vw\cdot u) = (uv)(uw),\quad M_1:\ u(v\cdot uw) = (uv\cdot u)w;\quad M_2:\ (uv\cdot w)v = u(v\cdot wv), \end{gathered}\tag{5.89}$$

1), 2) Рассмотрим, например, ткани H_9, тензор кривизны которых удовлетворяет соотношениям $b^i_{k(j\ell)} + b^i_{(j|k|\ell)}$. Так как все ткани H_i являются шестиугольными, то для тензора b выполняются еще и соотношения $b^i_{(jk\ell)} = 0$. Вместе с предыдущими они дают $b^i_{(jk)\ell} = 0$, в силу чего имеющиеся равенства удовлетворяются тождественно. Но соотношения $b^i_{(jk)\ell} = 0$ характеризуют ткани B_ℓ (гл. 4).

Обратно, в координатных лупах всякой ткани B_ℓ выполняется тождество B_ℓ (см. (5.87)), из которого тождество H_9 получается при $w = u$. Для остальных классов, перечисленных в 1) и 2), рассуждения аналогичны.

3) Если в тождестве H_{25} (H_{26}) обозначить $vu = w$ ($uv = w$), то придем к тождеству эластичности.

4), 5) Тождество H_{14} удовлетворяется в силу тождества правой альтернативности $vu \cdot u = v \times \times u^2$, которое справедливо в координатных лупах ткани B_r. Отсюда вытекает включение $B_r \subset \subset H_{14}$. Обратно, рассмотрим ткань, определяемую тождеством H_{14}, и докажем, что она является тканью B_r.

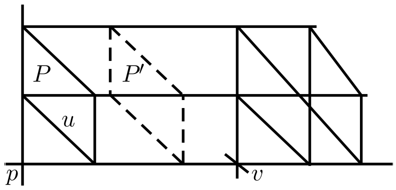

Рис. 46

Тождеству H_{14} соответствует фигура, изображенная на рис. 46 сплошными линиями. В этой фигуре две части, независимые одна от другой. Если менять v, то правая часть будет передвигаться вдоль горизонтальных слоев. Поскольку на рассматриваемой ткани замыкаются все фигуры вида, указанного на рис. 46, то замыкается и такая, у которой параллелограмм P заменен на другой параллелограмм P', изображенный пунктиром. В результате образовалась замкнутая правая фигура Бола PP'. Отсюда вытекает, что на ткани H_{14} замыкаются все фигуры B_r, то есть она является тканью B_r. Итак, $H_{14} \subset B_r$, что вместе с доказанным ранее условием $B_r \subset H_{14}$ дает $H_{14} = B_r$.

6) Тождество H_2, например, получается из тождества Муфанг M_1 при $w = u$. С другой стороны, тождество H_2 при условии эластичности преобразуется к виду $u(vu \cdot u) = u(v \cdot u^2)$, что влечет $vu \cdot u = v \cdot u^2$. Следовательно, $H_2 \Rightarrow B_r$, т. е. в координатных лупах тканей H_2 выполняется тождество B_r. Вместе с эластичностью это дает муфанговость (см. задачу 2.9).

7) Рассмотрим, например, класс H_6. Соответствующее условие на тензор кривизны $b^i_{j(k\ell)} = 0$ характеризует ткани B_m; значит, $H_6 \subset B_m$. С другой стороны, в силу тождества эластичности имеем $(uv \cdot u)u = (u \cdot vu)u = u(vu \cdot u)$, т. е. тождество H_6 выполняется. Следовательно, $E \subset H_6$. Для остальных классов, перечисленных в 7), рассуждения аналогичны.

8) Рассмотрим, например класс H_{27}. Из соотношений на тензор кривизны вытекает равенство $b = alt\ b$, которое характеризует ткани M (§ 4 гл. 4). Следовательно, $H_{27} \subset M$. С другой стороны, согласно теореме Муфанг [Бе-1], любые два элемента в лупе M порождают ассоциативную подлупу. В частности, в лупе M выполняется тождество H_{27}. В результате имеем $H_{27} = M$. В остальных случаях рассуждения аналогичны.

9) Условие $b^i_{j(k\ell)} = 0$ характеризует ткани B_m. С другой стороны, включение $M \subset H_{41}$ выполняется в силу теоремы Муфанг. ■

5.4. Докажите, что тензор кривизны три-ткани

$$z^1 = x^1 + y^1 + 2x^2x^3(qy^3 - py^2) + 6y^2y^3(qx^3 - px^2) + 4q(x^3)^2y^2 - 4p(x^2)^2y^3,$$
$$z^2 = x^2 + y^2, \quad z^3 = x^3 + y^3,$$

где p, q — постоянные, удовлетворяет условиям

$$b^i_{(jk\ell)} = 0, \quad b^i_{j[k\ell]} = 0.$$

Эта ткань не является изоклинной и может быть гладко деформирована в параллельную три-ткань при $p \to 0$, $q \to 0$.

ПРИМЕЧАНИЯ

5.1. Понятие замкнутой G-структуры введено *Акивисом* в [А-7], где, в частности, констатируется, что такую G-структуру имеют симметрические пространства, а также три-ткани: групповые, Муфанг и Бола.

5.2. Введенные в [А-7] формально вполне интегрируемые системы представляют собой частный случай псевдокэлеровых систем внешних дифференциальных уравнений, рассмотренных *Бескиным* в [Бе-1].

5.3. Задача описания луп, каноническое разложение которых вполне определяется первыми k членами, ставилась в работе [ХС-1], но не в общем случае, а только для луп со степенной ассоциативностью.

5.4. Уравнения (4.10), означающие замкнутость G-структуры, определяемой тканью Бола, получены *Федоровой* в [Ф-1].

5.5. Теорема 5.7 доказана *Боцу* в [Бц-3]. Ему же принадлежит и ряд других результатов о четырехмерных шестиугольных три-тканях, см. [Бц-1], [Бц-2].

5.6. Теорема 5.9 получена *Шелеховым* в [Ш-8].

5.7. Результаты четвертого и пятого параграфов, а также некоторые другие утверждения о замкнутых G_W-структурах см. в [Ш-11], [Ш-22].

5.8. Классификация тождеств в лупах проводилась *Белоусовым* [Б-1], *Феньешем* [Фн-1], [Фн-2], *Вечтомовым* [Вч-1], [Вч-2].

5.9. Классификация тождеств порядка k с одной переменной в гладких лупах дана в [БШ-1], [БШ-2]. Там каждому слову с одной переменной поставлено в соответствие дерево, с помощью которого легко вычисляются характеристики этого слова.

5.10. К задачам. Шестимерные шестиугольные три-ткани изучает *Шестакова* [Шс-2]. Ей же принадлежат результаты, сформулированные в задаче 5.4, см. [Шс-2].

Глава 6

АВТОМОРФИЗМЫ ТРИ-ТКАНЕЙ

§ 6.1. Автотопии квазигрупп и три-тканей

1. Напомним определение изотопии квазигрупп, данное в § 1 гл. 2. Две трехбазисные квазигруппы $q = (\cdot, X_\alpha)$ и $\widetilde{q} = (\circ, \widetilde{X}_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, называются изотопными, если существует тройка $J = (J_1, J_2, J_3)$ биективных отображений $J_\alpha\colon X_\alpha \to \widetilde{X}_\alpha$ таких, что для любых x из X_1 и y из X_2 выполняется соотношение

$$J_1(x) \circ J_2(y) = J_3(x \cdot y). \tag{6.1}$$

Изотопическое отображение квазигруппы на себя называется *автотопией.*

Обозначим автотопию $q \to q$ символом $A = (A_\alpha), \alpha = 1, 2, 3$. Согласно определению, для любых элементов x и y из q

$$A_1(x) \cdot A_2(y) = A_3(x \cdot y). \tag{6.2}$$

Перечислим некоторые свойства автотопий.

Предложение 6.1. *Автотопия вполне определяется заданием каких-либо двух своих компонент.*

□ Обозначим, как обычно, L_x и R_y левый и правый сдвиги в $q = (\cdot, X_\alpha)$. Тогда равенство (6.2) перепишется так:

$$(L_{A_1(x)}\, A_2)(y) = (A_3\, L_x)(y),$$

где LA_2 обозначает композицию функций L и A_2. Так как y любое, получаем

$$L_{A_1(x)}\, A_2 = A_3\, L_x.$$

Аналогично находим, что

$$R_{A_2(y)}\, A_1 = A_3\, R_y.$$

Так как q — квазигруппа, то сдвиги являются биекциями, поэтому из последних равенств можно выразить A_1 или A_2 через две другие компоненты автотопии A:

$$A_1 = R^{-1}_{A_2(y)}\, A_3\, R_y, \quad A_2 = L^{-1}_{A_1(x)}\, A_3\, L_x. \quad \blacksquare \tag{6.3}$$

Другое доказательство см. в задаче 6.2.

Следующие два утверждения очевидны.

Предложение 6.2. *Пусть $A = (A_\alpha)$ — автотопия в квазигруппе $q = (\cdot, X_\alpha)$ и пусть квазигруппа $\widetilde{q} = (\circ, \widetilde{X}_\alpha)$ изотопна q, причем изотопия $q \to \widetilde{q}$ имеет вид $J = (J_\alpha)$. Тогда в $\widetilde{q}$ возникает автотопия*

$$J^{-1}\, A\, J = (J_1^{-1}\, A_1\, J_1, J_2^{-1}\, A_2\, J_2, J_3^{-1}\, A_3\, J_3).$$

Предложение 6.3. *Все автотопии квазигруппы q образуют группу.*

Группу автотопий квазигруппы q обозначают $\mathcal{A}_q$.

Напомним еще одно определение из теории квазигрупп. Автотопия $A = (A_\alpha)$ называется *регулярной*, если одна из составляющих ее биекций есть тождественное преобразование. Множество всех регулярных автотопий, для которых $A_\beta = id$ обозначается $\mathcal{A}_q^{(\beta)}$. Справедливо

Предложение 6.4. *Множество $\mathcal{A}_q^{(\beta)}$ регулярных автотопий образует нормальную подгруппу в группе $\mathcal{A}_q$ всех автотопий.*

Предложение 6.5. *Биекции A_α, образующие регулярную автотопию A трехбазисной квазигруппы q, выражаются через сдвиги этой квазигруппы.*

□ Если, например, $A_3 = id$, то из (6.3) получаем

$$A_1 = R^{-1}_{A_2(y)} R_y, \quad A_2 = L^{-1}_{A_1(x)} L_x. \quad \blacksquare \tag{6.4}$$

Предположим теперь, что $Q(\cdot)$ — однобазисная квазигруппа с единицей, т. е. лупа. *Правое, левое и среднее ядра лупы* $Q(\cdot)$ определяются следующим образом:

$$N_r = \{a \in Q | (ax)y = a(xy) \ \ \forall x, y \in Q\},$$
$$N_\ell = \{b \in Q | (xy)b = x(yb) \ \ \forall x, y \in Q\},$$
$$N_m = \{c \in Q | (xc)y = x(cy) \ \ \forall x, y \in Q\}.$$

Нетрудно доказать, что каждое из ядер замкнуто относительно операции умножения в Q. Следовательно, ядра образуют подгруппы в Q.

Предложение 6.6. *Группы регулярных автотопий лупы $Q(\cdot)$ связаны с ее ядрами следующим образом:*

$$\mathcal{A}_Q^{(1)} = \{(id, R_a, R_a), \quad a \in N_r\},$$
$$\mathcal{A}_Q^{(2)} = \{(L_b, id, L_b), \quad b \in N_\ell\},$$
$$\mathcal{A}_Q^{(3)} = \{(R_c, L_c^{-1}, id), \quad c \in N_m\}.$$

□ Пусть, например, $A_3 = id$. Положим в равенстве (6.4) $x = e$ и выберем $y = c$ так, чтобы $A_2(c) = e$. Тогда из (6.4) получаем $A_1 = R_c$, $A_2 = L^{-1}_{A_1(e)}$. В силу определения (6.1)

$$A_1(e) \cdot A_2(c) = A_3(c) = c,$$

а так как $A_2(c) = e$, то получаем $A_1(e) = c$, $A_2 = L_c^{-1}$.

Покажем теперь, что $c \in N_m$. По определению автотопии имеем: $R_c(x) \cdot L_c^{-1}(y) = x \cdot y$. Положив $L_c^{-1}(y) = z$, перепишем это равенство в виде $(xc)z = x(cz)$, ввиду чего $c \in N_m$. Для остальных групп $\mathcal{A}_Q^{(\alpha)}$ доказательство аналогично. ■

Следствие. *Лупа Q допускает нетривиальные регулярные автотопии тогда и только тогда, когда в ней имеется соответствующее нетривиальное ядро.*

Учитывая предложение 6.6, назовем автотопии из $\mathcal{A}_Q^{(1)}$ и $\mathcal{A}_Q^{(2)}$ соответственно *правыми* и *левыми*. Автотопии из $\mathcal{A}_Q^{(3)}$ назовем *главными*, что соответствует термину «главная изотопия» (см. § 2 гл. 2).

2. Как указано в § 2 гл. 2, понятия изотопии и автотопии квазигрупп переносятся и на полные три-ткани. Рассмотрим полные три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ и $\widetilde{W} = (\widetilde{X}, \widetilde{\lambda}_\alpha)$. Предположим, что их координатные квазигруппы q и $\widetilde{q}$ изотопны, причем изотопия имеет вид $J = (J_\alpha)$. Биекция J_α определена на слоении λ_α, поэтому тройка биекций задает отображение ткани W на $\widetilde{W}$. Условие (6.1) при этом означает, что сохраняется инцидентность слоев: три слоя ткани W, пересекающиеся в одной точке, переходят в три слоя ткани $\widetilde{W}$, снова пересекающиеся в одной точке. Такое преобразование тканей называется также изотопией. В частности, автотопия координатной квазигруппы q порождает автотопию, т. е. преобразование в себя соответствующей ей три-ткани W. Группу автотопий ткани обозначим $\mathcal{A}_W$.

Автотопия $A = (A_\alpha)$ три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ порождает биективное преобразование φ множества X следующим образом: $\varphi(x \cap y) = A_1(x) \cap A_2(y)$, $x \in \lambda_1$, $y \in \lambda_2$.

Преобразование φ называется *автоморфизмом три-ткани* W. В частности, регулярной автотопии соответствует *регулярный автоморфизм*. Группа автоморфизмов три-ткани изоморфна ее группе автотопий, поэтому она обозначается также $\mathcal{A}_W$.

Пусть $A = (A_\alpha)$ — автотопия три-ткани W, φ — порождаемый ею автоморфизм, и пусть $p' = \varphi(p)$, где $p = (a, b)$ и $p' = (a', b')$. Рассмотрим координатные лупы ℓ_p и $\ell_{p'}$. Операция $\circ$ в ℓ_p задается равенством (2.3):

$$u \circ v = x \cdot y = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v),$$

а операция $\bullet$ в $\ell_{p'}$ — равенством

$$u' \bullet v' = x' \cdot y' = R_{b'}^{-1}(u') \cdot L_{a'}^{-1}(v')$$

(здесь, как и в гл. 2, точкой обозначена операция в координатной квазигруппе ткани). Согласно определениям, имеем:

$$\begin{aligned} A_3(u \circ v) &= A_1(u) \cdot A_2(v) = x' \cdot y', \\ A_3(u) &= A_3(x \cdot b) = A_1(x) \cdot A_2(b) = x' \cdot b' = u', \\ A_3(v) &= A_3(a \cdot y) = A_1(a) \cdot A_2(y) = a' \cdot y' = v', \\ x' \cdot y' &= u' \bullet v' = A_3(u) \bullet A_3(v). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство

$$A_3(u \circ v) = A_3(u) \bullet A_3(v),$$

которое означает, что A_3 — изоморфизм координатной лупы ℓ_p на лупу $\ell_{p'}$.

Таким образом, *автоморфизм три-ткани W индуцирует изоморфизм ее координатных луп в соответствующих точках.*

Как следствие получаем, что *все координатные лупы три-ткани W изоморфны между собой, если эта ткань допускает транзитивную группу автоморфизмов.* Нетрудно показать, что справедливо и обратное утверждение: *если все координатные лупы некоторой три-ткани W изоморфны, то она допускает транзитивную группу автоморфизмов.* Такие ткани мы называем G-тканями и рассматриваем в § 4 этой главы.

Другое следствие состоит в том, что если автоморфизм φ три-ткани W оставляет на месте точку p, то он индуцирует автоморфизм координатной лупы ℓ_p.

Покажем, что верно также и обратное утверждение: *всякий автоморфизм координатной лупы ℓ_p ткани W индуцирует такую автотопию этой ткани, при которой точка p остается неподвижной.* Действительно, пусть A_3 — автоморфизм лупы ℓ_p. Так как изотопия координатной лупы ℓ_p на координатную квазигруппу $q(\cdot)$ имеет вид (R_b^{-1}, L_a^{-1}, id), где $p = (a, b)$ (см. § 3 гл. 2), то, согласно предположению 6.2, автоморфизм A_3 (т. е. автотопия (A_3, A_3, A_3)) индуцирует в $q(\cdot)$ автотопию (A_1, A_2, A_3), где

$$A_1 = R_b^{-1}\, A_3\, R_b, \quad A_2 = L_a^{-1}\, A_3\, L_a. \tag{6.5}$$

По определению автотопии

$$A_1(a) \cdot A_2(y) = A_3(a \cdot y),$$

где y — произвольный элемент второго слоения ткани W. С учетом (6.5) последнее равенство примет вид

$$A_1(a) \cdot L_a^{-1}(A_3(a \cdot y)) = A_3(a \cdot y).$$

Так как y, а, следовательно, $a \cdot y$ и $A_3(a \cdot y)$ — произвольные элементы из λ_2, то отсюда получим $L_{A_1(a)}\; L_a^{-1} = id$, т. е. $A_1(a) = a$.

Точно так же с помощью (6.5) выводим, что $A_2(b) = b$. Следовательно, автотопия (A_1, A_2, A_3) оставляет неподвижными слои a и b, т. е. точку их пересечения p, что мы и хотели показать.

Полученные результаты объединяет следующая

Теорема 6.7. *Всякий автоморфизм φ полной три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ индуцирует изоморфизм координатной лупы ℓ_p этой ткани на координатную лупу $\ell_{\varphi(p)}$, $p \in X$. Группа $\mathcal{A}_W(p)$ автоморфизмов ткани W, оставляющих неподвижной точку p, изоморфна группе $\mathcal{A}_{\ell_p}$ автоморфизмов координатной лупы ℓ_p ткани W.*

Группа $\mathcal{A}_W(p)$ называется *группой изотропии* точки p.

3. Для многомерной геометрической три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$, образованной на гладком многообразии X тремя слоениями λ_α, понятие автотопии заменяется понятием *локальной автотопии*, образованной тремя локальными диффеоморфизмами $A_\alpha\colon \lambda_\alpha \to \widetilde{\lambda}_\alpha$, удовлетворяющими условию (6.2). При этом отображения A_α заданы на базах X_α соответствующих слоений λ_α. Соответствующий автоморфизм φ многообразия ткани является также локальным диффеоморфизмом, причем близким к тождественному преобразованию (в силу локальности определения геометрической три-ткани). Поэтому для геометрических тканей символом $\mathcal{A}_W$ обозначается связная компонента единицы (тождественного преобразования) группы автоморфизмов.

Сразу возникает естественный вопрос: как соотносятся автоморфизмы три-ткани W и автоморфизмы определяемой ею связности Черна? Ответ дает следующая

Теорема 6.8. *Локальные автоморфизмы три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ являются также автоморфизмами соответствующей связности Черна. Обратно, пусть φ — автоморфизм связности Черна некоторой три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$, и существует точка p на X такая, что дифференциал $d\varphi|_p$ переводит касательные плоскости к слоям ткани W, проходящим через точку p, в касательные плоскости к соответствующим слоям, проходящим через точку $\varphi(p)$. Тогда φ — автоморфизм три-ткани W.*

□ Напомним, что автоморфизмом аффинной связности Γ, заданной на многообразии X, называется такой диффеоморфизм этого многообразия, который сохраняет закон параллельного перенесения, т. е. сохраняет ковариантный дифференциал относительно этой связности.

Первая часть теоремы вытекает из того факта, что автоморфизм ткани сохраняет ее слоения, но именно они и определяют ковариантный дифференциал в связности Черна (см. § 7 гл. 1).

Обратно: пусть автоморфизм φ связности Черна ткани W обладает свойством, указанным в условии теоремы. Возьмем на X точку p', выберем гладкий путь s из p в p', и пусть $s' = \varphi s$. Обозначим τ и τ' параллельные переносы вдоль s и s' соответственно. Так как φ — автоморфизм аффинной связности, то линейное преобразование $d\varphi|_{p'}\colon T_{p'}(X) \to T_{\varphi(p')}(X)$ можно записать в виде $d\varphi|_{p'} = \tau'\, d\varphi|_p \tau^{-1}$. По условию теоремы преобразование φ переводит касательные плоскости к слоям ткани в точке p в касательные плоскости к соответствующим слоям в точке $\varphi(p)$. В силу свойств связности Черна параллельные переносы τ и τ' переводят касательные плоскости к слоям ткани снова в касательные плоскости к слоям ткани. Следовательно, этим свойством обладает и преобразование $d\varphi|_{p'}$.

Итак, преобразование $d\varphi$ сохраняет распределение касательных плоскостей к слоям ткани. Поэтому оно сохраняет и сами слои. ■

Из теоремы 6.8 вытекает, что все основные тензорные поля a^i_{jk}, $b^i_{jk\ell}$, $\underset{\alpha}{c}{}^i{}_{jk\ell m}$, …, определенные на три-ткани W, инвариантны относительно автоморфизма φ этой ткани, то есть

$$d\varphi|_p(t(p)) = t(\varphi(p)), \quad p \in X,$$

где $t(p)$ — значение какого-либо из перечисленных тензорных полей в точке p. В частности, если точка p неподвижна относительно φ, то получаем

$$d\varphi|_p(t(p)) = t(p), \tag{6.6}$$

т. е. справедливо

Предложение 6.9. *Если автоморфизм φ три-ткани W оставляет неподвижной точку p, то основные тензоры этой ткани, вычисленные в точке p, инвариантны относительно преобразования φ.*

Пусть в некоторых локальных координатах $d\varphi|_p = (\varphi^i_j)$. Тогда условие (6.6) принимает вид

$$a^i_{jk}\varphi^j_{j'}\varphi^k_{k'} = a^{i'}_{j'k'}\varphi^i_{i'}, \quad b^i_{jk\ell}\varphi^j_{j'}\varphi^k_{k'}\varphi^\ell_{\ell'} = b^{i'}_{j'k'\ell'}\varphi^i_{i'} \ldots \tag{6.7}$$

Из предложения 6.9 вытекает, что, вообще говоря, три-ткань не допускает нетривиальных автоморфизмов, так как на величины φ^i_j, входящие в формулы (6.7), получается бесконечная последовательность уравнений.

4. Рассмотрим автотопии грассмановых три-тканей (см. § 1 гл. 2). Напомним, что грассманова ткань GW задается на многообразии $X = G(1, r+1)$ прямых проективного пространства P^{r+1} с помощью трех гладких гиперповерхностей $X_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$. Слоями этой ткани являются связки прямых с вершинами на X_α.

Пусть $A = (A_\alpha)$ — некоторая автотопия грассмановой три-ткани GW, φ — соответствующий автоморфизм многообразия $X = G(1, r+1)$. Очевидно, φ есть локальный диффеоморфизм. Преобразования A_α, составляющие автотопию A, действуют на слоениях λ_α, т. е. связки прямых с вершинами на поверхности X_α переводят снова в связки прямых с вершинами на X_α. Следовательно, при отображении $\varphi\colon P^{r+1} \to P^{r+1}$ гиперповерхности X_α переходят в себя.

Покажем, что отображение φ переводит в себя *любые* связки прямых, не только с вершинами на гиперповерхностях X_α. В самом деле, такие связки являются изоклинными поверхностями грассмановой ткани GW, см. § 2 гл. 3. Они задаются дифференциальными уравнениями (3.12) и (3.13):

$$\underset{2}{\omega}^i + \lambda \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \frac{d\lambda}{\lambda^2 - \lambda} = a_k \underset{1}{\omega}^k.$$

С другой стороны, поскольку преобразование φ переводит три-ткань GW в себя, то оно обязано иметь вид (1.21):

$$\underset{\alpha}{\widetilde{\omega}}^i = A^i_j \underset{\alpha}{\omega}^j, \quad \det(A^i_j) \neq 0.$$

При этих преобразованиях предыдущие уравнения сохраняют свой вид, следовательно, преобразование φ переводит связки прямых в связки прямых. Иными словами, φ индуцирует точечное преобразование пространства P^{r+1} (обозначим его также φ). Поскольку φ переводит прямые в прямые и сохраняет инцидентность, то образом плоскости при этом преобразовании также будет плоскость. Это означает, что φ — линейное преобразование (коллинеация).

В силу локальности рассматриваемых понятий, преобразование φ должно быть достаточно близко к тождественному.

Совокупность всех автоморфизмов ткани GW образует подгруппу группы коллинеаций $\mathbf{PGL}(r+1)$ проективного пространства P^{r+1}. Итак, доказано

Предложение 6.10. *Пусть GW — грассманова три-ткань, определяемая гиперповерхностями X_α проективного пространства P^{r+1}, $\mathcal{A}_W$ — группа автоморфизмов этой ткани. Тогда*

а) группа $\mathcal{A}_W$ есть подгруппа группы коллинеаций $\boldsymbol{PGL}(r+1)$ пространства P^{r+1};

б) поверхности X_α инвариантны относительно преобразований группы $\mathcal{A}_W$.

Пусть, например, X_1 и X_2 — области на одной и той же гиперквадрики Q, а X_3 — гиперплоскость в P^{r+1}. Тогда определяемая ими грассманова ткань GW есть изоклинная ткань Боля (теорема 4.10). Эта ткань допускает нетривиальную группу автотопий $\mathcal{A}_W$, которая, если считать плоскость X_3 бесконечно удаленной, совпадает со связной компонентой единицы группы преобразований аффинного пространства A^{r+1}, сохраняющих квадрику Q.

Укажем способ построения грассмановых тканей с нетривиальной группой Ли автотопий. Пусть G — подгруппа размерности $\rho < r+1$ из связной компонентой единицы группы $\mathbf{PGL}(r+1)$. Фиксируем в P^{r+1} три гладкие поверхности $\widetilde{X}_\alpha$ размерности $(r+1)-\rho$ такие, что определяемые ими орбиты $X_\alpha = G(\widetilde{X}_\alpha)$ различны и $\dim X_\alpha = r$. Пусть существует прямая ℓ, пересекающая поверхности X_α в трех различных точках A_α. Тогда в некоторой окрестности этой прямой определена грассманова ткань GW. В силу построения группа $\mathcal{A}_W$ всех автотопий ткани GW содержит в качестве подгруппы группу G.

Рассмотрим регулярные автотопии грассмановых тканей. Пусть грассманова три-ткань GW допускает регулярный автоморфизм φ. Согласно определению, преобразование φ оставляет одно из слоений ткани неподвижным. Для грассмановой ткани GW это означает, что каждая точка одной из порождающих ее гиперповерхностей X_α остается неподвижной относительно соответствующего проективного преобразования φ в P^{r+1}. Следовательно, эта поверхность (пусть X_3) является гиперплоскостью, обозначим ее Π.

Проективное преобразование с точечно неподвижной гиперплоскостью Π называется *гомологией.* Π называется двойной плоскостью гомологии. Гомологии характеризуются тем, что прямые, соединяющие соответствующие точки, проходят через неподвижную точку S — центр гомологии. Известно, что плоскость Π и центр S определяют не одну, а однопараметрическое семейство (пучок) гомологий. Задав пару соответствующих точек, мы выделим в пучке единственную гомологию.

Центр S может лежать в Π (параболический тип) или быть вне ее. Пусть $S \notin \Pi$. Если точку S считать бесконечно удаленной, а плоскость Π задать уравнением $x^{r+1} = 0$, то аффинным эквивалентом гомологии будет преобразование $'x^{r+1} = kx^{r+1}, k \in \mathbf{R}\backslash 0$. В частности, при $k = -1$ получается *инволюционная гомология*, или *симметрия* относительно плоскости Π. Но симметрии не будут автоморфизмами ткани GW, так как не принадлежат связной компоненте единицы.

Пусть φ — гомология параболического типа, $S \in \Pi$. Если плоскость Π удалить в бесконечность, то φ представляет собой параллельный перенос в направлении прямой, проходящей через центр гомологии S.

Рассмотрим две другие гиперповерхности X_1 и X_2 ткани GW. Согласно вышеизложенному, они должны быть инвариантны относительно гомологии φ. Так как при гомологии прямые, проходящие через центр гомологии S, переходят в себя, то гиперповерхности X_1 и X_2 будут конусами с вершинами в точке S.

Итак, доказана

Теорема 6.11. *Регулярными автоморфизмами грассмановой три-ткани могут быть только неинволюционные гомологии. Грассманова три-ткань GW допускает регулярный автоморфизм φ тогда и только тогда, когда одна из определяющих ее гиперповерхностей есть неподвижная плоскость гомологии φ, а две другие гиперповерхности будут конусами с вершинами в центре этой гомологии.*

§ 6.2. Инфинитезимальные автоморфизмы три-тканей

1. Рассмотрим векторное поле ξ, заданное на гладком многообразии X, $\dim X = n$. Кривая $x(t)$ на X называется интегральной кривой поля ξ, если в каждой ее точке касательный вектор $\dfrac{dx}{dt}$ совпадает с вектором $\xi(x(t))$. Интегральные кривые являются решениями системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^u}{dt} = \xi^u, \quad u = 1, 2, \ldots, n.$$

Через произвольную точку x_0 многообразия X проходит единственное решение этой системы. Оно записывается в виде

$$x(t) = \exp(t\xi)(x_0).$$

С другой стороны, найденное решение определяет однопараметрическую группу локальных диффеоморфизмов (сдвигов) $x_t\colon X \to X$,

$$x_0 \to x_t(x_0) = \exp(t\xi)(x_0).$$

Поэтому векторное поле ξ называют *инфинитезимальным диффеоморфизмом многообразия* X. Заметим, что замена параметра t на траекториях приводит к умножению вектора ξ на некоторый множитель. Обратно, если вместо вектора ξ взять вектор $\lambda\xi$, то мы получим то же самое семейство диффеоморфизмов, только иначе параметризованное.

Если многообразие X несет некоторую геометрическую структуру, то инфинитезимальные диффеоморфизмы, сохраняющие эту структуру, называются ее инфинитезимальными автоморфизмами.

Пусть X — слоение с базой B и проекцией π (см. § 1 гл. 1). Найдем условия, при которых векторное поле ξ на X будет инфинитезимальным автоморфизмом слоения (X, B, π), т. е. переводит его слои снова в слои этого же слоения.

Выберем, как и в § 1 гл. 1, на многообразии X корепер (ω^i, ω^a), где ω^i — главные формы на базе B $(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ a = m+1, \ldots, n)$. Векторное поле ξ запишем в виде

$$\xi = \xi^i e_i + \xi^a e_a,$$

где репер (e_i, e_a) является дуальным кореперу (ω^i, ω^a). Вторая компонента $\xi_2 = \xi^a e_a$ порождает сдвиги вдоль слоя слоения X, а первая $\xi_1 = \xi^i e_i$ — сдвиги в трансверсальном направлении к слою.

Пусть векторное поле ξ переводит слой в слой. Тогда оно действует на многообразии слоев, т. е. на базе B. Соответствующее поле на B также обозначим ξ. Так как базисные формы ω^i базы B удовлетворяют структурным уравнениям $d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j$ (см. § 1 гл. 1), то координаты ξ^i вектора ξ должны удовлетворять уравнениям

$$\nabla\xi^i = d\xi^i + \xi^j\omega^i_j = \xi^i_j\omega^j. \tag{6.8}$$

Рассмотрим теперь три-ткань $W=(X,\lambda_\alpha)$, $\dim X=2r$, образованную на многообразии X тремя слоениями λ_α, и найдем дифференциальные уравнения векторных полей, определяющих ее инфинитезимальные автоморфизмы. Векторное поле ξ на X зададим, как и в главе 1, в виде

$$\xi=\underset{1}{\xi}^i\underset{2}{e}_i-\underset{2}{\xi}^i\underset{1}{e}_i=\underset{2}{\xi}^i\underset{3}{e}_i-\underset{3}{\xi}^i\underset{2}{e}_i=\underset{3}{\xi}^i\underset{1}{e}_i-\underset{1}{\xi}^i\underset{3}{e}_i, \tag{6.9}$$

причем векторы $\underset{\alpha}{e}_i$ касаются слоя $\mathcal{F}_\alpha$ ткани W, $\mathcal{F}_\alpha\in\lambda_\alpha$. Поскольку формы $\underset{\alpha}{\omega}^i$ связаны условием (1.16):

$$\underset{1}{\omega}^i+\underset{2}{\omega}^i+\underset{3}{\omega}^i=0, \tag{6.10}$$

то координаты вектора ξ удовлетворяют уравнению

$$\underset{1}{\xi}^i+\underset{2}{\xi}^i+\underset{3}{\xi}^i=0. \tag{6.11}$$

Поле ξ является инфинитезимальным автоморфизмом три-ткани W тогда и только тогда, когда оно сохраняет слоения λ_α этой ткани, т. е. каждый ее слой переводит в некоторый слой того же слоения. В соответствии с формулой (6.8), компоненты $\underset{\alpha}{\xi}^i$ должны удовлетворять уравнениям

$$d\underset{\alpha}{\xi}^i+\underset{\alpha}{\xi}^j\underset{\alpha}{\omega}{}_j^i=\underset{\alpha}{\xi}{}_j^i\underset{\alpha}{\omega}^j \tag{6.12}$$

при условии, что уравнения слоения λ_α записаны в виде

$$d\underset{\alpha}{\omega}^i=\underset{\alpha}{\omega}^j\wedge\underset{\alpha}{\omega}{}_j^i,\ \alpha=1,2,3. \tag{6.13}$$

Из структурных уравнений ткани (1.26) следует, что

$$\underset{1}{\omega}{}_j^i=\omega_j^i+a_{jk}^i\underset{1}{\omega}^k,\quad \underset{2}{\omega}{}_j^i=\omega_j^i-a_{jk}^i\underset{2}{\omega}^k,\quad \underset{3}{\omega}{}_j^i=\omega_j^i+a_{jk}^i(\underset{1}{\omega}^k-\underset{2}{\omega}^k).$$

Поэтому уравнения (6.12) принимают вид:

$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\xi}^i+\underset{1}{\xi}^j\omega_j^i=\underset{1}{\xi}{}_j^i\underset{1}{\omega}^j-a_{jk}^i\underset{1}{\xi}^j\underset{1}{\omega}^k,\\
&d\underset{2}{\xi}^i+\underset{2}{\xi}^j\omega_j^i=\underset{2}{\xi}{}_j^i\underset{2}{\omega}^j+a_{jk}^i\underset{2}{\xi}^j\underset{2}{\omega}^k,\\
&d\underset{3}{\xi}^i+\underset{3}{\xi}^j\omega_j^i=\underset{3}{\xi}{}_j^i\underset{3}{\omega}^j-a_{jk}^i\underset{3}{\xi}^j(\underset{1}{\omega}^k-\underset{2}{\omega}^k).
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Складывая эти уравнения и используя соотношения (6.11), получим:

$$\underset{1}{\xi}{}_j^i\underset{1}{\omega}^j+\underset{2}{\xi}{}_j^i\underset{2}{\omega}^j+\underset{3}{\xi}{}_j^i\underset{3}{\omega}^j=-a_{jk}^i(\underset{2}{\xi}^j\underset{1}{\omega}^k-\underset{1}{\xi}^j\underset{2}{\omega}^k). \tag{6.15}$$

Заменим в (6.15) $\underset{3}{\omega}^j$ с помощью (6.10) и приравняем к нулю коэффициенты при независимых формах $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$. В результате найдем $\underset{1}{\xi}{}_j^i$ и $\underset{2}{\xi}{}_j^i$:

$$\underset{1}{\xi}{}_j^i=\underset{3}{\xi}{}_j^i+a_{jk}^i\underset{2}{\xi}^k,\quad \underset{2}{\xi}{}_j^i=\underset{3}{\xi}{}_j^i-a_{jk}^i\underset{1}{\xi}^k.$$

Введем далее величины ξ_j^i равенством

$$\underset{3}{\xi}{}_j^i=\xi_j^i-a_{jk}^i\underset{2}{\xi}^k+a_{jk}^i\underset{1}{\xi}^k. \tag{6.16}$$

Тогда с учетом (6.11) получаем:

$$\underset{1}{\xi}{}_j^i=\xi_j^i+a_{jk}^i\underset{1}{\xi}^k,\quad \underset{2}{\xi}{}_j^i=\xi_j^i-a_{jk}^i\underset{2}{\xi}^k, \tag{6.17}$$

и первые два уравнения (6.14) принимают вид:

$$d\underset{1}{\xi}^i+\underset{1}{\xi}^j\omega_j^i=(\xi_j^i+2a_{jk}^i\underset{1}{\xi}^k)\underset{1}{\omega}^j,\quad d\underset{2}{\xi}^i+\underset{2}{\xi}^j\omega_j^i=(\xi_j^i-2a_{jk}^i\underset{2}{\xi}^k)\underset{2}{\omega}^j, \tag{6.18}$$

а третье уравнение (6.14) будет следовать из них. Доказана

Теорема 6.12. *Векторное поле* $\xi = \underset{1}{\xi^i}\underset{2}{e_i} - \underset{2}{\xi^i}\underset{1}{e_i}$ *определяет инфинитезимальный автоморфизм три-ткани* W *тогда и только тогда, когда его координаты удовлетворяют дифференциальным уравнениям* (6.18).

2. Кроме величин $\underset{1}{\xi^i}$ и $\underset{2}{\xi^i}$, в уравнения (6.18) входят функции ξ^i_j, также подлежащие определению. Первое из уравнений (6.17) показывает, что они выражаются через вектор $\underset{1}{\xi^i}$, его ковариантную производную $\underset{1}{\xi^i_j}$ и тензор a^i_{jk}. Следовательно, величины ξ^i_j образуют тензор, так что ковариантный дифференциал $\nabla\xi^i_j$ будет комбинацией главных форм $\underset{1}{\omega^i}$ и $\underset{2}{\omega^i}$:

$$\nabla\xi^i_j \equiv d\xi^i_j + \xi^m_j\omega^i_m - \xi^i_m\omega^m_j = \underset{1}{\xi^i_{jk}}\underset{1}{\omega^k} + \underset{2}{\xi^i_{jk}}\underset{2}{\omega^k}.$$

Продифференцируем внешним образом уравнения (6.18) и заменим в полученных квадратичных уравнениях величины $d\underset{1}{\xi^i}$, $d\underset{2}{\xi^i}$, $d\underset{\alpha}{\omega^i}$, $d\omega^i_j$ и da^i_{jk} с помощью уравнений (6.18), (1.26), (1.32) и (1.33). В результате получим уравнения, содержащие только главные формы. Приравнивая нулю коэффициенты при независимых произведениях $\underset{1}{\omega^k}\wedge\underset{1}{\omega^\ell}$, $\underset{2}{\omega^k}\wedge\underset{2}{\omega^\ell}$ и $\underset{1}{\omega^k}\wedge\underset{2}{\omega^\ell}$, получим:

$$\underset{1}{\xi^i_{jk}} = b^i_{jk\ell}\underset{2}{\xi^\ell}, \quad \underset{2}{\xi^i_{jk}} = -b^i_{j\ell k}\underset{1}{\xi^\ell}; \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned} &\underset{1}{\xi^i_{[jk]}} + b^i_{[jk]\ell}\underset{1}{\xi^\ell} - b^i_{\ell[jk]}\underset{1}{\xi^\ell} + 6a^m_{[j\ell}a^i_{|m|k]}\underset{1}{\xi^\ell} - a^i_{\ell j}\xi^\ell_k - a^i_{k\ell}\xi^\ell_j + a^\ell_{kj}\xi^i_\ell = 0,\\ &\underset{2}{\xi_{[jk]^i}} - b^i_{[j|\ell|k]\ell}\underset{2}{\xi^\ell} + b^i_{\ell[jk]}\underset{2}{\xi^\ell} + 6a^m_{[j\ell}a^i_{|m|k]}\underset{2}{\xi^\ell} + a^i_{\ell j}\xi^\ell_k + a^i_{k\ell}\xi^\ell_j - a^\ell_{kj}\xi^i_\ell = 0. \end{aligned} \tag{6.20}$$

В силу (6.19) выражение для $\nabla\xi^i_j$ примет вид:

$$\nabla\xi^i_j = b^i_{jk\ell}(\underset{2}{\xi^\ell}\underset{1}{\omega^k} - \underset{1}{\xi^k}\underset{2}{\omega^\ell}), \tag{6.21}$$

а оба соотношения (6.20) с помощью (6.19) и (1.31) преобразуются к одинаковому виду:

$$\Phi^i_{jk}(\xi) \equiv b^i_{[j|m|k]}\underset{1}{\xi^m} + b^i_{[jk]m}\underset{2}{\xi^m} + a^i_{jm}\xi^m_k + a^i_{mk}\xi^m_j - a^m_{jk}\xi^i_m = 0. \tag{6.22}$$

Вместе с уравнениями (6.21) и (6.22) на три-ткани W должны выполняться и их дифференциальные следствия. Внешнее дифференцирование уравнений (6.21) приводит к соотношениям:

$$\Phi^i_{jk\ell}(\xi) \equiv \underset{1}{c^i_{jk\ell m}}\underset{1}{\xi^m} + \underset{2}{c^i_{jk\ell m}}\underset{2}{\xi^m} + b^i_{jkm}\xi^m_\ell + b^i_{jm\ell}\xi^m_k + b^i_{mk\ell}\xi^m_j - b^m_{jk\ell}\xi^i_m = 0. \tag{6.23}$$

Можно показать, что дифференцирование соотношений (6.22) приведет к равенствам $\Phi^i_{[jk]\ell} = 0$ и $\Phi^i_{[j|\ell|k]} = 0$, которые будут следствием соотношений (6.23). Итак, $r^2 + 2r$ величин $\underset{1}{\xi^i}$, $\underset{2}{\xi^i}$, ξ^i_j удовлетворяют системе линейных уравнений Пфаффа (6.18) и (6.21). Кроме того, они связаны соотношениями (6.22) и (6.23), представляющими условия полной интегрируемости системы (6.18), (6.21). Так как этих соотношений, вообще говоря, значительно больше, чем переменных $\underset{1}{\xi^i}$, $\underset{2}{\xi^i}$, ξ^i_j, то система (6.18), (6.21) для произвольной ткани несовместна, т. е., вообще говоря, три-ткань не допускает нетривиальных инфинитезимальных автоморфизмов. Аналогичный вывод был получен в п. 1 § 1.

Рассмотрим ткани, для которых ранг системы (6.21), (6.23) равен s, причем $s < r^2 + 2r$. Тогда система дифференциальных уравнений (6.18), (6.21) имеет нетривиальные решения, и множество ее решений зависит от $N = r^2 + 2r - s$ параметров. Каждому решению $(\underset{1}{\xi^i}, \underset{2}{\xi^i})$ (взятому с точностью до множителя) отвечает однопараметрическое семейство автоморфизмов три-ткани. Поэтому множество всех автоморфизмов, определяемых системой (6.18), (6.21), зависит от N параметров. Непосредственным вычислением проверяется, что совокупность решений системы (6.18) замкнута относительно операции коммутирования (задача 6.8). Доказана

Теорема 6.13. *Если для некоторой три-ткани* $W = (X, \lambda_\alpha)$, $\dim X = 2r$, *ранг системы* (6.22), (6.23) *равен* $s < r^2 + 2r$, *то система* (6.18), (6.21) *вполне интегрируема, и ее решения определяют группу автоморфизмов* $\mathcal{A}_W$ *этой ткани, зависящую от* $N = r^2 + 2r - s$ *параметров.*

3. Выясним геометрический смысл величин ξ^i_j. Формулы (6.18) определяют дифференциал инфинитезимального автоморфизма ξ: $x(t) = \exp(t\xi)(x_0)$. Как видно из этой формулы, начальная точка $p \equiv x_0$ получается при $\xi = 0$. Поэтому, чтобы получить дифференциал инфинитезимального автоморфизма ξ в начальной точке, надо положить формулах (6.18) $\xi = 0$. В результате формулы (6.18) примут вид:

$$d\underset{1}{\xi^i}\,|_p = \xi^i_j(p)\,\underset{1}{\omega^j}|_p, \quad d\underset{2}{\xi^i}\,|_p = \xi^i_j(p)\,\underset{2}{\omega^j}|_p. \tag{6.25}$$

Как видно из этих равенств, дифференциал инфинитезимального автоморфизма ξ в начальной точке есть линейный оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} \xi^i_j(p) & 0 \\ 0 & \xi^i_j(p) \end{pmatrix}.$$

В силу соотношений (6.24) из равенств (6.22) и (6.23) вытекают равенства

$$\xi^i_m a^m_{jk} = a^i_{mk}\xi^m_j + a^i_{jm}\xi^m_k, \qquad \xi^i_m b^m_{jk\ell} = b^i_{mk\ell}\xi^m_j + b^i_{jm\ell}\xi^m_k + b^i_{jkm}\xi^m_\ell,$$

которые означают, что линейное преобразование ξ^i_j является дифференцированием тензоров a^i_{jk} и $b^i_{jk\ell}$ (в алгебраическом смысле, см. § 1 гл. 4).

Дифференцируя равенства (6.22) и (6.23), найдем, с учетом (6.25), что оператор $\xi^i_j(p)$ будет дифференцированием (также в алгебраическом смысле) и для ковариантных производных всех порядков тензора кривизны. Используя терминологию, введенную в § 2 гл. 5, можно сказать, что *оператор* $\xi^i_j(p)$ *является дифференцированием любой из* W_k*-алгебр три-ткани.* Это утверждение является обобщением известного факта из теории групп Ли: если ξ — инфинитезимальный автоморфизм группы Ли, то дифференциал ξ будет дифференцированием в касательной алгебре Ли этой группы.

4. Последовательно дифференцируя уравнения (6.23) с помощью оператора ∇, получим серии соотношений, аналогичных соотношениям (6.23), содержащих производные порядка k тензора кривизны, $k = 2, 3, \ldots$. Геометрический смысл всех этих уравнений выясняется в следующей теореме.

Теорема 6.14. *Пусть* $W = (X, \lambda_\alpha)$ — *многомерная три-ткань. Векторное поле* $\xi(\underset{1}{\xi^i}, \underset{2}{\xi^i})$ *на* X *является инфинитезимальным автоморфизмом ткани* W *тогда и только тогда, когда вдоль каждой интегральной линии этого поля существует такое поле реперов, в котором координаты вектора* ξ, *их ковариантные производные* ξ^i_j, *а также компоненты всех основных тензоров ткани* W *постоянны.*

□ Пусть ξ — инфинитезимальный автоморфизм ткани W. Обозначим, как и выше, однопараметрическую группу преобразований, порожденную полем ξ, символом $\exp(t\xi)$. Фиксируем в некоторой точке x_0 из X адаптированный репер $\mathcal{R}_0$. Тогда в каждой точке интегральной линии $x(t)$ поля ξ, проходящей через x_0, возникает репер $d\exp(t\xi)(\mathcal{R}_0)$, который также будет адаптированным репером ткани W, так как $\xi(t)$ — ее автоморфизм. В построенном репере координаты вектора ξ будут постоянны вдоль интегральной кривой. Подставляя $\underset{1}{\xi^i} = \text{const}$, $\underset{2}{\xi^i} = \text{const}$ и уравнения

$$\underset{1}{\omega^i} = \underset{1}{\xi^i}dt, \quad \underset{2}{\omega^i} = \underset{2}{\xi^i}dt. \tag{6.26}$$

линии $x(t)$ в уравнения (6.18), найдем, что

$$\omega^i_j = \xi^i_j dt. \tag{6.27}$$

Ограничивая уравнения (6.21) на линию $x(t)$, получим $\xi^i_j = \text{const}$.

Рассмотрим теперь уравнение (1.33), которому удовлетворяет тензор кручения ткани W:

$$da^i_{jk} + a^m_{jk}\omega^i_m - a^i_{mk}\omega^m_j - a^i_{jm}\omega^m_k = b^i_{[j|\ell|k]}\underset{1}{\omega}^\ell + b^i_{[jk]\ell}\underset{2}{\omega}^\ell.$$

Подставляя сюда значения форм из (6.26) и (6.27) и пользуясь равенствами (6.22), которым удовлетворяют координаты вектора ξ, получим $da^i_{jk} = 0$. Точно так же с помощью равенств (6.23) получим $db^i_{jk\ell} = 0$ и т. д.

Обратно, пусть тензоры a^i_{jk}, $b^i_{jk\ell}$ постоянны на интегральной кривой $x(t)$ векторного поля $\xi(\underset{1}{\xi}^i, \underset{2}{\xi}^i)$, определяемой уравнениями (6.26) относительно некоторого фиксированного семейства реперов $\mathcal{R}(t)$, заданного уравнениями (6.27). Подставляя (6.26) и (6.27) в уравнения (1.33) и (1.38) при условии, что a^i_{jk} и $b^i_{jk\ell}$ постоянны, получим равенства (6.22) и (6.23).

Рассмотрим уравнения (6.21). Условия их интегрируемости (6.23) выполнены, следовательно, величины ξ^i_j должны удовлетворять уравнениям (6.21). Но вдоль кривой $x(t)$ эти уравнения принимают вид $d\xi^i_j = 0$, откуда $\xi^i_j = \mathrm{const}$.

Рассмотрим теперь уравнения (6.18). Условия их интегрируемости (6.21) и (6.22) выполнены, следовательно, величины $\underset{1}{\xi}^i$ и $\underset{2}{\xi}^i$ удовлетворяют уравнениям (6.18), которые вдоль кривой $x(t)$ принимают вид $d\underset{1}{\xi}^i = 0$, $d\underset{2}{\xi}^i = 0$. Следовательно, $\underset{1}{\xi}^i = \mathrm{const}$ и $\underset{2}{\xi}^i = \mathrm{const}$. ■

Таким образом, *уравнения* (6.22), (6.23) *и последующие выражают тот факт, что тензорные поля* a^i_{jk}, $b^i_{jk\ell}$, …, *определенные на три-ткани* W, *инвариантны вдоль траекторий векторного поля* ξ *относительно группы автоморфизмов, порожденной этим полем.* Из теоремы 6.14 вытекает важное

Следствие. *Три-ткань* $W = (X, \lambda_\alpha)$ *допускает* N*-параметрическую группу автоморфизмов тогда и только тогда, когда существует такое расслоение многообразия* X, *на* N*-мерных слоях которого в некотором семействе реперов компоненты всех основных тензоров ткани* W *постоянны.*

5. Найдем автоморфизмы параллелизуемых и групповых три-тканей. Пусть параллельная ткань задана, как и в § 5 гл. 1, в аффинном пространстве A^{2r} размерности $2r$ уравнениями $x^i = \mathrm{const}$, $y^i = \mathrm{const}$, $x^i + y^i = \mathrm{const}$. Автоморфизмами этой ткани будут линейные преобразования вида

$$'x^i = A^i_j x^j + B^i, \quad 'y^i = A^i_j y^j + C^i$$

и только они. В данном случае группа автоморфизмов зависит от $r^2 + 2r$, т. е. от максимального числа параметров. Несложно доказать и обратное: если группа автоморфизмов некоторой три-ткани W зависит от максимального числа параметров, то эта ткань будет параллелизуемой (задача 6.5).

Пусть три-ткань W является групповой, т. е. задана, как и в § 5 гл. 1, на прямом произведении $X = G \times G^{-1}$, где G — r−мерная группа Ли. Тогда в соответствии с § 5 гл. 1 тензор кривизны $b^i_{jk\ell}$ равен нулю, а формы ω^i_j могут быть приведены к нулю, в результате чего тензор кручения a^i_{jk} станет постоянным и совпадет со структурным тензором группы G. Из (6.21) находим в этом случае, что $\xi^i_j = c^i_j = \mathrm{const}$, а уравнения (6.18) принимают вид:

$$d\underset{1}{\xi}^i = (c^i_j + 2a^i_{jk}\underset{1}{\xi}^k)\underset{1}{\omega}^j, \quad d\underset{2}{\xi}^i = (c^i_j - 2a^i_{jk}\underset{2}{\xi}^k)\underset{2}{\omega}^j, \tag{6.28}$$

где $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ — инвариантные формы группы G. Равенства (6.23) при этом удовлетворяются тождественно, а соотношения (6.22) сведутся к следующим:

$$a^m_{jk}c^i_m = a^i_{mk}c^m_j + a^i_{jm}c^m_k. \tag{6.29}$$

Соотношения (6.29) означают, что линейный оператор c^i_j является дифференцированием в алгебре Ли g группы G. Каждому решению c^i_j системы (6.29) отвечает решение вполне интегрируемой системы (6.28). В частности, при $c^i_j = 0$ система (6.28) определяет $2r$-параметрическое семейство сдвигов на прямом произведении $X = G \times G^{-1}$, сохраняющих слоения λ_α. Следовательно, группа всех автоморфизмов групповой три-ткани транзитивна и зависит не менее, чем от $2r$ параметров.

Укажем еще одно важное решение системы (6.28). Известно, что алгебра Ли обладает внутренними дифференцированиями вида $a^i_{jk}\xi^k$, где a^i_{jk} — структурный тензор алгебры, ξ^k — постоянные. Этим дифференцированиям отвечают внутренние автоморфизмы вида $\Phi_a = a^{-1}xa$ соответствующей группы Ли (см., например, [П-1]). В этом случае уравнения (6.28) принимают следующий вид:

$$d\underset{1}{\xi^i} = a^i_{jk}(\xi^k + 2\underset{1}{\xi^k})\underset{1}{\omega^j}, \quad d\underset{2}{\xi^i} = a^i_{jk}(\xi^k - 2\underset{2}{\xi^k})\underset{2}{\omega^j}.$$

В частности, первая подсистема допускает решение $\underset{1}{\xi^i} = -\frac{1}{2}\,\xi^i$. Ему отвечает векторное поле ξ на X, у которого горизонтальная составляющая $\xi_2 = \underset{1}{\xi^i}\underset{2}{e}_i$ имеет постоянные координаты, т. е. образует инвариантное векторное поле на подгруппе G^{-1} прямого произведения $X = G \times G^{-1}$. Аналогично, решению $\underset{2}{\xi^i} = \frac{1}{2}\,\xi^i$ второй подсистемы соответствует векторное поле ξ на X, вертикальная составляющая $\xi_1 = \underset{2}{\xi^i}\underset{1}{e}_i$ которого будет инвариантным полем на подгруппе G в X. Решение $\underset{1}{\xi^i} = -\frac{1}{2}\,\xi^i$, $\underset{2}{\xi^i} = \frac{1}{2}\,\xi^i$ определяет векторное поле ξ, инвариантное на всей группе $X = G \times G^{-1}$. В этом случае координаты поля ξ связаны условием $\underset{1}{\xi^i} + \underset{2}{\xi^i} = -\underset{3}{\xi^i} = 0$, поэтому вектор ξ касается слоя третьего слоения ткани W. Инфинитезимальные автоморфизмы такого вида мы рассматриваем в следующем параграфе.

§ 6.3. Регулярные инфинитезимальные автоморфизмы три-тканей

1. Автотопию $A = (A_\alpha)$ три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$ мы назвали в § 1 регулярной, если одно из отображений A_α является тождественным. Это означает, что слои одного из слоений ткани остаются неподвижными. В соответствии с этим определением инфинитезимальный автоморфизм ткани W назовем *правым*, *левым* или *главным*, если он переводит в себя слои первого, второго или третьего слоения соответственно.

Рассмотрим, например, *главный инфинитезимальный автоморфизм* ξ. Вектор ξ касается слоя третьего слоения, поэтому из (6.9) получаем $\underset{3}{\xi^i} = 0$. Из соотношений (6.11) следует $\underset{1}{\xi^i} + \underset{2}{\xi^i} = 0$, в силу чего из (6.18) находим:

$$(\xi^i_j - 2a^i_{jk}\xi^k)(\underset{1}{\omega^k} + \underset{2}{\omega^k}) = 0,$$

где обозначено

$$\xi^i \overset{\text{def}}{=} -\underset{1}{\xi^i} = \underset{2}{\xi^i}.$$

Так как формы $\underset{1}{\omega^k} + \underset{2}{\omega^k}$ независимы на многообразии X, то получаем:

$$\xi^i_j = 2a^i_{jk}\xi^k,$$

и уравнения (6.18) сводятся к следующим:

$$\nabla\xi^i = 0. \tag{6.30}$$

Внешнее дифференцирование уравнения (6.30) приводит к соотношениям

$$b^i_{jk\ell}\xi^j = 0. \tag{6.31}$$

Проведя аналогичные вычисления для правого и левого инфинитезимальных автоморфизмов, получим

Предложение 6.15. *Векторное поле ξ определяет главный, правый или левый инфинитезимальный автоморфизм, если оно удовлетворяет соответственно уравнениям:*

$$\xi = \xi^i\underset{3}{e}_i, \quad \underset{12}{\nabla}\xi^i = 0, \quad b^i_{jk\ell}\xi^j = 0; \tag{6.32}$$

$$\xi = \xi^i \underset{1}{e}_i, \quad \underset{23}{\nabla}\xi^i = 0, \quad b^i_{jk\ell}\xi^\ell = 0; \tag{6.33}$$

$$\xi = \xi^i \underset{2}{e}_i, \quad \underset{31}{\nabla}\xi^i = 0, \quad b^i_{jk\ell}\xi^k = 0. \tag{6.34}$$

Соотношения, стоящие справа, допускают интерпретацию в терминах касательных W-алгебр ткани. Как и в гл. 2, будем считать, что операции касательной W-алгебры точки p ткани W определены в касательном пространстве T_e к единице координатной лупы ℓ_p. Назовем подпространства, определяемые уравнениями

$$b^i_{jk\ell}(p)\xi^j = 0, \quad b^i_{jk\ell}(p)\xi^\ell = 0, \quad b^i_{jk\ell}(p)\xi^k = 0,$$

соответственно *средним, правым и левым тернарным ядром* касательной W-алгебры три-ткани W в точке p. Обозначим эти ядра через J_m, J_r и J_ℓ соответственно. Заметим, что если ткань W является муфанговой, то в силу кососимметричности тензора кривизны все три ядра совпадают с J-ядром соответствующей алгебры Мальцева (см. § 5 гл. 4).

Из сказанного вытекает, что *если ξ — регулярный инфинитезимальный автоморфизм три-ткани W, то вектор $\xi(p)$, $p \in X$, принадлежит соответствующему тернарному ядру касательной W-алгебры этой ткани в точке p.*

□ Покажем, что *каждое из ядер J_m, J_r, J_ℓ образует алгебру Ли относительно бинарной операции $[,]$, определяемой тензором кручения a^i_{jk}.*

Действительно, пусть векторы ξ, η, ζ из пространства T_ℓ удовлетворяют, например, соотношениям (6. 31) и (6.30). Свернув координаты этих векторов с равенствами (1.31), получим тождество Якоби:

$$[\xi[\eta\zeta]] + [\eta[\zeta\xi]] + [\zeta[\xi\eta]] = 0.$$

Замкнутость ядра относительно операции коммутирования вытекает из формулы, приведенной в задаче 1.21. Согласно ей коммутатор двух ковариантно постоянных векторных полей ξ и η вычисляется так:

$$[\xi, \eta]^i = -2a^i_{jk}\xi^j\eta^k.$$

Дифференцируя это равенство с помощью оператора ∇ и применяя (6.30) и (1.33), получим:

$$\nabla[\xi\eta]^i = -(b^i_{[j|\ell|k]}\underset{1}{\omega}^\ell + b^i_{[jk]\ell}\underset{2}{\omega}^\ell)\xi^j\eta^k.$$

Правая часть этого равенства обращается в нуль в силу (6.31). Следовательно, коммутатор векторных полей ξ и η также удовлетворяет уравнению (6.30), и доказательство закончено. Для ядер J_r и J_ℓ легко получаются аналогичные утверждения. ■

Предположим, что ранг системы (6.31) в некоторой точке p равен $r - s$, $s > 0$, т. е. ядро J_m в этой точке нетривиально. Тогда в некоторой ее окрестности система (6.30) имеет s независимых решений ξ^i_a, $a = 1, 2, \ldots, s$, которые определят s-мерную группу $\mathcal{A}^{(3)}_W$ локальных регулярных автоморфизмов три-ткани W. Из предложения 6.6 вытекает, что группа $\mathcal{A}^{(3)}_W$ локально изоморфна связной компоненте единице ядра N_m координатной лупы ℓ_p ткани W. Касательная алгебра Ли к группе $\mathcal{A}^{(3)}_W$ (или к ядру N_m) совпадает с алгеброй Ли J_m.

Заметим, что выбор точки p несущественен, так как ядра, взятые в разных точках, изоморфны (см. задачу 6.4). Аналогичные выводы справедливы и в двух остальных случаях.

2. Рассмотрим более подробно ткани, допускающие нетривиальную группу $\mathcal{A}^{(3)}_W$ главных регулярных автоморфизмов. Независимые решения ξ^i_a системы (6.31), $a = 1, 2, \ldots, s$, определяют распределение $2s$-мерных трансверсальных пространств. Это распределение инволютивно в силу интегрируемости уравнений (6.30). Пусть V^{2s} — некоторая интегральная поверхность указанного распределения (такие поверхности мы назвали в главе 1 трансверсальными). Обозначим $\widetilde{W}$ подткань, высекаемую на V^{2s} слоями ткани (§ 9 гл. 1). Так как векторы ξ_a параллельны в связности Черна, то (см. задачу 1.15) три-ткань $\widetilde{W}$ будет групповой, и ее координатные лупы изоморфны (по крайней мере, локально) ядру J_m координатной лупы ℓ_p ткани W.

Однопараметрическим подгруппам группы N_m соответствуют на три-ткани W двумерные трансверсальные поверхности V^2, пересекающие слои этой ткани по геодезическим линиям (§ 9 гл. 1). Пусть ℓ — одна из таких линий, лежащая в некотором слое $\mathcal{F}_3$ третьего слоения. Так как касательный бивектор к поверхности V^2 имеет вид $\xi^i \underset{1}{e_i} \wedge \xi^i \underset{2}{e_i}$, а касательная плоскость к $\mathcal{F}_3$ определяется векторами $\underset{3}{e_i}$, то касательный вектор к линии их пересечения равен $-\xi^i(\underset{1}{e_i} + \underset{2}{e_i}) = \xi^i \underset{3}{e_i}$. Сравнивая с (6.32), мы видим, что линия ℓ является интегральной линией векторного поля ξ.

Меняя слой $\mathcal{F}_3$, получим, что через каждую точку поверхности V^2 проходит интегральная линия векторного поля ξ. Поэтому поверхность V^2 инвариантна относительно инфинитезимального автоморфизма ξ. То же самое будет верно и для трансверсальной поверхности V^{2s} в случае, если система (6.30) имеет s независимых решений.

Итак доказана

Теорема 6.16. *Пусть ξ — главный инфинитезимальный автоморфизм три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$. Тогда:*

а) интегральные линии векторного поля ξ являются геодезическими относительно связности Черна;

б) многообразие X расслаивается на трансверсальные подмногообразия V^{2s} размерности $2s$, где s — размерность среднего тернарного ядра J_m W-алгебры ткани W;

в) каждая трансверсальная поверхность V^{2s} ткани содержит интегральные линии поля ξ и поэтому инвариантна относительно инфинитезимального автоморфизма ξ;

г) слои ткани W высекают на трансверсальных поверхностях V^{2s} групповые три-ткани, координатные лупы которых изоморфны среднему ядру N_m координатной лупы ткани W.

3. Опишем грассмановы три-ткани W, допускающие s-параметрическую группу регулярных автоморфизмов ($s \geqslant 1$). По теореме 6.11 такие ткани порождаются в проективном пространстве P^{r+1} гиперплоскостью X_3 и двумя гиперконусами X_1 и X_2, вершины которых имеют по крайней мере одну общую точку S. Тогда однопараметрическое семейство гомологий с центром S и двойной плоскостью X_3 и будет регулярным инфинитезимальным автоморфизмом этой ткани.

Предположим, что вершины конусов X_1 и X_2 имеют s-мерное пересечение Δ. Так как каждая точка плоскости Δ является центром однопараметрического семейства гомологий с двойной плоскостью X_3, то в этом случае группа автоморфизмов $\mathcal{A}_W^{(3)}$ зависит от $s+1$ параметров.

Обозначим $\Delta' = \Delta \cap X_3$, $\dim\Delta' = s-1$. Точкам из Δ' отвечают параболические гомологии, которые образуют s-мерную подгруппу $\widetilde{\mathcal{A}}_W^{(3)}$ в $\mathcal{A}_W^{(3)}$. Группа $\widetilde{\mathcal{A}}_W^{(3)}$ является коммутативной. Действительно, согласно предложению 6.6 координатные лупы рассматриваемой три-ткани имеют нетривиальные ядра N_m, изоморфные группе $\mathcal{A}_W^{(3)}$. Укажем подткани, соответствующие этим ядрам. Пусть p — некоторая прямая в P^{r+1}. Всякая d-плоскость, проходящая через p, высекает на грассмановой три-ткани W подткань, которой соответствует некоторая подлупа координатной лупы ℓ_p. Так как ядра являются группами, то им отвечают подткани, образованные тремя плоскостями (теорема 4.11). Но такие подткани высекаются плоскостями, содержащими плоскость Δ. Итак, ядрам координатных луп соответствуют подткани, высекаемые $(s+2)$-мерными плоскостями, содержащими s-мерную плоскость Δ. Всякая же $(s+1)$-мерная плоскость Π', проходящая через $(s-1)$-мерную плоскость Δ', пересекает конусы X_1 и X_2 и плоскость X_3 по s-мерным плоскостям, содержащим Δ', т. е. принадлежащим одному пучку. По теореме 4.11 соответствующая три-ткань будет параллелизуемой, а ее координатная лупа является коммутативной группой.

Итак, доказано

Предложение 6.17. *Грассманова три-ткань W допускает $(s+1)$-параметрическую группу регулярных автоморфизмов $\mathcal{A}_W^{(3)}$ тогда и только тогда, когда гиперповерхность X_3 будет гиперплоскостью, а гиперповерхности X_1 и X_2 — гиперконусами, вершины которых имеют пересечение Δ размерности s. Группа регулярных автоморфизмов $\mathcal{A}_W^{(3)}$ такой ткани состоит из гомологий с центрами в Δ и двойной плоскостью X_3. Если $s \geqslant 1$, то существует $(s-1)$-мерное пересечение $\Delta' = \Delta \cap X_3$, точкам которого отвечают параболические гомологии. Они образуют s-мерную коммутативную подгруппу группы $\mathcal{A}_W^{(3)}$.*

§ 6.4. *G*-ткани

1. Определение. G-тканями назовем три-ткани, допускающие транзитивную группу автоморфизмов $\mathcal{A}_W$. Из определения вытекает, что многообразие X размерности $2r$, на котором действует группа автоморфизмов G-ткани W, является однородным пространством G/H, где $G \equiv \mathcal{A}_W$ — группа Ли размерности $2r+\rho$, H — ее подгруппа размерности ρ.

Согласно теореме 6.7 координатные лупы G-ткани изоморфны между собой. С другой стороны, они главноизотопны друг другу (§ 1 гл. 2). В [Бр-1] лупы, изоморфные всем своим изотопам, названы G-лупами. Следовательно, *координатные лупы G-ткани являются G-лупами.*

Под действием группы G слои G-ткани W должны переходить также в слои этой ткани. Поэтому произвольная G-ткань образована следующим образом. Пусть группа G имеет три подгруппы G_α, $\alpha = 1, 2, 3$, размерности $r+\rho$ каждая, пересекающиеся по подгруппе H размерности ρ. Слоями ткани W на однородном пространстве $X = G/H$ будут r-мерные фактор-многообразия gG_α/gH, где $g \in G$ и, как обычно, gG_α означает смежный класс.

G-тканями являются изученные ранее групповые ткани и ткани Муфанг. В самом деле, многообразие X, несущее групповую три-ткань R, есть прямое произведение $G = G_1 \times G_1^{-1}$, где G_1 — группа Ли размерности r (§ 5 гл. 1). Слоями групповой ткани будут смежные классы группы G по ее нормальным подгруппам G_1, G_1^{-1} и по подгруппе, состоящей из элементов вида (x, x^{-1}). Принадлежность тканей Муфанг классу G-тканей вытекает из теоремы 4.21, согласно которой ткань Муфанг реализуется на группе G именно так, как описано выше.

Ткани Бола, рассмотренные в гл. 4, не входят целиком в класс G-тканей. Например, грассмановы ткани Бола, порожденные в проективном пространстве P^{r+1} гиперплоскостью π и гиперквадрикой Q, не допускают транзитивную группу автоморфизмов. В самом деле, если плоскость π удалить в бесконечность, а квадрику Q считать сферой в некоторой метрике, то аффинные преобразования, сохраняющие сферу Q, представляют собой вращения относительно ее центра. Но группа вращений действует на многообразии прямых интранзитивно.

2. Найдем структурные уравнения G-ткани. Выберем базис инвариантных форм $\underset{1}{\omega}^i, \underset{2}{\omega}^i, \sigma^\varkappa$, $\varkappa, \nu, \quad \mu = 1, \ldots \rho,\ \rho \geqslant 0$, на исходной группе G так, чтобы подгруппы G_1 и G_2 выделялись уравнениями $\underset{1}{\omega}^i = 0$ и $\underset{2}{\omega}^i = 0$ соответственно. Тогда подгруппа H выделяется уравнениями $\underset{1}{\omega}^i = \underset{2}{\omega}^i = 0$, а третья $(r+\rho)$-мерная подгруппа G_3 — системой вида

$$\lambda^i_j \underset{1}{\omega}^i + \mu^i_j \underset{2}{\omega}^j = 0$$

с постоянными коэффициентами λ^i_j и μ^i_j, удовлетворяющими условиям

$$\det(\lambda^i_j) \neq 0, \quad \det(\mu^i_j) \neq 0.$$

Введем новый базис инвариантных форм, проведя замену $\lambda^i_j \underset{1}{\omega}^j \to \underset{1}{\omega}^i$, $\mu^i_j \underset{2}{\omega}^j \to \underset{2}{\omega}^i$. В результате уравнения третьей подгруппы приведутся к виду $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$.

Рассмотрим уравнения Маурера–Картана пока только для форм $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$. В силу полной интегрируемости систем $\underset{1}{\omega}^i = 0$ и $\underset{2}{\omega}^i = 0$ они запишутся так:

$$d\underset{1}{\omega}^i = \frac{1}{2}\,\underset{1}{c}{}^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k + \underset{1}{e}{}^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k + \underset{1}{c}{}^i_{j\varkappa}\underset{1}{\omega}^j \wedge \sigma^\varkappa, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \frac{1}{2}\,\underset{2}{c}{}^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k + \underset{2}{e}{}^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k + \underset{2}{c}{}^i_{j\varkappa}\underset{2}{\omega}^j \wedge \sigma^\varkappa. \tag{6.35}$$

Все входящие сюда коэффициенты постоянны и удовлетворяют условиям $\underset{1}{c}{}^i_{(jk)} = 0$, $\underset{2}{c}{}^i_{(jk)} = 0$.

Условие интегрируемости системы $\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0$, выделяющей подгруппу G_3, приводит к соотношениям:

$$\underset{1}{e}{}^i_{[jk]} + \underset{2}{e}{}^i_{[jk]} = \frac{1}{2}(\underset{1}{c}{}^i_{jk} + \underset{2}{c}{}^i_{jk}), \quad \underset{1}{c}{}^i_{j\varkappa} = \underset{2}{c}{}^i_{j\varkappa} \overset{\text{def}}{=} c^i_{j\varkappa}. \tag{6.36}$$

В соответствии с первым равенством (6.36) обозначим

$$\frac{1}{2}\,\underset{1}{c}{}^i_{jk} - \underset{2}{e}{}^i_{[jk]} = -\frac{1}{2}\,\underset{2}{c}{}^i_{jk} + \underset{1}{e}{}^i_{[jk]} \overset{\text{def}}{=} a^i_{jk} \tag{6.37}$$

и положим

$$\omega_j^i = \underset{2}{e}{}^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^k + \underset{1}{e}{}^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^k + c^i_{j\varkappa}\sigma^\varkappa. \tag{6.38}$$

В результате уравнения (6.35) примут следующий вид:

$$d\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{1}{\omega}{}^j \wedge \omega_j^i + a^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{1}{\omega}{}^k, \quad d\underset{2}{\omega}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^j \wedge \omega_j^i - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k,$$

т. е. совпадут по форме со структурными уравнениями (1.26) три-ткани. Поэтому они определяют на однородном пространстве $X = G/H$ рассматриваемую G-ткань. Величины a^i_{jk} образуют тензор кручения этой ткани.

Выясним геометрический смысл форм ω_j^i, определяемых соотношениями (6.38). Фиксируем текущую точку p однородного пространства $X = G/H$, несущего рассматриваемую G-ткань, т. е. положим $\underset{1}{\omega}{}^i = \underset{2}{\omega}{}^i = 0$. Тогда уравнения (6.38) перейдут в уравнения $\pi_j^i = c^i_{j\varkappa}\theta^\varkappa$, где символами π_j^i и $\theta^\varkappa$ обозначены формы ω_j^i и $\sigma^\varkappa$ при фиксированных главных параметрах. Напомним, что формы π_j^i определяют согласованные преобразования реперов в касательных пространствах T_α к слоям ткани, проходящим через точку p, и являются инвариантными формами группы $\mathbf{GL}(r, R)$ — структурной группы G_W-структуры, определяемой этой три-тканью. С другой стороны, $\theta^\varkappa = \sigma^\varkappa(\delta)$ будут инвариантными формами группы H, являющейся стационарной подгруппой точки p однородного пространства X. Итак, геометрический смысл формул (6.38) состоит в том, что структурная группа G_W-структуры, определяемой G-тканью, сужается до стационарной группы H однородного пространства G/H, несущего эту G-ткань. Адаптированные реперы такой G_W-структуры связаны между собой преобразованиями с постоянными коэффициентами, поскольку определяют переход от одного инвариантного базиса группы G к другому ее инвариантному базису.

3. Найдем тензор кривизны G-ткани. Вначале запишем полностью структурные уравнения группы G. Они состоят из уравнений (6. 35) и уравнений, которым удовлетворяют формы $\theta^\varkappa$, причем последние имеют самый общий вид. С учетом (6.36) имеем:

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}{}^i &= \frac{1}{2}\,\underset{1}{c}{}^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{1}{\omega}{}^k + \underset{1}{e}{}^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k + c^i_{j\varkappa}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \sigma^\varkappa,\\
d\underset{2}{\omega}{}^i &= \frac{1}{2}\,\underset{2}{c}{}^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k + \underset{2}{e}{}^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^j \wedge \underset{1}{\omega}{}^k + c^i_{j\varkappa}\underset{2}{\omega}{}^j \wedge \sigma^\varkappa,\\
d\sigma^\varkappa &= \frac{1}{2}\,\underset{3}{c}{}^\varkappa_{\mu\nu}\sigma^\mu \wedge \sigma^\nu + \frac{1}{2}\,\underset{1}{c}{}^\varkappa_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{1}{\omega}{}^k + \bar{c}^\varkappa_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k + \frac{1}{2}\,\underset{2}{c}{}^\varkappa_{jk}\underset{2}{\omega}{}^j \wedge \underset{2}{\omega}{}^k + \underset{1}{e}{}^\varkappa_{j\nu}\underset{1}{\omega}{}^j \wedge \sigma^\nu + \underset{2}{e}{}^\varkappa_{j\nu}\underset{2}{\omega}{}^j \wedge \sigma^\nu.
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Компоненты структурного тензора группы G, входящие в правые части уравнений (6.39), удовлетворяют тождеству Якоби, которое ввиду сложного строения системы (6.39) распадается на несколько серий соотношений. В этой книге они полностью не приводятся, но читатель сможет найти их, продифференцировав внешним образом систему (6.39) (см. задачу 6.11).

Далее вычислим в соответствии с формулой (1.32) разность $d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i$. Подставим сюда ω_j^i из (6.38) и преобразуем полученное выражение с помощью структурных уравнений (6.39). В результате получим внешнюю квадратичную форму, содержащую всевозможные произведения базисных форм $\underset{1}{\omega}{}^i$, $\underset{2}{\omega}{}^i$, $\sigma^\varkappa$. Однако в силу тождеств Якоби, которым удовлетворяют коэффициенты уравнений (6.39), все слагаемые, кроме $b^i_{jk\ell}\underset{1}{\omega}{}^k \wedge \underset{2}{\omega}{}^\ell$, обратятся в нуль, а тензор кривизны $b^i_{jk\ell}$ примет вид:

$$b^i_{jk\ell} = \underset{1}{e}{}^m_{k\ell}\underset{2}{e}{}^i_{jm} - \underset{2}{e}{}^m_{\ell k}\underset{1}{e}{}^i_{jm} - \underset{2}{e}{}^m_{jk}\underset{1}{e}{}^i_{m\ell} + \underset{1}{e}{}^m_{j\ell}\underset{2}{e}{}^i_{mk} + c^i_{j\varkappa}\bar{c}^\varkappa_{k\ell}. \tag{6.40}$$

С помощью формулы (6.40) получается один неожиданный результат о групповых тканях. Как уже было отмечено в начале параграфа, групповая ткань определена на прямом произведении групп, т. е. представляет собой G-ткань, у которой две из трех образующих ее подгрупп G_α являются нормальными в G. Формула (6.40) позволяет усилить этот результат.

Теорема 6.18. *Пусть G-ткань образована, как описано выше, фактор-многообразиями gG_α/gH. Если хотя бы одна из подгрупп G_α является нормальной подгруппой в G, то такая G-ткань является групповой тканью.*

□ Доказательство достаточно провести для одного из $\alpha = 1, 2, 3$, поскольку все подгруппы G_α равноправны. Пусть, например, подгруппа G_1, выделяемая уравнениями $\underset{1}{\omega}^i = 0$, является нормальной. Тогда в соответствии с известным фактом из теории групп Ли квадратичные формы $d\underset{1}{\omega}^i$ выражаются только через формы $\underset{1}{\omega}^i$, ввиду чего из (6.39) следует, что

$$\underset{1}{e}^i_{jk} = 0, \quad c^i_{j\varkappa} = 0. \tag{6.41}$$

Подставляя в (6.40), получаем $b^i_{jk\ell} = 0$. Как показано в § 5 гл. 1, это тензорное условие характеризует групповые три-ткани. ■

Проведенное аналитическое доказательство дополним геометрическими рассуждениями, выясняющими строение рассмотренной в теореме 6.18 групповой G-ткани. Во-первых, в силу соотношений (6.41) подгруппа H будет нормальной в G и в G_α. Поэтому однородные пространства G/H и G_α/H являются группами. Обозначим их снова G и G_α. Рассматриваемая G-ткань будет образована смежными классами gG_α на G. Ее структурные уравнения получаются из (6.39) с учетом (6.36) и (6.41):

$$\begin{aligned} &d\underset{1}{\omega}^i = -\frac{1}{2}\underset{2}{c}^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k + \underset{2}{e}^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \quad d\underset{2}{\omega}^i = \frac{1}{2}\underset{2}{c}^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k + \underset{2}{e}^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k. \\ &d(\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i) = \frac{1}{2}\underset{2}{c}^i_{jk}(\underset{1}{\omega}^j + \underset{2}{\omega}^j)(-\underset{1}{\omega}^k + \underset{2}{\omega}^k) + \underset{2}{e}^i_{jk}(\underset{1}{\omega}^j + \underset{2}{\omega}^j) \wedge \underset{1}{\omega}^k. \end{aligned} \tag{6.42}$$

Непосредственно проверяем, что отображение $\varphi_{\alpha\beta}\colon G_\alpha \to G_\beta$ (см. § 3 гл. 1), устанавливаемое на рассматриваемой G-ткани слоями слоения φ_γ, будет изоморфизмом. Однако, как видно из уравнений (6.42), группа G не является прямым произведением своих подгрупп G_1 и G_2.

С другой стороны, уравнения групповой ткани могут быть записаны, как и в § 5 гл. 1, в следующем виде:

$$d\underset{1}{\overline{\omega}}^i = c^i_{jk}\underset{1}{\overline{\omega}}^j \wedge \underset{1}{\overline{\omega}}^k, \quad d\underset{2}{\overline{\omega}}^i = -c^i_{jk}\underset{2}{\overline{\omega}}^j \wedge \underset{2}{\overline{\omega}}^k. \tag{6.43}$$

В этом случае многообразие X, на котором задана групповая три-ткань, представляет собой прямое произведение групп: $\overline{G}_1 \times \overline{G}_1^{-1}$, $\dim\overline{G}_1 = r$. Обозначим эту группу символом $\overline{G}$. Сравнивая системы (6.42) и (6.43), мы видим, что группы G и $\overline{G}$, вообще говоря, не изоморфны. Таким образом, *одна и та же групповая три-ткань может быть реализована как G-ткань на неизоморфных между собой группах.*

Но поскольку обе системы (6.42) и (6.43) определяют одну и ту же три-ткань W, существует допустимое преобразование

$$\underset{1}{\overline{\omega}}^i = A^i_j\underset{1}{\omega}^j, \quad \underset{2}{\overline{\omega}}^i = A^i_j\underset{2}{\omega}^j, \tag{6.44}$$

связывающее между собой адаптированные корепреры $\mathcal{R} = (\underset{1}{\omega}^i, \underset{2}{\omega}^i)$ и $\overline{\mathcal{R}} = (\underset{1}{\overline{\omega}}^i, \underset{2}{\overline{\omega}}^i)$. При этом величины A^i_j не являются постоянными, так как группы G и $\overline{G}$ не изоморфны друг другу.

Функции A^i_j удовлетворяют уравнениям (1.41):

$$dA^i_j - A^i_k\omega^k_j + A^k_j\overline{\omega}^i_k = 0,$$

в которых ω^i_j и $\overline{\omega}^i_j$ — формы связности Черна относительно кореперов $\mathcal{R}$ и $\overline{\mathcal{R}}$. Формы $\overline{\omega}^i_j$ равны нулю, а формы ω^i_j находим из (6.38) с учетом (6.41):

$$\omega^i_j = \underset{2}{e}^i_{jk}\underset{1}{\omega}^k.$$

Подставляя их в предыдущее уравнение, получаем

$$dA^i_j - A^i_k\underset{2}{e}^k_{j\ell}\underset{1}{\omega}^\ell = 0. \tag{6.45}$$

Можно проверить, что в силу тождеств Якоби, найденных в задаче 6.11, эти уравнения будут вполне интегрируемы. Таким образом, если групповая три-ткань задана уравнениями (6.42), то из уравнений (6.45) мы находим величины A^i_j и с их помощью преобразуем уравнения (6.42) в «канонические» уравнения (6.43).

Величины A^i_j связывают также компоненты тензора кручения в разных базисах. Как следует из уравнений (6.37) и (6.41), в корепере $\mathcal{R}$ $a^i_{jk} = -\underset{2}{c}{}^i_{jk}$, а из уравнений (6.43) находим, что $\overline{a}^i_{jk} = c^i_{jk}$. Согласно тензорному закону преобразования имеем:

$$c^i_{jk} = -A^i_\ell \widetilde{A}^p_j \widetilde{A}^q_k \underset{2}{c}{}^\ell_{pq}, \tag{6.46}$$

где матрица $\widetilde{A}^i_j$ является обратной к матрице A^i_j. Заметим, что хотя величины A^i_j и не являются постоянными, компоненты c^i_{jk}, получающиеся по формулам (6.46), будут, тем не менее, константами (задача 6.12).

Существование неизоморфных групп G и $\overline{G}$, определяющих одну и ту же групповую три-ткань, доказывается в задаче 6.13.

4. Вернемся к общему случаю и сформулируем две основные задачи, возникающие в теории G-тканей: 1) в заданном классе три-тканей выделить подкласс G-тканей; 2) выяснить, является ли заданная три-ткань W G-тканью? Путь к решению первой задачи подсказывается тем обстоятельством, что на G-ткани постоянны компоненты всех ее основных тензоров, поскольку они выражаются через структурный тензор исходной группы G. Поэтому, чтобы выделить в заданном классе $\mathcal{K}$ тканей подкласс G-тканей, нужно положить в соответствующих структурных уравнениях (1.26), (1.32) и т. д. величины $a^i_{jk}, b^i_{jk\ell}, \ldots$ постоянными. Предположим, что получившаяся при этом система уравнений (обозначим ее $\sum$) не накладывает новых соотношений на тензоры ткани и формы $\underset{1}{\omega}{}^i$ и $\underset{2}{\omega}{}^i$. Тогда из системы $\sum$ часть форм ω^i_j выразится через главные $\underset{1}{\omega}{}^i$ и $\underset{2}{\omega}{}^i$, т. е. сузится семейство адаптированных реперов ткани. Структурные уравнения представляют собой в этом случае систему с постоянными коэффициентами, замкнутую относительно операции внешнего дифференцирования. Она определяет группу Ли G, на которой и реализуется класс $\mathcal{K}$. Следовательно, весь класс $\mathcal{K}$ входит в класс G-тканей.

Если система $\sum$ приводит к новым соотношениям на тензоры, в силу которых формы $\underset{1}{\omega}{}^i$ и $\underset{2}{\omega}{}^i$ все же остаются независимыми, то эти соотношения и выделяют в классе $\mathcal{K}$ подкласс G-тканей.

В случае, если система $\sum$ влечет соотношения на формы $\underset{1}{\omega}{}^i$ и $\underset{2}{\omega}{}^i$ независимо от каких бы то ни было соотношений на тензоры, то в классе $\mathcal{K}$ нет G-тканей.

Подробные рассуждения проводились в § 5 гл. 4, где была найдена три-ткань Муфанг минимальной размерности, и в § 3 гл. 4 при нахождении уравнений (6.38) шестимерной ткани Бола с симметричной матрицей a^{ij} ранга 1. Следовательно, последняя ткань также является G-тканью. G-тканью будет и шестимерная три-ткань Бола с несимметричной матрицей (a^{ij}) ранга 3, рассмотренная в п.4 § 3 гл. 4. Эта ткань интересна тем, что для нее подгруппа H тривиальна ($H = e$).

Один из способов решения второй задачи заключается в следующем. Пусть три-ткань W задана уравнениями (1.3). Пользуясь формулами § 5 гл. 1, найдем ее структурные уравнения. При этом, поскольку система локальных координат фиксирована, формы ω^i_j выразятся только через локальные координаты (главные параметры). В терминах теории G-структур это означает, что G_W-структура, определяемая тканью W, является e-структурой.

Если рассматриваемая три-ткань W является G-тканью, то группа Ли G, на которой она реализуется, может быть получена введением новых параметров. Отсюда следует критерий: три-ткань W будет G-тканью, если с помощью преобразования (6.44) ее структурные уравнения можно привести к такому виду, что все входящие в них функции станут постоянными. Трудность заключается в том, что нет никаких общих соображений, позволяющих найти величины A^i_j.

§ 6.5. Автоморфизмы криволинейных три-тканей

В этом параграфе мы находим конечные уравнения криволинейной три-ткани, допускающей одно- или двупараметрическое семейство автоморфизмов.

1. Структурные уравнения криволинейной ткани W имеют следующий вид (см. п. 5 § 4 гл. 1):

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega, \quad d\omega = b\omega_1 \wedge \omega_2, \quad \nabla b = db - 2b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2. \tag{6.47}$$

Продолжив последнее уравнение, придем к уравнениям

$$db_1 - 3b_1\omega = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad db_2 - 3b_2\omega = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2, \tag{6.48}$$

и конечному соотношению

$$b_{12} - b_{21} = 2b^2. \tag{6.49}$$

Предположим, рассматриваемая ткань допускает двупараметрическое семейство автоморфизмов. Тогда в соответствии с теоремой 6.14 существует семейство адаптированных реперов, в которых все относительные инварианты: b, b_1, b_2 и т. д. являются постоянными. В таком репере из предыдущих формул получаем:

$$-2b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \quad -3b_1\omega = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad -3b_2\omega = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2.$$

Предположим, что $b \neq 0$ и нормируем репер условием $b = -1/2$, тогда

$$\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \tag{6.50}$$

Исключая при этом предположении из последних уравнений форму ω, придем к равенствам:

$$-3b_1(b_1\omega_1 + b_2\omega_2) = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad -3b_2(b_1\omega_1 + b_2\omega_2) = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2.$$

В силу независимости базисных форм отсюда получаем, в частности, $b_{12} = b_{21} = -3b_1b_2$, что противоречит (6.49). Следовательно, кривизна рассматриваемой ткани равна нулю, то есть ткань является параллелизуемой. В этом случае ее уравнения приводятся к виду $z = x + y$, а автоморфизмы имеют вид: $x \to kx + a$, $y \to ky + b$, $z \to kz + a + b$. Доказано

Предложение 6.18. *Если криволинейная три-ткань допускает двупараметрическое семейство автоморфизмов, то она является параллелизуемой и обладает, следовательно, трехпараметрическим семейством* (*группой*) *автоморфизмов.*

2. Рассмотрим теперь криволинейную три-ткань W, которая не является параллелизуемой, но допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов. Пусть, как и выше, семейство адаптированных кореперов выбрано так, что $b = -1/2$ и имеет место уравнение (6.50). В этом случае из уравнения (6.48) находим:

$$db_1 = (b_{11} + 3b_1^2)\omega_1 + (b_{12} + 3b_1b_2)\omega_2, db_2 = (b_{21}b_2 + 3b_1b_2)\omega_1 + (b_{22} + 3b_1^2)\omega_2, \tag{6.51}$$

и так далее. Аналогичные уравнения могут быть получены для величин $b_{11}, b_{12}, \ldots$

Пусть рассматриваемая три-ткань W допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов. Тогда по теореме 6.14 вдоль траекторий этого семейства адаптированные реперы ткани можно выбрать так, что в этих реперах все структурные тензоры ткани станут постоянными. Следовательно, на траекториях семейства правые части уравнений (6.51) и им аналогичных обращаются в нуль. А значит, на всем многообразии ткани указанные правые части пропорциональны. Поэтому, приравнивая их нулю, мы получим дифференциальное уравнение однопараметрического семейства автоморфизмов ткани.

Далее, пропорциональность правых частей означает, что дифференциалы функций $b_2, b_{11}, b_{12}, \ldots$ пропорциональны, например, db_1. Следовательно, можно считать, что на многообразии ткани все эти функции зависят от одной переменной b_1:

$$b_2 = b_2(b_1), \quad b_{11} = b_{11}(b_1), \quad b_{12} = b_{12}(b_1),$$

и т. д. Но тогда в силу (6.50) и первого из уравнений (6.51) первое из уравнений (6.47) преобразуется следующим образом:

$$d\omega_1 = b_2(b_1)\omega_1 \wedge \omega_2 = -b_2(b_1)\omega_1 \wedge \frac{db_1}{b_{12}(b_1) + 3b_1b_2(b_1)} = \omega_1 \wedge d\theta_1(b_1),$$

где $\theta_1(b_1)$ — некоторая функция. Интегрируя последнее уравнение, найдем форму ω_1:

$$\omega_1 = e^{-\theta_1(b_1)}du. \tag{6.52}$$

Здесь u — некоторая новая переменная. Аналогично находим форму ω_2:

$$\omega_2 = e^{-\theta_2(b_1)}dv. \tag{6.53}$$

Подставив найденные значения базисных форм в первое уравнение (6.51), получим:

$$db_1 = \alpha(b_1)du + \beta(b_1)dv.$$

Отсюда следует, что частные производные от функции $b_1 \equiv \varphi(u, v)$ также являются функциями от b_1.

Обозначим через $u = \overline{\varphi}(b_1, v)$ и $v = \widetilde{\varphi}(u, b_1)$ левую и правую обратные функции для функции $b_1 = \varphi(u, v)$. Тогда из очевидных равенств

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial b_1} = 1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial b_1} = 1$$

вытекает, что производные $\dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial b_1}$ и $\dfrac{\partial\widetilde{\varphi}}{\partial b_1}$ также зависят только от b_1. Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$u = \overline{\varphi}(b_1, v) = p(b_1) + q(v), \quad v = \widetilde{\varphi}(u, b_1) = r(u) + s(b_1).$$

Решение этой системы можно записать в виде $b_1 = \varphi(u + av)$, где a — некоторая постоянная. Тогда все функции от переменной b_1 станут функциями от переменной $u + av$, в частности, базисные формы запишутся в виде:

$$\omega_1 = e^{-\theta_1(u+av)}du, \quad \omega_2 = e^{-\theta_2(u+av)}dv,$$

где θ_1 и θ_2 — уже некоторые новые функции.

Теперь найдем уравнения слоений рассматриваемой три-ткани. В соответствии с уравнениями (1.2) первое слоение задается уравнением $u = x = \mathrm{const}$, второе — уравнением $v = y = \mathrm{const}$, третье — дифференциальным уравнением

$$e^{\theta_2-\theta_1}du + dv = 0.$$

Обозначим $u + av = p$, $u - av = q$. Так как функции θ_1 и θ_2 зависят от переменой $u + av$, то последнее уравнение перепишется в виде

$$e^{\delta(p)}(dp + dq) + \frac{1}{a}(dp - dq) = 0.$$

В этом уравнении переменные разделяются, и после интегрирования мы получаем

$$u - av + f(u + av) = z.$$

Постоянная интегрирования z — параметр третьего слоения ткани. Исключая из уравнений слоений локальные координаты u и v, в соответствии с теорией придем к уравнению рассматриваемой три-ткани:

$$z = x - ay + f(x + ay).$$

После изотопического преобразования $ay \to -y$ уравнение ткани примет более простой вид:

$$z = x + y + f(x - y). \tag{6.54}$$

Доказано

Предложение 6.19. *Если криволинейная три-ткань допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов, то ее уравнение в некоторых локальных координатах приводится к виду* (6.54).

Легко указать автоморфизмы рассматриваемого класса тканей, заданных уравнением (6.54): $x \to x + a$, $y \to y + a$, $z \to z + 2a$. Траектории автоморфизмов определяются уравнениями $x - y = \mathrm{const}$.

ЗАДАЧИ

6.1. Докажите, что группы автоморфизмов изотопных луп изоморфны ([Б-2], с. 26).

6.2. Автотопия $A = (A_\alpha)$ вполне определяется заданием каких-либо двух своих компонент.
$\square$ Действительно, пусть $A = (A_1, A_2, A_3)$ и $A' = (A_1, A'_2, A_3)$ — автотопии, тогда и $A'A^{-1} = (id, A'_2 A_2^{-1}, id)$ — также автотопия. Поскольку две ее компоненты являются тождественными преобразованиями, то и $A'_2 A_2^{-1} = id$, откуда $A'_2 = A_2$, что и доказывает утверждение. $\blacksquare$

6.3. Докажите, что ядра луп будут изоморфны соответствующим группам $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}^{(\alpha)}$.

6.4. Докажите, что соответствующие ядра изотопных луп изоморфны.

6.5. Если пространство решений системы (6.18), (6.21) имеет максимальную размерность, то три-ткань параллелизуема.

6.6. Найдите условие, при котором базисный вектор $\underset{\alpha}{e_i}$ порождает инфинитезимальный автоморфизм три-ткани.

6.7. Запишите структурные уравнения три-ткани W, на которой все базисные векторы $\underset{1}{e_i}$ порождают инфинитезимальные автоморфизмы.

6.8. Докажите, что множество векторных полей $\xi = (\underset{1}{\xi}{}^i, \underset{2}{\xi}{}^i)$, являющихся решениями системы (6.18), замкнуто относительно операции коммутирования.
$\square$ Пусть $\xi = (\underset{1}{\xi}{}^i, \underset{2}{\xi}{}^i)$ и $\eta = (\underset{1}{\eta}{}^i, \underset{2}{\eta}{}^i)$ — два решения системы (6.18). В соответствии с задачей 1.21 координаты их коммутатора $\zeta = [\xi, \eta]$ вычисляются по формулам:

$$\underset{1}{\zeta}{}^i = \underset{1}{\xi}{}^j \eta^i_j - \underset{1}{\eta}{}^j \xi^i_j + 2a^i_{jk} \underset{1}{\xi}{}^j \underset{1}{\eta}{}^k, \quad \underset{2}{\zeta}{}^i = \underset{2}{\xi}{}^j \eta^i_j - \underset{2}{\eta}{}^j \xi^i_j - 2a^i_{jk} \underset{2}{\xi}{}^j \underset{2}{\eta}{}^k.$$

Дифференцируя последние уравнения и преобразуя полученный результат с помощью этих же уравнений, соотношений (6.23) и (1.31), придем к уравнениям

$$\nabla \underset{1}{\xi}{}^i = (\xi^i_j + 2a^i_{jk} \underset{1}{\xi}{}^k) \underset{1}{\omega}{}^j, \quad \nabla \underset{2}{\xi}{}^i = (\xi^i_j - 2a^i_{jk} \underset{2}{\xi}{}^k) \underset{2}{\omega}{}^j,$$

также имеющим вид (6.18). Здесь

$$\xi^i_j = \xi^k_j \eta^i_k - \eta^k_j \xi^i_k + b^i_{jk\ell} (\underset{1}{\xi}{}^k \underset{2}{\eta}{}^\ell - \underset{1}{\eta}{}^k \underset{2}{\xi}{}^\ell). \quad \blacksquare$$

6.9. Уравнения (6.28) определяют линейное представление группы G, однородное в случае $c^i_j = 0$.

6.10. Пусть инфинитезимальный автоморфизм ξ удовлетворяет условию $\xi(p) = 0$. Тогда линейный оператор ξ^i_j является дифференцированием для любого из тензоров $\underset{1}{c}$, $\underset{2}{c}$ — ковариантных производных тензора кривизны $b^i_{jk\ell}$.

6.11. Тождества Якоби, которым удовлетворяют коэффициенты уравнений (6.39) при $\sigma^\varkappa = 0$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{c}{}^i_{m[j} \underset{1}{c}{}^m_{k\ell]} = 0, \quad \underset{2}{c}{}^i_{m[j} \underset{2}{c}{}^m_{k\ell]} = 0, \\
&\underset{1}{c}{}^i_{mk} \underset{1}{e}{}^m_{j\ell} - \underset{1}{c}{}^i_{mj} \underset{1}{e}{}^m_{k\ell} - \underset{1}{e}{}^i_{m\ell} \underset{1}{c}{}^m_{jk} + \underset{1}{e}{}^i_{km} \underset{2}{e}{}^m_{\ell j} - \underset{1}{e}{}^i_{jm} \underset{2}{e}{}^m_{\ell k} = 0, \\
&\underset{1}{e}{}^i_{mk} \underset{1}{e}{}^m_{j\ell} - \underset{1}{e}{}^i_{m\ell} \underset{1}{e}{}^m_{jk} - \underset{1}{e}{}^i_{jm} \underset{2}{c}{}^m_{\ell k} = 0, \\
&\underset{2}{c}{}^i_{mk} \underset{2}{c}{}^m_{j\ell} + \underset{2}{e}{}^i_{jm} \underset{1}{e}{}^m_{k\ell} - \underset{2}{e}{}^i_{\ell m} \underset{1}{e}{}^m_{kj} + \underset{2}{c}{}^i_{\ell m} \underset{2}{e}{}^m_{jk} - \underset{1}{c}{}^i_{jm} \underset{2}{e}{}^m_{\ell k} = 0, \\
&\underset{2}{e}{}^i_{mk} \underset{2}{e}{}^i_{\ell j} - \underset{2}{e}{}^i_{mj} \underset{2}{e}{}^m_{\ell k} + \underset{2}{e}{}^i_{\ell m} \underset{1}{c}{}^m_{kj} = 0.
\end{aligned}$$

6.12. Докажите, что величины c^i_{jk}, определяемые формулами (6.46), являются постоянными.

Указание. Предварительно покажите, что величины $\widetilde{A}^i_j$, входящие в формулы (6.46), удовлетворяют уравнениям $d\widetilde{A}^i_j + \widetilde{A}^i_k \underset{2}{e}{}^k_{j\ell} \underset{1}{\omega}{}^\ell = 0$. Затем продифференцируйте равенства (6.46) и воспользуйтесь соотношениями (6.45) и тождествами Якоби, найденными в задаче 6.10.

6.13. Докажите, что системы $d\underset{1}{\omega} = 0$, $d\underset{2}{\omega} = 0$ и $d\underset{1}{\varpi} = 0$, $d\underset{2}{\varpi} = \underset{1}{\varpi} \wedge \underset{2}{\varpi}$ определяют одну и ту же двумерную три-ткань. Найдите преобразование, переводящее систему форм $(\underset{1}{\omega}, \underset{2}{\omega})$ в систему $(\underset{1}{\varpi}, \underset{2}{\varpi})$.

Указание. Воспользуйтесь уравнениями (6.45).

6.14. Криволинейная три-ткань, определяемая уравнением (6.54), будет регулярной тогда и только тогда, когда это уравнение имеет вид:

$$z = x + y + \frac{1}{\alpha} \ln \operatorname{ch}(\alpha(x - y) + \beta) + \gamma.$$

Приведите последнее уравнение подходящим изотопическим преобразованием к виду $z = x + y$.

Указание. Найдите кривизну ткани по формуле Сен-Робера и приравняйте ее нулю.

ПРИМЕЧАНИЯ

6.1. Об автотопиях квазигрупп и луп см., например, [Б-2], [Б-6], об автотопиях полных три-тканей — [БаШ-1], [Ш-18]. Теорему 6.8 доказал *Надь* в [Н-2]. Предложение 6.10 (в более широком варианте) доказано в [Ш-40].

6.2. Инфинитезимальные автотопии три-тканей изучал *Гвоздович* в [Гв-1]–[Гв-4]. Им найдены определяющие соотношения (6.18), (6.21)–(6.23). Один из важных результатов, полученный в [Гв-2], но не отраженный в шестой главе, состоит в том, что аналитические три-ткани Бола допускают r-параметрическую группу автоморфизмов. Это вытекает из следствия к теореме 7.9.

6.4. G-лупы определены *Браком* в [Бр-1], см. также гл. X в монографии [Б-2]. Гладкие G-лупы почти не изучались. Нам известна всего одна работа об аналитических G-лупах Бола [Мх-1].

G-ткани рассматривали *Барлотти* и *Штрамбах* [БаШ-1]. Более подробно эти ткани изучались в [Ш-16], [Ш-18], [ЛШ-2], [Ш-22]. Об автоморфизмах криволинейных три-тканей см. [Ш-38].

К задачам. Задача 7 взята из [Гв-4], задачу 14 см. в [Ш-38].

Глава 7

ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ОКРЕСТНОСТИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ТРИ-ТКАНИ

Успех в изучении геометрии тканей на уровне дифференциальной окрестности третьего порядка достигнут благодаря двум обстоятельствам. Во-первых, каждый из классов тканей, перечисленных в таблице 2.2 на с. 59, может быть охарактеризован особым строением тензоров кручения и кривизны a и b. Во-вторых, эти тензоры имеют вполне определенный алгебраический смысл: они определяют соответственно главную часть отклонения от коммутативности и от ассоциативности в координатной лупе ℓ_p ткани W (см. § 5 гл. 2). В результате каждый из указанных классов имеет три характеристики: условие замыкания конфигураций определенного вида, образованных слоями ткани; алгебраическое тождество; тензорное равенство. Например, групповые три-ткани характеризуются тем, что: а) на них замыкаются фигуры R; б) их координатные лупы ассоциативны; в) их тензор кривизны равен нулю.

Чтобы развить аналогичную теорию в дифференциальной окрестности порядка s при $s > 3$, нужно возникающие в этой окрестности основные тензоры типа $\begin{pmatrix}1\\ s\end{pmatrix}$ — ковариантные производные порядка $s-3$ тензора кривизны b — связать с алгебраическими тождествами от s переменных в координатных лупах ℓ_p. Другими словами, нужно найти такие пары слов $S_1(u_1, u_2, ..., u_s)$ и $S_2(u_1, u_2, ..., u_s)$, $u_1, u_2, ..., u_s \in \ell_p$, чтобы главная часть выражения $S_1 \cdot S_2^{-1}$ определялась тензором, принадлежащим дифференциальной окрестности порядка s ткани W.

Однако в целом эта проблема весьма сложна, ее полное решение известно только при $s = 4$. В настоящей главе вводятся тензоры $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$, каждый из которых определяет, подобно тензорам a и b, главную часть некоторого многочлена, составленного из четырех элементов лупы ℓ_p. Приравнивая эти многочлены единице, мы выделяем специальные классы тканей, в координатных лупах которых выполняется соответствующее тождество с четырьмя переменными. Если при этом отождествлять некоторые переменные, то будут получаться более широкие классы тканей.

§ 7.1. Внутренние отображения в координатных лупах

С произвольной лупой Q инвариантно связан ряд групп. Во-первых, это J — стационарная группа единицы. Далее, правые сдвиги на Q хотя и не образуют, вообще говоря, группу, но порождают группу, которую обозначают R_Q. Точно так же левые сдвиги порождают группу L_Q, а те и другие вместе — группу G_Q.

Рассмотрим, например, группу L_Q. В случае, если Q — группа, отображение $L\colon Q \to L_Q$ такое, что $L(x) = L_x$, есть изоморфизм, так как в силу ассоциативности $L_{x\cdot y} = L_x L_y$. Поскольку в произвольной лупе ассоциативности, вообще говоря, нет, то оператор L изоморфизмом не является и $L_{x\cdot y} \neq L_x L_y$. Последнее условие записывается в виде $\ell_{x,y} \neq id$, где $\ell_{x,y} = L_{x\cdot y}^{-1} L_x L_y$.

Операторы $\ell_{x,y}$ и $r_{x,y} = R_{x\cdot y}^{-1} R_y R_x$ порождают соответственно группы $as_\ell(Q)$ и $as_r(Q)$, называемые *ассоциантами* лупы Q, причем $as_\ell(Q)$ будет подгруппой в L_Q, а $as_r(Q)$ — в R_Q.

Отклонение от коммутативности в Q характеризуется оператором $T_x = L_x^{-1} R_x$, который называется *собственным внутренним отображением*. Операторы $\ell_{x,y}$, $r_{x,y}$, T_x оставляют на месте единицу, т. е. принадлежат группе J. По теореме Алберта–Брака они порождают подгруппу J^* *внутренних перестановок* лупы Q — ту часть группы J, которая лежит в G_Q.

В случае, если Q — координатная лупа ℓ_p три-ткани $W(X, \lambda_\alpha)$, операторы $\ell_{x,y}$ и $r_{x,y}$ определены на многообразии X. В этом параграфе мы находим их разложения в ряд Тейлора до членов четвертого порядка включительно, считая, что умножение $(\cdot)$ в лупе ℓ_p записано в виде (2.52). Следуя (2.24), для краткости обозначим $\underset{2}{\Lambda} = \Lambda$, $\underset{2,1}{\Lambda} = M$, $\underset{1,2}{\Lambda} = N$, $\underset{3,1}{\Lambda} = P$, $\underset{2,2}{\Lambda} = Q$, $\underset{1,3}{\Lambda} = R$:

$$x \cdot y = x + y + \Lambda(x,y) + \frac{1}{2}\,M(x,x,y) + \frac{1}{2}\,N(x,y,y) + \\ + \frac{1}{6}\,P(x,x,x,y) + \frac{1}{4}\,Q(x,x,y,y) + \frac{1}{6}\,R(x,y,y,y) + \{5\}. \quad (7.1)$$

Предложение 7.1. *В лупе ℓ_p имеют место следующие формулы:*

$$(xy)z = K(x,y,z) + M(x,y,z) + \Lambda(\Lambda(x,y),z) + P_1(x,x,y,z) + P_2(x,y,y,z) + Q_2(x,y,z,z) + \{5\}, \quad (7.2)$$

$$x(yz) = K(x,y,z) + N(x,y,z) + \Lambda(x,\Lambda(y,z)) + Q_1(x,x,y,z) + R_1(x,y,y,z) + R_2(x,y,z,z) + \{5\}, \quad (7.3)$$

где

$$K(x,y,z) = x + y + z + \Lambda(x,y) + \Lambda(x,z) + \Lambda(y,z) + \frac{1}{2}(M(x,x,y) + M(x,x,z) + M(y,y,z)) + \\ + \frac{1}{2}(N(x,y,y) + N(x,z,z) + N(y,z,z)) + \frac{1}{6}(P(x,x,x,y) + P(x,x,x,z) + P(y,y,y,z)) + \\ + \frac{1}{4}(Q(x,x,y,y) + Q(x,x,z,z) + Q(y,y,z,z)) + \frac{1}{6}(R(x,y,y,y) + R(x,z,z,z) + R(y,z,z,z)); \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} P_1(x,x,y,z) &= \frac{1}{2}P(x,x,y,z) + M(x,\Lambda(x,y),z) + \frac{1}{2}\Lambda(M(x,x,y),z),\\ P_2(x,y,y,z) &= \frac{1}{2}P(x,y,y,z) + M(\Lambda(x,y),y,z) + \frac{1}{2}\Lambda(N(x,y,y),z),\\ Q_1(x,x,y,z) &= \frac{1}{2}Q(x,x,y,z) + \frac{1}{2}M(x,x,\Lambda(y,z)),\\ Q_2(x,y,z,z) &= \frac{1}{2}Q(x,y,z,z) + \frac{1}{2}N(\Lambda(x,y),z,z),\\ R_1(x,y,y,z) &= \frac{1}{2}R(x,y,y,z) + N(x,y,\Lambda(y,z)) + \frac{1}{2}\Lambda(x,M(y,y,z)),\\ R_2(x,y,z,z) &= \frac{1}{2}R(x,y,z,z) + N(x,\Lambda(y,z),z) + \frac{1}{2}\Lambda(x,N(y,z,z)). \end{aligned} \quad (7.5)$$

□ Согласно (7.1) имеем:

$$(xy)z = xy + z + \Lambda(xy,z) + \frac{1}{2}M(xy,xy,z) + \frac{1}{2}N(xy,z,z) + \\ + \frac{1}{6}P(xy,xy,xy,z) + \frac{1}{4}Q(xy,xy,z,z) + \frac{1}{6}R(xy,z,z,z) + \{5\}.$$

Пусть $\underset{k}{L}(x,y)$ обозначает члены порядка k разложения xy. Слагаемые до третьего порядка включительно ряда $(xy)z$ уже найдены в §4 гл. 2:

$$\underset{3}{L}(xy \cdot z) = \frac{1}{2}M(x,x,y) + \frac{1}{2}M(x,y,y) + \Lambda(\Lambda(x,y),z) + \\ + \frac{1}{2}M(x,x,z) + \frac{1}{2}M(y,y,z) + M(x,y,z) + \frac{1}{2}N(x,z,z) + \frac{1}{2}N(y,z,z).$$

Для слагаемых четвертого порядка имеем:

$$\underset{4}{L}(xy \cdot z) = \underset{4}{L}(xy) + \Lambda(\underset{3}{L}(xy),z) + N(\underset{1}{L}(xy),\underset{2}{L}(xy),z) + \frac{1}{2}N(\Lambda(x,y),z,z) + \frac{1}{6}P(\underset{1}{L}(xy),\underset{1}{L}(xy),\underset{1}{L}(xy),z) + \\ + \frac{1}{4}Q(\underset{1}{L}(xy),\underset{1}{L}(xy),z,z) + \frac{1}{6}R((\underset{1}{L}(xy),z,z,z)).$$

Подставляя сюда

$$\underset{1}{L}(xy) = x + y, \quad \underset{2}{L}(xy) = \Lambda(x,y), \quad \underset{3}{L}(xy) = \frac{1}{2}M(x,x,y) + \frac{1}{2}N(x,y,y),$$

после несложных преобразований придем к формулам (7.2). Произведение $x(yz)$ вычисляется аналогично. ■

2. Операторы $\ell_{x,y}$ и $r_{x,y}$ можно определить равенствами

$$(xy)\ell_{x,y}(u) = x(yu), \tag{7.6}$$

$$r_{x,y}(u)(xy) = (ux)y. \tag{7.7}$$

Введем еще оператор $m_{x,y}$ равенством

$$x(m_{x,y}(u)y) = (xu)y. \tag{7.8}$$

Найдем разложения для функций $\ell_{x,y}(u)$, $r_{x,y}(u)$ и $m_{x,y}(u)$. Подробные вычисления приведем для оператора $\ell_{x,y}$. Обозначим $v = \ell_{x,y}(u)$. Согласно (7.6) имеем:

$$(xy)v = x(yu). \tag{7.9}$$

Из формул (7.2) и (7.3) получим:

$$(xy)v = K(x,y,v) + M(x,y,v) + \Lambda(\Lambda(x,y),v) + P_1(x,x,y,v) + P_2(x,y,y,v) + Q_2(x,y,v,v) + \{5\}, \tag{7.10}$$

$$x(yu) = K(x,y,u) + N(x,y,u) + \Lambda(x,\Lambda(y,u)) + Q_1(x,x,y,u) + R_1(x,y,y,u) + R_2(x,y,u,u) + \{5\}, \tag{7.11}$$

где многочлены K, P_1, Q_1, R_1, P_2, Q_2, R_2 вычисляются по формулам (7.4) и (7.5). Сравнивая в (7.10) и (7.11) члены до второго порядка включительно, получим:

$$v = u + \{2\}, \quad v = u + \Lambda(x, u - v) + \Lambda(y, u - v) + \{3\}.$$

С учетом первого равенства из второго следует

$$v = u + \{3\}. \tag{7.12}$$

Сравнение членов третьего порядка в (7.10) и (7.11) дает:

$$\begin{aligned} v = u + \frac{1}{2}\left(M(x,x,u) + M(y,y,u)\right) + \frac{1}{2}\left(N(x,u,u) + N(y,u,u)\right) - \frac{1}{2}\left(M(x,x,v) + M(y,y,v)\right) - \\ - \frac{1}{2}\left(N(x,v,v) + N(y,v,v)\right) + N(x,y,u) + \Lambda(x,\Lambda(y,u)) - M(x,y,v) - \Lambda(\Lambda(x,y),v) + \{4\}. \end{aligned}$$

Пользуясь (7.12), отсюда получаем:

$$v = u + N(x,y,u) - M(x,y,u) + \Lambda(x,\Lambda(y,u)) - \Lambda(\Lambda(x,y),u) + \{4\},$$

или, с учетом формул (2.30) и (2.51),

$$v = u + b(y,x,u) + \{4\}. \tag{7.13}$$

В силу (7.13) из формулы (7.4) находим:

$$\underset{3}{L}(K(x,y,u)) = \underset{3}{L}(K(x,y,v)), \quad \underset{4}{L}(K(x,y,u)) = \underset{4}{L}(K(x,y,v)),$$

где через $\underset{s}{L}(K)$ обозначены члены порядка s, входящие в многочлен K. Поэтому, сравнивая в (7.10) и (7.11) члены до четвертого порядка включительно и учитывая (7.12) и (7.13), получим:

$$\begin{aligned} v = u + \Lambda(x, u - v) + \Lambda(y, u - v) + b(y,x,u) + Q_1(x,x,y,u) + R_1(x,y,y,u) + R_2(x,y,u,u) - \\ - P_1(x,x,u,v) - P_2(x,y,y,v) - Q_2(x,y,u,v) + \{5\}. \end{aligned}$$

Преобразуем в этом выражении члены второго порядка с помощью (7.13), а члены четвертого порядка — с учетом (7.5). В результате найдем:

$$
\begin{aligned}
v = \ell_{x,y}(u) &= u + b(y,x,u) - \Lambda(x, b(y,x,u)) - \Lambda(y, b(y,x,u)) + \frac{1}{2}\,(Q(x,x,y,u) - P(x,x,y,u)) - \\
&- \frac{1}{2}(Q(x,y,u,u) - R(x,y,u,u)) + \frac{1}{2}R(x,y,y,u) - \frac{1}{2}P(x,y,y,u) + \frac{1}{2}M(x,x,\Lambda(y,u)) - \\
&- M(x,\Lambda(x,y),u) - M(\Lambda(x,y),y,u) + N(x,y,\Lambda(y,u)) + N(x,\Lambda(y,u),u) - \frac{1}{2}N(\Lambda(x,y),u,u) + \\
&+ \frac{1}{2}\Lambda(x, M(y,y,u)) + \frac{1}{2}\Lambda(x, N(y,u,u)) - \frac{1}{2}\Lambda(M(x,x,y),u) - \frac{1}{2}\Lambda(N(x,y,y),u) + \{5\}. \qquad (7.14)
\end{aligned}
$$

Для операторов $r_{x,y}$ и $m_{x,y}$ получаются следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
& r_{x,y}(u) = u - b(x,u,y) - \Lambda(x, b(x,u,y)) - \Lambda(y, b(x,u,y)) + \\
& + \frac{1}{2}\,(P(u,u,x,y) - Q(u,u,x,y)) + \frac{1}{2}\,(P(u,x,x,y) - R(u,x,x,y)) + \\
& + \frac{1}{2}Q(u,x,y,y) - \frac{1}{2}R(u,x,y,y) + M(u,\Lambda(u,x),y) + M(\Lambda(u,x),x,y) - \\
& - \frac{1}{2}M(u,u,\Lambda(x,y)) + \frac{1}{2}N(\Lambda(u,x),y,y) - N(u,x,\Lambda(x,y)) - N(u,\Lambda(x,y),y) + \\
& + \frac{1}{2}\Lambda(M(u,u,x),y) + \frac{1}{2}\Lambda(N(u,x,x),y) - \frac{1}{2}\Lambda(u, M(x,x,y) - \\
& - \frac{1}{2}\Lambda(u, N(x,y,y)) + \{5\};
\end{aligned}
\qquad (7.15)
$$

$$
\begin{aligned}
& m_{x,y}(u) = u - b(u,x,y) + \Lambda(x, b(u,x,y)) + \Lambda(b(u,x,y),y) + \\
& + \frac{1}{2}\,(P(x,u,u,y) - R(x,u,u,y)) + \frac{1}{2}\,(Q(x,u,y,y) - R(x,u,y,y)) + \\
& + \frac{1}{2}P(x,x,u,y) - \frac{1}{2}Q(x,x,u,y) + M(x,\Lambda(x,u),y) + M(\Lambda(x,u),u,y) - \\
& - \frac{1}{2}M(x,x,\Lambda(u,y)) + \frac{1}{2}N(\Lambda(x,u),y,y) - N(x,u,\Lambda(u,y)) - N(x,\Lambda(u,y),y) + \\
& + \frac{1}{2}\Lambda(M(x,x,u),y) + \frac{1}{2}\Lambda(N(x,u,u),y) - \frac{1}{2}\Lambda(x, M(u,u,y) - \\
& - \frac{1}{2}\Lambda(x, N(u,y,y)) + \{5\}.
\end{aligned}
\qquad (7.16)
$$

Выразим операторы $\ell_{x,y}$, $r_{x,y}$ и $m_{x,y}$ через основные тензоры три-ткани W. В [Ш-9] доказано

Предложение 7.2. *Значения основных тензоров $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$ три–ткани W в точке p многообразия X, несущего эту ткань, выражаются через коэффициенты ряда Тейлора* (2.52) *координатной лупы ℓ_p ткани W по следующим формулам:*

$$
\begin{aligned}
\underset{1}{c}{}^i_{jk\ell m} =& \underset{2,2}{\Lambda}{}^i_{kmj\ell} - \underset{3,1}{\Lambda}{}^i_{kjm\ell} - \underset{2}{\Lambda}{}^i_{kp}\underset{1,2}{\Lambda}{}^p_{mj\ell} - \underset{2}{\Lambda}{}^i_{mp}\underset{1,2}{\Lambda}{}^p_{kj\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^p_{mk}\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{pj\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^p_{j\ell}\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{kmp} - \\
& - \underset{2}{\Lambda}{}^p_{kj}\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{pm\ell} - \underset{2}{\Lambda}{}^p_{mj}\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{pk\ell} - \underset{2}{\Lambda}{}^p_{mk}\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{pj\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{mp}\underset{2,1}{\Lambda}{}^p_{jk\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{kp}\underset{2,1}{\Lambda}{}^p_{jm\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{\ell p}\underset{2,1}{\Lambda}{}^p_{kmj} - \\
& - \underset{2}{\Lambda}{}^i_{kp}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{mq}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{j\ell} - \underset{2}{\Lambda}{}^i_{mp}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{kq}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{j\ell} - \underset{2}{\Lambda}{}^i_{mp}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{\ell q}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{kj} - \underset{2}{\Lambda}{}^i_{kp}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{\ell q}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{mj} - \underset{2}{\Lambda}{}^i_{\ell p}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{jq}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{mk} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{pq}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{mk}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{j\ell};
\end{aligned}
\qquad (7.17)
$$

$$
\begin{aligned}
\underset{2}{c}{}^i_{jk\ell m} =& \underset{1,3}{\Lambda}{}^i_{kmj\ell} - \underset{2,2}{\Lambda}{}^i_{kjm\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{pm}\underset{2,1}{\Lambda}{}^p_{jk\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{p\ell}\underset{2,1}{\Lambda}{}^p_{jkm} - \underset{2}{\Lambda}{}^p_{\ell m}\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{jkp} - \underset{2}{\Lambda}{}^p_{kj}\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{p\ell m} + \\
& + \underset{2}{\Lambda}{}^p_{j\ell}\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{kmp} + \underset{2}{\Lambda}{}^p_{jm}\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{k\ell p} + \underset{2}{\Lambda}{}^p_{\ell m}\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{kjp} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{kp}\underset{1,2}{\Lambda}{}^p_{j\ell m} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{\ell p}\underset{1,2}{\Lambda}{}^p_{kjm} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{mp}\underset{1,2}{\Lambda}{}^p_{kj\ell} + \\
& + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{\ell p}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{mq}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{kj} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{mp}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{kq}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{j\ell} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{mp}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{\ell q}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{kj} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{\ell p}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{kq}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{jm} + \underset{2}{\Lambda}{}^i_{kp}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{jq}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{\ell m} - \underset{2}{\Lambda}{}^i_{pq}\underset{2}{\Lambda}{}^p_{kj}\underset{2}{\Lambda}{}^q_{\ell m}.
\end{aligned}
\qquad (7.18)
$$

Имеют место также следующие более короткие формулы:

$$
\underset{1}{c}{}^i_{jk\ell m} = \underset{2,2}{\Lambda}{}^i_{kmj\ell} - \underset{3,1}{\Lambda}{}^i_{kmj\ell} + a^i_{mp}b^p_{jk\ell} + a^i_{kp}b^p_{jm\ell} - a^p_{mk}b^i_{jp\ell} + a^i_{p\ell}\underset{2,1}{\Lambda}{}^p_{kmj} - a^p_{jk}\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{pm\ell} - a^p_{jm}\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{kp\ell} - a^p_{j\ell}\underset{2,1}{\Lambda}{}^i_{kmp}; \qquad (7.19)
$$

$$\underset{2}{c}{}^i_{jk\ell m}=\underset{1,3}{\Lambda}{}^i_{kj\ell m}-\underset{2,2}{\Lambda}{}^i_{kj\ell m}+a^i_{pm}b^p_{jk\ell}+a^i_{p\ell}b^p_{jkm}-a^p_{\ell m}b^i_{jkp}-a^i_{kp}\underset{1,2}{\Lambda}{}^p_{j\ell m}+a^p_{kj}\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{p\ell m}+a^p_{\ell j}\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{kpm}+a^p_{mj}\underset{1,2}{\Lambda}{}^i_{k\ell p}. \tag{7.20}$$

Во введенных в начале этого параграфа обозначениях последние формулы принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
-\underset{2}{c}(x,y,z,t)&=(Q-R)(y,x,z,t)-a(b(x,y,z),t)-a(b(x,y,t),z)+b(x,y,a(z,t))+a(y,N(x,z,t))-\\
&\quad-N(a(y,x),z,t)-N(y,a(z,x),t)-N(y,z,a(t,x));\\
\underset{1}{c}(x,y,z,t)&=(Q-R)(y,t,x,z)+a(t,b(x,y,z))+a(y,b(x,t,z))-b(x,a(t,y),z)+a(M(y,t,x),z)-\\
&\quad-M(a(x,y),t,z)-M(y,a(x,t),z)-M(y,t,a(x,z)).
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}
-\underset{2}{c}(y,x,u,u)&=(Q-R)(x,y,u,u)-2a(b(y,x,u),u)+a(x,N(y,u,u))-\\
&\quad-N(a(x,y),u,u)-2N(x,u,a(u,y));\\
-\underset{2}{c}(y,x,y,u)&=(Q-R)(x,y,y,u)-a(b(y,x,y),u)-a(b(y,x,u),y)+b(y,x,a(y,u))+\\
&\quad+a(x,N(y,y,u))-N(a(x,y),y,u)-N(x,y,a(u,y));\\
\underset{1}{c}(y,x,u,u)&=(Q-R)(x,x,y,u)+2a(x,b(y,x,u))+a(M(x,x,y),u)-2M(a(y,x),x,u)-\\
&\quad-M(x,x,a(y,u));\\
\underset{1}{c}(y,x,u,y)&=(Q-R)(x,y,y,u)+a(y,b(y,x,u))+a(x,b(y,y,u))-b(y,a(y,x),u)+\\
&\quad+a(M(x,y,y),u)-M(a(y,x),y,u)-M(x,y,a(y,u)).
\end{aligned} \tag{7.22}$$

Выразим из этих равенств разности $Q-R$ и $Q-P$ и подставим их в (7.14)–(7.16). После несложных преобразований с учетом соотношения $\Lambda=-a$ получим следующее выражение для $\ell_{x,y}$:

$$\begin{aligned}
\ell_{x,y}(u)&=u+b(y,x,u)+a(x,b(y,x,u))+a(y,b(y,x,u))+\\
&+\frac12(\underset{1}{c}(y,x,u,x)+\underset{1}{c}(y,x,u,y)+\underset{2}{c}(y,x,u,u)+\underset{2}{c}(y,x,y,u)-\\
&-a(b(y,x,u),u)-\frac12a(b(y,x,y),u)-\frac12a(b(y,x,u),y)+\\
&+\frac12b(y,x,a(y,u))-a(x,b(y,x,u))-\frac12a(y,b(y,x,u))-\\
&-\frac12a(x,b(y,y,u))+\frac12b(y,a(y,x),u)-\frac12a(x,M(y,y,u)-N(y,y,u))+\\
&+\frac12M(a(x,y),y,u)-\frac12N(a(x,y),y,u)+\frac12M(x,y,a(y,u))-\\
&-\frac12N(x,y,a(y,u))+\frac12a(u,M(x,y,y)-N(x,y,y))+\{5\}.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Далее с помощью равенств (2.23) и (2.51) находим:

$$\begin{aligned}
-\frac12a(x,M(y,y,u)-N(y,y,u))&=\frac12a(x,b(y,y,u))-\frac12a(x,a(y,a(y,u)));\\
\frac12M(a(x,y),y,u)-\frac12N(a(x,y),y,u)&=-\frac12b(y,a(x,y),u)+\frac12a(a(x,y),a(y,u))-\frac12a(a(a(x,y),y),u);\\
\frac12M(x,y,a(y,u))-\frac12N(x,y,a(y,u))&=-\frac12b(y,x,a(y,u))+\frac12a(x,a(y,a(y,u)))-\\
&\quad-\frac12a(a(a(x,y),a(y,u));\\
\frac12a(u,M(x,y,y)-N(x,y,y))&=-\frac12a(u,b(y,x,y))-\frac12a(u,a(a(x,y),y)).
\end{aligned}$$

Подставляя эти разности в (7.23), после простых преобразований придем к формуле:

$$\ell_{x,y}(u) = u + b(y,x,u) + \frac{1}{2}\Big(\underset{1}{c}(y,x,u,x) + \underset{1}{c}(y,x,u,y) + \underset{2}{c}(y,x,u,u) + \underset{2}{c}(y,x,y,u) + \\ + a(y, b(y,x,u)) + a(u, b(y,x,u)) - b(y, a(x,y), u)\Big) + \{5\}. \quad (7.24)$$

Возможно еще одно упрощение. Тензоры a, b, $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$ связаны соотношениями (1.39) и (1.40), которые запишем в виде:

$$-\underset{2}{c}(x,y,z,t) + \underset{2}{c}(x,y,t,z) = 2b(x,y,a(z,t)),$$
$$\underset{1}{c}(x,y,z,t) - \underset{1}{c}(x,t,z,y) = 2b(x,a(y,t),z),$$
$$\underset{1}{c}(x,y,t,z) - \underset{1}{c}(y,x,t,z) - \underset{2}{c}(x,z,y,t) + \underset{2}{c}(y,z,x,t) = 2(a(b(y,z,t),x) - a(b(x,z,t),y) + b(a(x,y),z,t). \quad (7.25)$$

С учетом второго из этих равенств формула (7.24) примет вид:

$$\ell_{x,y}(u) = u + b(y,x,u) + a(y,b(y,x,u)) + a(u,b(y,x,u)) + \\ + \frac{1}{2}\left(\underset{1}{c}(y,x,u,x) + \underset{1}{c}(y,y,u,x) + \underset{2}{c}(y,x,u,u) + \underset{2}{c}(y,x,y,u)\right) + \{5\}. \quad (7.26)$$

Для операторов $r_{x,y}$ и $m_{x,y}$ после аналогичных выкладок найдем:

$$r_{x,y}(u) = u - b(x,u,y) + a(x,b(x,u,y)) + a(u,b(x,u,y)) - \\ - \frac{1}{2}\left(\underset{1}{c}(x,x,y,u) + \underset{1}{c}(x,u,y,u) + \underset{2}{c}(x,u,y,y) + \underset{2}{c}(x,u,x,y)\right) + \{5\}; \quad (7.27)$$

$$m_{x,y}(u) = u - b(u,x,y) + b(u,a(x,u),y) - \\ - \frac{1}{2}\left(\underset{1}{c}(u,x,y,x) + \underset{1}{c}(u,x,y,u) + \underset{2}{c}(u,x,y,y) + \underset{2}{c}(u,x,u,y)\right) + \{5\}. \quad (7.28)$$

Итак, доказано

Предложение 7.3. *Главные части функций $\ell_{x,y}(u)$, $r_{x,y}(u)$ и $m_{x,y}(u)$ выражаются через тензоры a, b, $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$ по формулам*(7.26)–(7.28).

§ 7.2. Алгебраическая характеристика касательной W_4-алгебры три-ткани

1. В неассоциативной аналитической лупе $Q(\cdot)$ операторы $\ell_{x,y}$, $r_{x,y}$, $m_{x,y}$ не являются, вообще говоря, автоморфизмами, так что, например,

$$\ell_{x,y}(u \cdot v) \neq \ell_{x,y}(u) \cdot \ell_{x,y}(v).$$

Определим функции $\mathcal{L}_{x,y}(u,v)$, $\mathcal{R}_{x,y}(u,v)$, $\mathcal{M}_{x,y}(u,v)$ равенствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{x,y}(u,v) &= {}^{-1}(\ell_{x,y}(u \cdot v))(\ell_{x,y}(u) \cdot \ell_{x,y}(v)), \\ \mathcal{R}_{x,y}(u,v) &= {}^{-1}(r_{x,y}(u \cdot v))(r_{x,y}(u) \cdot r_{x,y}(v)), \\ \mathcal{M}_{x,y}(u,v) &= {}^{-1}(m_{x,y}(u \cdot v))(m_{x,y}(u) \cdot m_{x,y}(v)). \end{aligned} \quad (7.29)$$

Если, например, оператор $\ell_{x,y}$ будет автоморфизмом в Q, то $\mathcal{L}_{x,y}(u,v) = id$.

Лемма 7.4. *Для любых x, y, u, v из Q имеет место равенство*

$$\mathcal{L}_{x,y}(u,v) = \ell_{x,y}(u) \cdot \ell_{x,y}(v) - \ell_{x,y}(u \cdot v) + \{5\}. \quad (7.30)$$

Аналогичные равенства выполняются для $\mathcal{R}_{x,y}(u,v)$ и $\mathcal{M}_{x,y}(u,v)$.

□ Обозначим $\overline{u} = \ell_{x,y}(u \cdot v)$, $\overline{v} = \ell_{x,y}(u) \cdot \ell_{x,y}(v)$ и разложим в ряд функции $\overline{u}$ и $\overline{v}$, пользуясь формулами (7.26) и (7.19). Вычисления показывают, что $\overline{u}$ и $\overline{v}$ отличаются членами не ниже пятого порядка:

$$\overline{v} = \overline{u} + \{5\}. \quad (7.31)$$

Далее, используя разложение (7.1), имеем:

$$\mathcal{L}_{x,y}(u,v) = {}^{-1}\overline{u}\cdot\overline{v} = -\overline{u}+\overline{v}+\Lambda({}^{-1}\overline{u},\overline{v})+\frac{1}{2}M({}^{-1}\overline{u},{}^{-1}\overline{u},\overline{v})+\frac{1}{2}N({}^{-1}\overline{u},\overline{v},\overline{v})+$$
$$+\frac{1}{6}P({}^{-1}\overline{u},{}^{-1}\overline{u},{}^{-1}\overline{u},\overline{v})+\frac{1}{4}Q({}^{-1}\overline{u},{}^{-1}\overline{u},\overline{v},\overline{v})+\frac{1}{6}R({}^{-1}\overline{u},\overline{v},\overline{v},\overline{v})+\{5\}.$$

Выражение для ${}^{-1}\overline{u}$ через $\overline{u}$ найдено в задаче 7.1. Подставляя его в предыдущую формулу и учитывая (7.31), после несложных преобразований получим требуемый результат. ■

Теорема 7.5. *Пусть ℓ_p — координатная лупа некоторой три-ткани W. Тогда справедливы следующие формулы:*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{x,y}(u,v) &= \mathcal{L}(x,y,u,v)+\{5\},\\ \mathcal{R}_{x,y}(u,v) &= \mathcal{R}(x,y,u,v)+\{5\},\\ \mathcal{M}_{x,y}(u,v) &= \mathcal{M}(x,y,u,v)+\{5\},\end{aligned}\tag{7.32}$$

где $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$ — полилинейные формы, выражающиеся через основные тензоры ткани:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x,y,u,v) &= -\underset{2}{c}(y,x,u,v)-2a(u,b(y,x,v)),\\ \mathcal{R}(x,y,u,v) &= -\underset{1}{c}(x,v,y,u)+2a(v,b(x,u,y)),\\ \mathcal{M}(x,y,u,v) &= \underset{1}{c}(v,u,y,x)+\underset{2}{c}(u,x,v,y).\end{aligned}\tag{7.33}$$

□ Доказательство приведем для оператора $\mathcal{L}_{x,y}(u,v)$. В силу (7.26) имеем:

$$\begin{aligned}\ell_{x,y}(u)\cdot\ell_{x,y}(v) &= \ell_{x,y}(u)+\ell_{x,y}(v)+\Lambda(u+b(y,x,u),v+b(y,x,u))+\\ &+\frac{1}{2}M(u,u,v)+\frac{1}{2}N(u,v,v)+\frac{1}{6}P(u,u,u,v)+\frac{1}{4}Q(u,u,v,v)+\frac{1}{6}R(u,v,v,v)+\{5\}=\\ &= u\cdot v+b(y,x,u)+\Lambda(u,b(y,x,v))+\Lambda(b(y,x,u),v)+\underset{4}{L}(\ell_{x,y}(u))+\underset{4}{L}(\ell_{x,y}(v)),\end{aligned}$$

где символ $\underset{4}{L}(\ldots)$ обозначает члены четвертого порядка в разложении функции, стоящей в скобках. С другой стороны, с точностью до членов четвертого порядка включительно,

$$\ell_{x,y}(u\cdot v) = u\cdot v+b(y,x,u\cdot v)+\underset{4}{L}(\ell_{x,y}(u\cdot v)) = u\cdot v+b(y,x,u+v+\Lambda(u,v))+\underset{4}{L}(\ell_{x,y}(u\cdot v)).$$

Подставляя все это в (7.30) и принимая во внимание, что $\Lambda=-a$, получим:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{x,y}(u,v) &= \underset{4}{L}(\ell_{x,y}(u))+\underset{4}{L}(\ell_{x,y}(v))-\underset{4}{L}(\ell_{x,y}(u\cdot v))+\\ &+\Lambda(u,b(y,x,v))+\Lambda(b(y,x,u),v)-b(y,x,\Lambda(u,v))+\{5\}=\\ &= a(u,b(y,x,u))+\frac{1}{2}\underset{2}{c}(y,x,u,u)+a(v,b(y,x,v))+\frac{1}{2}\underset{2}{c}(y,x,v,v)-a(u+v,b(y,x,u+v))-\\ &-\frac{1}{2}\underset{2}{c}(y,x,u+v,u+v)-a(u,b(y,x,v))-a(b(y,x,u),v)-b(y,x,a(u,v))+\{5\}=\\ &= \frac{1}{2}(-\underset{2}{c}(y,x,u,v)-\underset{2}{c}(y,x,v,u)-2a(u,b(y,x,v))+b(y,x,a(u,v))+\{5\}.\end{aligned}$$

Используя (7.25), приходим к (7.32). ■

Согласно (7.32) тензоры $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$ имеют следующее толкование в терминах координатных луп ткани W: они характеризуют главную часть отклонения операторов $\ell_{x,y}$, $r_{x,y}$ и $m_{x,y}$ от автоморфизма.

С помощью тензоров $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$ в касательном пространстве лупы Q введем операции арности 4 аналогично тому, как это сделано для W-алгебры в §4 гл. 2. Пусть $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $v(t)$ — гладкие линии на Q, проходящие через единицу e, причем параметр t выбран так, что $x(0)=y(0)=u(0)=$ $=v(0)=e$. Обозначим касательные векторы к этим линиям в точке e ξ, η, ζ и θ. Рассмотрим еще три линии $\mathcal{L}(t)$, $\mathcal{R}(t)$, $\mathcal{M}(t)$, где, например,

$$\mathcal{L}(t) = {}^{-1}\left(\ell_{x(t),y(t)}(u(t),v(t))\right)\left(\ell_{x(t),y(t)}(u(t))\cdot\ell_{x(t),y(t)}(v(t))\right).$$

Введем на них новый параметр, положив $t = \sqrt[4]{s}$. Тогда таким же способом, как в гл. 2, доказывается, что касательные векторы λ, ρ и μ к линиям $\mathcal{L}(\sqrt[4]{s})$, $\mathcal{R}(\sqrt[4]{s})$ и $\mathcal{M}(\sqrt[4]{s})$ в точке e определяются формулами:

$$\lambda = \mathcal{L}(\xi, \eta, \zeta, \theta), \quad \rho = \mathcal{R}(\xi, \eta, \zeta, \theta), \quad \mu = \mathcal{M}(\xi, \eta, \zeta, \theta).$$

Эти формулы вводят в касательном пространстве T_e лупы Q три операции арности 4. Эти операции связаны с бинарной и тернарной операциями, определяемыми в W-алгебре тензорами a и b, соотношениями, которые получаются, если из (7.25) и (7.33) исключить тензоры $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}(x,u,v,y) + \mathcal{M}(x,y,u,v) + \mathcal{R}(v,y,x,u) = 2a(u, b(v,x,y)) - 2a(v, b(u,x,y)),\\
&\mathcal{L}(x,y,u,v) - \mathcal{L}(x,y,v,u) = 2(b(y,x,a(u,v)) - a(b(y,x,u),v) - a(u, b(y,x,v))),\\
&\mathcal{R}(x,y,u,v) - \mathcal{R}(x,y,v,u) = 2(b(x,a(u,v),y) - a(b(x,u,y),v) - a(u, b(x,v,y))),\\
&\mathcal{M}(x,y,u,v) - \mathcal{M}(x,y,v,u) = 2(b(a(v,u),x,y) - a(b(v,x,y),u) - a(v, b(u,x,y))).
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Теперь мы можем дать другое определение W_4-алгебры, более симметричное, нежели § 5 гл. 2.

Определение. Пусть T — векторное пространство, в котором заданы бинарная, тернарная и три кватернарные операции, определяемые соответственно формами a, b, $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$. Назовем $(T; a, b, \mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{M})$ *W_4-алгеброй*, если бинарная и тернарная операции связаны обобщенным тождеством Якоби (2.31), и все пять операций удовлетворяют соотношениям (7.34).

Таким образом, к каждой точке C^4-гладкого многообразия X, несущего три-ткань W, инвариантно присоединяется касательная W_4-алгебра указанного типа. Заметим, что обе W_4-алгебры — рассмотренная здесь и во второй главе — эквивалентны, т. е. операции в одной из них выражаются через операции в другой и обратно.

2. Лупы, в которых операторы $\ell_{x,y}$ являются автоморфизмами, называются *левыми специальными лупами* или A_ℓ-лупами. Аналогично определяются *правые специальные лупы* или A_r-лупы. В соответствии с этим назовем ткани, во всех координатных лупах которых выполняются тождества

$$A_\ell: \quad \ell_{x,y}(u \cdot v) = \ell_{x,y}(u) \cdot \ell_{x,y}(v), \tag{7.35}$$

$$A_r: \quad r_{x,y}(u \cdot v) = r_{x,y}(u) \cdot r_{x,y}(v), \tag{7.36}$$

$$A_m: \quad m_{x,y}(u \cdot v) = m_{x,y}(u) \cdot m_{x,y}(v), \tag{7.37}$$

тканями A_ℓ, A_r и A_m соответственно. Таким же образом обозначим и конфигурации, соответствующие тождествам (7.35)–(7.37). Поэтому можно сказать, что тканями A_ℓ, A_r и A_m называются ткани, на которых замыкаются все конфигурации A_ℓ, A_r и A_m соответственно.

Опишем построение фигуры, определяемой, например, равенством (7.35). Сначала строим элемент $w = \ell_{x,y}(u)$, который является решением уравнения $(xy)w = x(yu)$. Его построение изображено на рис. 47. Предположим, что элементы $\ell_{x,y}(u) = w$, $\ell_{x,y}(v) = z$, $\ell_{x,y}(u \cdot v) = t$ уже построены; тогда равенство (7.35) равносильно тому, что слои $w \cdot z$ и t совпадают (рис. 48). Если все построения совместить на одном рисунке, то получим вид фигуры A_ℓ. Мы ее не приводим,

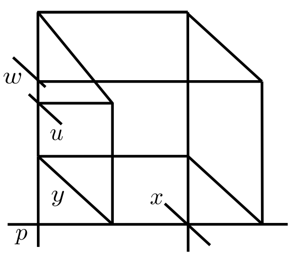

Рис. 47

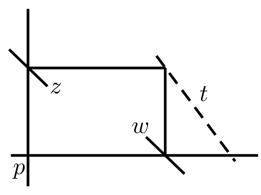

Рис. 48

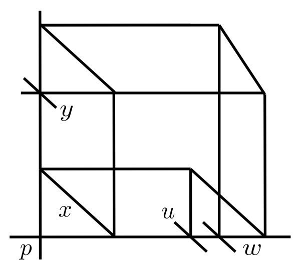

Рис. 49

так как она громоздка и, кроме того, дальше не используется. Аналогично строятся фигуры A_r и A_m; построение элемента $w = r_{x,y}(u)$ показано на рис. 49.

Отождествляя в равенствах (7.35)–(7.37) часть переменных (в частности, все), будем получать новые тождества. Назовем их и соответствующие им ткани *тождествами* и (*тканями*) *типа* A_ℓ, A_r, A_m соответственно. Соответствующие фигуры замыкания получатся из фигур A_ℓ, A_r и A_m отождествлением некоторых слоев (как, например, фигуры Бола или фигура H получаются из фигуры R, см. рисунки в § 2.2.

На тканях A_ℓ (A_r, A_m) введенные в начале параграфа функции $\mathcal{L}_{x,y}(u,v)$ ($\mathcal{R}_{x,y}(u,v)$ и $\mathcal{M}_{x,y}(u,v)$ соответственно) являются тождественными преобразованиями. С учетом равенств (7.33) это приводит к следующему утверждению.

Теорема 7.6. *Основные тензоры тканей A_ℓ, A_r и A_m связаны соответственно соотношениями*:
$$\underset{2}{c}(y,x,u,v) - 2a(u,b(y,x,v)) = 0, \quad -\underset{1}{c}(x,v,y,u) + 2a(v,b(x,u,y)) = 0,$$
$$\underset{1}{c}(v,u,y,x) + \underset{2}{c}(u,x,v,y) = 0. \tag{7.38}$$

Всякая групповая ткань (ткань R) является A-тканью, поскольку все ее координатные лупы являются группами. Примеры негрупповых A-тканей будут приведены в § 4. Там же будет показано, что тензорные соотношения (7.38) не являются достаточными для принадлежности ткани тому или иному классу A-тканей.

§ 7.3. Три-ткани с эластичными координатными лупами

1. Три-ткани, в координатных лупах которых выполняется тождество эластичности
$$E\colon\ x(yx) = (xy)x, \tag{7.39}$$
мы назвали тканями E. Очевидно, что ткань Муфанг является тканью E, поскольку ее координатные лупы являются лупами Муфанг, а в последних тождество эластичности выполняется. Пример немуфанговой ткани E приведен в упражнениях 2.26 и 2.27, см. также теорему 4.16.

Поскольку из (7.39) вытекает тождество моноассоциативности $x^2\cdot x = x\cdot x^2$, то всякая ткань E является шестиугольной. Более того, верна

Теорема 7.7. *Всякая три-ткань E есть средняя ткань Бола специального вида: ее тензоры кривизны и кручения b и a связаны соотношением*
$$b(x,y,a(x,y)) = 0. \tag{7.40}$$

□ Перепишем тождество (7.39) в эквивалентной форме: $x = \ell_{x,y}(x)$. Полагая в формуле (7.26) $u = x$ и учитывая последнее тождество, получаем три соотношения, связывающие основные тензоры ткани E:
$$b(y,x,x) = 0, \quad \underset{1}{c}(y,x,x,x) + \underset{2}{c}(y,x,x,x) = 0, \quad \underset{1}{c}(y,y,x,x) + \underset{2}{c}(y,x,y,x) = 0. \tag{7.41}$$

Первое равенство означает, что тензор кривизны кососимметричен по двум последним индексам, а это условие, как мы уже знаем (теорема 4.4), характеризует средние ткани Бола B_m. Первая часть теоремы доказана.

Так как рассматриваемая три-ткань является тканью B_m, то ковариантные производные ее тензора кривизны выражаются через тензоры кручения и кривизны по формулам (4.10), которые перепишем в безиндексной форме:
$$\underset{1}{c}(x,y,z,t) = -\underset{2}{c}(x,y,z,t) = -b(x,a(z,t),y) + b(x,a(y,z),t) + b(x,a(y,t),z).$$

С учетом этих соотношений второе из равенств (7.41) удовлетворяется тождественно, а третье примет следующий вид:
$$b(y,a(y,x),x) + b(y,a(y,x),x) + b(y,a(y,x),x) - b(y,a(y,x),x) = 0.$$

Ввиду кососимметричности тензоров a и b отсюда получаем (7.40). ■

Как следствие получаем, что G-структура, определяемая тканью E, является замкнутой структурой третьего класса, причем тензоры $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$ этой ткани выражаются через тензоры кручения и кривизны a и b по формулам (4.10). Таким образом, геометрия тканей E, как и тканей Бола, полностью определяется тензорами a и b.

Теорема 7.8. *В координатных лупах ткани E выполняются тождества вида*

$$(x^\ell y)x^n = x^\ell(yx^n), \quad \ell, n \in \mathbb{Z}. \tag{7.42}$$

□ Для натуральных ℓ и n используем обобщенную индукцию. Обозначим $E_{\ell n}$ фигуры на ткани E, соответствующие тождеству (7.42). Тождеству (7.39) при этом отвечает фигура $E = E_{11}$, изображенная на рис. 50.

Сначала докажем, что в координатных лупах ℓ_p выполняется тождество

$$(x^\ell y)x = x^\ell(yx), \tag{7.43}$$

которое получается из (7.42) при $n = 1$. При $\ell = 2$ из (7.43) вытекает тождество $(x^2y)x = x^2(yx)$, которому отвечает фигура E_{21}, изображенная на рис. 51. Докажем, что она замыкается, т. е. точки a и b лежат на одном слое третьего слоения ткани W.

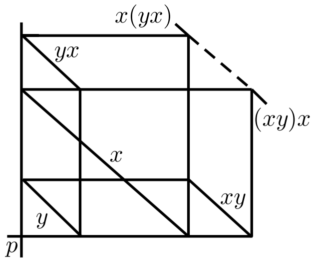

Рис. 50

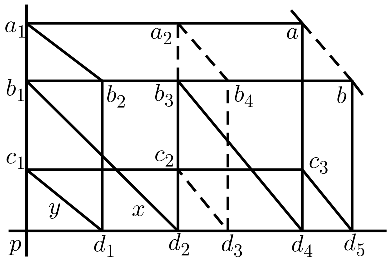

Рис. 51

Построим точки a_2, d_3, b_4, как показано на рис. 51, и рассмотрим фигуру $E^1 = (c_1d_1b_1d_2a_1b_2c_2d_3a_2b_4)$. Так как она замыкается, то a_23b_4. Далее рассмотрим фигуру $E^2 = (c_2d_3b_3d_4a_2b_4c_3d_5ab)$, из замыкания которой и получаем $a3b$.

Предположим теперь, что тождество (7.43) выполняется при $\ell = k$, и докажем, что оно выполняется при $\ell = k + 1$. Построим в лупе ℓ_p последовательно следующие слои ткани W: x^2, x^3,...,x^k, x^{k+1}, x^ky, yx, $(x^ky)x = x^k(yx)$, $x^{k+1}y$, $(x^{k+1}y)x$, $x^{k+1}(yx)$. Получится фигура, изображенная на рис. 52 сплошными линиями.

Нужно доказать, что $(x^{k+1}y)x = x^{k+1}(yx)$, т. е. что $a3b$. В силу предположения индукции замыкаются фигуры E_{k1}, так что $c3d$. Рассмотрим фигуру $E = (ghlscdoqab)$. Так как она замыкается, то $a3b$. Следовательно, тождество (7.43) выполняется при всех натуральных ℓ.

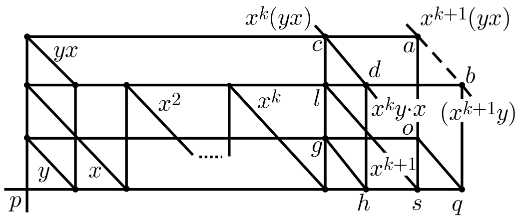

Рис. 52

Обратимся в общему случаю. Пусть тождество (7.42) выполняется при любых ℓ и при $n = 1, 2, ..., m$. Докажем, что это тождество выполняется и при $n = m + 1$. Рассмотрим произвольную фигуру $E_{\ell m+1}$, изображенную на рис. 53 сплошными линиями. Докажем, что она замыкается, т. е. что $a3b$. Построим точки d, g и c как показано на рис. 53. В результате получим фигуру $E_{\ell m} = (pgcdh)$. Так как по предположению индукции она замыкается, то $c3d$. Заметим далее, что так как ткань E является тканью H, то в ее координатных лупах выполняется тождество ассоциативности степеней, которое запишется в виде $x^i \cdot x^m = x^{i-1} \cdot x^{m+1}$. Рассматривая фигуры, соответствующие этому тождеству при $i = 2, 3, ..., \ell$, придем к выводу, что b_i3d_i для всех i.

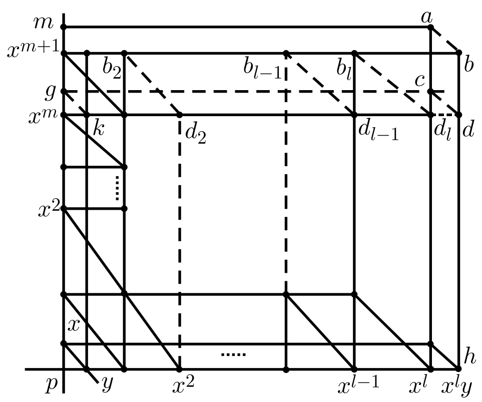

Рис. 53

Точки a и b входят в фигуру $E_{\ell 1} = (dkgmab)$, аналогичную изображенной на рис. 52, замыкание которой уже доказано. Поэтому $a3b$, т. е. замыкается рассматриваемая фигура $E_{\ell m+1}$. Таким образом, тождество (7.42) выполняется при любых натуральных ℓ и n.

Для отрицательных ℓ и n доказательство сводится к предыдущему, так как в силу упомянутой выше ассоциативности степеней выполняются тождества $x^{-1} = {}^{-1}x$ и $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1}$. ■

Заметим, что доказанное в теореме 7.8 утверждение справедливо и для любых полных три-тканей E, поскольку гладкость не предполагалась. В случае, если ткань E является геометрической, результат можно усилить.

Теорема 7.9. *В координатных лупах аналитической ткани E ассоциативны тройки элементов типа x, y, z, где y — произвольный элемент лупы, а x и z принадлежат одной и той же ее однопараметрической подгруппе.*

□ Так как ткань E является шестиугольной, то ее координатные лупы обладают максимальным количеством однопараметрических подгрупп (теорема 3.4). Элементы x^ℓ и x^n, входящие в тождество (7.42), принадлежат однопараметрической подгруппе g лупы ℓ_p, причем эта подгруппа порождается элементом x (достаточно близким к единице лупы ℓ_p). В подгруппе g однозначно разрешимо (локально!) уравнение $x^m = z$, поэтому из тождества (7.42) вытекает более общее тождество с дробным показателем:

$$\left(z^{\ell/m}y\right) z^{n/m} = z^{\ell/m} \left(yz^{n/m}\right).$$

В силу непрерывности умножения отсюда вытекает, что тождество (7.42) справедливо и при любых действительных ℓ и n. Но тогда x^ℓ и x^n могут быть двумя любыми элементами из подгруппы g. ■

2. Поскольку ткани E являются средними тканями Бола, то классификация первых основывается на классификации вторых. Наиболее исследованы изоклинные и шестиугольные ткани B_m. В последующих рассуждениях в каждом из этих классов тканей мы выделяем подкласс тканей E.

Теорема 7.10. *Класс изоклинных тканей E совпадает с классом изоклинных тканей R.*

□ Пусть W — изоклинная ткань E, тогда в силу теоремы 7.7 она будет изоклинной тканью B_m, и ее структурные тензоры a и b имеют вид (4.26) и (4.29):

$$a^i_{jk} = a_{[j}\delta^i_{k]}, \quad b^i_{jk\ell} = b_{jk}\delta^i_\ell - b_{j\ell}\delta^i_k, \quad b_{ij} = b_{ji}. \tag{7.44}$$

Воспользуемся соотношениями (7.36), которые запишем в координатной форме:

$$b^i_{jkm}a^m_{pq} + b^i_{pkm}a^m_{jq} + b^i_{jqm}a^m_{pk} + b^i_{pqm}a^m_{jk} = 0. \tag{7.45}$$

Подставляя сюда значения a и b из (7.44), после преобразований получаем:

$$-b_{jk}a_q\delta^i_p - b_{jq}a_k\delta^i_p + 2b_{jp}a_q\delta^i_k + 2b_{jp}a_k\delta^i_q - b_{pk}a_q\delta^i_j - b_{pq}a_k\delta^i_j = 0.$$

Свернув по индексам i, p, придем к равенствам $b_{jk}a_q + b_{jq}a_k = 0$, которые означают, что тензор $b_{jk}a_q$ кососимметричен по индексам q и k. Отсюда и из симметричности тензора b_{jk} вытекает, что $b_{jk}a_q = 0$.

Если хотя бы одна из величин a_q отлична от нуля, то $b_{jk} = 0$ и из (7.44) следует, что $b^i_{jk\ell} = 0$. Это тензорное равенство характеризует ткани R.

Пусть теперь все a_q равны нулю. Как показано в § 3 гл. 4, тензор a_q изоклинной ткани B_m удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla a_q = b_{q\ell}(\underset{1}{\omega}^\ell - \underset{2}{\omega}^\ell).$$

Подставляя сюда $a_q = 0$, в силу независимости базисных форм $\underset{1}{\omega}^\ell - \underset{2}{\omega}^\ell$ получим $b_{q\ell} = 0$, и, таким образом, опять приходим к тканям R. ■

В случае, если $r = 2$, тензоры a и b ткани B_m всегда могут быть записаны в виде (7.44) (см. п. 6 § 2 гл. 4). Отсюда легко выводится, что *четырехмерных тканей E, отличных от групповых, не существует.*

3. Но шестимерные нетривиальные (т. е. немуфанговы) три-ткани E существуют. Одна из таких тканей, названная тканью E_1, рассмотрена в теореме 4.16 и задачах 2.26, 2.27. Прежде чем указать другие примеры, напомним, что шестимерные ткани Бола B_m, включающие в себя класс шестимерных тканей E, классифицируется с помощью тензора a^{ij}, через который по формулам (4.36) выражается тензор кручения. При этом, согласно лемме 4.13, поле реперов на шестимерной три-ткани E может быть выбрано так, что компоненты тензора a^{ij} станут постоянными. Тензор a^{ij} удовлетворяет соотношениям (4.31) и (4.32), с помощью которых вычисляются компоненты тензора кривизны. Тензоры ткани E удовлетворяют, кроме того, еще соотношениям (7.40), которые в силу формул (4.36) принимают вид:

$$\left(b_j^{is}(\varepsilon_{kps}\varepsilon_{\ell mq}+\varepsilon_{mps}\varepsilon_{\ell kp})+b_\ell^{is}(\varepsilon_{kps}\varepsilon_{jmq}+\varepsilon_{mqs}\varepsilon_{jkp})\right)a^{pq}=0, \tag{7.46}$$

где ε_{ijk} — дискриминантный тензор (см. § 3 гл. 4). Поэтому для нахождения шестимерных тканей E нужно в каждом из классов шестимерных тканей B_m выбрать подкласс тканей, тензоры которых удовлетворяют соотношениям (7.46). Поскольку таких соотношений много, то перебрать все случаи в данной книге не представляется возможным. Однако, если это проделать, получится следующий результат.

Теорема 7.11 [Ш-29]. *Нетривиальных шестимерных тканей E с матрицей (a^{ij}) ранга 2 или 3 не существует.*

Ткань E с симметричной матрицей (a^{ij}) ранга 1 — это ткань E_1. Рассмотрим ткань B_m с несимметричной матрицей (a^{ij}) ранга 1 выясним, является ли она тканью E.

Семейство реперов на многообразии такой ткани может быть выбрано так, что матрица (a^{ij}) в каждой точке будет иметь вид:

$$(a^{ij})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

т. е. $a^{23}=1$, а остальные a^{ij} — нули. Подставив эти значения в соотношения (4.32) и (7.46), найдем, что тензор b_k^{ij} имеет всего 3 ненулевых компоненты: b_3^{32}, b_1^{22}, b_1^{32}.

Подставим найденные значения тензоров в уравнения (4.30) и (4.31). В частности, из (4.31) при $i=3$ и $j=2$ получим уравнение

$$b_1^{32}(\underset{1}{\omega}^1-\underset{1}{\omega}^1)+b_3^{32}(\underset{1}{\omega}^3-\underset{2}{\omega}^3)=0.$$

В силу независимости базисных форм отсюда следует, что $b_1^{32}=b_3^{32}=0$. В результате система (4.30), (4.31) примет вид:

$$\omega_1^1=\omega_2^1=\omega_3^1=\omega_2^3=0,\quad \omega_3^2=\frac12 b_1^{22}(\underset{1}{\omega}^1-\underset{2}{\omega}^1),\quad db_1^{22}=b_1^{22}(\omega_3^3-\omega_2^2). \tag{7.47}$$

Из последнего уравнения вытекает, что величина b_1^{22} является относительным инвариантом. Если $b_1^{22}=0$, то тензор кривизны равен нулю и мы приходим к тканям R. Предположим, что $b_1^{22}\neq 0$, и сузим семейство реперов, положив $b_1^{22}=2$, тогда из (7.47) имеем:

$$\omega_2^2-\omega_3^3=0,\quad \omega_3^2=\underset{1}{\omega}^1-\underset{2}{\omega}^1. \tag{7.48}$$

С учетом полученных уравнений система структурных уравнений (4.37), (4.38) рассматриваемой ткани Бола принимает следующий вид:

$$\begin{gathered}d\underset{1}{\omega}^1=0,\quad d\underset{1}{\omega}^3=0,\quad d\underset{1}{\omega}^2=\underset{1}{\omega}^1\wedge\omega_1^2+2\underset{1}{\omega}^1\wedge\underset{1}{\omega}^2-\underset{1}{\omega}^1\wedge\underset{1}{\omega}^3-\underset{1}{\omega}^3\wedge\underset{2}{\omega}^1,\\ d\underset{2}{\omega}^1=0,\quad d\underset{2}{\omega}^3=0,\quad d\omega_1^2=2\underset{1}{\omega}^3\wedge\underset{2}{\omega}^1-2\underset{1}{\omega}^1\wedge\underset{2}{\omega}^3,\\ d\underset{2}{\omega}^2=\underset{2}{\omega}^1\wedge\omega_1^2+\underset{2}{\omega}^1\wedge\underset{2}{\omega}^3+\underset{2}{\omega}^3\wedge\underset{1}{\omega}^1-2\underset{2}{\omega}^1\wedge\underset{2}{\omega}^3.\end{gathered} \tag{7.49}$$

Эта система содержит, помимо форм $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$ и ω_1^2, только постоянные — компоненты тензоров кручения и кривизны. Кроме того, она замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Следовательно, система (7.49) определяет некоторую семимерную группу Ли G, а соответствующая ткань Бола будет G-тканью (см. § 4 гл. 6).

Последовательно интегрируя уравнения (7.49), найдем инвариантные формы группы G:

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{\omega}^1 = du^1, \quad \underset{1}{\omega}^3 = du^3, \quad \underset{2}{\omega}^1 = dv^1, \quad \underset{2}{\omega}^3 = dv^3,\\
&\omega_1^2 = u^3 dv^1 - v^1 du^3 - u^1 dv^3 + v^3 du^1 + d\tau,\\
&\underset{1}{\omega}^2 = e^{-2u^1} du^2 - u^3 dv^1 + (u^3 + u^3 v^1 - u^1 v^3) du^1 - \tau du^1,\\
&\underset{2}{\omega}^2 = e^{-2v^1} dv^2 - u^1 dv^3 + (-v^3 - v^3 u^1 + v^1 u^3) dv^1 - \tau dv^1.
\end{aligned} \tag{7.50}$$

Слоения ткани определяются уравнениями

$$\underset{1}{\omega}^i|_{\tau=0} = 0, \quad \underset{2}{\omega}^i|_{\tau=0} = 0, \quad \underset{1}{\omega}^i|_{\tau=0} + \underset{2}{\omega}^i|_{\tau=0} = 0.$$

Обозначая параметры слоев x^i, y^i и z^i, в результате интегрирования указанных систем найдем уравнения слоений искомой ткани B_m:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1: \quad u^1 = x^1, \quad u^2 e^{2x^1} - v^1 x^3 = x^2, \quad u^3 = x^3;\\
&\lambda_2: \quad v^i = y^i;\\
&\lambda_3: \quad -u^1 + v^1 = z^1, \quad u^2 + v^2 e^{-2z^1} - z^3 u^1 e^{-2u^1} + u^1 u^3 e^{-2u^1} = z^2, \quad u^3 + v^3 = z^3.
\end{aligned}$$

После исключения локальных координат u^i и v^i придем к уравнениям ткани (или ее координатной квазигруппы):

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^3 = x^3 + y^3,$$
$$z^2 = x^2 e^{-2x^1} + y^2 e^{-2z^1} - 2z^3 e^{-2x^1} + (y^1 x^3 - x^1 y^3) e^{-2x^1}.$$

Проведя изотопическое преобразование

$$(x^2 - x^3) e^{-2x^1} \to x^2, \quad y^2 e^{-2y^1} - y^3 \to y^2,$$

получим уравнения координатной лупы с единицей $e(0,0,0)$:

$$\begin{aligned}
&z^1 = x^1 + y^1,\\
&z^2 = x^2 + y^2 e^{-x^1} + (y^1 x^3 - x^1 y^3) e^{-2x^1},\\
&z^3 = x^3 + y^3,
\end{aligned} \tag{7.51}$$

Непосредственно проверяется, что в этой лупе выполняется тождество эластичности, но не выполняется тождество Муфанг. Поскольку найденная ткань является G-тканью, то (см. § 4 гл. 6) все ее координатные лупы изоморфны и, следовательно, тоже будут эластичными. Поэтому три-ткань, определенная уравнениями (7.51), есть ткань E. Обозначим ее E_2.

Итак, верна следующая

Теорема 7.12. *Существует всего две шестимерные немуфанговы ткани E — это ткани Бола E_1 и E_2, тензор a^{ij} которых имеет ранг 1. Обе ткани являются G-тканями.*

Некоторые заключительные замечания. Во-первых, отметим, что для тканей E достаточные тензорные условия еще не найдены. Сложность проблемы связана с тем обстоятельством, что, в отличие от тканей T, R, M, B, изоклинных и трансверсально-геодезических, которые характеризуются тензорами кривизны и кручения, то есть в дифференциальной окрестности не выше третьего порядка, характеристика тканей E, как это видно из теоремы 7.7, лежит в окрестности по крайней мере четвертого порядка. В дифференциальной окрестности четвертого порядка нет других соотношений, помимо указанных в этом параграфе, связывающих тензоры кручения и кривизны ткани E. В окрестности пятого порядка есть и другие соотношения, найденные в [БдШ-1].

В заключение укажем одну открытую проблему. Из теоремы 7.7 следует, что из условия замыкания E вытекает условие замыкания B_m. Очевидно, должно существовать и геометрическое доказательство этого факта, аналогичное теоремам 2.5 и 2.6. Пока оно не известно.

§ 7.4. Некоторые специальные классы многомерных три-тканей

1. Как видно из результатов предыдущего параграфа, где были, в частности, найдены шестимерные немуфанговы ткани E, проблема существования тканей специального вида решается не просто. Собственно говоря, есть два пути решить эту проблему: доказать теорему существования или привести нетривиальный пример. Доказательство теоремы существования в подавляющем большинстве случаев приводит к очень сложным тензорным соотношениям, которые практически невозможно проанализировать (см., например, доказательство существования изоклинно-геодезических тканей в § 5 гл. 3). Поэтому для доказательства существования некоторых классов тканей мы строим соответствующий пример.

При этом примеры следует искать в таких классах тканей, которые достаточно просто описывается аналитически. К последним относятся, например, ткани, в каком-то смысле близкие к групповым тканям.

Рассмотрим три-ткани, тензоры кручения и кривизны которых ковариантно постоянны относительно связности Черна:

$$\nabla a^i_{jk} = 0,\ \nabla b^i_{jk\ell} = 0. \tag{7.52}$$

Следуя работе [Пд-3], такие ткани будем обозначать W^∇.

В силу соотношений (7.52) из (1.10) получаем $b^i_{[jk]\ell} = b^i_{[j|k|\ell]} = 0$, то есть тензор кривизны b ткани W^∇ симметричен по всем нижним индексам:

$$b^i_{jk\ell} = b^i_{(jk\ell)}. \tag{7.53}$$

В силу (7.53) из обобщенного тождества Якоби получаем соотношения

$$a^m_{[jk} a^i_{|m|\ell]} = 0, \tag{7.54}$$

которые означают, что *относительно коммутирования касательное пространство любой координатной лупы ткани W^∇ является алгеброй Ли.*

Дифференцируя уравнения (7.52) внешним образом и учитывая симметричность тензора кривизны, придем к соотношениям:

$$a^m_{jk} b^i_{mpq} - a^i_{mk} b^m_{jpq} - a^i_{jm} b^m_{kpq} = 0, \tag{7.55}$$

$$b^m_{jk\ell} b^i_{mpq} - b^m_{jpq} b^i_{mk\ell} = b^m_{kpq} b^i_{jm\ell} + b^m_{\ell pq} b^i_{jkm}, \tag{7.56}$$

$$b^i_{jkp} a^p_{\ell m} = 0. \tag{7.57}$$

С учетом (7.57) соотношения (7.55) преобразуются в следующие:

$$a^i_{mk} b^m_{jpq} + a^i_{jm} b^m_{kpq} = 0. \tag{7.58}$$

Так как ковариантные производные тензора кривизны ткани W^∇ равны нулю, то, в соответствии с определением, определяемая ею G-структура является замкнутой G-структурой класса 3.

Из определения (7.52) следует, что многообразие ткани W^∇ является локально редуктивным пространством, а соответствующая связность Черна является его канонической связностью. Таким образом, многообразие ткани явлется однородным пространством. Отсюда вытекает

Теорема 7.13. *Всякая ткань W^∇ является G-тканью, то есть для нее существует такое подсемейство адаптированных реперов, в которых компоненты тензоров кривизны и кручения являются постоянными.*

Подробное доказательство этой теоремы с описанием вложения ткани в указанное однородное пространство приведено в [Пд-3].

2. Рассмотрим четырехмерную ткань W^∇, которая одновременно является изоклинно-геодезической, то есть для нее $a^i_{jk} = 0$. Полагая в уравнениях (7.55), (7.57) и (7.58) $r = 2$ и $a^i_{jk} = 0$, найдем, что они удовлетворяются тождественно. При $r=2$ соотношения (7.56) принимают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad (b^1_{111})^2 + b^1_{112}b^2_{111} = 0,\\
&(2)\quad b^2_{111}(b^1_{111} + b^2_{112}) = 0,\\
&(3)\quad b^1_{222}(b^1_{122} + b^2_{222}) = 0,\\
&(4)\quad b^2_{122}b^1_{222} + (b^2_{222})^2 = 0,\\
&(5)\quad b^1_{112}b^1_{222} + b^1_{122}b^2_{222} = 0,\\
&(6)\quad b^2_{112}b^1_{222} + b^2_{122}b^2_{222} = 0,\\
&(7)\quad b^1_{222}b^1_{112} - 3(b^1_{122})^2 + b^2_{222}b^1_{122} - 3b^1_{222}b^2_{122} = 0,\\
&(8)\quad b^1_{222}b^2_{112} - 3b^2_{122}b^1_{122} - 2b^2_{222}b^2_{122} = 0,\\
&(9)\quad b^1_{222}b^2_{112} - b^1_{112}b^1_{122} - 2b^1_{122}b^2_{122} - b^1_{111}b^1_{222} - b^1_{112}b^1_{222} = 0,\\
&(10)\quad b^1_{222}b^2_{122} + b^2_{222}b^1_{112} - 3b^1_{122}b^1_{112} - 3b^1_{222}b^2_{112} = 0,\\
&(11)\quad b^2_{122}b^1_{112} - b^1_{222}b^2_{111} - (b^1_{112})^2 - 2b^1_{122}b^2_{112} = 0,\\
&(12)\quad (b^2_{122})^2 + b^1_{112}b^2_{122} + b^2_{222}b^2_{112} + b^1_{122}b^2_{112} = 0,\\
&(13)\quad b^2_{111}b^1_{222} - 2b^1_{111}b^1_{122} - 3b^1_{112}b^2_{122} = 0,\\
&(14)\quad b^1_{111}b^2_{122} + b^2_{111}b^2_{222} - 3b^2_{111}b^1_{122} - 3b^2_{112}b^2_{122} = 0,\\
&(15)\quad (b^1_{112})^2 + b^1_{122}b^2_{112} + b^1_{111}b^1_{122} + b^1_{112}b^2_{122} = 0,\\
&(16)\quad b^1_{222}b^2_{111} - 2b^2_{112}b^2_{222} - 3b^2_{122}b^1_{112} = 0,\\
&(17)\quad b^2_{111}b^1_{122} - 2b^1_{111}b^1_{112} - 3b^1_{112}b^2_{112} = 0,\\
&(18)\quad b^1_{111}b^2_{112} + b^2_{111}b^2_{122} - 3b^2_{111}b^1_{112} - 3(b^2_{112})^2 = 0,\\
&(19)\quad b^1_{112}b^2_{111} + (b^2_{112})^2 - 2b^2_{112}b^1_{111} - 2b^2_{122}b^2_{111} - b^1_{112}b^2_{112} - b^2_{112}b^2_{122} = 0,\\
&(20)\quad b^2_{112}b^1_{111} + b^2_{122}b^2_{111} = 0,\\
&(21)\quad b^1_{112}b^2_{112} + 2b^2_{112}b^2_{122} + b^1_{122}b^2_{111} = 0,\\
&(22)\quad b^1_{122}b^2_{111} - b^2_{122}b^2_{112} - 2b^2_{112}b^1_{112} - b^2_{122}b^1_{111} - b^2_{222}b^2_{111} = 0,\\
&(23)\quad b^1_{112}b^2_{122} - 2b^2_{112}b^1_{122} - 2b^2_{122}b^1_{122} - b^2_{111}b^1_{222} = 0,\\
&(24)\quad b^1_{222}b^2_{112} - 2b^1_{112}b^1_{122} - b^1_{122}b^2_{122} = 0.
\end{aligned}
\tag{7.59}
$$

Покажем, что система уравнений (7.59) имеет только следующие решения:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad b^2_{111} = 0, b^1_{222} = 0,\\
&2)\quad b^2_{111} \neq 0 \Rightarrow b^1_{111} = -b^2_{112}, b^1_{222} = 0,\\
&3)\quad b^2_{111} = 0, b^1_{222} \neq 0 \Rightarrow b^2_{222} = -b^1_{122}.
\end{aligned}
$$

Действительно, из соотношений (2) и (3) системы (7.59) получаем 4 варианта:

1) $b^2_{111} = 0, b^1_{222} = 0,$
2) $b^2_{111} \neq 0 \Rightarrow b^1_{111} = -b^2_{112}, b^1_{222} = 0,$
3) $b^2_{111} = 0, b^1_{222} \neq 0 \Rightarrow b^2_{222} = -b^1_{122},$
4) $b^2_{111} \neq 0 \Rightarrow b^1_{111} = -b^2_{112}, \quad b^1_{222} \neq 0 \Rightarrow b^2_{222} = -b^1_{122}.$

В случае 1) из соотношений (1), (4), (6), (7), (10), (12), (13) и (18) системы (7.59) вытекает, что все компоненты тензора кривизны равны нулю, то есть $b^i_{jk\ell} = 0$. Это означает, что рассматриваемая ткань является групповой.

В случае 2) из соотношений (4), (5), (6), (7), (10), (13), (15), (18) и (23) последовательно получаем уравнения:
$$\begin{aligned}
&b^2_{222} = 0, \quad b^1_{122}b^2_{222} = 0, \quad b^2_{122}b^2_{222} = 0,\\
&b^1_{122} = 0, \quad b^1_{112}b^2_{122} = 2(b^2_{122})^2, \quad b^2_{122} = 0,\\
&b^1_{112} = 0, \quad b^1_{111} = 0, \quad b^2_{112} = 0, \quad b^2_{222}b^2_{111} = 0.
\end{aligned}$$
В силу последних соотношений оставшиеся уравнения системы (2.1) удовлетворяются тождественно. В результате получаем следующее решение:
$$b^2_{111} \neq 0, \quad b^i_{jk\ell} = 0 \quad (i \neq 2, \quad j, k, \ell \neq 1). \tag{7.60}$$

В случае 3) находим аналогичное решение:
$$b^1_{222} \neq 0, \quad b^i_{jk\ell} = 0 \quad (i \neq 1, \quad j, k, \ell \neq 2). \tag{7.61}$$

В случае 4) из уравнений (1), (18), (16), (23), (11), (10), (22) и (17) найдем последовательно
$$b^1_{222} = b^1_{112} = b^2_{112} = b^2_{222} = -b^1_{111}, \qquad b^1_{122} = b^2_{111} = b^2_{122} = b^1_{111}.$$
В силу этих соотношений последнее уравнение (7.59) системы принимает вид $(b^1_{111})^2 = 0$. Отсюда вытекает, что все компоненты тензора кривизны равны нулю, а это противоречит предположению $b^2_{111} \neq 0$, $b^1_{222} \neq 0$.

Таким образом, могут быть лишь два класса нетривиальных (негрупповых) изоклинно-геодезических тканей W^∇. Очевидно, эти два класса геометрически симметричны. Рассмотрим, например, первый класс, определенный уравнениями (7.60). Обозначим эту ткань W^∇_4.

В силу соотношений (7.60) структурные уравнения рассматриваемой три-ткани имеют следующий вид:
$$\begin{aligned}
&d\omega^1_1 = \omega^2_1 \wedge \omega^1_2, \quad d\omega^2_2 = \omega^1_2 \wedge \omega^2_1,\\
&d\omega^2_1 = \omega^1_1 \wedge \omega^2_1 + \omega^2_1 \wedge \omega^2_2 + b^2_{111}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1,\\
&d\omega^1_2 = \omega^1_2 \wedge \omega^1_1 + \omega^2_2 \wedge \omega^1_2,
\end{aligned} \tag{7.62}$$
а из второй серии уравнений (7.52) получаем $\nabla b^2_{111} = 0$ или
$$db^2_{111} - 3b^2_{111}\omega^1_1 + b^2_{111}\omega^2_2 = 0. \tag{7.63}$$
Отсюда видно, что величина b^2_{111} является относительным инвариантом. Положим $b^2_{111} = 1$, тогда из (7.63) получим соотношение:
$$\omega^2_2 = 3\omega^1_1.$$

Как видно из уравнений (7.62), семейство адаптированных реперов ткани можно сузить, положив $\omega^1_1 = \omega^1_2 = \omega^2_2 = 0$. Оставшиеся структурные уравнения примут вид:
$$\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{1}{\omega}^2 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega^2_1,\\
&d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^2 = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega^2_1,\\
&d\omega^2_1 = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1.
\end{aligned} \tag{7.64}$$

Предложение 7.14. *Многообразие ткани W^∇_4 является однородным пространством G/H, где G — пятимерная группа Ли, H — одномерная подгруппа группы G.*

□ Система (7.64) является замкнутой системой с постоянными коэффициентами и определяет пятимерную группу Ли G с инвариантными формами $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$, ω^2_1. Многообразие, на котором задана три-ткань, является однородным пространством G/H, где одномерная подгруппа H определена системой $\underset{1}{\omega}^i = 0$, $\underset{2}{\omega}^i = 0$. ■

Из первого и третьего уравнений (7.64) получим:
$$\underset{1}{\omega}^1 = du^1, \quad \underset{2}{\omega}^1 = dv^1.$$

Тогда $d\omega_1^2 = du^1 \wedge dv^1$, откуда

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2}(u^1 dv^1 - v^1 du^1) + d\varphi, \qquad d\underset{1}{\omega}{}^2 = \frac{1}{4} d(u^1)^2 \wedge dv^1 + du^1 \wedge d\varphi.$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\underset{1}{\omega}{}^2 = \frac{1}{4}(u^1)^2 dv^1 + u^1 d\varphi + du^2.$$

В результате на форму $\underset{2}{\omega}{}^2$ получается следующее внешнее уравнение:

$$d\underset{2}{\omega}{}^2 = -\frac{1}{4} d(v^1)^2 \wedge du^1 + dv^1 \wedge d\varphi,$$

из которого находим:

$$\underset{2}{\omega}{}^2 = -\frac{1}{4}(v^1)^2 du^1 + v^1 d\varphi + dv^2.$$

Теперь найдем уравнения слоений рассматриваемой три-ткани. Первое слоение задается системой $\underset{1}{\omega}{}^1 = \underset{1}{\omega}{}^2 = 0$, или

$$du^1 = 0, \quad \frac{1}{4}(u^1)^2 dv^1 + u^1 d\varphi + du^2 = 0.$$

Интегрируя эту систему, получаем уравнения первого слоения ткани W_4^∇:

$$u^1 = x^1, \quad \frac{1}{4}(x^1)^2 v^1 + x^1 \varphi + u^2 = x^2,$$

где x^i — параметры первого слоения.

Уравнения второго слоения имеют вид $\underset{2}{\omega}{}^1 = \underset{2}{\omega}{}^2 = 0$, или

$$dv^1 = 0, \quad -\frac{1}{4}(v^1)^2 du^1 + v^1 d\varphi + dv^2 = 0.$$

Интегрируя, получим уравнения второго слоения три-ткани W_4^∇:

$$v^1 = y^1, \quad -\frac{1}{4}(y^1)^2 u^1 + y^1 \varphi + v^2 = y^2;$$

здесь y^i — параметры второго слоения ткани.

Третье слоение задается системой уравнений

$$\underset{1}{\omega}{}^1 + \underset{2}{\omega}{}^1 = 0, \quad \underset{1}{\omega}{}^2 + \underset{2}{\omega}{}^2 = 0,$$

или

$$du^1 + dv^1 = 0, \qquad \frac{1}{4}(u^1)^2 dv^1 - \frac{1}{4}(v^1)^2 du^1 + (u^1 + v^1) d\varphi + du^2 + dv^2 = 0.$$

Интегрирование дает:

$$\begin{aligned} &u^1 + v^1 = z^1, \\ &u^2 + v^2 + (u^1 + v^1)\varphi - \frac{1}{6}(u^1)^3 - \frac{1}{4}(u^1)^2 v^1 - \frac{1}{4} u^1 (v^1)^2 = z^2. \end{aligned}$$

Исключая локальные координаты u^i, v^i, φ из найденных уравнений слоений, получим уравнения рассматриваемой три-ткани W^∇:

$$\begin{aligned} &z^1 = x^1 + y^1, \\ &z^2 = -\frac{1}{6}(x^1)^3 - \frac{1}{2}(x^1)^2 y^1 + x^2 + y^2. \end{aligned}$$

После изотопического преобразования

$$x^1 = u^1, \quad x^2 = u^2 + \frac{1}{6}(u^1)^3, \quad y^1 = v^1, \quad y^2 = v^2$$

уравнения примут более простой вид:

$$\begin{aligned} z^1 &= u^1 + v^1, \\ z^2 &= u^2 + v^2 - \frac{1}{2} v^1 (u^1)^2. \end{aligned} \tag{7.65}$$

Доказана

Теорема 7.15. *С точностью до изотопии существует единственная негрупповая* 4*-x мерная три-ткань* W_4^∇ *с ковариантно постоянным тензором кривизны и нулевым тензором кручения. Многообразие ткани* W_4^∇ *является однородным пространством* G/H*, где* $\dim G = 5$, $\dim H = 1$. *При подходящем выборе параметров слоений эта ткань может быть задана уравнениями* (7.65).

Заметим, что согласно классификации В.В. Гольдберга, ткань W_4^∇ принадлежит классу E_1, см. [Го-35].

3. Предложение 7.16. *Три-ткань* W_4^∇ *является* A*-тканью.*

□ Напомним, что три-ткань W называется A-тканью, если в каждой ее координатной лупе выполняются тождества (7.35)–(7.37). Проверим выполнение этих тождеств для рассматриваемой координатной лупы, заданной уравнениями (7.65) (с единицей $e = (0, 0)$). Используя уравнения (7.65), после несложных вычислений находим:

$$\begin{aligned} &\ell_{x,y}(u) = v: \quad v^1 = u^1, \quad v^2 = u^1 + x^1 y^1 u^1; \\ &r_{x,y}(u) = v: \quad v^1 = u^1, \quad v^2 = u^2 - x^1 y^1 u^1; \\ &m_{x,y}(u) = v: \quad v^1 = u^1, \quad v^2 = u^2 + x^1 y^1 u^1. \end{aligned}$$

Проверим, например, что выполняется соотношение (7.35). Найдем левую часть этого равенства, $\ell_{x,y}(uv) \overset{\text{def}}{=} p$:

$$\begin{aligned} p^1 &= (uv)^1 = u^1 + v^1, \\ p^2 &= (uv)^2 + x^1 y^1 (uv)^1 = u^2 + v^2 - \frac{1}{2}(u^1)^2 v^1 + x^1 y^1 (u^1 + v^1). \end{aligned}$$

Теперь найдем правую часть (7.35). Имеем:

$$\begin{aligned} &\ell_{x,y}(u) = q: \quad q^1 = u^1, \quad q^2 = u^2 + x^1 y^1 u^1, \\ &\ell_{x,y}(v) = s: \quad s^1 = v^1, \quad s^2 = v^2 + x^1 y^1 v^1, \\ &\ell_{x,y}(u)\ell_{x,y}(v) = qs: \\ &(qs)^1 = q^1 + s^1 = u^1 + v^1 = p^1 \\ &(qs)^2 = q^2 + s^2 - \frac{1}{2}(q^1)^2 s^1 = u^2 + v^2 - \frac{1}{2}(u^1)^2 v^1 + x^1 y^1 (u^1 + v^1) = p^2. \end{aligned}$$

Как видно, левая и правая части тождества (7.35) полностью совпадают, т. е. это тождество действительно выполняется. Выполнение тождеств (7.36) и (7.37) доказывается аналогично. Таким образом, доказано, что координатная лупа (7.65) является A-лупой.

Далее заметим, что, поскольку рассматриваемая ткань является G-тканью, то ее координатные лупы являются G-лупами и изоморфны друг другу (§ 4 гл. 6). Следовательно, тождества (7.35)–(7.37) выполняются в каждой из этих луп, то есть все они являются A-лупами. ■

4. Предложение 7.17. *Ткань* W_4^∇ *является сопряженно замкнутой тканью.*

□ Напомним, что лупа Q называется сопряженно замкнутой, если следующие композиции левых и правых сдвигов

$$L_x \circ L_y \circ L_x^{-1}, \quad R_x^{-1} \circ R_y \circ R_x \tag{7.66}$$

являются соответственно левым и правым сдвигами, см. [НШ-1]. Ткань W называется сопряженно замкнутой, если все ее координатные лупы являются сопряженно замкнутыми.

Найдем действие оператора $L_x \circ L_y \circ L_x^{-1}$ в координатной лупе (7.65). Рассмотрим равенство $L_x \circ L_y \circ L_x^{-1}(u) = x$. Оно эквивалентно соотношению $x(yu) = xv$. Используя уравнения (7.65), в левой части получаем:

$$(x(yu))^1 = x^1 + y^1 + u^1,$$
$$(x(yu))^2 = -\frac{1}{6}(x^1)^3 - \frac{1}{2}(x^1)^2(y^1 + u^1) + x^2 - \frac{1}{6}(y^1)^3 - \frac{1}{2}(y^1)^2u^1 + y^2 + u^2.$$

В правой части имеем:

$$(xv)^1 = x^1 + v^1, \qquad (xv)^2 = -\frac{1}{6}(x^1)^3 - \frac{1}{2}(x^1)^2v^1 + x^2 + v^2.$$

Выражая координаты v^i через u^i, находим действие оператора $L_x \circ L_y \circ L_x^{-1}$:

$$v^1 = y^1 + u^1, \qquad v^2 = y^2 + u^2 - \frac{1}{6}(y^1)^3 - \frac{1}{2}(y^1)^2u^1.$$

Как видно, действие оператора полностью совпадает с уравнениями координатной лупы (7.65), а это означает, что композиция левых сдвигов является левым сдвигом.

Аналогичным образом доказывается, что композиция правых сдвигов является правым сдвигом. Так как все координатные лупы рассматриваемой ткани изоморфны (см. предыдущее доказательство), то все они также являются сопряженно замкнутыми. ■

5. Рассмотрим изоклинные три-ткани W^∇.

Напомним (см. гл. 3), что изоклинные ткани характеризуются специфическим строением тензора кручения:

$$a^i_{jk} = \frac{1}{2}(\delta^i_k a_j - \delta^i_j a_k). \tag{7.67}$$

Подставляя в (7.57), получаем:

$$b^i_{jk\ell}a_m = b^i_{jkm}a_\ell.$$

Последнее соотношение можно записать в виде:

$$\frac{b^i_{jk\ell}}{a_\ell} = \frac{b^i_{jkm}}{a_m} \overset{\text{def}}{=} \mu^i_{jk},$$

откуда

$$b^i_{jk\ell} = \mu^i_{jk}a_\ell.$$

В силу симметричности тензора кривизны по нижним индексам имеем:

$$\mu^i_{jk}a_\ell = \mu^i_{j\ell}a_k,$$

откуда

$$\frac{\mu^i_{jk}}{a_k} = \frac{\mu^i_{j\ell}}{a_\ell} \overset{\text{def}}{=} \mu^i_j,$$

и, следовательно,

$$b^i_{jk\ell} = \mu^i_j a_k a_\ell.$$

Повторяя те же рассуждения, найдем, что

$$\mu^i_j = \mu^i a_j.$$

В результате компоненты тензора кривизны выглядят так:

$$b^i_{jk\ell} = \mu^i a_j a_k a_\ell. \tag{7.68}$$

Подставляя (7.67) и (7.68) в (7.55) и сворачивая по индексам i и k, получим равенство $(1-r)\mu^m a_m a_j a_p a_q = 0$.

Мы рассматриваем многомерные ткани, т. е. считаем, что $r > 1$. Оставляя в стороне тривиальный случай $a_i = 0$ (групповые ткани), получим

$$\mu^m a_m = 0. \tag{7.69}$$

В силу (7.67) и (7.69) соотношения (7.55) и (7.56) удовлетворяются тождественно.

С учетом полученных соотношений уравнения (7.52) сведутся к уравнениям

$$\nabla a_i = 0, \quad \nabla \mu^i = 0, \tag{7.70}$$

т. е. тензоры a_i и μ^i являются ковариантно постоянными.

Структурные уравнения (1.26) и (1.32) для рассматриваемой ткани принимают вид:

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + a_j \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^i, \\ d\underset{2}{\omega}^i &= \underset{2}{\omega}^i \wedge \omega^i_j - a_j \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^i, \\ d\omega^i_j &- \omega^k_j \wedge \omega^i_k = \mu^i a_j a_k a_\ell \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell, \end{aligned} \tag{7.71}$$

Далее для упрощения вычислений сузим смемейство реперов, положив $a_1 = 1$, $a_{\widehat{i}} = 0$ $(i, j, k, \ell = \overline{1, r},\ \widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}, \widehat{\ell} = \overline{2, r})$. Тогда из соотношения (7.69) получаем $\mu^1 = 0$, $\mu^{\widehat{i}} \neq 0$, и компоненты тензоров кручения и кривизны принимают следующий вид:

$$a^{\widehat{i}}_{jk} = 0, \quad a^{i}_{\widehat{j}\widehat{k}} = 0, \quad a^1_{1\widehat{i}} \neq 0, \qquad b^1_{jk\ell} = 0, \quad b^{\widehat{i}}_{\widehat{j}\widehat{k}\widehat{\ell}} = 0, \quad b^{\widehat{i}}_{111} \neq 0. \tag{7.72}$$

Из структурных уравнений (7.71) в силу (7.72) находим $d\omega^1_j = \omega^k_j \wedge \omega^1_k$. По теореме Фробениуса система уравнений $\omega^1_j = 0$ вполне интегрируема, так что можно далее сузить семейство адаптированных реперов ткани, положив $\omega^1_j = 0$ $(j = \overline{1, r})$.

С другой стороны, из (7.71) следуют уравнения:

$$d\omega^{\widehat{i}}_{\widehat{j}} = \omega^k_{\widehat{j}} \wedge \omega^{\widehat{i}}_k = \omega^1_{\widehat{j}} \wedge \omega^{\widehat{i}}_1 + \omega^{\widehat{k}}_{\widehat{j}} \wedge \omega^{\widehat{i}}_{\widehat{k}} = \omega^{\widehat{k}}_{\widehat{j}} \wedge \omega^{\widehat{i}}_{\widehat{k}}.$$

Это означает, что система $\omega^{\widehat{i}}_{\widehat{j}} = 0$ также вполне интегрируема. Поэтому можно положить $\omega^{\widehat{i}}_{\widehat{j}} = 0$. Таким образом, ненулевыми остаются только формы $\omega^{\widehat{i}}_1$, которые удовлетворяют следующим структурным уравнениям:

$$d\omega^{\widehat{i}}_1 = \omega^k_1 \wedge \omega^{\widehat{i}}_k + \mu^{\widehat{i}} a_1 a_k a_\ell \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = \mu^{\widehat{i}} a_k a_\ell \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^\ell = \mu^{\widehat{i}} \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1.$$

В итоге структурные уравнения рассматриваемой ткани принимают вид:

$$d\underset{1}{\omega}^1 = 0, \quad d\underset{2}{\omega}^1 = 0, \tag{7.73}$$

$$d\underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} = \underset{1}{\omega}^1 \wedge \omega^{\widehat{i}}_1 + \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\widehat{i}}, \tag{7.74}$$

$$d\underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} = \underset{2}{\omega}^1 \wedge \omega^{\widehat{i}}_1 - \underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\widehat{i}}, \tag{7.75}$$

$$d\omega^{\widehat{i}}_1 = \mu^{\widehat{i}} \underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^1. \tag{7.76}$$

С учетом проведенной канонизации уравнения (7.70) сводятся к уравнениям $d\mu^{\widehat{i}} = 0$, откуда $\mu^{\widehat{i}} = \mathrm{const}$.

Система (7.73)–(7.76) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования и содержит, помимо форм, только постоянные. Следовательно, *изоклинные ткани с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения (обозначим их W_0^∇) существуют и являются G-тканями.*

Найдем теперь уравнения соответствующей координатной квазигруппы. Интегрируя уравнения (7.73), получаем:

$$\underset{1}{\omega}^1 = du^1, \quad \underset{2}{\omega}^1 = dv^1. \tag{7.77}$$

В результате уравнения (7.76) принимают вид:

$$d\omega^{\widehat{i}}_1 = \mu^{\widehat{i}} du^1 \wedge dv^1.$$

Так как $\mu^{\widehat{i}} = \mathrm{const}$, то, проинтегрировав, получим:

$$\omega_1^{\widehat{i}} = \frac{1}{2}\mu^{\widehat{i}}(u^1 dv^1 - v^1 du^1) + d\varphi^{\widehat{i}}, \tag{7.78}$$

где $\varphi^{\widehat{i}}$ — некоторые новые переменные. С учетом (7.77) и (7.78) оставшиеся структурные уравнения (7.74) и (7.75) примут вид:

$$d\underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} + \underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} \wedge du^1 = \frac{1}{2}\mu^{\widehat{i}} u^1 du^1 \wedge dv^1 + du^1 \wedge d\varphi^{\widehat{i}},$$

$$d\underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} - \underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} \wedge dv^1 = -\frac{1}{2}\mu^{\widehat{i}} v^1 dv^1 \wedge du^1 + dv^1 \wedge d\varphi^{\widehat{i}},$$

или

$$d\Big(\underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} + \frac{1}{2}\,\mu^{\widehat{i}} u^1 v^1 du^1 + \varphi^{\widehat{i}} du^1\Big) = du^1 \wedge \underset{1}{\omega}^{\widehat{i}}, \tag{7.79}$$

$$d\Big(\underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} - \frac{1}{2}\,\mu^{\widehat{i}} u^1 v^1 dv^1 + \varphi^{\widehat{i}} dv^1\Big) = -dv^1 \wedge \underset{2}{\omega}^{\widehat{i}}, \tag{7.80}$$

Полагая в этих уравнениях

$$\underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} + \frac{1}{2}\mu^{\widehat{i}} u^1 v^1 du^1 + \varphi^{\widehat{i}} du^1 = \underset{1}{\overline{\omega}}^{\widehat{i}}, \quad \underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} - \frac{1}{2}\mu^{\widehat{i}} u^1 v^1 dv^1 + \varphi^{\widehat{i}} dv^1 = \underset{2}{\overline{\omega}}^{\widehat{i}},$$

получим уравнения вида

$$d\underset{1}{\overline{\omega}}^{\widehat{i}} = du^1 \wedge \underset{1}{\overline{\omega}}^{\widehat{i}}, \tag{7.81}$$

$$d\underset{2}{\overline{\omega}}^{\widehat{i}} = -dv^1 \wedge \underset{2}{\overline{\omega}}^{\widehat{i}}, \tag{7.82}$$

Решения уравнений (7.81) и (7.82) имеют вид:

$$\underset{1}{\overline{\omega}}^{\widehat{i}} = e^{u^1} du^{\widehat{i}}, \quad \underset{2}{\overline{\omega}}^{\widehat{i}} = e^{-v^1} dv^{\widehat{i}}.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям, получаем:

$$\underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} = e^{u^1} du^{\widehat{i}} - \frac{1}{2}\mu^{\widehat{i}} u^1 v^1 du^1 - \varphi^{\widehat{i}} du^1, \tag{7.83}$$

$$\underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} = e^{-v^1} dv^{\widehat{i}} + \frac{1}{2}\mu^{\widehat{i}} u^1 v^1 dv^1 - \varphi^{\widehat{i}} dv^1. \tag{7.84}$$

Теперь найдем уравнения слоений ткани W_0^{∇}. Первое слоение задается системой $\underset{1}{\omega}^1 = 0$, $\underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} = 0$, или

$$du^1 = 0, \quad e^{u^1} du^{\widehat{i}} - \frac{1}{2}\mu^{\widehat{i}} u^1 v^1 du^1 - \varphi^{\widehat{i}} du^1 = 0.$$

После интегрирования получим

$$u^1 = x^1, \quad u^{\widehat{i}} = x^{\widehat{i}},$$

где x^i $(i = \overline{1, r})$ — параметры первого слоения.

Уравнения второго слоения $\underset{2}{\omega}^1 = 0$, $\underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} = 0$ в силу (7.77) и (7.84) принимают вид:

$$dv^1 = 0, \quad e^{-v^1} dv^{\widehat{i}} + \frac{1}{2}\mu^{\widehat{i}} u^1 v^1 dv^1 - \varphi^{\widehat{i}} dv^1 = 0.$$

Интегрируя эту систему, найдем:

$$v^1 = y^1, \quad v^{\widehat{i}} = y^{\widehat{i}},$$

где y^i $(i = \overline{1, r})$ — параметры второго слоения.

Наконец, уравнения третьего слоения имеют вид

$$\underset{1}{\omega}^1 + \underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad \underset{1}{\omega}^{\widehat{i}} + \underset{2}{\omega}^{\widehat{i}} = 0,$$

или

$$du^1 + dv^1 = 0, \qquad e^{u^1} du^{\hat{i}} - \frac{1}{2}\mu^{\hat{i}} u^1 v^1 du^1 - \varphi^{\hat{i}} du^1 + e^{-v^1} dv^{\hat{i}} + \frac{1}{2}\mu^{\hat{i}} u^1 v^1 dv^1 - \varphi^{\hat{i}} dv^1 = 0.$$

Интегрируя эту систему, найдем:

$$u^1 + v^1 = z^1, \qquad e^{z^1} u^{\hat{i}} + v^{\hat{i}} + \mu^{\hat{i}} e^{v^1}(u^1 v^1 - u^1 + v^1 - 2) = z^{\hat{i}},$$

где z^i $(i = \overline{1, r})$ — параметры третьего слоения.

Исключая из уравнений слоений локальные координаты u^i, v^i, $\varphi^{\hat{i}}$ $(i = \overline{1, r},\ \hat{i} = \overline{2, r})$, найдем уравнения рассматриваемой ткани или ее координатной квазигруппы:

$$z^1 = x^1 + y^1, \qquad z^{\hat{i}} = e^{y^1}(e^{x^1} x^{\hat{i}} + e^{-y^1} y^{\hat{i}} + \mu^{\hat{i}}(x^1 y^1 - x^1 + y^1 - 2)).$$

После изотопического преобразования

$$x^1 \to u^1, \quad \frac{e^{x^1} x^{\hat{i}}}{\mu^{\hat{i}}} \to u^{\hat{i}}; \qquad y^1 - 1 \to v^1, \quad \frac{e^{-y^1} y^{\hat{i}} + \mu^{\hat{i}}(y^1 - 2)}{\mu^{\hat{i}}} \to v^{\hat{i}}; \qquad z^1 - 1 \to z^1, \quad \frac{e^{-1} z^{\hat{i}}}{\mu^{\hat{i}}} \to z^{\hat{i}};$$

найденные выше уравнения примут более простой вид:

$$z^1 = u^1 + v^1, \quad z^{\hat{i}} = e^{v^1}(u^{\hat{i}} + v^{\hat{i}} + u^1 v^1). \tag{7.85}$$

Итак, доказана

Теорема 7.18. *Существует единственная* (*с точностью до изотопии*) *изоклинная три-ткань с ковариантно-постоянными тензорами кривизны и кручения. Она является G-тканью, и ее уравнения в некоторых локальных координатах имеют вид* (7.85).

С другой стороны, уравнения (7.85) являются уравнениями координатной лупы найденной три-ткани (с единичным элементом $(0, 0, ..., 0)$).

Легко проверить, что для найденной ткани W_0^∇ первые два тензорных соотношения (7.38) не выполняются. Следовательно, эта ткань не является тканью A_ℓ или A_r.

С другой стороны, третье соотношение (7.38) для найденной ткани W_0^∇ выполняется. Покажем, тем не менее, что ткань W_0^∇ не является тканью A_m, то есть в ее координатных лупах тождество (7.37) не выполняется.

Найдем действие оператора $m_{x,y}$ в координатной лупе (7.85) этой ткани. Рассмотрим равенство $m_{x,y}(u) = v$. Оно эквивалентно соотношению $x(uy) = (xv)y$. Используя уравнения (7.85), получаем:

$$(x(uy))^1 = x^1 + u^1 + y^1, \qquad (x(uy))^{\hat{i}} = e^{u^1 + y^1}(x^{\hat{i}} + e^{y^1}(u^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + u^1 y^1) + x^1(u^1 + y^1)).$$

С другой стороны,

$$((xv)y)^1 = x^1 + v^1 + y^1, \qquad ((xv)y)^{\hat{i}} = e^{y^1}(e^{v^1}(x^{\hat{i}} + v^{\hat{i}} + x^1 v^1) + y^{\hat{i}} + (x^1 + v^1) y^1).$$

Выражая координаты v^i через u^i, находим действие оператора $m_{x,y}$:

$$v^1 = u^1, \qquad v^{\hat{i}} = e^{y^1}(u^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + u^1 y^1) + x^1 y^1 - e^{-u^1} y^{\hat{i}} - e^{-u^1} y^1 (x^1 + u^1).$$

Рассмотрим теперь соотношение (7.37). Найдем левую часть этого равенства, $m_{x,y}(uv) \equiv p$. После несложных вычислений получим:

$$\begin{aligned}
&p^1 = (uv)^1 = u^1 + v^1,\\
&p^{\hat{i}} = e^{y^1}((uv)^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + (uv)^1 y^1) + x^1 y^1 - e^{-(uv)^1} y^{\hat{i}} - e^{-(uv)^1} y^1 (x^1 + (uv)^1) =\\
&\quad = e^{y^1}(e^{v^1}(u^{\hat{i}} + v^{\hat{i}} + u^1 v^1) y^{\hat{i}} + (u^1 + v^1) y^1) + x^1 y^1 - e^{-u^1 - v^1} y^{\hat{i}} - e^{-u^1 - v^1} y^1 (x^1 + u^1 + v^1).
\end{aligned}$$

Теперь найдем правую часть равенства (7.37). Обозначим $m_{x,y}(u) \equiv q$, $m_{x,y}(v) \equiv s$. Имеем:

$$\begin{aligned}
q^1 &= u^1, \qquad q^{\hat{i}} = e^{y^1}(u^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + u^1 y^1) + x^1 y^1 - e^{-u^1} y^{\hat{i}} - e^{-u^1} y^1 (x^1 + u^1);\\
s^1 &= v^1, \qquad s^{\hat{i}} = e^{y^1}(v^{\hat{i}} + y^{\hat{i}} + v^1 y^1) + x^1 y^1 - e^{-v^1} y^{\hat{i}} - e^{-v^1} y^1 (x^1 + v^1).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&(qs)^1 = q^1 + s^1 = u^1 + v^1,\\
&(qs)^{\widehat{i}} = e^{s^1}(q^{\widehat{i}} + s^{\widehat{i}} + q^1 s^1) = e^{v^1}(e^{y^1}(u^{\widehat{i}} + y^{\widehat{i}} + u^1 y^1) + x^1 y^1 - e^{-u^1} y^{\widehat{i}} -\\
&\qquad - e^{-u^1} y^1 (x^1 + u^1) + e^{y^1}(v^{\widehat{i}} + y^{\widehat{i}} + v^1 y^1) + x^1 y^1 - e^{-v^1} y^1 (x^1 + v^1) + u^1 v^1).
\end{aligned}
$$

Как видно, $p \neq qs$, то есть равенство (7.37) не выполняется. Следовательно, лупа (7.85) не является A_m-лупой, а ткань W_0^{∇} не является тканью A_m. Таким образом, доказано, что *тензорные соотношения* (7.38), *характеризующие дифференциальную окрестность четвертого порядка A_m-тканей, не являются достаточными для того, чтобы произвольная три-ткань была A_m-тканью.*

§ 7.5. О классификации криволинейных три-тканей

1. Классификация криволинейных три-тканей существенно связана с дифференциальной окрестностью четвертого и более высокого порядка, поскольку в третьей дифференциальной окрестности классификация является «грубой»: в зависимости от кривизны b все ткани делятся на регулярные (или параллелизуемые, $b = 0$) и нерегулярные ($b \neq 0$).

Пусть структурные уравнения криволинейной три-ткани W записаны в виде (6.47), (6.48).

Продолжая уравнения (6.48), придем к уравнениям

$$
\begin{aligned}
db_{11} - 4b_{11}\omega &= b_{111}\omega_1 + b_{112}\omega_2,\\
db_{12} - 4b_{12}\omega &= b_{121}\omega_1 + b_{122}\omega_2,\\
db_{21} - 4b_{21}\omega &= b_{211}\omega_1 + b_{212}\omega_2,\\
db_{22} - 4b_{22}\omega &= b_{221}\omega_1 + b_{222}\omega_2,
\end{aligned}
\tag{7.86}
$$

и т. д. Таким образом, получается последовательность функций:

$$
b, \quad b_1, b_2, \quad b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, \ldots .
$$

Как видно из уравнений (7.86) и им аналогичных, эти функции являются относительными инвариантами веса 2,3,4,... соответственно относительно допустимых преобразований, сохраняющих вид структурных уравнений (6.48). Это означает следующее: если три-ткань W эквивалентна (изотопна) некоторой другой три-ткани $\widetilde{W}$ и структурные уравнения обеих тканей записаны в виде (6.48), то соответствующие базисные формы связаны соотношениями

$$
\widetilde{\omega}_1 = A\omega_1, \quad \widetilde{\omega}_2 = A\omega_2,
$$

а кривизна b и ее ковариантные производные — соотношениями

$$
\widetilde{b} = A^{-2} b, \quad \widetilde{b}_1 = A^{-3} b_1, \quad \widetilde{b}_{11} = A^{-4} b_{11}, \ldots .
$$

При этом, если ткань W задана уравнением $z = f(x, y)$, то кривизна b выражается через производные до третьего порядка включительно от функции $f(x, y)$; величины b_1 и b_2 выражаются через производные до четвертого порядка и т. д.

Функции b_1 и b_2 независимы, но уже следующие производные связаны соотношением (6.49). Ковариантные производные следующего порядка также связаны некоторыми соотношениями, но мы их здесь не приводими.

Из относительных инвариантов можно построить абсолютные инварианты:

$$
c_1 = \frac{b_1^2}{b^3}, \quad c_2 = \frac{b_2^2}{b^3}, \quad c_{11} = \frac{b_{11}}{b^2}, \quad c_{12} = \frac{b_{12}}{b^2}, \quad c_{21} = \frac{b_{21}}{b^2}, \quad c_{22} = \frac{b_{22}}{b^2}, \quad \ldots
$$

Очевидно, в дифференциальной окрестности четвертого порядка ткань W имеет два независимых абсолютных инварианта c_1 и c_2. В дифференциальной окрестности пятого порядка независимых инвариантов будет пять: c_1, c_2, c_{11}, c_{12}, c_{22}, и т. д., в дифференциальной окрестности порядка $(s+3)$ имеется $2 + 3 + 4 + \ldots + (s+1) = 1/2\, s \cdot (s+3)$ независимых абсолютных инвариантов.

2. Естественно классифицировать криволинейные три-ткани с помощью различных соотношений на инварианты. Прежде всего необходимо рассмотреть ткани, для которых один из относительных инвариантов равен нулю.

Если кривизна b равна нулю, то ткань, как уже было сказано, является регулярной. Легко проверяется, что если оба инварианта b_1 и b_2 равны нулю, то ткань также будет регулярной. Действительно, тогда из последнего уравнения (6.47) получаем $db - 2b\omega = 0$, откуда $2\omega = d\ln b$ и $d\omega = 0$. Но тогда из третьего уравнения (6.47) получаем $b = 0$, то есть ткань является регулярной.

Ясно, что точно такой же результат получается, если $b_{\langle\alpha\rangle 1} = 0$ и $b_{\langle\alpha\rangle 2} = 0$, где $\langle\alpha\rangle$ — мультииндекс, состоящий из цифр 1 и 2.

Рассмотрим три-ткани, у которых одна из ковариантных производных кривизны равна нулю:

$$b_{\langle 1\rangle;s+1} = 0, \tag{7.87}$$

где $s+1$ указывает число цифр в мультииндексе $\langle 1\rangle$, состоящем только из единиц. Напомним, что число $s+1$ есть порядок соответствующей ковариантной производной кривизны b. Обозначим класс таких тканей $B_{\langle 1\rangle}$.

Рассмотрим относительный инвариант $b_{\langle 1\rangle;s}$. Ввиду (7.87) его ковариантный дифференциал запишется в виде

$$db_{\langle 1\rangle;s} - (s+2)b_{\langle 1\rangle;s}\,\omega = b_{\langle 1\rangle;s,\,2}\,\omega_2. \tag{7.88}$$

Так как $b_{\langle 1\rangle;s}$ есть относительный инвариант, то корепер можно нормировать так, что в области определения ткани будет выполняться условие

$$b_{\langle 1\rangle;s} = 1. \tag{7.89}$$

Тогда из (7.88) получим:

$$-(s+2)b_{\langle 1\rangle;s}\omega = b_{\langle 1\rangle;s,\,2}\,\omega_2, \tag{7.90}$$

и второе уравнение системы (6.47) даст $d\omega_2 = 0$. По теореме Пуанкаре

$$\omega_2 = dv. \tag{7.91}$$

В результате уравнение (7.90) можно записать следующим образом:

$$\omega = \gamma\, dv. \tag{7.92}$$

Рассмотрим теперь инвариант $b_{\langle 1\rangle;s-1}$. В силу (7.89) и (7.91) он удовлетворяет уравнению

$$db_{\langle 1\rangle;s-1} - (s+1)b_{\langle 1\rangle;s-1}\omega = \omega_1 + b_{\langle 1\rangle;s-1,\,2}dv,$$

которое можно переписать в следующем виде (см. (7.92)):

$$db_{\langle 1\rangle;s-1} = \omega_1 + (\ldots)dv. \tag{7.93}$$

Рассмотрим аналогичное уравнение для предыдущей ковариантной производной:

$$db_{\langle 1\rangle;s-2} - sb_{\langle 1\rangle;s-2}\omega = b_{\langle 1\rangle;s-1}\omega_1 + b_{\langle 1\rangle;s-2,\,2}dv.$$

Ввиду (7.92) и (7.93) имеем:

$$db_{\langle 1\rangle;s-2} = b_{\langle 1\rangle;s-1}db_{\langle 1\rangle;s-1} + K_{s-2}dv = \frac{1}{2}d(b_{\langle 1\rangle;s-1})^2 + K_{s-2}dv. \tag{7.94}$$

Отсюда видно, что функция K_{s-2} зависит только от одной переменной v. Интегрируя (7.94), получим:

$$b_{\langle 1\rangle;s-2} = \frac{1}{2}(b_{\langle 1\rangle;s-1})^2 + T_{s-2}(v). \tag{7.95}$$

Аналогично, для ковариантной производной $b_{\langle 1\rangle;s-3}$ порядка $(s-3)$ имеем:

$$db_{\langle 1\rangle;s-3} = (s-1)b_{\langle 1\rangle;s-3}\omega + b_{\langle 1\rangle;s-2}\omega_1 + b_{\langle 1\rangle;s-3,2}dv =$$
$$= \Big(\frac{1}{2}(b_{\langle 1\rangle;s-1})^2 + T_{s-2}(v)\Big)(b_{\langle 1\rangle;s-1} - (\cdots)dv) + (\cdots)dv = \frac{1}{3!}d(b_{\langle 1\rangle;s-1})^3 + d(T_{s-2}(v)b_{\langle 1\rangle;s-1}) + K_{s-3}dv.$$

Отсюда видно, что функция K_{s-3} зависит только от одной переменной v. Следовательно, при интегрировании получится уравнение

$$b_{\langle 1\rangle;s-3} = 1/3!(b_{\langle 1\rangle;s-1})^3 + T_{s-2}(v)b_{\langle 1\rangle;s-1} + T_{s-3}(v). \tag{7.96}$$

Рассуждая далее по индукции, придем к уравнению:

$$b = \frac{1}{s!}(b_{\langle 1\rangle;s-1})^s + \frac{1}{(s-2)!}T_{s-2}(v)(b_{\langle 1\rangle;s-1})^{s-2} + \frac{1}{(s-3)!}T_{s-3}(v)(b_{\langle 1\rangle;s-1})^{s-3} + ... + T_1(v)b_{\langle 1\rangle;s-1} + T_0(v). \tag{7.97}$$

Теперь можно найти форму ω из третьего уравнения (6.47), которое с помощью (7.91)–(7.93) и (7.97) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} d\omega = b\omega_1 \wedge dv = bdb_{\langle 1\rangle;s-1} \wedge dv = \\ = \left(\frac{1}{s!}(b_{\langle 1\rangle;s-1})^s + \frac{1}{(s-2)!}T_{s-2}(v)(b_{\langle 1\rangle;s-1})^{s-2} + \ldots + T_1(v)b_{\langle 1\rangle;s-1} + T_0(v)\right)db_{\langle 1\rangle;s-1} \wedge dv = \\ = \left(\frac{1}{(s+1)!}d(b_{\langle 1\rangle;s-1})^{s+1} + \frac{1}{(s-1)!}T_{s-2}(v)d(b_{\langle 1\rangle;s-1})^{s-1} + \ldots + T_0(v)db_{\langle 1\rangle;s-1}\right) \wedge dv = \\ = \left(\frac{1}{(s+1)!}d(b_{\langle 1\rangle;s-1})^{s+1} + \frac{1}{(s-1)!}d(T_{s-2}(v)b^{s-1}_{\langle 1\rangle;s-1}) + \ldots + d(T_0(v)b_{\langle 1\rangle;s-1})\right) \wedge dv. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\omega = \left(\frac{1}{(s+1)!}b^{s+1}_{\langle 1\rangle;s-1} + \frac{1}{(s-1)!}T_{s-2}(v)b^{s-1}_{\langle 1\rangle;s-1} + \frac{1}{(s-2)!}T_{s-3}(v)b^{s-2}_{\langle 1\rangle;s-1} + \ldots + T_0(v)b_{\langle 1\rangle;s-1} + T(v)\right)dv. \tag{7.98}$$

В силу уравнений (7.93) и (7.987) первое из уравнений (6.47) примет вид:

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega = db_{\langle 1\rangle;s-1} \wedge \left(\frac{1}{(s+1)!}b^{s+1}_{\langle 1\rangle;s-1} + \frac{1}{(s-1)!}T_{s-2}(v)b^{s-1}_{\langle 1\rangle;s-1} + \ldots + T_0(v)b_{\langle 1\rangle;s-1} + T(v)\right)dv.$$

Интегрируя, находим форму ω_1:

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{(s+2)!}b^{s+2}_{\langle 1\rangle;s-1} + \frac{1}{s!}T_{s-2}(v)b^{s}_{\langle 1\rangle;s-1} \ldots + \frac{1}{2}T_0(v)b^2_{\langle 1\rangle;s-1} + T(v)b_{\langle 1\rangle;s-1} + T^1(v)\right)dv + dt, \tag{7.99}$$

где t — некоторая новая переменная.

Сравнивая уравнения (7.99) и (7.93), находим, что

$$db_{\langle 1\rangle;s-1} = dt + Kdv.$$

Но из этого уравнения вытекает, что функция K зависит только от переменной v. Следовательно,

$$b_{\langle 1\rangle;s-1} = t + p(v). \tag{7.100}$$

Найденное соотношение показывает, что переменные v и $b_{\langle 1\rangle;s-1} \overset{\text{def}}{=} u$ могут быть выбраны как независимые переменные в некоторой области определения рассматриваемой ткани. Тогда уравнение $\omega_1 = 0$ первого слоения ткани W эквивалентно следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{(s+2)!}u^{s+2} - \frac{1}{s!}T_{s-2}(v)u^s - \ldots - T_0(v)u^2 - T(v)u - q(v). \tag{7.101}$$

Второе слоение ткани W определяется уравнением $\omega_2 = 0$ или $v =$const, третье — уравнением $\omega_1 + \omega_2 = 0$ или, ввиду (7.101), уравнением

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{(s+2)!}u^{s+2} - \frac{1}{s!}T_{s-2}(v)u^s - \ldots - T_0(v)u^2 - T(v)u - q(v) - 1. \tag{7.102}$$

В случае $s = 0$ уравнения (7.101) и (7.102) являются уравнениями Риккати специального вида:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{2}u^2 - q(v) \tag{7.103}$$

и

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{2}u^2 - q(v) - 1. \tag{7.104}$$

При $s = 1$ получается так называемое уравнение Абеля. Если s произвольно, то уравнения (7.101) и (7.102) называются обобщенными уравнениями Абеля.

Аналогичный результат получится, если приравнять нулю ковариантную производную с мультииндексом, состоящим только из цифры 2. Итак, доказана следующая

Теорема 7.11. *Криволинейная три-ткань W, у которой одна из ковариантных производных с одинаковыми индексами от кривизны b равна нулю, эквивалентна ткани, образованной линиями $v =$ const и интегральными кривыми двух обобщенных уравнений Абеля вида* (7.101) *и* (7.102).

3. Рассмотрим более подробно ткани типа B_1, слоения которых задаются уравнениями (7.103), $v = 0$ и (7.104).

С л у ч а й I: $q(v) = 0$. Тогда слоения ткани задаются уравнениями

$$u = \frac{2}{v + x}, \quad v = y, \quad \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v + z),$$

где x, y, z — постоянные интегрирования. Чтобы найти уравнение ткани, следует из этих уравнений исключить локальные координаты u и v. После преобразований придем к уравнению рассматриваемой ткани:

$$x + y = -\cot(y + z).$$

С л у ч а й II: $q(v) = \dfrac{1}{2}a^2$. Тогда уравнения (7.103) и (7.104), определяющие первое и третье слоения, принимают вид:

$$\frac{du}{u^2 + a^2} = -\frac{1}{2}dv, \quad \frac{du}{u^2 + b^2} = -\frac{1}{2}dv,$$

где $b^2 = a^2 + 2$. Интегрирование дает:

$$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} = -\frac{1}{2}(v + x), \quad \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{u}{b} = -\frac{1}{2}(v + z).$$

Присоединим уравнение второго слоения $v = y$ и исключим переменные u и v. После изоморфизма $\frac{a}{2}x \to x$, $\frac{a}{2}y \to y$, $\frac{a}{2}z \to z$ придем к уравнению рассматриваемой три-ткани:

$$\operatorname{tg}(x + y) = c \operatorname{tg} c(y + z),$$

где $c = b/a$.

С л у ч а й III: $q(v) = -\dfrac{1}{2}a^2$. Тогда уравнение (7.103) первого слоения принимает вид

$$\frac{du}{u^2 - a^2} = -\frac{1}{2}dv,$$

откуда

$$u = a \coth \frac{a(v + x)}{2}. \tag{7.105}$$

Уравнение третьего слоениия примет вид

$$\frac{du}{u^2 - a^2 + 1} = -\frac{1}{2}dv. \tag{7.106}$$

Получаем 3 подслучая.

П о д с л у ч а й IIIa: $a = \sqrt{2}$. Тогда уравнение (7.106) имеет решение

$$u = \frac{2}{v + z}. \tag{7.107}$$

После исключения переменных u и v из (7.105) и (7.107) (с учетом уравнения второго слоения $v = y$), мы получим уравнение соответствующей три-ткани:

$$y + z = \operatorname{th}(x + y).$$

Подслучай IIIb: $a^2 > 2$. Положим $a^2 = 2 + b^2$. Тогда уравнение (7.106) примет вид

$$\frac{du}{u^2 - b^2} = -\frac{1}{2}dv,$$

откуда

$$u = b \coth \frac{b(v+z)}{2}. \tag{7.108}$$

Из (7.105), (7.108) и $v = y$ мы получаем следующее уравнение ткани:

$$c \operatorname{th}(y + z) = \operatorname{th} c(x + y).$$

Подслучай IIIc: $a^2 < 2$. Положим $a^2 = 2 - b^2$. Тогда уравнение (7.106)

$$\frac{du}{u^2 + b^2} = -\frac{12}{d}v$$

имеет решение

$$\frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{u}{b} = -\frac{1}{2}(v + z).$$

Соответствующее уравнение ткани будет

$$c \cot(y + z) = -\operatorname{th} c(x + y).$$

Заметим, что три-ткани, соответствующие различным функциям $q(v)$, не эквивалентны.

4. К дифференциальным окрестностям высоких порядков мы приходим, рассматривая три-ткани, определяемые дифференциальными уравнениями.

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = F(x, y) \tag{7.109}$$

определяет три-ткань W, состоящую из семейств линий λ_α:

$$\lambda_1 : \ x = \text{const}, \quad \lambda_2 : \ y = \text{const}, \quad \lambda_3 : \ f(x, y) = \text{const},$$

причем последнее семейство состоит из интегральных кривых уравнения (7.109). Обратно, каждая криволинейная три-ткань W эквивалентна некоторой три-ткани $\widetilde{W}$, состоящей из трех вышеуказанных семейств λ_α, причем слои третьего слоения ткани $\widetilde{W}$ являются интегральными кривыми некоторого обыкновенного дифференциального уравнения $f_x dx + f_y dy = 0$.

Напомним, что уравнение три-ткани $z = f(x, y)$ определено с точностью до изотопических преобразований, то есть локальных диффеоморфизмов вида

$$x = \alpha(\widetilde{x}), \quad y = \beta(\widetilde{y}), \quad z = \gamma(\widetilde{z}),$$

определяющих замену параметров на слоениях ткани. Для тканей, определяемых дифференциальным уравнением (7.109), параметром третьего слоения является постоянная интегрирования. Таким образом, уравнение (7.109) определено не однозначно, а с точностью до замен вида

$$x = \alpha(\widetilde{x}), \quad y = \beta(\widetilde{y}), \tag{7.110}$$

переводящих декартову сеть $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ снова в декартову сеть. Иными словами, *теория тканей, в рамках которой мы проводим наши рассуждения, улавливает те свойства дифференциальных уравнений, которые сохраняются при изотопических преобразованиях вида* (7.110). Такой подход дает возможность классифицировать обыкновенные дифференциальные уравнения с точностью до указанной изотопии при помощи дифференциально-геометрических инвариантов соответствующей три-ткани.

С другой стороны, мы получаем возможность интерпретировать свойства решений дифференциального уравнения в терминах соответствующей три-ткани.

Рассмотрим наиболее простой случай, когда три-ткань W определяется линейным дифференциальным уравнением первого порядка:

$$y' + yf(x) = g(x), \tag{7.111}$$

и найдем инвариантную характеристику соответствующего класса тканей.

Пусть, как и выше, три-ткань W задается структурными уравнениями (6.47), (6.48), (7.86) и т. п. Рассмотрим уравнение (7.111). С помощью изотопического преобразования

$$f(x)dx = d\widetilde{x}$$

оно приводится к виду

$$dy + (y + \widetilde{g}(\widetilde{x}))d\widetilde{x} = 0. \tag{7.112}$$

Опустив волну, обозначим

$$\omega_1 = (y + g(x))dx, \quad \omega_2 = dy. \tag{7.113}$$

Тогда уравнение (7.112), определяющее третье слоение ткани W, принимает вид $\omega_1 + \omega_2 = 0$, а это означает, что структурные уравнения рассматриваемой три-ткани W должны иметь вид (6.47).

Так как $d\omega_2 = 0$, то из (6.47) следует

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda dy. \tag{7.114}$$

Имеем:

$$d\omega_1 = dy \wedge dx = \omega_1 \wedge \frac{-\omega_2}{y + g(x)}, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \frac{-\omega_2}{y + g(x)}.$$

Сравнивая с (6.47), находим, что

$$\omega = \frac{-\omega_2}{y + g(x)} = \frac{-dy}{y + g(x)}. \tag{7.115}$$

Далее,

$$d\omega = -d\frac{1}{y + g(x)} \wedge dy = \frac{g'dx}{(y+g)^2} \wedge dy = \frac{g'}{(y+g)^3}\,\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Сравнивая с (6.47), находим, что

$$b = \frac{g'}{(y+g)^3}. \tag{7.116}$$

Используя формулы (7.113)–(7.116), получаем:

$$db - 2b\omega = \Big(\frac{g''}{(y+g)^3} - \frac{3(g')^2}{(y+g)^4}\Big)dx - \frac{3g'dy}{(y+g)^4} - \frac{2g'}{(y+g)^3}\,\frac{-\omega_2}{y+g} = \Big(\frac{g''}{(y+g)^4} - \frac{3(g')^2}{(y+g)^5}\Big)\omega_1 - \frac{g'}{(y+g)^4}\omega_2.$$

Сравнивая с (6.48), находим ковариантные производные кривизны:

$$b_1 = \frac{g''}{(y+g)^4} - \frac{3(g')^2}{(y+g)^5}, \quad b_2 = -\frac{g'}{(y+g)^4}. \tag{7.117}$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} db_2 - 3b_2\omega &= \Big(-\frac{g''}{(y+g)^4} + \frac{4(g')^2}{(y+g)^5}\Big)dx + \frac{4g'dy}{(y+g)^5} + \frac{3g'}{(y+g)^4}\,\frac{-dy}{y+g} = \\ &= \Big(\frac{-g''}{(y+g)^5} + \frac{4g'^2}{(y+g)^6}\Big)\omega_1 + \frac{g'}{(y+g)^5}\omega_2. \end{aligned}$$

Сравнивая теперь с уравнениями (6.48), получаем:

$$b_{21} = \frac{-g''}{(y+g)^5} + \frac{4g'^2}{(y+g)^6}, \quad b_{22} = \frac{g'}{(y+g)^5}. \tag{7.118}$$

Исключая из уравнений (7.116)–(7.118) переменные g', g'' и т. д., получим соотношения, связывающие относительные инварианты рассматриваемой ткани:

$$bb_{22} - (b_2)^2 = 0, \quad bb_{21} - b_1 b_2 - b^3 = 0. \tag{7.119}$$

Итак, доказано следующее утверждение: *инварианты три-ткани W, определяемой линейным дифференциальным уравнением* (7.111), *удовлетворяют соотношениям* (7.119).

Обратно, рассмотрим три-ткань W, для которой выполняются соотношения (7.119), и докажем, что ей отвечает линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Заметим сначала, что на любой три-ткани можно выбрать кобазис так, чтобы форма ω_2, например, была полным дифференциалом:

$$\omega_2 = dy. \tag{7.120}$$

Тогда $d\omega_2 = 0$, и в силу (6.47) получаем:

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda dy. \tag{7.121}$$

Соотношения (7.119) разрешим, введя параметр k:

$$b_2 = kb, \quad b_{22} = k^2 b, \quad b_{21} = kb_1 + b^2, \quad b_{12} = kb_1 + 3b^2 \tag{7.122}$$

(последнее вытекает из (6.49)). В результате из уравнений (6.47)–(6.48) для рассматриваемой ткани находим:

$$\begin{aligned} db - 2b\omega &= b_1\omega_1 + kb\omega_2, \\ db_1 - 3b_1\omega &= b_{11}\omega_1 + (kb_1 + 3b^2)\omega_2, \\ db_2 - 3b_2\omega &= (kb_1 + b^2)\omega_1 + k^2 b\omega_2. \end{aligned} \tag{7.123}$$

Дифференцируя с помощью (7.123) равенство $b_2 = kb$, придем к уравнению

$$dk - k\omega = b\omega_1. \tag{7.124}$$

Из (7.124) и (6.47) имеем:

$$dk \wedge \omega_1 = k\omega \wedge \omega_1 = -k\omega_1 \wedge \omega = -kd\omega_1,$$

или

$$d\omega_1 = -\frac{dk}{k} \wedge \omega_1.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_1 = -\frac{1}{k}dx, \tag{7.125}$$

где x — некоторая новая переменная. Дифференцируя внешним образом уравнения (7.121) с учетом равенства (7.125), получим:

$$d\omega = d\lambda \wedge dy = \lambda_x dx \wedge dy = -\lambda_x k\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Сравнивая далее с (6.47), находим, что

$$b = -k\lambda_x. \tag{7.126}$$

В результате уравнение (7.124) принимает вид

$$dk = k\lambda dy + \lambda_x dx.$$

Отсюда

$$k_x = \lambda_x, \quad k_y = k\lambda.$$

Исключая λ, находим:

$$k_y = k^2 + k\varphi(y), \tag{7.127}$$

а равенство (7.126) запишется следующим образом:

$$b = -kk_x.$$

Положим
$$\mu = k^{-1}. \tag{7.128}$$
С помощью (7.127) находим, что μ удовлетворяет уравнению
$$\mu_y = -1 - \mu\varphi(y). \tag{7.129}$$
Положим далее
$$\varphi(y) = -\frac{\theta_y(y)}{\theta(y)}.$$
Тогда однородное уравнение
$$\mu_y = -\mu\varphi$$
имеет решение
$$\mu = c(x)\theta(y),$$
а общее решение уравнения (7.129) имеет вид:
$$\mu = \Big(-\int\frac{dy}{\theta} - g(x)\Big)\theta.$$
В результате в силу (7.120), (7.125) и (7.128) уравнение третьего слоения $\omega_1 + \omega_2 = 0$ принимает вид $-\mu dx + dy = 0$ или, в силу последнего уравнения,
$$\frac{dy}{\theta} + \Big(\int\frac{dy}{\theta} + g(x)\Big)dx = 0. \tag{7.130}$$
Теперь сделаем изотопическое преобразование
$$\int\frac{dy}{\theta(y)} = \widetilde{y}.$$
В результате уравнение (7.130) примет вид:
$$d\widetilde{y} + (\widetilde{y} + g(x))dx = 0,$$
то есть совпадет с уравнением (7.112).

Итак, доказана

Теорема 7.12. *Относительные инварианты криволинейной три-ткани, определяемой линейным дифференциальным уравнением первого порядка, связаны соотношением* (7.119). *Обратно: если относительные инварианты некоторой криволинейной три-ткани связаны соотношением* (7.119), *то эта ткань эквивалентна ткани, определеяемой линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Следующее утверждение приводим без доказательства.

Теорема 7.13 [УШ-4]. *Инварианты криволинейной три-ткани, определяемой дифференциальным уравнением Риккати*
$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x),$$
и (с точностью до изотопии) только такой ткани удовлетворяют соотношению
$$b_{222}b - b_{22}b_2 = 0.$$

ЗАДАЧИ

7.1. Пользуясь разложением (7.1), найдите первые четыре члена ряда Тейлора для элементов ${}^{-1}x$ и x^{-1}.

Решение. Так как ${}^{-1}x \cdot x = e$, то из (7.1) получаем:
$$0 = {}^{-1}x + x + \Lambda({}^{-1}x, x) + \frac{1}{2}M({}^{-1}x, {}^{-1}x, x) + \frac{1}{2}N({}^{-1}x, x, x) +$$
$$+ \frac{1}{6}P({}^{-1}x, {}^{-1}x, {}^{-1}x, x) + \frac{1}{4}Q({}^{-1}x, {}^{-1}x, x, x) + \frac{1}{6}R({}^{-1}x, x, x, x) + \{5\}.$$

Из (2.37) и (2.38) находим разложение для ${}^{-1}x$ с точностью до членов четвертого порядка:

$$ {}^{-1}x = -x + \frac{1}{2}\, b(x, x, x) + \{4\}. $$

Подставляя это значение ${}^{-1}x$ в слагаемые выше первого порядка, входящие в предыдущее равенство, получим:

$$ {}^{-1}x = -x + \frac{1}{2}\, b(x, x, x) + \frac{1}{2}\, Q(b(x, x, x), x) + \frac{1}{6}\, P(x, x, x, x) - \frac{1}{4}\, Q(x, x, x, x) + \frac{1}{6}\, R(x, x, x, x) + \{5\}. $$

Для x^{-1} рассуждения аналогичны.

7.2. В координатных лупах ткани E ассоциативны тройки элементов x, y, z, где x — решение уравнения $z(yz) = xy$.

7.3. Докажите, что три-ткань, заданная уравнениями (7.51), является тканью E (т. е. на ней выполняется условие замыкания E), но не является тканью Муфанг.

Указание. См. задачу 2.27.

ПРИМЕЧАНИЯ

7.1. Результаты 1–2 параграфов получены *Шелеховым* в [Ш-15]. Дальнейшее обобщение этих результатов см. в [Ш-22].

7.2. Свойства ассоциантов лупы Q рассматривал *Сабинин* [С-1]. Их обобщение имеется в [Ш-22].

7.3. Существование аналитических немуфанговых тканей E, или, что то же самое, — класса изотопически инвариантных эластичных луп, отличных от луп Муфанг, долго подвергалось сомнению. Их существование (теорема 7.12) доказано в [Ш-29]. Теорема 7.8 получена в [ШШ-1].

7.4. Результаты § 4 получены в [ШП-1]–[ШП-3] и [Пд-3].

7.5. Результаты § 5 получены в [УШ-2]–[УШ-4], см. также обзор [УШ-5].

Глава 8

d-ТКАНИ КОРАЗМЕРНОСТИ r

Наряду с три-тканями в дифференциальной геометрии изучаются и другие типы тканей. Так, еще в первых работах В. Бляшке и его сотрудников изучались ткани, образованные четырьмя и более семействами кривых на плоскости, а также семействами поверхностей в трехмерном пространстве. Эти конструкции получили различные многомерные обобщения. В результате возникла теория тканей, образованных d слоениями коразмерности r на гладком многообразии X размерности nr. Такие ткани обозначаются $W(d, n, r)$. Разумеется, предполагается, что слоения λ_α, $\alpha = 1, \ldots, d$, образующие d-ткань, находятся в общем положении. В частности, три-ткани $W = (X, \lambda_\alpha)$, $\alpha = 1, 2, 3$, которые изучались в предыдущих главах, теперь мы будем обозначать символом $W(3, 2, r)$.

Две ткани $W_1(d, n, r)$ и $W_2(d, n, r)$, заданные на многообразиях X_1 и X_2 размерности nr, называются эквивалентными, если существует локальный диффеоморфизм $\varphi : X_1 \to X_2$, при котором слои первой ткани переходят в слои второй.

Ткань $W(d, n, r)$ называется *параллелизуемой*, если она эквивалентна ткани, образованной в nr-мерном аффинном пространстве слоениями, состоящими из параллельных плоскостей коразмерности r. При $d \leqslant n$ ткань $W(d, n, r)$ всегда параллелизуема. Поэтому далее мы будем считать, что $d \geqslant n + 1$.

В этой главе изучаются основные свойства тканей $W(d, n, r)$ и связанные с ними геометрические структуры, а также специальные типы тканей, определяемые некоторыми условиями замыкания. Особое внимание будет уделено проблемам грассманизуемости, линеаризуемости и алгебраизуемости d-тканей, а также проблеме ранга.

Многие вопросы, рассматриваемые в настоящей главе, обобщают содержание предыдущих глав. Поэтому изложение в этой главе более лаконичное. Иногда мы ограничиваемся здесь лишь обзором основных результатов. Систематическое и подробное изложение теории d-тканей читатель может найти в книге [Го-23].

§ 8.1. $(n + 1)$-ткани на многообразии размерности nr

1. Рассмотрим $(n + 1)$-ткань $W(n + 1, n, r)$ на многообразии X размерности nr. Теория таких тканей наиболее близка к теории три-тканей, изучавшейся в предыдущих главах. Слоения λ_α, $\alpha = 1, \ldots, n + 1$, коразмерности r, образующие эту ткань, определяются вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа

$$\underset{\alpha}{\omega}^i = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \quad \alpha = 1, \ldots, n + 1. \tag{8.1}$$

Так как число 1-форм, входящих в левые части этих уравнений, равно $(n + 1)r$, а размерность многообразия X равна nr, то формы $\underset{\alpha}{\omega}^i$ связаны линейными соотношениями. Так же, как и в главе 1, показывается, что эти соотношения приводятся к виду

$$\underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i + \ldots + \underset{n+1}{\omega}^i = 0. \tag{8.2}$$

Соотношения (8.2) остаются инвариантными при преобразованиях

$${}'\underset{\alpha}{\omega}^i = A^i_j \underset{\alpha}{\omega}^j, \quad \det(A^i_j) \neq 0, \tag{8.3}$$

образующих группу $G = \mathbf{GL}(r)$ — *структурную группу ткани* $W(n + 1, n, r)$. Таким образом, структурная группа ткани $W(n + 1, n, r)$ не зависит от n.

Ввиду (8.2) уравнения структуры ткани $W(n+1,n,r)$ приводятся к виду

$$d\underset{u}{\omega}^i = \underset{u}{\omega}^j \wedge \omega^i_j + \sum_{v\neq u} \underset{uv}{a}{}^i_{jk} \underset{u}{\omega}^j \wedge \underset{v}{\omega}^k, \quad d\underset{n+1}{\omega}{}^i = \underset{n+1}{\omega}{}^j \wedge \omega^i_j, \tag{8.4}$$

где $u,v = 1,\ldots,n$, $\underset{uv}{a}{}^i_{jk}$ — тензоры кручения ткани, удовлетворяющие соотношениям

$$\underset{uv}{a}{}^i_{jk} = \underset{vu}{a}{}^i_{kj}, \quad \sum_{u,v} \underset{uv}{a}{}^i_{jk} = 0. \tag{8.5}$$

Кроме того, будем считать, что $\underset{uu}{a}{}^i_{jk} = 0$. Формы ω^i_j удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \sum_{u,v} \underset{uv}{b}{}^i_{jk\ell} \underset{u}{\omega}^k \wedge \underset{v}{\omega}^\ell \tag{8.6}$$

и определяют на многообразии X аффинную связность $\widetilde{\Gamma}$, аналогичную связности $\widetilde{\Gamma}$ на три-ткани, рассмотренной в гл. 1. Тензоры $\underset{uv}{a}{}^i_{jk}$ и $\underset{uv}{b}{}^i_{jk\ell}$ будут существенными компонентами соответственно тензоров кручения и кривизны этой связности.

Уравнения (8.6) получаются при дифференциальном продолжении уравнений (8.4). Кроме того, при дифференцировании получатся уравнения Пфаффа

$$\nabla \underset{uv}{a}{}^i_{jk} = \sum_w (\underset{uvw}{a}{}^i_{jk\ell} + \underset{uv}{a}{}^i_{mk} \underset{wu}{a}{}^m_{\ell j} + \underset{uv}{a}{}^i_{jm} \underset{vw}{a}{}^m_{k\ell}) \underset{w}{\omega}^\ell, \quad u \neq v, \tag{8.7}$$

и соотношения

$$\underset{uv}{b}{}^i_{jk\ell} = \frac{1}{2}(\underset{wuv}{a}{}^i_{jk\ell} - \underset{vwu}{a}{}^i_{\ell jk}), \quad w \neq u, v, \tag{8.8}$$

$$\underset{uv}{b}{}^i_{[jk\ell]} = 0, \tag{8.9}$$

$$\underset{uu}{b}{}^i_{\ell jk} + 2\underset{uv}{b}{}^i_{[jk]\ell} = 0. \tag{8.10}$$

Соотношения (8.8) показывают, что тензоры кривизны $(n+1)$-ткани $W(n+1,n,r)$ при $n > 2$ полностью выражаются через ковариантные производные ее тензоров кручения.

Теорема 8.1. *Ткань $W(n+1,n,r)$ будет параллелизуемой тогда и только тогда, когда ее тензоры кручения обращаются в нуль, т. е.* $\underset{uv}{a}{}^i_{jk} = 0$.

□ Действительно, условие $\underset{uv}{a}{}^i_{jk} = 0$ в силу (8.7) и (8.8) влечет $\underset{uv}{b}{}^i_{jk\ell} = 0$, так что структурные уравнения ткани принимают вид:

$$d\underset{\alpha}{\omega}^i = \underset{\alpha}{\omega}^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k, \quad \alpha = 1,\ldots,n+1, \quad i,j,k = 1,\ldots,r.$$

А эти уравнения определяют в аффинном пространстве A размерности nr $(n+1)$-ткань, образованную слоениями, состоящими из параллельных подпространств коразмерности r (сравните § 5 гл. 1). Обратное утверждение непосредственно следует из предыдущих уравнений. ■

Напомним, что для многомерной три-ткани $W(3,2,r)$, как следует из соотношений (1.31), (1.33), симметричная часть тензора кривизны не выражается через ковариантные производные тензора кручения, поэтому условие ее параллелизуемости записывается в виде

$$a^i_{jk} = 0, \quad b^i_{(jk\ell)} = 0.$$

2. Рассмотрим на многообразии X, несущем $(n+1)$-ткань $W(n+1,n,r)$, подмногообразие M размерности kr, представляющее собой пересечение слоев $\mathcal{F}_{\alpha_{k+1}},\ldots,\mathcal{F}_{\alpha_n}$, принадлежащих слоениям $\lambda_{\alpha_{k+1}},\ldots,\lambda_{\alpha_n}$ исходной $(n+1)$-ткани. Оно определяется системой уравнений Пфаффа

$$\underset{\alpha_{k+1}}{\omega}{}^i = 0, \ldots, \underset{\alpha_n}{\omega}{}^i = 0.$$

Слои остальных слоений: $\lambda_{\alpha_{n+1}}, \lambda_{\alpha_1},\ldots,\lambda_{\alpha_k}$ высекают на многообразии M $(k+1)$-ткань $W(k+1,k,r)$, которая называется *подтканью* исходной ткани $W(n+1,n,r)$. Эта подткань обозначается $[\alpha_{n+1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_k]$. В частности, если $k=2$, то $\dim M = 2r$ и слоения $\lambda_{\alpha_{n+1}}, \lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_2}$ высекают на M три-ткань $[\alpha_{n+1}, \alpha_1, \alpha_2]$.

Рассмотрим три-подткань $[n+1, u, v]$ ткани $W(n+1, n, r)$. Из соотношений (8.3)–(8.9) следует, что тензоры кручения и кривизны этой подткани вычисляются по формулам

$$\overline{\underset{uv}{a}}{}^i_{jk} = \underset{uv}{a}{}^i_{[jk]}, \tag{8.11}$$

$$\overline{\underset{uv}{b}}{}^i_{jk\ell} = 2\,\underset{uv}{b}{}^i_{jk\ell} - \underset{vuv}{a}{}^i_{jk\ell} + \underset{uvu}{a}{}^i_{j\ell k} - \underset{vu}{a}{}^m_{jk}\underset{uv}{a}{}^i_{m\ell} + \underset{uv}{a}{}^m_{j\ell}\underset{vu}{a}{}^i_{mk}. \tag{8.12}$$

Точно так же находим, что тензоры кручения и кривизны подткани $[u, v, w]$ вычисляются по формулам

$$\overline{\underset{uvw}{a}}{}^i_{jk} = \underset{uv}{a}{}^i_{[jk]} + \underset{vw}{a}{}^i_{[jk]} + \underset{wu}{a}{}^i_{[jk]}, \tag{8.13}$$

$$\begin{aligned}\overline{\underset{uvw}{b}}{}^i_{jk\ell} = \overline{\underset{uv}{b}}{}^i_{jk\ell} + \overline{\underset{vw}{b}}{}^i_{jk\ell} + \overline{\underset{wu}{b}}{}^i_{jk\ell} - 2\,\underset{ww}{b}{}^i_{jk\ell} - \underset{uvw}{a}{}^i_{jk\ell} + \underset{vuw}{a}{}^i_{jk\ell} + \\ + (\underset{vu}{a}{}^m_{jk} - \underset{vw}{a}{}^m_{jk})\underset{uw}{a}{}^i_{m\ell} + (\underset{vw}{a}{}^m_{jk} - \underset{uw}{a}{}^m_{jk})\underset{uv}{a}{}^i_{m\ell} + (\underset{vu}{a}{}^m_{\ell k} - \underset{vw}{a}{}^m_{\ell k})\underset{uw}{a}{}^i_{jm}.\end{aligned} \tag{8.14}$$

Из последнего соотношения вытекают равенства

$$\overline{\underset{uvw}{b}}{}^i_{(jk\ell)} = \overline{\underset{uv}{b}}{}^i_{(jk\ell)} + \overline{\underset{vw}{b}}{}^i_{(jk\ell)} + \overline{\underset{wu}{b}}{}^i_{(jk\ell)}. \tag{8.15}$$

Определение. $(n+1)$*-ткань* $W(n+1, n, r)$ *называется шестиугольной, если все ее три-подткани являются шестиугольными.*

Теорема 8.2. *Ткань* $W(n+1, n, r)$ *будет шестиугольной, если шестиугольными являются все ее три-подткани* $[\alpha, \beta, \gamma]$ *при некотором фиксированном* α.

□ Прежде всего перенумеруем слоения так, чтобы получилось $\alpha = n+1$. Шестиугольность подтканей $[n+1, u, v]$, как показано в § 1 гл. 3, приводит к условиям

$$\overline{\underset{uv}{b}}{}^i_{jk\ell} = 0. \tag{8.16}$$

Но в силу (8.15) из этого соотношения следует, что $\overline{\underset{uvw}{b}}{}^i_{jk\ell} = 0$ для любых u, v, w. ■

Теорема 8.2. является обобщением классической теоремы Дюбурдье (см. [Бл-1]) для ткани $W(4, 3, 1)$, образованной двумерными слоениями на трехмерном многообразии.

Из теоремы 8.2 вытекает

Теорема 8.3. *Соотношения* (8.16) *являются необходимыми и достаточными условиями шестиугольности* $(n+1)$*-ткани* $W(n+1, n, r)$.

§ 8.2. $(n+1)$-ткани на грассмановом многообразии

1. Важный пример ткани $W(n+1, n, r)$ можно построить на грассмановом многообразии $G(n-1, n+r-1)$ подпространств размерности $n-1$ проективного пространства P^{n+r-1} размерности $n+r-1$. Отметим прежде всего, что $\dim G(n-1, n+r-1) = nr$. Рассмотрим далее подмногообразие в $G(n-1, n+r-1)$, образованное $(n-1)$-пространствами, проходящими через фиксированную точку $x \in P^{n+r-1}$. Назовем это подмногообразие связкой $(n-1)$-подпространств и обозначим S_x. Легко видеть, что связка S_x изоморфна грассманову многообразию $G(n-2, n+r-2)$ и $\dim S_x = (n-1)r$.

Из связок $(n-1)$-подпространств можно конструировать на многообразии $G(n-1, n+r-1)$ слоения и ткани коразмерности r. Действительно, рассмотрим в пространстве P^{n+r-1} гладкое подмногообразие X размерности r и множество связок S_x, вершины которых лежат на X. Если из связок S_x удалить $(n-1)$-подпространства, касающиеся многообразия X, а также подпространства, пересекающие X более чем в одной точке, то оставшиеся их части $\widetilde{S}_x$ образуют слоение в некоторой открытой области D грассманова многообразия $G(n-1, n+r-1)$.

Рассмотрим в пространстве P^{n+r-1} подмногообразия X_α, $\alpha = 1, \ldots, n+1$, размерности r, находящиеся в общем положении. Каждое из них порождает в некоторой области $D_\alpha \subset G(n-1, n+r-1)$ описанное выше слоение, а все слоения вместе порождают $(n+1)$-ткань коразмерности r в области $D = \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n+1} D_\alpha$. Эту ткань назовем *грассмановой* $(n+1)$-*тканью* и обозначим $GW(n+1, n, r)$.

Обозначим L текущее $(n-1)$-подпространство грассмановой $(n+1)$-ткани, A_α — его точки пересечения с многообразиями X_α. Так как многообразия X_α находятся в общем положении, то n из этих точек, например $A_1, \ldots, A_n$, могут быть приняты за вершины проективного репера подпространства L, а точка A_{n+1} — за единичную точку, так что $A_{n+1} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Дополним точки A_u, $u = 1, \ldots, n$, до полного репера пространства P^{n+r-1} r точками A_i, где $i = n+2, \ldots, n+r+1$. Уравнения перемещения этого репера запишем, как обычно, в виде

$$dA_\sigma = \omega_\sigma^\rho A_\rho, \quad \sigma, \rho, \tau = 1, \ldots, n, n+2, \ldots, n+r+1, \tag{8.17}$$

а структурные уравнения, которым удовлетворяют формы ω_σ^ρ, — в виде

$$d\omega_\sigma^\rho = \omega_\sigma^\tau \wedge \omega_\tau^\rho. \tag{8.18}$$

Так как подпространство L не касается подногообразий X_u, то 1-формы ω_u^i можно принять за базисные на этих подмногообразиях, ввиду чего

$$\omega_u^v = \lambda_{ui}^v \omega_u^i, \; u \neq v, \tag{8.19}$$

и

$$dA_u = \omega_u^u A_u + \omega_u^i \Big(A_i + \sum_{v \neq u} \lambda_{ui}^v A_v \Big). \tag{8.20}$$

Здесь и далее суммирование по индексам i, j, k производится по обычным правилам, а по u, v, w — только в том случае, когда на это указывает знак суммы.

Выберем точки A_i в подпространстве, касательном к многообразию X_{n+1}, описываемому точкой A_{n+1}. Тогда

$$dA_{n+1} = \omega A_{n+1} + A_i \sum_{u=1}^{n} \omega_u^i, \tag{8.21}$$

где

$$\omega = \sum_u \omega_u^v \tag{8.22}$$

при любом $v = 1, 2, \ldots n$. Обозначим также

$$\sum_{u=1}^{n} \omega_u^i = -\omega_{n+1}^i. \tag{8.23}$$

Так как точка A_{n+1} описывает r-мерное многообразие X_{n+1}, то формы ω_{n+1}^i линейно независимы. В построенном репере системы уравнений

$$\omega_u^i = 0, \quad \sum_{u=1}^{n} \omega_u^i = 0$$

определяют $n+1$ слоений на грассмановом многообразии $G(n-1, n+r-1)$, образующих ткань $GW(n+1, n, r)$. Формы ω_u^i будут базисными для этой ткани, а (8.19) и (8.23) — ее основными уравнениями.

2. Найдем тензоры кручения и кривизны грассмановой ткани $GW(n+1, n, r)$. Продифференцируем внешним образом уравнения (8.19) и, применив лемму Картана, получим:

$$\nabla \lambda_{ui}^v + \lambda_{ui}^v \lambda_{uj}^v \omega_{n+1}^j + \sum_{w \neq u,v} (\lambda_{ui}^v - \lambda_{ui}^w)(\lambda_{uj}^w - \lambda_{wj}^v)\omega_w^j + \omega_i^v = \lambda_{uij}^v \omega_u^j, \tag{8.24}$$

где u, v, w все различны и $\lambda_{uij}^v = \lambda_{uji}^v$. В этих уравнениях

$$\nabla \lambda_{ui}^v = d\lambda_{ui}^v - \lambda_{uj}^v \theta_i^j, \quad \theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j \omega, \tag{8.25}$$

а формы ω_{n+1}^j определяются формулой (8.23).

Внешнее дифференцирование соотношений (8.22) дает уравнение

$$(\omega_i^v - \omega_i^u) \wedge \omega_{n+1}^i = 0.$$

Его решение можно представить в виде

$$\omega_i^u = \omega_i^{n+1} + p_{ij}^u \omega_{n+1}^j, \tag{8.26}$$

где

$$p_{ij}^u = p_{ji}^u, \quad \sum_u p_{ij}^u = 0$$

и

$$\omega_i^{n+1} = \frac{1}{n} \sum_u \omega_i^u \tag{8.27}$$

— вторичные формы Пфаффа, не являющиеся линейными комбинациями базисных форм ω_u^i.

Фиксируем на рассматриваемой ткани $(n-1)$-мерное подпространство L, т. е. положим $\omega_u^i = 0$. Тогда уравнения (8.24) примут вид

$$\nabla_\delta \lambda_{ui}^v + \pi_i^v = 0, \tag{8.28}$$

где, как обычно, через δ обозначен символ дифференцирования по вторичным параметрам, и $\pi_i^v = \omega_i^v(\delta)$. Введем величины

$$\lambda_i = \frac{1}{(n-1)n} \sum_{u \neq v} \lambda_{ui}^v. \tag{8.29}$$

Из уравнений (8.28) следует, что при закрепленных главных параметрах эти величины удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_\delta \lambda_i + \pi_i^{n+1} = 0.$$

С другой стороны, из уравнений (8.17) и (8.27) вытекает, что

$$\delta A_i = \pi_i^j A_j + \pi_i^{n+1} A_{n+1}.$$

Из последних двух соотношений получаем равенства

$$\delta(A_i + \lambda_i A_{n+1}) = \pi_i^j (A_j + \lambda_j A_{n+1}),$$

которые показывают, что плоскость π, натянутая на точки $A_i + \lambda_i A_{n+1}$, инвариантна.

Поместим в плоскость π точки A_i. Тогда величины λ_i обратятся в нуль, и из (8.29) последует

$$\sum_{u \neq v} \lambda_{ui}^v = 0. \tag{8.30}$$

Формы π_i^{n+1} теперь также обратятся в нуль, а формы ω_i^{n+1} станут главными:

$$\omega_i^{n+1} = \sum_v q_{ij}^v \omega_v^j. \tag{8.31}$$

Ввиду этого из соотношений (8.26) и (8.23) находим:

$$\omega_i^u = \sum_v (q_{ij}^v - p_{ij}^u) \omega_v^j. \tag{8.32}$$

Теперь можно найти тензоры кручения и кривизны ткани $GW(n+1, n, r)$. Дифференцируя внешним образом ее базисные формы ω_u^i, получаем:

$$d\omega_u^i = \omega_u^j \wedge \omega_j^i + \omega_u^v \wedge \omega_v^i.$$

Затем из уравнений (8.22) находим:

$$\omega_u^u = \omega - \sum_{v\neq u} \omega_v^u.$$

Подставляя эти выражения в предыдущие формулы и пользуясь соотношениями (8.18), придем к уравнениям

$$d\omega_u^i = \omega_u^j \wedge \theta_j^i + \sum_{v\neq u} (\delta_k^i \lambda_{uj}^v + \delta_j^i \lambda_{vk}^u)\omega_u^j \wedge \omega_v^k, \tag{8.33}$$

где 1-формы θ_j^i определяются формулой (8.25).

Выражения $\delta_k^i \lambda_{uj}^v + \delta_j^i \lambda_{vk}^u$ в силу (8.30) удовлетворяют соотношениям (8.5) предыдущего параграфа. Следовательно, уравнения (8.33) являются уравнениями структуры грассмановой $(n+1)$-ткани, а ее тензоры кручения имеют вид

$$\underset{uvjk}{a}{}^i = \delta_k^i \lambda_{uj}^v + \delta_j^i \lambda_{vk}^u. \tag{8.34}$$

Так как при $n > 2$ тензоры кручения полностью определяют геометрию ткани $W(n+1, n, r)$ (см. § 1), то верна

Теорема 8.4. *Ткань $W(n+1, n, r)$ при $n > 2$ будет грассманизуемой, т. е. эквивалентной грассмановой ткани $GW(n+1, n, r)$, тогда и только тогда, когда ее тензоры кручения имеют вид* (8.34).

Формы θ_j^i (см. (8.25)), задают на ткани $GW(n+1, n, r)$ аффинную связность $\widetilde{\Gamma}$. Так как из предыдущих уравнений следует

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \sum_u \omega_j^u \wedge \omega_u^i, \quad d\omega = -\omega_{n+1}^k \wedge \omega_k^{n+1},$$

то, пользуясь формулами (8.25), (8.31), и (8.32), находим:

$$d\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \sum_{u,v} (\delta_\ell^i q_{jk}^u + \delta_j^i q_{\ell k}^u + \delta_k^i p_{j\ell}^u)\omega_u^k \wedge \omega_v^\ell.$$

Отсюда получаем выражение для тензоров кривизны грассмановой $(n+1)$-ткани:

$$\underset{uvjk\ell}{b}{}^i = \frac{1}{2}((\delta_\ell^i q_{jk}^u + \delta_j^i q_{\ell k}^u + \delta_k^i p_{j\ell}^u) - (\delta_k^i q_{j\ell}^v + \delta_j^i q_{k\ell}^v + \delta_\ell^i p_{jk}^v)). \tag{8.35}$$

3. Рассмотрим далее шестиугольные грассмановы ткани $GW(n+1, n, r)$. Для них, согласно определению, все три-подткани будут шестиугольными. Эти подткани высекаются на $2r$-мерных пересечениях слоев $\mathcal{F}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{F}_{\alpha_{n-2}}$, принадлежащих слоениям $\lambda_{\alpha_1}, \ldots, \lambda_{\alpha_{n-2}}$, оставшимися тремя слоениями $\lambda_{\alpha_{n-1}}$, λ_{α_n}, $\lambda_{\alpha_{n+1}}$. Будем считать для простоты, что $\alpha_\beta = \beta$.

Для грассмановой ткани, порождаемой многообразиями $X_1, \ldots, X_{n+1}$ проективного пространства P^{n+r-1}, слои $\mathcal{F}_k$, $k = 1, \ldots, n-2$, есть связки S_k $(n-1)$-подпространств с вершинами в точках x_k, принадлежащих подмногообразиям X_k. При этом $n-2$ связки S_k с вершинами $x_1, x_2, \ldots, x_{n_2}$ пересекаются по $2r$-связке S $(n-1)$-подпространств, вершиной которой служит $(n-3)$-плоскость $[x_1, \ldots, x_{n-2}]$. Связка S проектирует пространство P^{n+r-1} на пространство P^{r+1}, дополнительное к $[x_1, \ldots, x_{n-2}]$. При этом проектировании подпространство L, принадлежащее связке S, переходит в прямую $\ell = \pi(L)$ в P^{r+1}, а многообразиям $X_\alpha \subset P^{n+r-1}$, $\alpha = n-1, n, n+1$, соответствуют в P^{r+1} r-мерные многообразия $\widetilde{X}_\alpha = \pi(X_\alpha)$. Следовательно, три-ткань, порождаемая связками S_k, изоморфна грассмановой три-ткани $GW(3, 2, r)$, порождаемой в пространстве P^{r+1} тремя многообразиями $\widetilde{X}_\alpha$.

Если ткань $GW(n+1, n, r)$ будет шестиугольной, то шестиугольными будут все ее три-подткани, а, следовательно, и все грассмановы ткани $GW(3, 2, r)$, получающиеся проектированием из подпространств $[x_1, \ldots, x_{n-2}]$. Но как было доказано в § 3 гл. 3, подмногообразия $\widetilde{X}_\alpha$, порождающие такие три-ткани, принадлежат одной гиперповерхности третьего порядка. Следовательно, и для любых точек $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{n-2}}$, принадлежащих подмногообразиям $X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_{n-2}}$, проекции многообразий $X_{\alpha_{n-1}}$, X_{α_n}, $X_{\alpha_{n+1}}$ (из плоскости $[x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_{n-2}}]$) принадлежат одной кубической гиперповерхности. Это может быть в том и только в том случае, когда все подмногообразия $X_1,\ldots, X_{n+1}$ пространства P^{n+r-1}, порождающие грассманову ткань $GW(n+1,n,r)$, принадлежат одному r-мерному алгебраическому многообразию порядка $n+1$.

Так как обратное утверждение вполне очевидно, то справедлива

Теорема 8.5. *Для того, чтобы грассманова ткань $GW(n+1,n,r)$ была шестиугольной, необходимо и достаточно, чтобы все порождающие ее r-мерные подмногообразия $X_\alpha \subset P^{n+r-1}$, $\alpha = 1,\ldots,n+1$, принадлежали одному r-мерному алгебраическому многообразию порядка $n+1$.*

Запишем аналитические условия шестиугольности грассмановой $(n+1)$-ткани с помощью тензоров кривизны $\underset{uv}{\overline{b}}{}^i_{jk\ell}$ ее три-подтканей $[n+1,u,v]$ $(u,v=1,\ldots,n)$. В формулу (8.12) для этих тензоров входят еще величины $\underset{uvu}{a}{}^i_{jk\ell}$, возникающие при дифференцировании тензоров кручения. Продифференцировав выражение (8.34), найдем:

$$\underset{uvu}{a}{}^i_{jk\ell} = \delta^i_k(\lambda^v_{uj\ell} + p^v_{j\ell} - q^u_{j\ell}) - \delta^i_j(q^u_{k\ell} - p^u_{k\ell} + \lambda^v_{u\ell}\lambda^u_{vk}) - \delta^i_\ell \lambda^u_{vk}\lambda^v_{uj}.$$

Подставляя в (8.12) эти выражения, а также выражения (8.34) и (8.35) для тензоров кручения и кривизны ткани $GW(n+1,n,r)$, получим выражение для тензоров кривизны грассмановой три-ткани:

$$\underset{uv}{\overline{b}}{}^i_{jk\ell} = \delta^i_j(p^u_{k\ell} - p^v_{k\ell}) + \delta^i_\ell \lambda^v_{ujk} - \delta^i_k \lambda^u_{vj\ell}. \tag{8.36}$$

Условие шестиугольности ткани $W(n+1,n,r)$, как доказано в теореме 8.3, записывается в виде (8.16). Для грассмановой ткани $GW(n+1,n,r)$ в силу (8.30) это условие принимает вид:

$$\delta^i_{(j}(p^u_{k\ell)} - p^v_{k\ell)} + \lambda^v_{|u|k\ell)} - \lambda^u_{|v|k\ell)}) = 0.$$

Отсюда следуют равенства

$$(p^u_{k\ell} - p^v_{k\ell}) + \lambda^v_{uk\ell} - \lambda^u_{vk\ell} = 0. \tag{8.37}$$

Выясним геометрический смысл соотношений (8.37). Для этого найдем асимптотические квадратичные формы подмногообразий X_α в точках x_α их пересечения с текущим $(n-1)$-подпространством L. Пользуясь выражениями (8.20) и (8.21) для первых дифференциалов точек A_u и A_{n+1}, находим:

$$\begin{aligned} d^2A_u &= \sum_{v\neq u} \lambda^v_{uij}\omega^i_u\omega^j_u A_v (\operatorname{mod} T_{A_n}(X_u)),\\ d^2A_{n+1} &= \sum_{v\neq u} (p^u_{ij} - p^v_{ij})\omega^i_{n+1}\omega^j_{n+1} A_v (\operatorname{mod} T_{A_{n+1}}(X_{n+1})). \end{aligned}$$

Ввиду этого асимптотические квадратичные формы подмногообразий X_u и X_{n+1} имеют соответственно вид:

$$\begin{aligned} h^v_u &= \lambda^v_{uij}\omega^i_u\omega^j_u,\\ h^v_{n+1} &= (p^u_{ij} - p^v_{ij})\omega^i_{n+1}\omega^j_{n+1}, \quad v \neq u. \end{aligned}$$

Следовательно, тензоры, входящие в соотношения (8.37), являются асимптотическими тензорами подмногообразий X_u, X_v и X_{n+1}. Доказана

Теорема 8.6. *Для того, чтобы ткань $GW(n+1,n,r)$, порождаемая r-мерными подмногообразиями X_α, $\alpha = 1,2,\ldots,n+1$, в пространстве P^{n+r-1} была шестиугольной, необходимо и достаточно, чтобы асимптотические тензоры подмногообразий X_α удовлетворяли условию* (8.37) *при всех u и v.*

Заметим, что в силу теоремы 8.5 подмногообразия X_α принадлежат одному r-мерному алгебраическому многообразию порядка $n+1$. Поэтому условия (8.37) являются условиями алгебраизуемости как системы подмногообразий X_α, так и порождаемой ими ткани $GW(n+1,n,r)$. Поэтому теоремы 8.5 и 8.6 могут быть объединены в одну.

Теорема 8.7. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *грассманова ткань $GW(n+1,n,r)$ является шестиугольной;*
2) *система порождающих ее подмногообразий X_α, $\alpha = 1,2,\ldots,n+1$, алгебраизуема;*
3) *асимптотические тензоры подмногообразий X_α удовлетворяют соотношениям* (8.37).

Заметим еще, что если $n = 2$, то условие (8.37) переходит в условие (3.52) шестиугольности и алгебраизуемости грассмановой три-ткани $GW(3, 2, r)$.

§ 8.3. $(n+1)$-ткани и почти грассмановы структуры

1. Рассмотрим плюккерово отображение грассманова многообразия $G(n-1, n+r-1)$ $(n-1)$-мерных подпространств проективного пространства P^{n+r-1} на точечное алгебраическое многообразие $\Omega(n-1, n+r-1)$ размерности nr проективного пространства P^N, где $N = C^n_{n+r} - 1$. Это отображение строится с помощью грассмановых координат $(n-1)$-подпространства L в P^{n+r-1}, которые представляют собой миноры порядка n матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1^1 \dots x_1^n & x_1^{n+1} \dots x_1^{n+r} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ x_n^1 \dots x_n^n & x_n^{n+1} \dots x_n^{n+r} \end{pmatrix},$$

составленной из координат базисных точек $x_1, \dots, x_n$ подпространства L (сравните с § 3 гл. 3). Грассмановы координаты связаны рядом квадратичных соотношений, которые и определяют многообразие $\Omega(n-1, n+r-1)$ в пространстве P^N(см. [ХП-1]). Говорят, что это многообразие несет *грассманову структуру*. Для краткости мы его будем обозначать просто буквой Ω. Изучим более детально строение многообразия Ω.

Пусть L_1 и L_2 — два $(n-1)$-мерных подпространства в P^{n+r-1}, $K = L_1 \bigcap L_2$, $\dim K = n-2$. Они порождают линейный пучок S $(n-1)$-подпространств $\lambda L_1 + \mu L_2$, которому соответствует прямая на многообразии Ω. Все подпространства пучка S принадлежат одному пространству M размерности n. Этот пучок, а, следовательно, и соответствующая прямая на Ω вполне определяются парой подпространств K и M, $K \subset M$.

Рассмотрим связку $(n-1)$-подпространств, т.е. совокупность всех $(n-1)$-подпространств, проходящих через фиксированное подпространство K размерности $n-2$. Этой связке на многообразии Ω соответствует r-мерная плоская образующая ξ^r. Семейству $(n-1)$-подпространств, принадлежащих фиксированному пространству M размерности n, соответствует на Ω плоская образующая η^n размерности n. Таким образом, многообразие Ω несет два семейства плоских образующих размерностей r и n.

Если подпространства K и M инцидентны, т.е. $K \subset M$, то соответствующие им плоские образующие ξ^r и η^n пересекаются по прямой; если же они не инцидентны, то образующие ξ^r и η^n не имеют общих точек.

Рассмотрим фиксированное подпространство L размерности $n-1$ в P^{n+r-1}. Оно содержит $(n-1)$-параметрическое семейство подпространств K размерности $n-2$. Поэтому через соответствующую подпространству L точку p многообразия Ω проходит семейство образующих ξ^r, зависящее от $n-1$ параметров. С другой стороны, через подпространство L проходит $(r-1)$-параметрическое семейство n-мерных подпространств M. Поэтому через точку p проходит $(r-1)$-параметрическое семейство образующих η^n. При этом любые две образующие ξ^r и η^n, проходящие через точку p, пересекаются по прямой. Отсюда следует, что все плоские образующие ξ^r и η^n, проходящие через точку p, образуют конус, который называется *конусом Сегре* и обозначается $C_p(r, n)$. Его проективизация есть многообразие Сегре $S(r-1, n-1)$, которое несет на себе два семейства плоских образующих размерностей $r-1$ и $n-1$ и представляет собой проективное вложение декартова произведения проективных пространств P^{r-1} и P^{n-1} в пространство P^{nr-1}. Конус Сегре является пересечением многообразия Ω и его касательного пространства $T_p(\Omega)$, размерность которого, как и многообразия Ω, равна nr. В пространстве P^{n+r-1} конусу Сегре $C_p(r, n)$ соответствует совокупность всех $(n-1)$-мерных подпространств, пересекающих фиксированное подпространство L такой же размерности по подпространствам размерности $n-2$.

Таким образом, с каждой точкой p алгебраического многообразия $\Omega \subset P^N$ связан конус Сегре $C_p(r, n)$ с вершиной p, принадлежащий его касательному пространству $T_p(\Omega)$, образующие которого являются образующими многообразия Ω. Конус $C_p(r, n)$ в пространстве $T_p(\Omega)$ определяется параметрическими уравнениями

$$z^i_u = \eta_u \xi^i, \quad u = 1, \ldots, n, \quad i = n+1, \ldots, n+r. \tag{8.38}$$

Эти же уравнения задают и многообразие Сегре $S(r-1, n-1)$ в проективном пространстве $P^{nr-1} = PT_p(\Omega)$.

2. Теперь можно ввести понятие почти грассмановой структуры, частным случаем которой является рассмотренная выше грассманова структура на алгебраическом многообразии Ω.

Пусть X — дифференцируемое многообразие размерности nr, p — его произвольная точка и $T_p(X)$ — касательное пространство в точке p. В каждом пространстве $T_p(X)$ зададим конус Сегре $C_p(r,n)$ с вершиной в p так, чтобы полученное поле конусов Сегре было дифференцируемым.

Дифференциально-геометрическую структуру на X, определяемую полем конусов Сегре, назовем *почти грассмановой структурой* и обозначим $AG(n-1, n+r-1)$. Ее структурной группой будет подгруппа полной линейной группы $\mathbf{GL}(nr)$ преобразований пространства $T_p(X)$, оставляющая инвариантным конус $C_p(r,n)$. Из уравнений (8.38), определяющих конус Сегре, видно, что эта группа изоморфна произведению $\mathbf{GL}(r) \times \mathbf{SL}(n)$. Обозначим ее через $\mathbf{GL}(r,n)$.

Конус Сегре, присоединенный к точке p многообразия X, определяет в $T_p(M)$ $(n-1)$-параметрическое семейство r-мерных подпространств ξ^r_p и $(r-1)$-параметрическое семейство n-мерных подпространств η^n_p. Почти грассманова структура $AG(n-1, n+r-1)$ называется *r-полуинтегрируемой*, если на X существует $(r+1)(n-1)$-параметрическое семейство подмногообразий V^r, таких, что $T_p(V^r) = \xi^r_p$ для любой точки $p \in V^r$, и каждое подпространство ξ^r касается одного и только одного подмногообразия V^r. Точно так же структура $AG(n-1, n+r-1)$ называется *n-полуинтегрируемой*, если на X существует $(n+1)(r-1)$-параметрическое семейство n-мерных подмногообразий V^n, таких, что $T_p(V^n) = \eta^n$ для любой точки $p \in V^n$, и каждое подпространство η^n касается одного и только одного подмногообразия V^n.

Если почти грассманова структура $AG(n-1, n+r-1)$ на многообразии X будет одновременно r-полуинтегрируемой и n-полуинтегрируемой, то она называется *интегрируемой*. При этом оказывается справедливой следующая теорема: *интегрируемая почти грассманова структура является локально грассмановой*, т. е. окрестность каждой точки p многообразия X допускает дифференцируемое отображение на алгебраическое многообразие $\Omega(n-1, n+r-1)$ проективного пространства P^N, при котором его подмногообразиям V^r будут соответствовать плоские образующие ξ^r, а подмногообразиям V^n — плоские образующие η^n многообразия $\Omega(n-1, n+r-1)$.

3. Рассмотрим $(n+1)$-ткань $W(n+1, n, r)$ на гладком многообразии X размерности nr, и пусть $T_p(X)$ — касательное пространство к X в точке p. Базисные формы $\underset{u}{\omega}{}^i$ этой $(n+1)$-ткани ($u = 1 \ldots n$; $i = 1 \ldots r$), введенные в § 1, можно принять за координаты в пространстве $T_p(X)$. Тогда уравнения подпространств T_α этого пространства, касательных к слоям ткани, проходящим через точку p, запишутся в виде (8.1), где в силу (8.2) выполняются соотношения

$$\underset{n+1}{\omega}{}^i = -\sum_{u=1}^{n} \underset{u}{\omega}{}^i.$$

Уравнения (8.1) и (8.2) будут инвариантны по отношению к структурной группе $\mathbf{GL}(r)$ ткани $W(n+1, n, r)$.

Пусть $(v, w, u_1, \ldots, u_{n-1})$ — некоторая перестановка чисел $(1, \ldots, n+1)$. Рассмотрим в $T_p(X)$ пересечение подпространств T_{u_k}, $k = 1, \ldots, n-1$. Обозначим его T_{vw}. Оно определяется уравнениями $\underset{u_k}{\omega}{}^i = 0$, $\dim T_{vw} = r$. Таких подпространств всего $C^2_{n+1} = \dfrac{1}{2} n(n+1)$. При $n = 2$ это число равно трем, и подпространства T_{uv} совпадают с подпространствами T_α, касательными к слоям ткани, проходящим через точку p.

В пространстве $T_p(X)$ существует единственный конус Сегре $C_p(r,n)$, содержащий все подпространства T_{uv}. Он определяется параметрическими уравнениями (8.38), где $z^i_u = \underset{u}{\omega}{}^i$. В силу (8.2) из этих уравнений следует, что

$$\underset{n+1}{\omega}{}^i = -\xi^i \eta_{n+1},$$

где $\eta_{n+1} = -\sum_{u=1}^{n} \eta_u$. Подпространства T_{vw}, принадлежащие конусу Сегре, задаются на нем уравнениями $\eta_{u_k} = 0$, в которых индексы u_k принимают указанные выше значения. Эти подпространства принадлежат семейству r-мерных плоских образующих ξ^r конуса Сегре $C_p(r, n)$.

Так как семейство конусов Сегре $C_p(r, n)$, заданных в касательных пространствах $T_p(X)$, определяет на многообразии X почти грассманову структуру $AG(n-1, n+r-1)$, то справедлива

Теорема 8.8. *С $(n+1)$-тканью $W(n+1, n, r)$ на многообразии X размерности nr инвариантно связана почти грассманова структура $AG(n-1, n+r-1)$. При этом структурная группа ткани является нормальным делителем структурной группы почти грассмановой структуры.*

Последнее утверждение следует из того факта, что структурной группой $(n+1)$-ткани является группа $\mathbf{GL}(r)$, а почти грассмановой структуры $AG(n-1, n+r-1)$ — группа $\mathbf{GL}(r) \times \mathbf{SL}(n)$.

Отметим, что r-мерные плоские образующие ξ^r конусов Сегре $C_p(r, n)$, связанных с тканью $W(n+1, n, r)$, называют ее *изоклинными подпространствами*, а n-мерные плоские образующие η^n этих конусов — *трансверсальными подпространствами* ткани $W(n+1, n, r)$.

§ 8.4. Трансверсально-геодезические и изоклинные $(n+1)$-ткани

1. Ткань $W(n+1, n, r)$ называется *трансверсально-геодезической*, если связанная с ней почти грассманова структура $AG(n-1, n+r-1)$ является n-полуинтегрируемой. Ткань $W(n+1, n, r)$ называется *изоклинной*, если структура $AG(n-1, n+r-1)$ будет r-полуинтегрируемой.

Рассмотрим сначала трансверсально-геодезические $(n+1)$-ткани и найдем аналитические условия, которые их характеризуют. Полуинтегрируемость связанной с тканью почти грассмановой структуры означает существование на многообразии X семейства подмногообразий V^n, касательных трансверсальным подпространствам η^n. Уравнения этих подмногообразий имеют вид

$$\underset{u}{\omega}^i = \xi^i \theta_u, \quad u = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{8.39}$$

где θ_u — 1-формы, независимые на V^n, а ξ^i — координаты вектора, определяющего положение трансверсального подпространства ткани. Дифференцируя внешним образом уравнения (8.39) с помощью формул (8.4), получим квадратичные уравнения

$$\Big(\nabla \xi^i + \sum_{v \neq u} a^i_{uv} \theta_v\Big) \wedge \theta_u = -\xi^i d\theta_u, \tag{8.40}$$

где

$$\nabla \xi^i = d\xi^i + \xi^j \omega^i_j, \quad a^i_{uv} = \underset{uv}{a}{}^i_{jk} \xi^j \xi^k, \tag{8.41}$$

и выполняются соотношения

$$a^i_{uv} = a^i_{vu}, \quad \sum_{u,v} a^i_{uv} = 0. \tag{8.42}$$

Суммируя уравнения (8.40) по индексу u от 1 до n и используя уравнения (8.42), придем к уравнениям

$$\nabla \xi^i \wedge \Big(\sum_u \theta_u\Big) = -\xi^i d\Big(\sum_u \theta_u\Big), \tag{8.43}$$

которые показывают, что

$$d\Big(\sum_u \theta_u\Big) = \Big(\sum_u \theta_u\Big) \wedge \theta,$$

где θ — некоторая 1-форма. Подставляя последнее выражение в (8.43), получим уравнение

$$(\nabla \xi^i - \xi^i \theta) \wedge \Big(\sum_u \theta_u\Big) = 0.$$

Пользуясь леммой Картана, отсюда находим:

$$\nabla \xi^i = \xi^i \theta + \sigma^i \sum_u \theta_u. \tag{8.44}$$

Слоения λ_α ткани $W(n+1, n, r)$ высекают на подмногообразии V^n $(n+1)$-ткань $W(n+1, n, 1)$ коразмерности 1. Формы θ_u будут базисными формами этой ткани, и слои ее $(n-1)$-мерных слоений определяются уравнениями Пфаффа

$$\theta_u = 0, \quad \sum_u \theta_u = 0.$$

Структурные уравнения ткани $W(n+1, n, 1)$ в силу (8.4) имеют вид:

$$d\theta_u = \theta_u \wedge \omega + \sum_{v \neq u} \underset{uv}{a}\, \theta_u \wedge \theta_v, \tag{8.45}$$

причем

$$\sum_{u,v} \underset{uv}{a} = 0.$$

Подставляя выражения (8.44) и (8.45) в (8.40), получим $\omega = \theta$ и

$$\sigma^i + \underset{uv}{a}{}^i = \xi^i \underset{uv}{a}.$$

Суммируя по u и v, находим:

$$\sigma^i = 0, \quad \underset{uv}{a}{}^i = \xi^i \underset{uv}{a}. \tag{8.46}$$

Ввиду этого из выражений (8.44) и (8.41) последуют равенства:

$$\nabla \xi^i = \xi^i \theta, \tag{8.47}$$

$$\underset{uv}{a}{}^i_{jk} \xi^j \xi^k = \underset{uv}{a} \xi^i. \tag{8.48}$$

Геометрический смысл равенств (8.47) выясняет

Теорема 8.9. *Подмногообразия V^n, определяемые на X уравнениями* (8.39), *являются вполне геодезическими в связности $\widetilde{\Gamma}$, определяемой тканью $W(n+1, n, r)$.*

☐ Обозначим $\underset{u}{e_i}$ репер, дуальный кореперу $\underset{u}{\omega}{}^i$, состоящему из базисных форм ткани $W(n+$ $+1, n, r)$, и рассмотрим векторы $\xi_u = \xi^i \underset{u}{e_i}$. В силу (8.39) эти векторы касаются многообразия V^n, а в силу (8.47) они переносятся параллельно вдоль V^n. Вместе с ними переносятся параллельно и все векторы вида $c^u \xi_u$, где c^u — постоянные. Ввиду этого V^n является вполне геодезическим подмногообразием. ■

Из теоремы 8.9 следует, что подмногообразия V^n пересекают слои $(n+1)$-ткани, которые сами являются вполне геодезическими подмногообразиями на X, по геодезическим линиям. Поэтому подмногообразия V^n называют *трансверсально-геодезическими* или просто *трансверсальными* подмногообразиями ткани $W(n+1, n, r)$, а саму ткань — *трансверсально-геодезической.*

Рассмотрим теперь равенства (8.48). Заметим прежде всего, что при $n = 2$ левая часть равенства тождественно обращается в нуль, так как тензор a^i_{jk} кручения ткани $W(3, 2, r)$ кососимметричен по индексам j и k. Из соотношений (8.41) и (8.46) видно, что в этом случае $\underset{12}{a}{}^i = 0$ и равенство (8.48) обращается в тождество. Поэтому при $n = 2$ условие трансверсальной геодезичности ткани выражается через ее тензор кривизны (сравните с § 1 гл. 3).

Итак, считаем далее, что $n > 2$. Так как равенство (8.48) должно выполняться тождественно относительно ξ^i, то величины $\underset{uv}{a}$, входящие в его правую часть, должны быть линейными комбинациями ξ^i, т. е.

$$\underset{uv}{a} = \underset{uv}{a}{}_k \xi^k. \tag{8.49}$$

Подставляя в (8.47), получим равенства

$$(\underset{uv}{a}{}^i_{jk} - \delta^i_j \underset{uv}{a}{}_k) \xi^j \xi^k = 0,$$

откуда следуют соотношения

$$\underset{uv}{a}{}^{i}_{(jk)} = \delta^{i}_{(j}\underset{uv}{a}{}_{k)}. \tag{8.50}$$

Теорема 8.10. *Для того, чтобы при $n > 2$ ткань $W(n+1, n, r)$ была трансверсально-геодезической, необходимо и достаточно, чтобы симметричные части тензоров кручения имели вид* (8.50).

□ Необходимость условия теоремы доказана выше. Достаточность следует из того, что система уравнений Пфаффа (8.39), (8.47), определяющая трансверсально-геодезические подмногообразия ткани $W(n+1, n, r)$, будет вполне интегрируемой в силу (8.50). ■

2. Ткань $W(n+1, n, r)$ называется *полиэдрической*, если она является трансверсально-геодезической и все ее подткани $W(n+1, n, 1)$, высекаемые на трансверсальных подмногообразиях V^n, будут параллелизуемыми.

Из уравнения (8.45) следует, что условие параллелизуемости трансверсальных подтканей записывается в виде $\underset{uv}{a} = 0$. Отсюда в силу (8.49) и (8.50) следует, что на полиэдрической ткани тензоры $\underset{uv}{a}{}^{i}_{(jk)}$ обращаются в нуль:

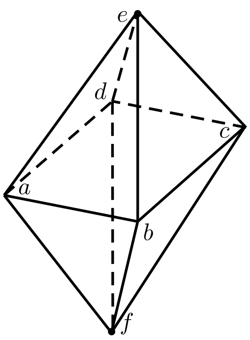

Рис. 54

$$\underset{uv}{a}{}^{i}_{(jk)} = 0. \tag{8.51}$$

Обратно, если на ткани $W(n+1, n, r)$ выполнено условие (8.51), то в силу (8.50) она будет трансверсально-геодезической, а из (8.49) вытекают равенства $\underset{uv}{a} = 0$, ввиду чего все ее трансверсальные подткани параллелизуемы. Доказана

Теорема 8.11. *Для того, чтобы ткань $W(n+1, n, r)$, $n > 2$, $r >$ > 2 была полиэдрической, необходимо и достаточно, чтобы ее тензоры кручения удовлетворяли условию* (8.51).

Название «полиэдрическая» связано с тем, что на такой $(n+1)$-ткани замыкаются фигуры, представляющие собой $(2n+2)$-эдры, гранями которых служат слои ткани. При $n = 3$ эта фигура становится октаэдром с $2r$-мерными гранями. При $n = 3$ и $r = 1$ многообразие X становится трехмерным и такой октаэдр изображен на рис. 54. Здесь грани ade и bcf принадлежат первому слоению ткани, грани dce и abf — второму слоению, грани cbe и daf — третьему слоению, грани bae и cdf — четвертому слоению.

3. Рассмотрим изоклинные ткани $W(n+1, n, r)$. Связанная с такой тканью почти грассманова структура $AG(n-1, n+r-1)$ должна быть r-полуинтегрируемой. Следовательно, на многообразии X существует семейство подмногообразий V^r, касательных к изоклинным подпространствам ξ^r. Их уравнения запишутся в виде

$$\underset{u}{\omega}{}^{i} = \eta_u \theta^i, \quad u = 1, \ldots, n; \quad i = 1, \ldots, r, \tag{8.52}$$

где θ^i — 1-формы, независимые на V^r, а η_u — параметры, определяющие положение изоклинного подпространства ткани.

Теорема 8.12. *Ткань $W(n+1, n, r)$ будет изоклинной при $n \geqslant 3$, $r \geqslant 2$, тогда и только тогда, когда кососимметричные части ее тензоров кручения имеют следующий специальный вид*:

$$\underset{uv}{a}{}^{i}_{[jk]} = \underset{uv}{b}{}_{[j}\delta^{i}_{k]}. \tag{8.53}$$

Доказательство этой теоремы подобно доказательству теоремы 8.10, и поэтому мы его не приводим.

Из теорем 8.10 и 8.12 вытекает следующая важная

Теорема 8.13. *Ткань $W(n+1, n, r)$ будет грассманизуемой тогда и только тогда, когда она одновременно изоклинная и трансверсально-геодезическая.*

□ Предположим, что ткань $W(n+1, n, r)$ грассманизуема. Тогда она эквивалентна грассмановой ткани $GW(n+1, n, r)$, тензоры кручения которой, как доказано в § 2 (см. формулу (8.34)), имеют вид:

$$\underset{uv}{a}{}^{i}_{jk} = \lambda^v_{uj}\delta^i_k + \lambda^u_{vk}\delta^i_j.$$

Ввиду этого выполняются соотношения

$$\underset{uv}{a}{}^{i}_{[jk]} = (\lambda^v_{u[j} - \lambda^u_{v[j})\delta^i_{k]},\ \underset{uv}{a}{}^{i}_{(jk)} = (\lambda^v_{u(j} + \lambda^u_{v(j})\delta^i_{k)},$$

т. е. тензоры кручения рассматриваемой ткани удовлетворяют условиям теорем 8.12 и 8.10. Следовательно, грассманизуемая ткань будет изоклинной и трансверсально-геодезической.

Обратно, предположим, что ткань $W(n+1, n, r)$ одновременно является изоклинной и трансверсально-геодезической. Тогда на ней выполнены соотношения (8.50) и (8.53), в силу чего

$$\underset{uv}{a}{}^{i}_{jk} = \underset{uv}{a}{}^{i}_{(jk)} + \underset{uv}{a}{}^{i}_{[jk]} = \underset{uv}{a}{}_{(j}\delta^i_{k)} + \underset{uv}{b}{}_{[j}\delta^i_{k]} = (\underset{uv}{a}{}_j + \underset{uv}{b}{}_j)\delta^i_k + (\underset{uv}{a}{}_k - \underset{uv}{b}{}_k)\delta^i_j.$$

Следовательно, тензоры кручения этой ткани имеют вид (8.34), а значит, она грассманизуема. ■

Таким образом, *соотношения* (8.50) *и* (8.53) *представляют собой аналитические условия грассманизуемости* $(n+1)$*-ткани* $W(n+1, n, r)$.

§ 8.5. *d*-ткани на многообразии размерности *nr*

1. В этом параграфе рассматриваются ткани $W(d, n, r)$ при $d > n+1$ на многообразии X размерности nr.

Слоения λ_α, образующие ткань $W(d, n, r)$, зададим, как и в § 1, вполне интегрируемыми системами уравнений Пфаффа

$$\underset{\alpha}{\omega}{}^i = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{8.54}$$

но теперь индекс α пробегает значения от 1 до d. Так как слоения λ_α находятся в общем положении, то любая подсистема $\underset{\alpha_1}{\omega}{}^i, \ldots, \underset{\alpha_n}{\omega}{}^i$ системы (8. 54) будет линейно независима. Примем за базисные на многообразии X формы $\underset{u}{\omega}{}^i$, где $u = 1, \ldots, n$. Остальные формы системы (8.54) будут их линейными комбинациями:

$$\underset{\sigma}{\omega}{}^i = \sum_u \underset{\sigma u}{\lambda}{}^i_j \underset{u}{\omega}{}^j, \quad \sigma = n+1 \ldots d,$$

где все матрицы $\underset{\sigma u}{\lambda}{}^i_j$ невырожденные. С помощью замены базиса форм на слоениях λ_α последние уравнения приводятся к виду

$$-\underset{n+1}{\omega}{}^i = \underset{1}{\omega}{}^i + \underset{2}{\omega}{}^i + \ldots + \underset{n}{\omega}{}^i, \tag{8.55}$$

$$-\underset{a}{\omega}{}^i = \underset{a1}{\lambda}{}^i_j \underset{1}{\omega}{}^j + \underset{a2}{\lambda}{}^i_j \underset{2}{\omega}{}^j + \ldots \underset{a\,n-1}{\lambda}{}^i_j \underset{n-1}{\omega}{}^j + \underset{n}{\omega}{}^i, \tag{8.56}$$

где $a = n+2, \ldots, d$. Теперь все формы $\underset{\alpha}{\omega}{}^i$ допускают лишь согласованные преобразования вида

$$'\underset{\alpha}{\omega}{}^i = A^i_j \underset{\alpha}{\omega}{}^j,$$

образующие структурную группу $\mathbf{GL}(r)$ ткани $W(d, n, r)$, а величины $(\underset{au}{\lambda}{}^i_j)$ образуют тензоры относительно этих преобразований. Обозначим указанные тензоры символами $\underset{au}{\Lambda}$ и заметим, что $\underset{an}{\lambda}{}^i_j = \delta^i_j$.

Кроме невырожденности тензоры $\underset{au}{\Lambda}$ удовлетворяют еще дополнительным условиям: невырожденными должны быть их разности $\underset{au}{\Lambda} - \underset{av}{\Lambda}$, а также некоторые другие их комбинации. Все эти условия следуют из того, что слоения $\underset{\alpha}{\lambda}$ находятся в общем положении.

Структурные уравнения ткани $W(d, n, r)$ состоят из уравнений (8.4), которые представляют собой условия интегрируемости систем уравнений $\underset{u}{\omega}{}^i = 0$, $u = 1 \ldots n$, и $\underset{n+1}{\omega}{}^i = 0$, а также условий интегрируемости систем уравнений $\underset{a}{\omega}{}^i = 0$, $a = n+2 \ldots d$, содержащих дифференциалы тензоров $\underset{au}{\Lambda}$. В общем виде мы все эти уравнения выписывать не будем.

2. Рассмотрим более подробно 4-ткань $W(4,2,r)$. Система уравнений (8.53), (8.54) для нее принимает вид

$$-\underset{3}{\omega}^i = \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i, \quad -\underset{4}{\omega}^i = \lambda^i_j \underset{1}{\omega}^j + \underset{2}{\omega}^j,$$

причем невырожденными должны быть тензоры λ^i_j и $\delta^i_j - \lambda^i_j$. Тензор λ^j_i называется *основным аффинором ткани* $W(4,2,r)$ и обозначается буквой Λ. Выясним его геометрический смысл.

Пусть p — произвольная точка многообразия X размерности $2r$, несущего ткань $W(4,2,r)$, и $T_p(X)$ — касательное пространство к X в этой точке. Обозначим через T_α, $\alpha = 1,2,3,4$, подпространства пространства $T_p(X)$, касательные к слоям $\mathcal{F}_\alpha$ ткани W, проходящим через p. Рассмотрим в пространстве $T_p(X)$ репер $\underset{1}{e}_i$, $\underset{2}{e}_i$, дуальный кореперу $\underset{1}{\omega}^i$, $\underset{2}{\omega}^i$, и такой, что любой вектор ξ из $T_p(X)$ записывается в виде

$$\xi = \underset{2}{\omega}^i(\xi)\underset{1}{e}_i - \underset{1}{\omega}^i(\xi)\underset{2}{e}_i$$

(сравните с § 3 гл. 1). Тогда $\underset{1}{e}_i \in T_1$, $\underset{2}{e}_i \in T_2$, $\underset{1}{e}_i + \underset{2}{e}_i \in T_3$, $\lambda^j_i \underset{1}{e}_j + \underset{2}{e}_i \in T_4$, и каждая из этих систем векторов образует базис соответствующего подпространства T_α.

Тройки подпространств $\{T_1, T_2, T_3\}$ и $\{T_1, T_2, T_4\}$ определяют в пространстве $T_p(X)$ две системы трансверсальных бивекторов. Пусть $\xi_1 = \xi^i \underset{1}{e}_i$ — произвольный вектор из T_1. Через него проходит бивектор $H = \xi_1 \wedge \xi_2$, где $\xi_2 = \xi^i \underset{2}{e}_i$, трансверсальный к первой тройке подпространств. Через вектор $\xi_2 = \xi^i \underset{2}{e}_i$ проходит бивектор $H' = {}'\xi_1 \wedge \xi_2$, где ${}'\xi_1 = \xi^i \lambda^j_i \underset{1}{e}_j$, трансверсальный ко второй тройке. Ввиду этого в пространстве T_1 определяется линейное преобразование $\Lambda : T_1 \to T_1$, записываемое в виде ${}'\xi^i = \lambda^i_j \xi^j$. Аналогичный геометрический смысл имеют линейные преобразования, определяемые аффинором Λ и в других пространствах T_α.

Рассмотрим собственные векторы оператора $\Lambda : T_1 \to T_1$. Так как для них ${}'\xi_1 = \lambda \xi_1$, то трансверсальные бивекторы H и H', определяемые собственным вектором ξ_1, принадлежат одному общему трансверсальному подпространству четверки подпространств T_α. Ввиду этого будет справедлива

Теорема 8.14. *Основной аффинор $\Lambda = (\lambda^j_i)$ 4-ткани $W(4,2,r)$ в каждой точке $p \in X$ определяет линейные операторы $\Lambda_\alpha : T_\alpha \to T_\alpha$, которые конструируются описанным выше образом с помощью трансверсальных бивекторов этих подпространств. Собственным векторам операторов Λ_α отвечают общие трансверсальные подпространства для четверки подпространств T_α.*

3. Вернемся к изучению тканей $W(d,n,r)$ общего вида. Каждая подсистема слоений $\lambda_{\alpha_1}, \ldots, \lambda_{\alpha_{n+1}}$ этой ткани образует $(n+1)$-подткань на многообразии X, которую мы обозначим $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}]$. Общее число таких подтканей равно $C^{n+1}_d = \dfrac{d(d-1)\ldots(d-n)}{(n+1)!}$. Каждая из них определяет в касательном пространстве $T_p(X)$ (см. § 3 этой главы) конус Сегре $C(r,n)$, а на многообразии X — почти грассманову структуру $AG(n-1, n+r-1)$. Таким образом, на многообразии X возникает целая система почти грассмановых структур. Но наиболее интересный случай указан в следующем определении.

Определение. Ткань $W(d,n,r)$ называется *почти грассманизуемой*, если все почти грассмановы структуры, определяемые ее $(n+1)$-подтканями, совпадают.

Из теоремы 8.14 следует, что ткань $W(4,2,r)$ будет почти грассманизуемой тогда и только тогда, когда ее основной аффинор Λ будет скалярным, т. е. $\Lambda = \lambda E$. Действительно, в этом случае все трансверсальные бивекторы подткани $[1,2,3]$ будут также трансверсальными бивекторами и для подткани $[1,2,4]$, а, следовательно, и для всех остальных ее три-подтканей $[1,3,4]$ и $[2,3,4]$. Но трансверсальные бивекторы образуют одно из семейств плоских образующих конусов Сегре $C(2,r)$, присоединенных к ткани W. Поэтому и конусы Сегре, определяемые при $\Lambda = \lambda E$ различными подтканями ткани $W(4,2,r)$, совпадают между собой.

В общем случае справедлива следующая

Теорема 8.15. *Для того, чтобы ткань $W(d, n, r)$ была почти грассманизуемой, необходимо и достаточно, чтобы все ее аффиноры $\underset{au}{\Lambda}$ были скалярными, т. е. пропорциональными единичному аффинору $E = (\delta^j_i)$.*

□ Почти грассмановы структуры, определяемые на многообразии X двумя $(n+1)$-подтканями ткани $W(d, n, r)$, совпадают тогда и только тогда, когда в каждой точке $p \in X$ совпадают конусы Сегре, лежащие в касательном пространстве $T_p(X)$, определяемые касательными подпространствами к слоям этих подтканей. Рассмотрим на X подткани $[1, \ldots, n, n+1]$ и $[1, \ldots, n, a]$. Как показано в § 3, конус Сегре, определяемый в $T_p(X)$ первой подтканью, задается уравнением (8.38). Точно так же можно показать, что конус Сегре, определяемый в $T_p(X)$ второй подтканью, задается уравнениями

$$z^i_u = \eta_u(\underset{au}{\lambda}{}^i_j \xi^j). \tag{8.57}$$

Если

$$\underset{au}{\lambda}{}^i_j = \underset{au}{\lambda}\,\delta^i_j, \tag{8.58}$$

то уравнения (8.57) принимают вид

$$z^i_u = \underset{au}{\lambda}\,\eta_u \xi^i \tag{8.59}$$

и определяют тот же конус Сегре, что и уравнения (8.38).

Обратно, если уравнения (8.57) определяют тот же конус Сегре, что и (8.38), то тензоры $\underset{au}{\lambda}{}^i_j$ имеют вид (8.58), т. е. пропорциональны единичному тензору. ■

Из теоремы 8.15 следует, что на почти грассманизуемой ткани $W(d, n, r)$ уравнения (8.56) принимают вид

$$-\underset{a}{\omega}{}^i = \underset{a1}{\lambda}\underset{1}{\omega}{}^i + \ldots + \underset{an-1}{\lambda}\underset{n-1}{\omega}{}^i + \underset{n}{\omega}{}^i. \tag{8.60}$$

Так как слоения λ_α ткани находятся в общем положении, то в матрице

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 & 1 \\ \underset{n+2,1}{\lambda} & \ldots\ldots\ldots & \underset{n+2,n-1}{\lambda} & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \underset{d,1}{\lambda} & \ldots\ldots\ldots & \underset{d,n-1}{\lambda} & 1 \end{matrix} \right\|,$$

составленной из коэффициентов уравнений (8.55) и (8.60), все миноры любого порядка отличны от нуля.

Обозначим почти грассманизуемую ткань $W(d, n, r)$ символом $AGW(d, n, r)$ и рассмотрим связанную с ней почти грассманову структуру $AG(n-1, n+r-1)$. Если эта структура r-полуинтегрируема, то ткань $AGW(d, n, r)$ называется, как и в § 4, *изоклинной*; если же грассманова структура $AG(n-1, n+r-1)$ будет n-полуинтегрируемой, то ткань $AGW(d, n, r)$ называется *трансверсально-геодезической*.

Ткань $AGW(d, n, r)$ называется *грассманизуемой*, если она эквивалентна грассмановой ткани $GW(d, n, r)$, образованной на грассмановом многообразии $G(n-1, n+r-1)$ d слоениями λ_α, каждое из которых устроено так, как описано в § 2. Из теоремы 8.13 следует, что *ткань $AGW(d, n, r)$ будет грассманизуемой тогда и только тогда, когда она является одновременно изоклинной и трансверсально-геодезической.*

Однако эти условия грассманизуемости для ткани $AGW(d, n, r)$ можно ослабить, так как справедлива следующая

Теорема 8.16. *Почти грассманизуемая ткань $AGW(d, n, r)$ при $d \geqslant n+2$ и $r \geqslant 3$ будет изоклинной.*

□ Запишем систему уравнений, определяющую слоение λ_{n+2} ткани $AGW(d, n, r)$, в виде

$$-\underset{n+2}{\omega}{}^i = \underset{1}{\lambda}\underset{1}{\omega}{}^i + \underset{2}{\lambda}\underset{2}{\omega}{}^i + \ldots \underset{n}{\lambda}\underset{n}{\omega}{}^i \tag{8.61}$$

(мы опустили здесь индекс $n+2$ у коэффициентов $\underset{n+2,u}{\lambda}$ и считаем, что $\underset{n}{\lambda}$ не обязательно равен единице). Условие интегрируемости этой системы в силу теоремы Фробениуса записывается следующим образом:

$$d\underset{n+2}{\omega}{}^i = \underset{n+2}{\omega}{}^j \wedge \Theta^i_j. \tag{8.62}$$

Дифференцируя внешним образом соотношения (8.61) и пользуясь формулами (8.4), получим квадратичные уравнения

$$-d\underset{n+2}{\omega}{}^i = -\underset{n+2}{\omega}{}^j \wedge \omega^i_j + \sum_u d\underset{u}{\lambda} \wedge \underset{u}{\omega}{}^i + \sum_{u,v} \underset{u}{\lambda}\, \underset{uv}{a}{}^i_{jk} \underset{u}{\omega}{}^j \wedge \underset{v}{\omega}{}^k. \tag{8.63}$$

Здесь коэффициенты $\underset{u}{\lambda}$ являются относительными инвариантами, ввиду чего

$$d\underset{u}{\lambda} = \underset{u}{\lambda}\theta + \sum_v \underset{uv}{\lambda}{}_j \underset{v}{\omega}{}^j.$$

Подставляя эти разложения в (8.63), получим:

$$-d\underset{n+2}{\omega}{}^i = -\underset{n+2}{\omega}{}^j \wedge (\omega^i_j - \delta^i_j\theta) + \sum_{u,v} (\underset{uv}{\lambda}{}_j \delta^i_k + \underset{u}{\lambda}\, \underset{uv}{a}{}^i_{jk}) \underset{u}{\omega}{}^j \wedge \underset{v}{\omega}{}^k.$$

Из условия (8.62) следует, что второе слагаемое правой части должно иметь вид $-\underset{n+2}{\omega} \wedge \sigma^i_j$, где

$$\sigma^i_j = \sum_u \underset{u}{\mu}{}^i_{jk} \underset{u}{\omega}{}^k.$$

Приравнивая эти два выражения и используя (8.62), получим соотношения

$$\sum_{u,v} (\underset{uv}{\lambda}{}_j \delta^i_k + \underset{u}{\lambda}\, \underset{uv}{a}{}^i_{jk}) \underset{u}{\omega}{}^j \wedge \underset{v}{\omega}{}^k = \sum_{u,v} \underset{u}{\lambda} \underset{v}{\mu}{}^i_{jk} \underset{u}{\omega}{}^j \wedge \underset{v}{\omega}{}^k.$$

Сравнивая коэффициенты и используя соотношения (8.5), придем к равенствам

$$(\underset{u}{\lambda} - \underset{v}{\lambda})\, \underset{uv}{a}{}^i_{jk} = \underset{uv}{\lambda}{}_k \delta^i_j - \underset{vu}{\lambda}{}_j \delta^i_k + \underset{u}{\lambda} \underset{v}{\mu}{}^i_{jk} - \underset{v}{\lambda} \underset{u}{\mu}{}^i_{kj}. \tag{8.64}$$

При $u=v$ отсюда находим:

$$\underset{u}{\mu}{}^i_{[jk]} = \frac{1}{\underset{u}{\lambda}} \underset{uu}{\lambda}{}_{[j} \delta^i_{k]}.$$

С учетом этих равенств альтернация соотношений (8.64) по индексам j и k дает

$$\underset{uv}{a}{}^i_{[jk]} = \underset{uv}{b}{}_{[j} \delta^i_{k]}, \tag{8.65}$$

где

$$\underset{uv}{b}{}_k = \frac{1}{\underset{u}{\lambda} - \underset{v}{\lambda}} \left(\frac{\underset{v}{\lambda}}{\underset{u}{\lambda}} \underset{uu}{\lambda}{}_k + \frac{\underset{u}{\lambda}}{\underset{v}{\lambda}} \underset{vv}{\lambda}{}_k - 2 \underset{(uv)}{\lambda}{}_k \right).$$

Из соотношений (8.65) и теоремы 8.12 следует, что при $r \geqslant 3$ $(n+1)$-подткань $[1, \ldots, n, n+1]$ ткани $AGW(d,n,r)$ будет изоклинной. Отсюда непосредственно вытекает и изоклинность ткани $AGW(d,n,r)$. ■

Из теорем 8.16 и 8.13 следует

Теорема 8.17. *Если при $r \geqslant 3$ и $d \geqslant n+2$ ткань $W(d,n,r)$ является почти грассманизуемой и трансверсально-геодезической, то она грассманизуема.*

4. Рассмотрим d-ткань коразмерности 1 на многообразии X размерности n, т. е. ткань $W(d,n,1)$ при $d \geqslant n+1$. Через каждую точку p этой ткани проходит d ее слоев, принадлежащих различным слоениям. Каждое $n+1$ из d подпространств T_α, $\alpha = 1, \ldots, d$, касательных к слоениям $\mathcal{F}_\alpha$ ткани W, проходящим через точку $p \in X$, определяют конус Сегре $C_p(1,n)$, который несет $(n-1)$-параметрическое семейство одномерных образующих и одну n-мерную образующую, совпадающую с пространством $T_p(X)$, т. е. представляет собой связку прямых с центром в p, лежащую в $T_p(X)$. Ввиду этого все конусы Сегре, определяемые $(n+1)$-подтканями ткани $W(d,n,1)$, совпадают между собой, и эта ткань всегда будет почти грассманизуемой.

Предположим далее, что ткань $W(d,n,1)$ грассманизуема. Это значит, что она допускает отображение на грассманово многообразие $G(n-1,n)$, которое представляет собой многообразие гиперплоскостей в проективном пространстве P^n, т. е. сопряженное проективное пространство P^{n*}. Каждому слою ткани $W(d,n,1)$ соответствует в P^n связка гиперплоскостей S_x с центром в некоторой точке $x \in P^n$, а слоению λ_α $(\alpha = 1,\dots,d)$ соответствует однопараметрическое семейство связок S_x, центры которых описывают в P^n линию X_α. Таким образом, грассманизуемой ткани $W(d,n,1)$ соответствует в пространстве P^n ткань $GW(d,n,1)$, порождаемая системой линий X_α, $\alpha = 1,\dots,d$. Элементами этой ткани являются гиперплоскости, а ее слоями будут связки гиперплоскостей, центры которых лежат на линиях X_α.

Рассмотрим корреляцию $\varkappa : P^n \to P^n$, которая переводит гиперплоскости пространства P^n в точки, а связки гиперплоскостей — в гиперплоскости. Грассманова ткань $GW(d,n,1)$ при корреляции $\varkappa$ переходит в ткань, слоения λ_α которой представляют собой однопараметрические семейства гиперплоскостей в пространстве P^n. Такая ткань называется *гиперплоскостной* d-тканью и обозначается $LW(d,n,1)$. Ткань $W(d,n,1)$, эквивалентная гиперплоскостной d-ткани, называется *линеаризуемой*. При этом оказывается справедливой

Теорема 8.18. *Ткань $W(d,n,1)$ будет линеаризуемой тогда и только тогда, когда она грассманизуема.*

□ Достаточность вытекает из предыдущих рассуждений. А необходимость следует из того, что при коррелятивном преобразовании $\varkappa^{-1}$ гиперплоскостная ткань $LW(d,n,1)$ переходит в грассманову ткань $GW(d,n,1)$. ■

5. В связи с проблемой линеаризуемости тканей представляет интерес следующая

Теорема 8.19. *Всякая грассманизуемая три-ткань $W(d,2,r)$ линеаризуема, т. е. допускает отображение на d-ткань $LW(d,2,r)$, образованную в проективном пространстве P^{2r} r-параметрическими семействами r-мерных плоскостей.*

□ Отображение $W(d,2,r) \to LW(d,2,r)$ построим в три этапа. Прежде всего, так как ткань $W(d,2,r)$ грассманизуема, то она эквивалентна грассмановой d-ткани $GW(d,2,r)$, которая определяется на грассмановом многообразии $G(1,r+1)$ прямых проективного пространства P^{r+1} системой гиперповерхностей X_α, $\alpha = 1,\dots,d$.

Далее рассмотрим плюккерово отображение π грассманова многообразия $G(1,r+1)$ на $2r$-мерное точечное многообразие $\Omega(1,r+1)$ проективного пространства P^N, где $N = \dfrac{1}{2}(r+{}$ $+1)(r+2)-1$. Так как слоями грассмановой ткани $GW(d,2,r)$ являются связки прямых, то на многообразии $\Omega(1,r+1)$ им отвечают r-мерные плоские образующие. Поэтому на многообразии $\Omega(1,r+1)$ грассмановой ткани $GW(d,2,r)$ соответствует ткань $\Omega W(d,2,r)$, слоями которой являются r-мерные плоские образующие многообразия $\Omega(1,r+1)$.

Наконец, третье отображение строится следующим образом. Пусть p — точка на многообразии $\Omega(1,r+1)$, являющаяся образом некоторой прямой грассмановой ткани $GW(d,2,r)$ при отображении Плюккера, и $T_p(\Omega)$ — касательное подпространство к $\Omega(1,r+1)$ в точке p. Его размерность, как и размерность многообразия $\Omega(1,r+1)$, равна $2r$. Рассмотрим в P^N некоторое дополнительное к $T_p(\Omega)$ подпространство Z, размерность которого равна $\dfrac{r(r-1)}{2} - 1$, и спроектируем $\Omega(1,r+1)$ из Z на подпространство $T_p(\Omega)$. При этом достаточно малая окрестность $U_p \subset \Omega(1,r+1)$ точки p взаимно однозначно отобразится на ее окрестность в пространстве $T_p(\Omega)$, r-мерные плоские образующие многообразия $\Omega(1,r+1)$ перейдут в r-мерные плоскости на $T_p(\Omega)$, а ткань $\Omega W(d,2,r)$ перейдет в ткань $LW(d,2,r)$, образованную плоскостными слоениями коразмерности r в проективном пространстве $T_p(\Omega)$. Таким образом, последовательность локальных диффеоморфизмов

$$W(d,2,r) \to GW(d,2,r) \to \Omega W(d,2,r) \to LW(d,2,r)$$

переводит грассманизуемую ткань $W(d,2,r)$ в плоскостную ткань $LW(d,2,r)$. ■

Заметим, что обратная теорема неверна, т. е. не всякая линеаризуемая ткань $W(d,2,r)$ является грассманизуемой.

Теорема 8.19 не выполняется для грассманизуемых тканей $W(d,n,r)$ при $n>2$, так как слоям такой ткани отвечают на многообразии $G(n-1,r+n-1)$ подмногообразия $G(n-2,n+r-2)$, которым, в свою очередь, соответствуют на $\Omega(n-1,n+r-1)$ подмногообразия $\Omega(n-2,n+r-2)$, не являющиеся плоскими.

§ 8.6. О проблеме алгебраичности многомерных d-тканей

1. Ткань $W(d,n,r)$ называется *алгебраической*, если она грассманизуема и порождающие ее r-мерные подмногообразия X_α в проективном пространстве P^{n+r-1} принадлежат одному *алгебраическому многообразию V_d^r размерности r и степени d*. Алгебраическая d-ткань обозначается символом $AW(d,n,r)$.

Рассмотрим сначала случай $n=2$, т. е. $\dim X=2r$. Грассманова ткань $GW(d,2,r)$ порождается d гиперповерхностями X_α, $\alpha=1,\ldots,d$, в проективном пространстве P^{r+1}. Она будет алгебраической, если все гиперповерхности X_α принадлежат одной алгебраической гиперповерхности V_d^r степени d. Найдем условия алгебраичности системы гиперповерхностей X_α в пространстве P^{r+1}.

пусть ℓ — прямая, которая пересекает каждую из гиперповерхностей x_α в одной точке. Рассмотрим окрестность D прямой ℓ на грассмановом многообразии $G(1,r+1)$. Введем в P^{r+1} аффинные координаты $(y^1,\ldots,y^{r+1})$, поместив начало координат в точку O на прямой ℓ и приняв эту прямую за ось y^{r+1}. Тогда любая прямая ℓ из окрестности D может быть задана уравнениями

$$y^i=m^iy^{r+1}+b^i. \tag{8.66}$$

Коэффициенты m^i и b^i будут координатами прямой ℓ на $2r$-мерном грассмановом многообразии $G(1,r+1)$, а прямая ℓ имеет нулевые координаты: $m^i=0$, $b^i=0$. Пусть $m=(m^1,\ldots,m^r)$, $b=(b^1,\ldots,b^r)$.

Прямая $\ell=\ell(m,b)\in D$ пересекает гиперповерхность X_α в точке $x_\alpha(m,b)$, $(r+1)$-ю координату которой обозначим $z_\alpha=z_\alpha(m,b)$.

Теорема 8.20. *Система гиперповерхностей X_α, $\alpha=1,\ldots,d$, будет алгебраической, и, следовательно, порождаемая ею ткань $W(d,2,r)$ также будет алгебраической тогда и только тогда, когда при любых $i,j=1,2,\ldots,r$ выполняются соотношения*

$$\sum_{\alpha=1}^{d}\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial b^i\partial b^j}=0. \tag{8.67}$$

□ Необходимость. Предположим, что все гиперповерхности X_α принадлежат алгебраической гиперповерхности V_d^r степени d, определяемой уравнением

$$P(y^1,\ldots,y^{r+1})=0, \tag{8.68}$$

левая часть которого есть многочлен степени d. Найдем точки пересечения этой гиперповерхности с прямой ℓ. Подставляя в уравнение (8.68) координаты y^i из (8.66), получим уравнение

$$P(m^1y^{r+1}+b^1,\ldots,m^ry^{r+1}+b^r,y^{r+1})=0,$$

которое имеет степень d и может быть переписано в виде

$$a_0(y^{r+1})^d-a_1(y^{r+1})^{d-1}+\ldots\pm a_d=0.$$

Координаты z^α точек x^α будут корнями этого уравнения, поэтому их сумма выражается через коэффициенты уравнения по формуле

$$\sum_{\alpha=1}^{d}z_\alpha=\frac{a_1}{a_0}.$$

Но коэффициент a_0 не зависит от величин b^i, а в коэффициент a_1 они входят в первой степени, поэтому вторые производные по b^r от правой части последнего равенства равны нулю, т. е. справедливо равенство (8.67).

Достаточность. Предположим, что гиперповерхность X_α определяется уравнением

$$\varphi_\alpha(y^1,\ldots,y^{r+1})=0.$$

Тогда координата $y^{r+1} = z_\alpha = z_\alpha(m, b)$ ее точки пересечения с прямой ℓ удовлетворяет уравнению

$$\varphi_\alpha(m^1 z^\alpha + b^1, \dots, m^r z^\alpha + b^r, z_\alpha) = 0$$

для любых (m, b). Дифференцируя это тождество сначала по m^j, а затем по b^j, получим:

$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\alpha}{dy^i}\Big(m^i \frac{\partial z_\alpha}{\partial m^j} + \delta^i_j z_\alpha\Big) + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y^{r+1}} \cdot \frac{\partial z_\alpha}{\partial m^j} = 0,$$
$$\sum_i \frac{\partial \varphi_\alpha}{dy^i}\Big(m^i \frac{\partial z_\alpha}{\partial b^j} + \delta^i_j\Big) + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y^{r+1}} \cdot \frac{\partial z_\alpha}{\partial b^j} = 0.$$

Из этих двух уравнений находим

$$\frac{\partial z_\alpha}{\partial m^j} = z_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial b^j}.$$

Из соотношения (8.67) следует, что $\sum\limits_\alpha z_\alpha$ линейно зависит от b, т. е.

$$\sum_\alpha z_\alpha = \sum_i \rho_i(m) b^i + \sigma(m),$$

где $\rho_i(m)$, $\sigma(m)$ — функции только от m. Далее, выражение

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Big(\sum_\alpha z_\alpha^2\Big)}{\partial b^j} = \sum_\alpha z_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial b^j} = \sum_\alpha \frac{\partial z_\alpha}{\partial m^j} = \sum_i \frac{\partial \rho_i}{\partial m^j} b^i + \frac{\partial \sigma}{\partial m^j}$$

также линейно зависит от b. Следовательно, выражение $\sum\limits_\alpha z_\alpha^2$ имеет вторую степень относительно b. Аналогично доказывается, что выражение $\sum\limits_\alpha z_\alpha^q$ имеет степень q относительно b.

Теперь рассмотрим функцию

$$A(\zeta, m, b) = \prod_\alpha (\zeta - z_\alpha(m, b)).$$

Это многочлен степени d относительно ζ, коэффициенты которого зависят от m и b. Перепишем его следующим образом:

$$A(\zeta, m, b) = \zeta^d - A_1(m, b)\zeta^{d-1} + \ldots \pm A_d(m, b).$$

Так как $\sum\limits_\alpha z_\alpha^q$ имеет степень q относительно b, то в силу тождества Ньютона для элементарных симметрических функций выражения $A_q(m, b)$ также имеют степень q относительно b.

Введем новые переменные $\xi^i = m^i \zeta + b^i$, и пусть $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^r)$. Исключая b из $A(\zeta, m, b)$, введем новую функцию

$$B(\xi, \zeta, m) = A(\zeta, m, \xi - m\zeta).$$

Так как $A_q(m, b)$ — многочлен степени q относительно b, то $B(\xi, \zeta, m)$ будет многочленом степени d относительно ξ и ζ, коэффициенты которого являются функциями от m.

Покажем, что если точка (ξ, ζ) принадлежит гиперповерхности X_α, то $B(\xi, \zeta, m) = 0$ при любом m. Действительно,

$$B(\xi, \zeta, m) = A(\zeta, m, \xi - m\zeta) = \prod_\alpha (\zeta - z_\alpha(m, \xi - m\zeta)).$$

Но $z_\alpha(m, \xi - m\zeta)$ есть $(r+1)$-я координата точки пересечения гиперповерхности X_α с прямой, определяемой уравнениями $y^i = m^i y^{r+1} + \xi^i - m^i\zeta$. Очевидно, что эта прямая проходит через точку (ξ, ζ). Так как точка (ξ, ζ) является точкой пересечения гиперповерхности X_α и прямой ℓ, то $z_\alpha(m, \xi - m\zeta) = \zeta$, откуда следует, что $B(\xi, \zeta, m) = 0$.

Рассмотрим гиперповерхность $X(m)$, определяемую уравнением $B(\xi, \zeta, m) = 0$. Поскольку $B(\xi, \zeta, m)$ есть многочлен степени d с коэффициентами, зависящими от m, то $X(m)$ — алгебраическая гиперповерхность степени d. Но так как при любом m она содержит гиперповерхности X_α, которые не зависят от m, то коэффициенты уравнения $B(\xi, \zeta, m) = 0$ несущественно зависят от m, и оно определяет единственную гиперповерхность порядка d, которой принадлежат все гиперповерхности X_α. ■

Соотношению (8.67) можно придать инвариантный вид. Действительно, при $m^i = 0$ из (8.66) получаем $y^i = b^i$, так что
$$\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial b^i \partial b^j} = \frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial y^i \partial y^j}.$$

В частности, это равенство справедливо для прямой ℓ_0. Но частные производные
$$\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial y^i \partial y^j}\Big|_{y^i=0}$$
совпадают с коэффициентами b^α_{ij} асимптотических квадратичных форм гиперповерхностей X_α в точках их пересечения с прямой ℓ_0. А так как ℓ_0 — произвольная прямая из области D регулярности ткани $GW(d,2,r)$, то справедливы равенства
$$\frac{\partial^2 z_\alpha}{\partial b^i \partial b^j}\Big|_{m^i=0, b^i=0} = b^\alpha_{ij}.$$

Поэтому соотношения (8.67) могут быть переписаны в виде равенств
$$\sum_{\alpha=1}^{d} b^\alpha_{ij} = 0, \tag{8.69}$$
которые и являются инвариантными условиями алгебраичности ткани $GW(d,2,r)$.

При $d = 3$ это условие совпадает с условием алгебраичности грассмановой три-ткани $GW(3,2,r)$, найденными в § 3 гл. 3.

2. Найдем далее условие алгебраичности ткани $W(d,n,r)$ при $d \geqslant n+1$. Так как в силу определения эта ткань должна быть грассмановой, то она определяется в проективном пространстве P^{n+r-1} системой, состоящей из d r-мерных подмногообразий X_α, $\alpha = 1,\ldots,d$. Пусть L_0 — подпространство размерности $n-1$, пересекающее каждое из многообразий X_α в одной точке x^0_α, и D — некоторая окрестность подпространства L_0 на грассмановом многообразии $G(n-1, n+r-1)$. Возьмем любые $n-2$ из точек x^0_α, пусть это будут точки $x^0_{\alpha_1},\ldots,x^0_{\alpha_{n-2}}$, и обозначим $z = [x^0_{\alpha_1}\ldots x^0_{\alpha_{n-2}}]$ их линейную оболочку. Рассмотрим некоторое подпространство P^{r+1}, дополнительное к Z, и проектирование $\pi\colon P^{n+r-1}\backslash Z \to P^{r+1}$ из центра Z. Положим $\ell = \pi(L)$, $\widetilde{X}_{\alpha_m} = \pi(X_{\alpha_m})$, $m = n-1,\ldots,d$, где L — подпространство размерности $n-1$, принадлежащее рассматриваемой окрестности D, ℓ — прямая и $\widetilde{X}_{\alpha_m}$ — гиперповерхности в P^{r+1} (число последних равно $d' = d-(n-2) \geqslant 3$). Условие алгебраизуемости гиперповерхностей $\widetilde{X}_{\alpha_m}$ в P^{r+1} записывается в виде (8.69), где $\alpha = \alpha_m$ и $b^{\alpha m}_{ij}$ будут коэффициентами асимптотических квадратичных форм гиперповерхностей $\widetilde{X}_{\alpha_m}$ в точках их пересечения с прямой ℓ. Они будут также коэффициентами асимптотических квадратичных форм r-мерных многообразий X_{α_m} пространства P^{n+r-1} в точках их пересечения с подпространством L относительно гиперплоскостей ξ_{α_m}, которые являются линейными оболочками центра проектирования Z и касательных подпространств $T(X_{\alpha_m})$ к многообразиям $\widetilde{X}_{\alpha_m}$ в точках $x_{\alpha_m} = X_{\alpha_m} \cap L$, $m = n-1,\ldots,d$. Поэтому справедлива

Теорема 8.21 *Система подмногообразий X_{α_m}, $\alpha = 1,\ldots,d$, размерности r в проективном пространстве P^{n+r-1} и порождаемая ими грассманова ткань $GW(d,n,r)$ будут алгебраическими тогда и только тогда, когда для любого подпространства L из D и любых различных значений α_m выполнены условия*
$$\sum_{m=n-1}^{d} b^{\alpha_m}_{ij} = 0,$$
где $b^{\alpha_m}_{ij}$ — коэффициенты асимтотических квадратичных форм вышеуказанных многообразий $\widetilde{X}_{\alpha_m}$.

§ 8.7. О проблеме ранга d-тканей

1. Проблемы грассманизуемости, алгебраичности и линеаризуемости тканей $W(d,n,r)$, рассмотренные в двух предыдущих параграфах, тесно связаны с проблемой ранга ткани. Этому вопросу посвящена обширная литература. Мы не можем в настоящей книге дать полное изложение проблемы ранга и приводим лишь краткий ее обзор.

Ранг ткани $W(d,n,r)$, заданной на многообразии X размерности nr, определяется следующим образом. На базе X_α слоения λ_α, принадлежащего этой ткани, рассматривается r-форма

$$\Omega_\alpha = \underset{\alpha}{\omega}^1 \wedge \underset{\alpha}{\omega}^2 \wedge \ldots \wedge \underset{\alpha}{\omega}^r, \quad \alpha = 1, \ldots d,$$

которая называется *нормалью слоения* λ_α. Затем на ткани строятся формы

$$\Omega^k = \sum_{\alpha=1}^{d} f_\alpha^k(p)\Omega^\alpha, \quad p \in X, \quad f_\alpha^k(p) \neq 0, \tag{8.71}$$

удовлетворяющие условию замкнутости $d\Omega^k = 0$. Уравнения $\Omega^k = 0$ называются *абелевыми уравнениями* ткани $W(d,n,r)$. Максимальное число линейно независимых абелевых уравнений, которые можно присоединить к ткани $W(d,n,r)$, называется *рангом d-ткани.*

Любая линейная комбинация уравнений (8.71) с постоянными коэффициентами представляет собой уравнение того же типа. Поэтому абелевы уравнения ткани $W(d,n,r)$ образуют линейное пространство над полем констант, и рангом ткани $W(d,n,r)$ называется размерность этого пространства.

Проблема ранга для тканей $W(d,n,r)$ состоит в определении верхней границы ранга, отыскании тканей максимального ранга и изучении свойств этих тканей.

2. Для ткани $W(d,n,1)$ коразмерности 1 имеем $\Omega_\alpha = \underset{\alpha}{\omega}$, и ее абелевы уравнения имеют вид

$$\Omega^k = \sum_\alpha f_\alpha^k(p)\underset{\alpha}{\omega} = 0.$$

При $d = n+1$ базисные формы ткани связаны условием (8.2), которое при $r = 1$ дает вид

$$\underset{1}{\omega} + \underset{2}{\omega} + \ldots + \underset{n+1}{\omega} = 0.$$

Поэтому в абелевом уравнении (8.71) ткани $W(n+1,n,1)$ все функции $f_\alpha(p)$ равны между собой. Если ткань $W(n+1,n,1)$ не является параллелизуемой, то на X не существует такой функции $f(p)$, что форма

$$\Omega = f(p)\sum_{\alpha=1}^{d} \underset{\alpha}{\omega}$$

будет замкнута, и поэтому ранг ткани равен нулю. Если же ткань $W(n+1,n,1)$ параллелизуема, то из теоремы 8.1 следует существование такой функции $f(p)$, что форма Ω будет замкнутой. Поэтому ранг параллелизуемой ткани $W(n+1,n,1)$ равен единице. Легко видеть, что и обратно, если ранг ткани $W(n+1,n,1)$ равен 1, то она параллелизуема.

В работе Черна и Гриффитса [ЧГ-2] устанавливается связь между линеаризуемостью и алгебраичностью ткани $W(d,n,1)$. В ней доказано, что *если ткань $W(d,n,1)$ линеаризуема и ее ранг $\rho \geqslant 1$, то она алгебраическая, т. е. все ее слои принадлежат алгебраической кривой степени d в дуальном проективном пространстве P^{n*}.* Эта теорема вытекает из доказанной С. Ли обратной теоремы Абеля, которая формулируется следующим образом. *Пусть $X_1 \ldots X_d$ — аналитические кривые в P^n, $\underset{\alpha}{\omega}$ — голоморфная форма на X_α, $\alpha = 1,\ldots,d$, и существует гиперплоскость L_0, которая пересекает каждую кривую в одной точке. Если в некоторой окрестности гиперплоскости L_0 выполняется уравнение Абеля*

$$\sum_{\alpha=1}^{d} \underset{\alpha}{\omega}(X_\alpha) = 0,$$

то все кривые X_α принадлежат одной алгебраической кривой X степени d и $\underset{\alpha}{\omega} = \omega|_{X_\alpha}$, где ω — 1-форма на X.

Заметим, что теорема 8.21, доказанная в предыдущем параграфе, является многомерным аналогом этой теоремы Ли.

Еще в 1935 году Черном (см.[Ч-2]) была найдена точная граница π для ранга ткани $W(d, n, 1)$, а именно, было доказано, что

$$\rho \leqslant \pi(d, n),$$

где

$$\pi(d, n) = \frac{1}{2(n-1)}\{(d-1)(d-n) + t(n-t-1)\} \tag{8.72}$$

и

$$t \equiv -d + 1(\mathrm{mod}(n-1)), \quad 0 \leqslant t \leqslant n-2.$$

Оказалось, что целое число $\pi(d, n)$ связано с теорией алгебраических кривых. Оно представляет собой *границу Кастельнуово* (см., например, [Хт-1], с. 442) для рода g невырожденной алгебраической кривой степени d в проективном пространстве P^n. Алгебраические кривые, род которых равен $\pi(d, n)$, называются *экстремальными.* Ткани $W(d, n, 1)$, ранг которых равен этому числу, называются тканями *максимального ранга.*

Теперь сформулируем следующее достаточное условие алгебраичности ткани $W(d, n, 1)$, доказанное в работе Черна и Гриффитса [ЧГ-2]. *Если при $n \geqslant 3$, $d \geqslant 2n$ ранг ткани $W(d, n, 1)$ максимален, т. е. $\rho = \pi(d, n)$, то она алгебраическая, и все образующие ее слоения порождаются одной и той же экстремальной алгебраической кривой степени d в дуальном проективном пространстве P^{n*}.* При $n = 3$ доказательство этой теоремы имеется в книге [ББ-1]. Там же рассмотрен и случай $n = 2$.

Для доказательства сформулированной теоремы применяется *отображение Пуанкаре*, которое строится следующим образом. Примем коэффициенты $f_\alpha^k(p)$, $k = 1, \ldots, \rho$, абелевых уравнений (8.71) за однородные координаты точки $z_\alpha(p)$ во вспомогательном проективном пространстве $P^{\rho-1}$ размерности $\rho - 1$, так что

$$z_\alpha(p) = \{f_\alpha^1(p), \ldots, f_\alpha^\rho(p)\}, \quad \alpha = 1, \ldots, d.$$

Так как среди форм $\underset{\alpha}{\omega}$, входящих в уравнения (8.71), имеется точно n независимых, то среди d точек $z_\alpha(p)$ будет $d - n$ независимых. Поэтому возникает отображение $X \to G(d-n-1, \rho-1)$, ставящее в соответствие точке $p \in X$ подпространство $P^{d-n-1}(p) = z_1(p) \wedge \ldots \wedge z_d(p)$ пространства $P^{\rho-1}$. Это отображение и называется отображением Пуанкаре.

Отображение Пуанкаре позволяет легко доказать сформулированную выше теорему при $d = 2n$. В самом деле, в этом случае $\pi(2n, n) = n + 1$ и $P^{\pi-1} = P^n$. Поэтому отображение Пуанкаре принимает вид $X \to G(n-1, n) = P^{n*}$. Оно ставит в соответствие точке $p \in X$ гиперплоскость в P^n, а слою ткани — связку гиперплоскостей, поэтому линеаризуемость ткани вытекает из принципа двойственности в P^n.

Отметим, в частности, что максимальный ранг ткани $W(4, 2, 1)$, образованной четырьмя семействами линий на плоскости, равен трем. Каждая ткань $W(4, 2, 1)$ максимального ранга спрямляема и эквивалентна ткани, образованной касательными к кривой третьего класса.

При $d > 2n$ доказательство теоремы об алгебраичности ткани $W(d, n, 1)$ значительно сложнее. Подробно оно изложено в работе [ЧГ-2], а более кратко — в работах [ЧГ-1] и [Бв-1]. При $n + 1 < d < 2n$, $n \geqslant 3$ максимальный ранг ткани $W(d, n, 1)$ равен $\pi(d, n) = d - n$, причем имеются примеры нелинеаризуемых тканей максимального ранга. При $n = 2$, $d = 5$ пример такой ткани построен Болом еще в 1936 году (см. [Бол-2], а также [Бл-1], с. 124). Ткани Бола состоят из четырех пучков прямых, вершины которых находятся в общем положении на плоскости P^2 и пучка квадрик, проходящих через эти вершины (рис. 55).

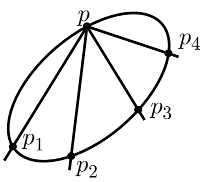

Рис. 55

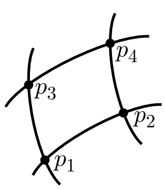

Рис. 56

Многомерное обобщение указанного выше примера Бола было рассмотрено в работах Дамиано [Да-1], [Да-2], в которых изучались криволинейные ткани на n-мерном многообразии. Напомним, что криволинейная d-ткань на X^n называется *четырехугольной*, если замыкаются четырехугольные фигуры, образованные любыми двумя семействами линий, составляющими d-ткань (рис. 56). В работе [Да-1] было доказано, что *любая криволинейная четырехугольная d-ткань на многообразии X^n при $d \geqslant n \geqslant 3$, $d \neq n+3$ эквивалентна ткани, образованной в проективном пространстве P^n связками прямых. В случае $d = n+3$ такая ткань может быть кроме того эквивалентна ткани, которую образуют в P^n $n+2$ связки прямых, вершины p_α $(\alpha = 1, \dots, n+2)$ которых находятся в общем положении, и $(n-1)$-параметрическое семейство рациональных нормальных кривых, проходящих через точки p_α.* Эта ткань называется *исключительной* и является тканью максимального ранга среди всех криволинейных $(n+3)$-тканей. При $n = 2$ исключительная ткань Дамиано сводится к указанной выше 5-ткани Бола, изображенной на рис. 55.

Отметим еще, что ткани $W(2n, n, 1)$ максимального ранга тесно связаны с *теорией гиперповерхностей в аффинном пространстве A^{n+1}, несущих две сети переноса* (см. [Ч-3]). При $n = 2$ этой задачей занимались также такие известные геометры, как Ли [Ли-1], Пуанкаре [Пн-1], Чеботарев [Чб-1], [Чб-2], Бланк [Бн-1]. Основная теорема здесь состоит в том, что *прямые, касательные к линиям обеих сетей переноса на гиперповерхности V^n пространства A^{n+1} пересекают бесконечно удаленную гиперплоскость пространства A^{n+1} в точках, принадлежащих одной кривой степени $d = 2n$.* Эта теорема, как показано Черном, легко следует из сформулированной выше теоремы об алгебраичности ткани $W(2n, n, 1)$.

3. В работе [ЧГ-3] дается оценка ранга ткани $W(d, n, r)$ произвольной коразмерности r на многообразии X размерности nr при $r \leqslant n$, $n \geqslant 2$: этот ранг имеет точную верхнюю границу

$$\pi(d, n, r) = \sum_{\mu \geqslant 0} \max\{(d - (r+\mu)(n-1) - 1)C^{\mu}_{r+\mu-1}, 0\}. \tag{8.73}$$

Гольдберг в работе [Го-25] дает несколько более удобных для вычисления выражений числа $\pi(d, n, r)$. В частности, он представил это число в виде

$$\pi(d, n, r) = \frac{1}{(r+1)!(n-1)!}(d - rt - 1)\prod_{\mu=1}^{r}(d + t - 1 - \mu(n-1)), \tag{8.74}$$

где, как и в формуле (8.72),

$$t \equiv -d + 1(\mathrm{mod}(n-1)), \quad 0 \leqslant t \leqslant n-2.$$

Это выражение можно еще упростить, полагая

$$t + d - 1 = \alpha(n-1). \tag{8.75}$$

Тогда формула (8.74) перепишется так:

$$\pi(d, n, r) = \frac{d - rt - 1}{(r+1)!(n-1)!}(n-1)^r(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-r). \tag{8.76}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи предыдущих формул. Так как первый член суммы (8.73) равен $d - r(n-1) - 1$, то $\pi(d, n, r) = 0$ тогда и только тогда, когда $d < r(n-1)$. Далее, при $r = 2$ формула (8.74) переходит в формулу

$$\pi(d, n, 2) = \frac{1}{6(n-1)!}(d - 2t - 1)(d + t - n)(d + t - 2n - 1),$$

доказанную Черном и Гриффитсом в работе [ЧГ-3]. С помощью подстановки (8.75) эта формула может быть представлена в виде

$$\pi(d, n, 2) = \frac{1}{6(n-1)!}(d - 2t - 1)(n-1)^2(\alpha-1)(\alpha-2),$$

В частности, при $n + 1 \leqslant d \leqslant 2n$ из (8.75) следует, что $\alpha = 2$ и $\pi(d, n, 2)=0$. При $r = n = 2$ получим $t = 0$, $\alpha = d - 1$ и

$$\pi(d, 2, 2) = \frac{1}{6}(d-1)(d-2)(d-3). \tag{8.77}$$

Это число совпадает с максимальным геометрическим родом гладкой алгебраической поверхности степени d в проективном пространстве P^3.

В работе [ЧГ-3] доказывается также следующая геометрическая теорема: *при* $d \geqslant 2n+1$ *и* $n \geqslant 3$ *проективизация всех нормалей* $\Omega_\alpha(p)$ *ткани* $W(d,n,2)$ *максимального ранга принадлежит одному линейчатому многообразию Сегре* $S_p(1,n-1) \subset PT_p^*(X)$. Так как касательные подпространства $T_p(F_\alpha) = T_\alpha$ к слоям рассматриваемой ткани двойственны ее нормалям $\Omega_\alpha(p)$, то это утверждение равносильно тому, что *все подпространства* T_α, $\alpha = 1, \ldots, d$, *определяют единственный конус Сегре* $C_p(2,n) \subset T_p(X)$. *Следовательно, ткань* $W(d,n,2)$ *максимального ранга при* $d \geqslant 2n+1$ *и* $n \geqslant 3$ *будет почти грассманизуемой в смысле определения грассманизуемости, данного в* § 5 *этой главы.* Она определяет на многообразии X почти грассманову структуру $AG(n-1,n+1)$. Литтл в [Лт-1] распространил этот результат на ткани $W(d,n,r)$. Им было доказано, что *каждая ткань* $W(d,n,r)$ *максимального ранга при* $r \geqslant 2$ *и* $d > r(n-1)+2$ *почти грассманизуема.*

4. Проблема ранга ткани $W(d,2,r)$ на многообразии X размерности $2r$ изучалась в ряде работ Гольдберга. Заметим, что из формулы (8.76) следует оценка

$$\pi(d,2,r) = \frac{1}{(r+1)!}(d-1)(d-2)\ldots(d-r-1). \tag{8.78}$$

Отсюда видно, что при $d \leqslant r+1$ получается $\pi(d,2,r) = 0$.

Из указанного выше результата Литтла следует, что *ткань* $W(d,2,r)$ *максимального ранга будет почти грассманизуемой при* $r \geqslant 2$ *и* $d > r+2$. Так как из последних неравенств вытекает, что $d > 4$, то случай $d = 4$ нуждается в отдельном изучении. Этот случай рассматривается в работе [Го-18]. В ней доказывается: 1) *если ткань* $W(4,2,r)$ *при* $r \geqslant 2$ *допускает хотя бы одно абелево уравнение, то она будет почти грассманизуемой*; 2) *ткань* $W(d,2,2)$ *при* $d > 4$ *является тканью максимального ранга тогда и только тогда, когда она алгебраизуема* (*эквивалентна алгебраической ткани*).

Как следует из формулы (8.77), для тканей $W(4,2,2)$ максимальный ранг равен единице. Такие ткани могут быть как алгебраизуемыми, так и не алгебраизуемыми. В последнем случае они называются *исключительными.* В работах [Го-21], [Го-22] построен ряд примеров исключительных тканей $W(4,2,2)$. Среди них имеются как изоклинные, так и не изоклинные 4-ткани. Эти примеры приведены в задачах 8.4–8.6.

Более подробно результаты работ [Го-18], [Го-21], [Го-22], [Го-25] изложены в восьмой главе книги [Го-23].

ЗАДАЧИ

8.1. Используя формулы § 1 и § 4, докажите следующие утверждения.

a) Если ткань $W(n+1,n,r)$ — трансверсально-геодезическая, то ее тензоры кривизны $\underset{uv}{b}{}^i_{jk\ell}$ удовлетворяют условию

$$\underset{uv}{b}{}^i_{(jk\ell)} = \delta^i_{(j}\underset{uv}{b}{}_{k\ell)};$$

аналогичным условиям удовлетворяют и тензоры $\underset{uvw}{a}{}^i_{jk\ell}$, возникающие при ковариантном дифференцировании тензоров кручения $\underset{uv}{a}{}^i_{jk}$.

b) Ткань $W(n+1,n,r)$ будет трансверсально-геодезической тогда и только тогда, когда все ее три-подткани $[u,v,n+1]$ будут трансверсально-геодезическими.

c) Всякая шестиугольная ткань $W(n+1,n,r)$ является трансверсально-геодезической.

8.2. Выведите структурные уравнения ткани $W(n+1,n,1)$, используя структурные уравнения ткани $W(n+1,n,r)$.

8.3. Докажите, что конус Сегре $C(r,n)$ представляет собой пересечение конечного числа конусов второго порядка; выведите отсюда, что конусы Сегре, определяемые уравнениями (8.38) и (8.59), совпадают.

8.4. Докажите, что 4-ткань $W(4,2,2)$, заданная на четырехмерном многообразии X^4 с координатами x^1, x^2, y^1, y^2 уравнениями

$$\begin{aligned}
\lambda_1:&\quad x^1 = \mathrm{const}, \quad x^2 = \mathrm{const};\\
\lambda_2:&\quad y^1 = \mathrm{const}, \quad y^2 = \mathrm{const};\\
\lambda_3:&\quad u_3^1 = x^1 + y^1 = \mathrm{const}, \quad u_3^2 = (x^2+y^2)(y^1-x^1) = \mathrm{const};\\
\lambda_4:&\quad u_4^1 = (x^1-y^1)^2(x^2+y^2)^2/((x^2+c)(y^2-c)) = \mathrm{const},\\
&\quad u_4^2 = x^1 + y^1 + \frac{(y^1-x^1)(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+c)(y^2-c)}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{(y^2-c)(x^2+c)} = \mathrm{const},
\end{aligned}$$

будет изоклинной тканью максимального ранга (равного единице). Ее единственное абелево уравнение имеет следующий вид:

$$\frac{1}{x^2}dx^1\wedge dx^2 + \frac{1}{y^2}dy^1\wedge dy^2 - \frac{1}{u_3^2}du_3^1\wedge du_3^2 - \frac{1}{2u_4^1}du_4^1\wedge du_4^2 = 0.$$

8.5. Докажите, что 4-ткань $W(4,2,2)$, заданная на четырехмерном многообразии X^4 с координатами x^1, x^2, y^1, y^2 уравнениями

$$\begin{aligned}
\lambda_1:&\quad x^1 = \mathrm{const}, \quad x^2 = \mathrm{const};\\
\lambda_2:&\quad y^1 = \mathrm{const}, \quad y^2 = \mathrm{const};\\
\lambda_3:&\quad u_3^1 = x^1 + y^1 = \mathrm{const}, \quad u_3^2 = -x^1y^2 + x^2y^1 = \mathrm{const};\\
\lambda_4:&\quad u_4^1 = (u_3^2 + c_1u_3^1)/(x^2+y^2+c_1u_3^2) = \mathrm{const},\\
&\quad u_4^2 = -u_4^1\ln\left|\frac{y^2+c_1y^1-c_2}{x^2+c_1x^1+c_2}\right| - u_3^1 = \mathrm{const},
\end{aligned}$$

будет изоклинной тканью максимального ранга. Ее единственное абелево уравнение имеет следующий вид:

$$-\frac{1}{x^2+c_1x^1+c_2}\,dx^1\wedge dx^2 - \frac{1}{y^2+c_1y^1-c_2}\,dy^1\wedge dy^2 + \frac{1}{u_3^2+c_2u_3^1}du_3^1\wedge du_3^2 - \frac{1}{u_4^1}\,du_4^1\wedge du_4^2 = 0.$$

8.6. Докажите, что 4-ткань $W(4,2,2)$, заданная на многообразии X^4 с координатами x^1, x^2, y^1, y^2, уравнениями

$$\begin{aligned}
\lambda_1:&\ x^1 = \mathrm{const}, \quad x^2 = \mathrm{const};\\
\lambda_2:&\ y^1 = \mathrm{const}, \quad y^2 = \mathrm{const};\\
\lambda_3:&\ u_3^1 = x^1 + y^1 + \frac{1}{2}(x^1)^2y^2 = \mathrm{const}, \quad u_3^2 = x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x^1(y^2)^2 = \mathrm{const};\\
\lambda_4:&\ u_4^1 = -x^1 + y^1 + \frac{1}{2}(x^1)^2y^2 = \mathrm{const}, \quad u_4^2 = x^2 - y^2 - \frac{1}{2}x^1(y^2)^2 = \mathrm{const},
\end{aligned}$$

будет неизоклинной тканью максимального ранга. Ее абелево уравнение имеет следующий вид:

$$2dx^1\wedge dx^2 + 2dy^1\wedge dy^2 - du_3^1\wedge du_3^2 + du_4^1\wedge du_4^2 = 0.$$

Замечание. ткани, указанные в задачах 8.4-8.6, не являются грассманизуемыми. Более подробно эти ткани рассмотрены в главе 8 книги [Го-23].

ПРИМЕЧАНИЯ

8.1. Основные уравнения теории $(n+1)$-тканей $W(n+1,n,r)$ были получены *Гольдбергом* в работах [Го-1], [Го-2] и содержатся в книге [Го-23]. Там же доказаны теоремы 8.1–8.3.

8.2. Грассмановы ткани $GW(n+1,n,r)$ при $n=2$ рассматривались в работе [А-3], при $n=3$ — в [Го-3], для любого n — в работе [Го-7].

8.3. Геометрическое определение почти грассмановой структуры на дифференцируемом многообразии с помощью поля конусов Сегре было дано *Акивисом* в работах [А-14], [А-18]. Там же доказана теорема 8.8. Аналитическое определение почти грассмановой структуры имеется в работах [Хн-1], [Ми-1]. Тензор кручения почти грассмановой структуры вычислен в работах [Ми-1], [Го-8], причем в последней работе он вычислен в общем репере.

8.4. Трансверсально-геодезические ткани $W(n+1, n, r)$ были определены в [Го-2], а изоклинные — в [Го-3]. В связи с теорией почти грассмановых структур они рассматривались в [А-14], [А-18]. Полиэдрические ткани $W(n+1, n, r)$ были изучены в [Го-11] (там они называются $(2n+2)$-эдрическими).

Проблема грассманизуемости для тканей $W(3, 2, r)$ была решена в [А-5], а для тканей $W(n+1, n, r)$ — в работах [А-14], [А-18], [Го-16] (см. теорему 8.13).

8.5. Теория тканей $W(4, 2, r)$ была построена *Гольдбергом* в [Го-12] — [Го-15]. Геометрическое определение почти грассманизуемости для ткани $W(d, n, r)$ при $d > n+1$ было введено *Акивисом* в [А-19]. Но по существу такие ткани рассматривались уже в [А-16], там же дана их аналитическая характеристика. Аналитически почти грассмановы ткани $W(d, 2, r)$ были определены в [Го-19]. Теорема 8.16 дополняет теорему 8.1.10 об изоклинных почти грассмановых тканях $AGW(d, 2, r)$ из [Го-23].

Проблема линеаризуемости для ткани $W(3, 2, 1)$ связана с проблемой общей анаморфозы в номографии (см. примечание 3 к гл. 3). Для тканей $W(d, n, 1)$ проблема линеаризуемости рассматривалась в [ЧГ-1]. Теорема 8.19 впервые доказана в этой книге.

8.6. Проблема алгебраизуемости d-тканей $W(d, n, r)$ была поставлена *Черном* и *Гриффитсом* в [ЧГ-2]. Для тканей $W(3, 2, r)$ она решена *Акивисом* еще в 1974 году, см. [А-3], [А-5]. Для тканей $W(4, 2, r)$ теорема 8.18 была доказана *Гольдбергом* в [Го-17] тем же методом, который указан в § 3 гл. 3. Этим же методом она была доказана *Вудом* для ткани $W(d, 2, r)$, $d \geqslant 4$ в его диссертации [Ву-1]. Но оказалось, что при произвольном d это доказательство связано с довольно сложными вычислениями. Затем *Вуд* в [Ву-2] дал значительно более простое доказательство теоремы 8.18, приведенное в § 6. Метод, которым оно проводится, по существу использовали еще *Ли* и *Шефферс* для доказательства условия алгебраизуемости четверки кривых на плоскости, т. е. в случае $r = 1$ и $d = 4$ (см. [Ли-1], [Шф-1]).

8.7. Понятие ранга ткани было введено в 1933 году в работе *Бляшке* [Бл-3] для d-тканей коразмерности 1 на многообразиях размерности 2 и 3. Затем в 1936 году оно было распространено *Черном* [Ч-2] на ткани $W(d, n, 1)$. Когда в конце 70-х годов *Черн* и *Гриффитс* заметили, что найденная *Черном* верхняя граница ранга ткани $W(d, n, 1)$ совпадает с *границей Кастельнуово* для рода g невырожденной алгебраической кривой степени d, то *Гриффитс* также заинтересовался проблемой ранга тканей. Вместе с *Черном* они опубликовали серию статей [ЧГ-1]–[ЧГ-4], результаты которых изложены в этой главе.

Более подробно проблему ранга тканей $W(d, 2, r)$ изучает *Гольдберг* (см. [Го-18]–[Го-22], [Го-25], [Го-26]). Им установлена точная верхняя граница для ранга таких тканей и изучены ткани максимального ранга.

Приложение 1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ТРИ-ТКАНЕЙ, ОБРАЗОВАННЫХ СЛОЕНИЯМИ РАЗНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Г.А. Толстихина

Введение. В этом приложении рассматривается многомерная три-ткань $W(p,q,r)$, образованная тремя слоениями размерностей p,q и r на гладком многообразии размерности $p+q$. Дифференциально-геометрическую теорию (p,q,r)-тканей начали развивать М.А. Акивис и В.В. Гольдберг [АГо-1], [АГо-2]. Они нашли структурные уравнения ткани $W(p,q,r)$, определили ее тензоры кручения и кривизны, выяснили геометрический смысл обращения в нуль тензора кручения и некоторых его подтензоров. В [Го-4] исследовались классы три-тканей $W(p,q,r)$ со специальным строением указанных тензоров.

Однако для три-ткани $W(p,q,r)$ долгое время не удавалось обобщить такие геометрические и алгебраические понятия теории тканей $W(r,r,r)$, как конфигурация, координатная квазигруппа и лупа, ассоциативность и т.д. Дело в том, что слои разных слоений ткани $W(p,q,r)$ пересекаются, вообще говоря, не в точке, как в случае $p=q=r$, а по подмногообразиям разной размерности. Вследствие этого уравнение $z=f(x,y)$ три-ткани $W(p,q,r)$, определяющее бинарную операцию, не разрешимо однозначно относительно x и y, то есть бинарная операция f не является квазигруппой.

В [То-14]-[То-16], [ТоШ-2], [ТоШ-3] нам удалось построить аналоги указанных понятий для три-тканей $W(p,q,r)$ при $p=\lambda l,\ q=\lambda m,\ r=\lambda(l+m-1)$. Именно такие ткани наиболее естественно возникают в разных приложениях. Для тканей указанного типа введено понятие координатной решетки, с помощью которой был определен координатный моноид ткани, обобщающий понятие координатной лупы три-ткани $W(r,r,r)$; обобщены понятия конфигурации Рейдемейстера и ассоциативности; доказано, что условие замыкания обобщенных конфигураций Рейдемейстера на ткани эквивалентно обобщенной ассоциативности координатных моноидов ткани.

В [ТоШ-5] и [ТоШ-9] конфигурации Рейдемейстера и Бола были обобщены также для три-тканей $W(p,q,q)$. Доказано, в частности, что ткань $W(p,q,q)$, на которой замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера или Бола, порождается действием локальной гладкой q-параметрической группы Ли или соответственно квазигруппы Бола на гладком p-мерном многообразии.

§ 1. Локальный координатный группоид три-ткани $W(p,q,r)$

1. Уравнение три-ткани $W(p,q,r)$.

Говорят, что два гладких слоения на дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ находятся в общем положении, если их слои трансверсальны в каждой точке многообразия $\mathcal{M}$.

Определение 1. *Три-тканью* $W(p,q,r)$ $(p\leqslant r, q\leqslant r)$ на дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ размерности $p+q$ называется совокупность трех гладких слоений λ_1, λ_2 и λ_3, слои которых имеют соответственно размерности p, q и r, причем любые два из этих слоений находятся в общем положении.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — многообразие размерности $p+q$, на котором задана три-ткань $W(p,q,r)$, и пусть A — произвольная точка на $\mathcal{M}$. Тогда в некоторой окрестности U_A*

точки A существуют такие локальные координаты $x=(x^1,...,x^q)$, $y=(y^1,...,y^p)$, что слоения ткани могут быть заданы уравнениями

$$\lambda_1:\ x=\mathrm{const},\quad \lambda_2:\ y=\mathrm{const},\quad \lambda_3:\ z=f(x,y)=\mathrm{const}, \tag{1.1}$$

где $z=(z^1,...,z^\lambda)$, $f=(f^1,...,f^\lambda)$, $\lambda=p+q-r$, f — гладкая функция, и ранги матриц Якоби $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ максимальны в каждой точке многообразия $\mathcal{M}$.

$\square$ Пусть A — произвольная точка на многообразии $\mathcal{M}$ размерности $p+q$, несущем три-ткань $W(p,q,r)$, U_A — ее достаточно малая окрестность и $(\widetilde{x}^1,...,\widetilde{x}^q;\widetilde{y}^1,...,\widetilde{y}^p)$ — некоторые локальные координаты в U_A. Слоения три-ткани $W(p,q,r)$ задаются в окрестности U_A уравнениями

$$\lambda_1:\ f_1^i(\widetilde{x}^j,\widetilde{y}^\alpha)=u_1^i,\qquad \lambda_2:\ f_2^\alpha(\widetilde{x}^i,\widetilde{y}^\beta)=u_2^\alpha,\qquad \lambda_3:\ f_3^\xi(\widetilde{x}^i,\widetilde{y}^\alpha)=u_3^\xi, \tag{1.2}$$

где $i,j=\overline{1,q}$; $\alpha,\beta=\overline{1,p}$; $\xi=\overline{1,\lambda}$, $\lambda=p+q-r$; u_1^i,u_2^α,u_3^ξ — параметры слоений, а функции f_1^i, f_2^α и f_3^ξ являются гладкими. Поскольку слои разных слоений три-ткани находятся в общем положении, то ранги матриц Якоби

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1^i}{\partial \widetilde{x}^j} & \dfrac{\partial f_1^i}{\partial \widetilde{y}^\beta} \\ \dfrac{\partial f_2^\alpha}{\partial \widetilde{x}^j} & \dfrac{\partial f_2^\alpha}{\partial \widetilde{y}^\beta} \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1^i}{\partial \widetilde{x}^j} & \dfrac{\partial f_1^i}{\partial \widetilde{y}^\beta} \\ \dfrac{\partial f_3^\xi}{\partial \widetilde{x}^j} & \dfrac{\partial f_3^\xi}{\partial \widetilde{y}^\beta} \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_2^\alpha}{\partial \widetilde{x}^j} & \dfrac{\partial f_2^\alpha}{\partial \widetilde{y}^\beta} \\ \dfrac{\partial f_3^\xi}{\partial \widetilde{x}^j} & \dfrac{\partial f_3^\xi}{\partial \widetilde{y}^\beta} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

должны быть максимальными в каждой точке окрестности U_A. Отсюда, в частности, следует, что функции f_1^i, f_2^α определяют в U_A переход к некоторым новым локальным координатам $(x^1,...,x^q;y^1,...,y^p)$:

$$x^i=f_1^i(\widetilde{x}^j,\widetilde{y}^\alpha),\quad y^\alpha=f_2^\alpha(\widetilde{x}^i,\widetilde{y}^\beta). \tag{1.4}$$

Тогда из (1.2) получаем, что в новых координатах слоения ткани задаются следующими уравнениями:

$$\lambda_1:\ x^i=u_1^i,\quad \lambda_2:\ y^\alpha=u_2^\alpha,\quad \lambda_3:\ f^\xi(x^i,y^\alpha)=u_3^\xi. \tag{1.5}$$

Таким образом, слои первого и второго слоений три-ткани $W(p,q,r)$ стали координатными. Функция $f=(f^\xi)$ в уравнениях (1.5) получается из функции $f_3=(f_3^\xi)$ в результате замены переменных по формулам (1.4), обозначим ее

$$z=f(x,y), \tag{1.6}$$

где $z=(z^1,...,z^\lambda)$. Из условия максимальности ранга матриц (1.3) следует, что ранги матриц $\left(\dfrac{\partial f^\xi}{\partial x^i}\right)$ и $\left(\dfrac{\partial f^\xi}{\partial y^\alpha}\right)$ также должны быть максимальными в каждой точке окрестности U_A. $\blacksquare$

Заметим, что в силу (1.5) уравнение (1.6) связывает параметры слоев разных слоений три-ткани $W(p,q,r)$, проходящих через точку (x,y) многообразия $\mathcal{M}$. Здесь переменные $x==(x^1,...,x^q)$ и $y=(y^1,...,y^p)$ являются, с одной стороны, локальными координатами на $\mathcal{M}$, а с другой — параметрами слоев соответственно первого и второго слоений три-ткани $W(p,q,r)$. Переменные $z=(z^1,...,z^\lambda)$ являются параметрами слоев третьего слоения три-ткани $W(p,q,r)$.

Определение 2. Уравнение (1.6), связывающее параметры x, y и z слоев первого, второго и третьего слоений три-ткани $W(p,q,r)$, проходящих через одну точку многообразия $\mathcal{M}$, назовем *уравнением три-ткани* $W(p,q,r)$. Функцию f назовем *функцией три-ткани* $W(p,q,r)$.

Из предложения 1 очевидным образом вытекают условия, при которых произвольная гладкая функция вида (1.6) является функцией некоторой три-ткани $W(p,q,r)$. А именно, справедливо

Предложение 2. *Пусть $f:\ \mathcal{X}\times\mathcal{Y}\to\mathcal{Z}$ — произвольная гладкая функция, где $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ — открытые множества в R^q, R^p, R^λ соответственно. Пусть $X\subseteq\mathcal{X}$ и $Y\subseteq\mathcal{Y}$ такие открытые множества, что в каждой точке $(x,y)\in X\times Y$ ранги матриц Якоби $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ максимальны. Тогда в области $X\times Y$ три слоения λ_1, λ_2 и λ_3 вида (1.1) образуют три-ткань $W(p,q,r)$, а функция f, ограниченная на множество $X\times Y$, будет функцией три-ткани $W(p,q,r)$.*

Множество $\mathcal{M}=X\times Y$, на котором слоения λ_1, λ_2 и λ_3 вида (1.1) образуют три-ткань $W(p,q,r)$, будем называть также *областью определения три-ткани*.

Заметим, что множества $X \subseteq \mathcal{X}$ и $Y \subseteq \mathcal{Y}$ являются также областями изменения параметров x и y соответственно первого и второго слоений три-ткани $W(p,q,r)$. Областью изменения параметра z третьего слоения ткани будет множество $Z = \{z|\ z \in \mathcal{Z},\ z = f(x,y),\ x \in X,\ y \in Y\}$, так что $Z \subseteq \mathcal{Z}$. Таким образом, множества X, Y и Z можно считать базами первого, второго и третьего слоений три-ткани $W(p,q,r)$.

2. Локальный координатный группоид три-ткани $W(p,q,r)$.

Напомним, что в теории три-тканей $W(r,r,r)$ существенную роль играет то обстоятельство, что уравнение ткани рассматривается как бинарная операция. Как будет показано ниже, аналогичную теорию можно построить и для три-тканей $W(p,q,r)$.

Пусть три-ткань $W(p,q,r)$ задана на многообразии $\mathcal{M}$ размерности $p+q$ слоениями вида (1.1). Будем считать, что уравнение (1.6), где $x \in X$, $y \in Y$ и $z \in Z$ определяет *трехбазисную бинарную операцию.*

Определение 3. Функцию

$$(\cdot)\colon\ X \times Y \to Z, \quad z = f(x,y) \equiv x \cdot y \tag{1.7}$$

назовем *локальным координатным группоидом три-ткани* $W(p,q,r)$.

Замечание. При $p = q = r$ уравнение $z = x \cdot y$ в силу предложения 1 является локально однозначно разрешимым относительно переменных x и y, поэтому операция $(\cdot)$ является гладкой локальной квазигруппой [3]. Напомним, что последняя называется локальной координатной квазигруппой соответствующей три-ткани $W(r,r,r)$. Для три-ткани $W(p,q,r)$ размерности многообразий X, Y и Z, вообще говоря, различны, поэтому операция $(\cdot)$ квазигруппой, вообще говоря, не является.

3. Эквивалентность три-тканей $W(p,q,r)$.

Пусть $W(p,q,r)$ и $\widetilde{W}(p,q,r)$ — две три-ткани, образованные слоениями λ_w и $\widetilde{\lambda}_w$, $w = 1,2,3$, соответственно на дифференцируемых многообразиях $\mathcal{M}$ и $\widetilde{\mathcal{M}}$ размерности $p+q$.

Определение 4. Три-ткани $W(p,q,r)$ и $\widetilde{W}(p,q,r)$ называются *эквивалентными*, если существует локальный диффеоморфизм $\varphi\colon\ \mathcal{M} \to \widetilde{\mathcal{M}}$, при котором слоения λ_1, λ_2, λ_3 ткани $W(p,q,r)$ отображаются соответственно в слоения $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_3$ ткани $\widetilde{W}(p,q,r)$.

Как и в теории три-тканей $W(r,r,r)$, введенное отношение эквивалентности на множестве три-тканей $W(p,q,r)$ имеет *локальный* характер. При локальных диффеоморфизмах сохраняются локальные свойства три-тканей $W(p,q,r)$, которые мы будем изучать в дальнейшем.

4. Изотопия координатных группоидов три-тканей $W(p,q,r)$.

Как и в теории тканей, образованных слоениями одинаковой размерности, мы рассматриваем координатный группоид ткани $W(p,q,r)$ с точностью до преобразования изотопии (см. гл. 2).

Переменные x, y и z, входящие в уравнение (1.6), допускают преобразования вида

$$\widetilde{x} = \alpha(x), \quad \widetilde{y} = \beta(y), \quad \widetilde{z} = \gamma(z), \tag{1.8}$$

где α, β, γ — локальные диффеоморфизмы. При этом уравнение (1.6) преобразуется к виду

$$\widetilde{z} = \widetilde{f}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \gamma \circ f(\alpha^{-1}(\widetilde{x}), \beta^{-1}(\widetilde{y})).$$

Преобразования (1.8) можно рассматривать либо как замену локальных координат на базах слоений ткани $W(p,q,r)$, либо как отображение координатного группоида этой ткани на координатный группоид некоторой другой ткани $\widetilde{W}(p,q,r)$, определяемой уравнением $\widetilde{z} = \widetilde{f}(\widetilde{x},\widetilde{y})$.

Определение 5. Тройка локальных биекций (α,β,γ) называется *изотопическим преобразованием* или *изотопией*; изотопии вида (α,β,id) называются *главными*.

Предложение 3. *Три-ткани $W(p,q,r)$ и $\widetilde{W}(p,q,r)$ эквивалентны в том и только том случае, если их координатные группоиды изотопны, то есть существует изотопическое преобразование, переводящее один из них в другой.*

□ Действительно, пусть существует локальный диффеоморфизм $\varphi\colon\ \mathcal{M} \to \widetilde{\mathcal{M}}$, который переводит слоения λ_w ткани $W(p,q,r)$ в соответствующие слоения $\widetilde{\lambda}_w$ ткани $\widetilde{W}(p,q,r)$. Тогда φ индуцирует локальные диффеоморфизмы вида (1.8) на базах слоений. При этом, так как слои, проходящие через одну точку, переходят при диффеоморфизме в слои, также переходящие в одну точку, то

$$\widetilde{f}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \widetilde{z} = \gamma(z) = \gamma(f(x, y)) = \gamma(f(\alpha^{-1}(\widetilde{x}), \beta^{-1}(\widetilde{y}))).$$

Таким образом, согласно определению 5, тройка локальных диффеоморфизмов (α, β, γ) определяет изотопическое отображение координатного группоида $z = x \cdot y$ три-ткани $W(p, q, r)$ на координатный группоид $\widetilde{z} = \widetilde{x} \widetilde{\cdot} \widetilde{y}$ три-ткани $\widetilde{W}(p, q, r)$.

Обратно, пусть координатные группоиды $(\cdot)$ и $(\widetilde{\cdot})$ три-тканей $W(p, q, r)$ и $\widetilde{W}(p, q, r)$ изотопны, причем изотопия имеет вид (1.8). Тогда $\varphi = (\alpha, \beta)$ — локальный диффеоморфизм многообразия $X \times Y$ на $\widetilde{X} \times \widetilde{Y}$, причем φ переводит слои ткани $W(p, q, r)$ в слои соответствующих слоений ткани первого, второго и третьего слоений три-ткани $\widetilde{W}(p, q, r)$. Следовательно, эти ткани эквивалентны. ■

Как показывают следующие примеры, преобразования вида (1.8) не сохраняют, вообще говоря, число переменных в уравнении три-ткани $W(p, q, r)$.

1. Группоид

$$z^1 = x^1 + x^2 + y^1$$

изотопическим преобразованием $\widetilde{x}^1 = x^1 + x^2$, $\widetilde{x}^2 = x^2$ приводится к виду

$$z^1 = \widetilde{x}^1 + y^1.$$

2. Группоид

$$z^\xi = A^\xi_i x^i + B^\xi_\alpha y^\alpha,$$

где $i = \overline{1, q}$, $\alpha = \overline{1, p}$, $\xi = \overline{1, \lambda}$, $q > \lambda$, $p > \lambda$, а величины A^ξ_i и B^ξ_α являются постоянными, определяет в R^{p+q} три-ткань $W(p, q, r)$, образованную тремя семействами параллельных плоскостей:

$$\lambda_1\colon\ x^i = \mathrm{const}, \quad \lambda_2\colon\ y^\alpha = \mathrm{const}, \quad \lambda_3\colon\ z^\xi = A^\xi_i x^i + B^\xi_\alpha y^\alpha = \mathrm{const}.$$

Изотопическим преобразованием

$$\widetilde{x}^\xi = A^\xi_i x^i, \quad \widetilde{x}^{\widehat{i}} = x^{\widehat{i}}, \quad \widetilde{y}^\xi = B^\xi_\alpha y^\alpha, \quad \widetilde{y}^{\widehat{\alpha}} = y^{\widehat{\alpha}},$$

где $\widehat{i} = \overline{\lambda + 1, q}$, $\widehat{\alpha} = \overline{\lambda + 1, p}$, уравнение этой ткани приводится к виду

$$z^\xi = \widetilde{x}^\xi + \widetilde{y}^\xi.$$

3. В группоиде

$$z^1 = \varphi^1(x^1 + x^2) + \psi^1(x^3, y^1, y^2), \qquad z^2 = \varphi^2(x^1 + x^2) + \psi^2(x^3, y^1, y^2)$$

после изотопической замены $\widetilde{x}^1 = \varphi^1(x^1 + x^2)$, $\widetilde{x}^2 = x^2$ число переменных также уменьшается:

$$z^1 = \widetilde{x}^1 + \psi^1(x^3, y^1, y^2), \quad z^2 = \theta(\widetilde{x}^1) + \psi^2(x^3, y^1, y^2).$$

В дальнейшем будем считать, что число переменных в уравнении ткани уже «минимизировано», и допускаются только такие изотопические преобразования, при которых число переменных в уравнении ткани не меняется (подробно об этом см. в [То-15]).

§ 2. Три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$

1. $(n+1)$-ткань коразмерности λ, ассоциированная с три-тканью $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$.

Пусть уравнение (1.6) три-ткани $W(p, q, r)$ в некоторых локальных координатах записано в виде

$$z^\xi = f^\xi(x^i, y^\alpha), \tag{2.1}$$

где $i = \overline{1, q}$, $\alpha = \overline{1, p}$, $\xi = \overline{1, \lambda}$,

$$\lambda = p + q - r. \tag{2.2}$$

Если совокупность переменных $x^1, ..., x^q,\ y^1, ..., y^p$ разбить каким-либо иным способом на различные группы, то то же самое уравнение (2.1) будет определять другую ткань — с другим числом слоений и другими размерностями слоев. В частности, если каждую из переменных $x^1, ..., x^q,\ y^1, ..., y^p$ рассматривать в отдельности, то получится $(p+q+1)$-ткань, образованная $p+q$ слоениями коразмерности 1 и одним слоением ($z^\xi = \mathrm{const}$) коразмерности λ, которое является третьим слоением исходной три-ткани $W(p,q,r)$. При этом каждый из слоев первого и второго слоений исходной три-ткани $W(p,q,r)$ является пересечением соответственно q и p слоев $(p+q+1)$-ткани.

Наибольший интерес для приложений представляют такие ткани $W(p,q,r)$, слои которых являются пересечением слоев некоторой $(n+1)$-ткани. Напомним, что $(n+1)$-тканью называется ткань, образованная $n+1$ слоениями одинаковой коразмерности r на многообразии размерности nr, см. гл. 8.

Определение 6. $(n+1)$-ткань, образованную на многообразии $\mathcal{M}$, несущем три-ткань $W(p,q,r)$, $n+1$ слоениями одинаковой коразмерности, назовем *ассоциированной* с заданной три-тканью $W(p,q,r)$, если одно из слоений $(n+1)$-ткани совпадает с третьим слоением исходной три-ткани $W(p,q,r)$, а каждый из слоев первого и второго слоений три-ткани $W(p,q,r)$ является пересечением некоторого числа слоев $(n+1)$-ткани.

Предложение 4. *Если три-ткань $W(p,q,r)$ допускает ассоциированную с нею $(n+1)$-ткань коразмерности λ, то существуют такие натуральные числа l и m, что*

$$p = \lambda l, \quad q = \lambda m. \tag{2.3}$$

При этом

$$r = \lambda(l+m-1), \quad n = l+m. \tag{2.4}$$

$\square$ Заметим, что все слоения $(n+1)$-ткани, ассоциированной с три-тканью $W(p,q,r)$, должны иметь коразмерность $\lambda = p+q-r$, поскольку одно из ее слоений совпадает с третьим слоением исходной три-ткани $W(p,q,r)$. Далее, если каждый из слоев первого слоения (их коразмерность q) три-ткани $W(p,q,r)$ будет пересечением некоторого числа слоев $(n+1)$-ткани, то q кратно λ, то есть $q = \lambda m$. Аналогично получаем $p = \lambda l$.

Из равенств (2.2) и (2.3) получаем первое из равенств (2.4). Далее, в силу определения $(n+1)$-ткани размерность многообразия $\mathcal{M}$ должна быть λn (см. выше). Отсюда получаем равенство

$$p + q = \lambda n, \tag{2.5}$$

что с учетом (2.3) дает второе равенство (2.4). $\blacksquare$

Три-ткань $W(p,q,r)$, удовлетворяющую условиям (2.3) и (2.4), будем обозначать $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, а ассоциированную с ней $(n+1)$-ткань — $W(n+1,\lambda)$.

Так как для три-ткани $W(p,q,r)$, вообще говоря, $p \neq q$, то будем считать, для определенности, что $p \leqslant q$, тогда $l \leqslant m$.

Покажем, как построить $(n+1)$-ткань $W(n+1,\lambda)$, ассоциированную с три-тканью $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

Сначала заметим, что через каждую точку P многообразия $\mathcal{M}$, несущего три-ткань $W(p,q,r)$, проходят, помимо слоя третьего слоения, еще 2 инвариантным образом определенных подмногообразия коразмерности λ.

В самом деле, пусть $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ — проходящие через P соответственно p-мерный (вертикальный), q-мерный (горизонтальный) и r-мерный (наклонный) слои три-ткани $W(p,q,r)$, рис. 57. Слой $\mathcal{F}_3$ пересекает слои $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ по некоторым подмногообразиям, обозначим их соответственно V и U. При этом $\dim V = r-q$, $\dim U = r-p$. Пусть $\overline{U}$ — подмногообразие вертикальных слоев три-ткани $W(p,q,r)$, пересекающих U, а $\overline{V}$ — подмногообразие ее горизонтальных слоев, пересекающих V.

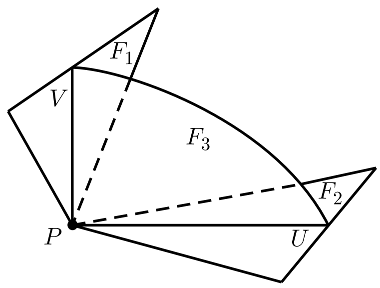

Рис. 57

Подмногообразия $\overline{U}$ и $\overline{V}$ имеют на $\mathcal{M}$ одинаковую размерность r и одинаковую коразмерность

λ — ту же, что и наклонный слой $\mathcal{F}_3$ три-ткани $W(p,q,r)$. Каждые 2 из подмногообразий $\overline{U}$, $\overline{V}$ и $\mathcal{F}_3$ имеют пересечение размерности $r-\lambda$.

Теперь рассмотрим ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ и введем для этой ткани понятие координатной решетки.

Определение 7. Пусть $a=(a_1,a_2,\cdots,a_l)$ — фиксированный упорядоченный набор из l достаточно близких различных вертикальных слоев три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ и $b= =(b_1,b_2,\cdots,b_m)$ — фиксированный упорядоченный набор из m достаточно близких различных горизонтальных слоев этой ткани. Совокупность (a,b) этих наборов назовем *координатной решеткой* три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

Здесь и далее мы обозначаем слои ткани и определяющие их параметры одними и теми же символами.

Предложение 5. *Каждая координатная решетка три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ однозначно определяет некоторую $(n+1)$-ткань коразмерности λ, $n=l+m$, ассоциированную с три-тканью $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.*

□ Пусть (a,b) — некоторая координатная решетка три-ткани $W\equiv W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, образованная l вертикальными слоями $a=(a_s)$, $s=\overline{1,l}$, и m горизонтальными слоями $b=(b_\mu)$, $\mu=\overline{1,m}$, этой три-ткани. Наклонные слои ткани W высекают на горизонтальном слое b_μ λ-параметрическое семейство подмногообразий U_μ размерности $\lambda(m-1)$. Каждое из таких подмногообразий U_μ определяет, как было сказано выше, r-мерное «вертикальное» подмногообразие $\overline{U}_\mu$. При этом, в силу способа их определения, построенные таким образом многообразия $\overline{U}_\mu$ образуют слоение в некоторой окрестности координатной решетки на многообразии $\mathcal{M}$. Обозначим это слоение $\overline{\mathbf{u}}_\mu$.

Точно также строится «горизонтальное» слоение $\overline{\mathbf{v}}_s$ — λ-параметрическое семейство подмногообразий $\overline{V}_s$ размерности $\lambda(m-1)$. Всего, таким образом, с координатной решеткой связаны l горизонтальных и m вертикальных слоений указанного типа.

Далее заметим, что вертикальный слой $\mathcal{F}_1$ исходной ткани W пересекает горизонтальные слои решетки в m точках. Следовательно, слой $\mathcal{F}_1$ содержится в m вертикальных слоях $\overline{U}_\mu$, проходящих через эти точки. Очевидно, других общих точек у этих вертикальных слоев нет (напомним, что все рассмотрения локальные).

Точно также, всякий горизонтальный слой $\mathcal{F}_2$ исходной ткани W является пересечением l горизонтальных слоев $\overline{V}_s$.

Наконец, l горизонтальных слоений $\overline{\mathbf{v}}_s$, m вертикальных слоений $\overline{\mathbf{u}}_\mu$ и третье слоение исходной ткани W образуют $(n+1)$-ткань, где $n=l+m$. Действительно, всего слоений $n+1$, все они имеют одинаковую размерность r, и каждые 2 из них находятся в общем положении. Обозначим эту ткань $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$.

Поскольку, как было показано выше, вертикальные и горизонтальные слои ткани W являются пересечением слоев ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$, то эта последняя и является $(n+1)$-тканью, ассоциированной с три-тканью $W\equiv W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. ■

Очевидно, область $\widetilde{\mathcal{M}}$ определения ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ может оказаться у́же, чем область определения $\mathcal{M}$ исходной ткани $W\equiv W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ (напомним, что в области определения ткани ее слои должны находиться в общем положении).

Замечание. Для три-ткани $W(r,r,r)$ из (2.2), (2.3) и (2.5) следует, что $l=m=1$, $n=l+m=2$. Поэтому координатная решетка три-ткани $W(r,r,r)$ образована одним вертикальным и одним горизонтальным слоями, а $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ является три-тканью, причем в силу (2.6) она совпадает с исходной три-тканью $W(r,r,r)$.

Найдем уравнение ассоциированной $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$. Напомним, что уравнение ткани связывает параметры ее слоев, проходящих через одну точку.

Пусть $\overline{U}_1,...,\overline{U}_m,\overline{V}_1,...,\overline{V}_l,\mathcal{F}_3$ — слои $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$, проходящие через точку $P\in\widetilde{\mathcal{M}}$. Здесь $\mathcal{F}_3$ — наклонный слой три-ткани $W\equiv W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, который является слоем $(n+1)$-ого слоения $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$. Обозначим, как и выше, через $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ вертикальный и горизонтальный слои ткани W, проходящие через P. Параметры x, y и z слоев $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ и $\mathcal{F}_3$ связаны уравнением (1.6) три-ткани W: $z=f(x,y)$.

Обозначим B_μ точку пересечения вертикального слоя $\mathcal{F}_1$ с горизонтальным слоем b_μ координатной решетки (a,b), и A_s — точку пересечения горизонтального слоя $\mathcal{F}_2$ с вертикальным слоем a_s этой решетки. Пусть u_μ и v_s — параметры наклонных слоев три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, проходящих через точки B_μ и A_s соответственно. Тогда в силу (1.6) имеем равенства:

$$u_1 = f(x;\ b_1), \quad \ldots, \quad u_m = f(x;\ b_m); \tag{2.7}$$

$$v_1 = f(a_1;\ y), \quad \ldots, \quad v_l = f(a_l;\ y). \tag{2.8}$$

С другой стороны, u_μ и b_μ есть параметры вертикального слоя $\overline{U}_\mu$, а v_s и a_s — параметры горизонтального слоя $\overline{V}_s$. Поэтому, чтобы получить уравнение ассоциированной ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$, следует исключить из уравнений (1.6), (2.7) и (2.8) координаты x и y точки P.

Прежде, чем это делать, отметим, что уравнения (2.7) и (2.8) функционально независимы в области определения ассоциированной ткани, поскольку ее слоения находятся в общем положении. Иными словами, соответствующие матрицы Якоби должны быть невырожденными:

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^\xi(x,b_1)}{\partial x^i} \\ \ldots \\ \dfrac{\partial f^\xi(x,b_m)}{\partial x^i} \end{pmatrix} \neq 0, \tag{2.9}$$

$$\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^\xi(a_1,y)}{\partial y^\alpha} \\ \ldots \\ \dfrac{\partial f^\xi(a_l,y)}{\partial y^\alpha} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2.10}$$

Здесь $i = \overline{1,q}$ — номер столбца; (ξ,μ) — номер строки, $\xi = \overline{1,\lambda}$, $\mu = \overline{1,m}$, $q = \lambda m$. Аналогично, $\alpha = \overline{1,p}$ — номер столбца; (ξ,s) — номер строки, $s = \overline{1,l}$, $p = \lambda l$.

Исключая из уравнений (2.7), (2.8) и (1.6) переменные $x = (x^1,...,x^q)$ и $y = (y^1,...,y^p)$, получим уравнение $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ в виде

$$z = \widetilde{f}(u_1,...,u_m; v_1,...,v_l). \tag{2.11}$$

Слоения этой ткани определяются уравнениями:

$$\overline{\mathbf{u}}_1\colon\ u_1 = \overline{C}_1;\quad ...,\quad \overline{\mathbf{u}}_m\colon\ u_m = \overline{C}_m;\quad \overline{\mathbf{v}}_1\colon v_1 = \widetilde{C}_1;\quad ...;\quad \overline{\mathbf{v}}_l\colon v_l = \widetilde{C}_l;\quad \lambda_3\colon z = C, \tag{2.12}$$

где $\overline{C}_\mu, \widetilde{C}_s, C$ — постоянные векторы.

С другой стороны, уравнения (2.7) и (2.8) в силу (2.9) и (2.10) определяют изотопическое преобразование, при котором уравнение (1.6) три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ преобразуется к виду (2.11), а уравнения (1.1) ее слоений приводятся к виду

$$\lambda_1\colon\ u_1 = \overline{C}_1,\ ...,\ u_m = \overline{C}_m;\quad \lambda_2\colon\ v_1 = \widetilde{C}_1,\ ...,\ v_l = \widetilde{C}_l;\qquad \lambda_3\colon\ z = C. \tag{2.13}$$

Доказана следующая

Теорема 6. *В области определения $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$, ассоциированной с три-тканью $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, существуют локальные координаты, в которых три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ и ассоциированная с нею $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ определяются одним и тем же уравнением* (2.11). *В этих координатах слоения $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ задаются уравнениями* (2.12), *а слоения три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ — уравнениями* (2.13).

Определение 8. Локальные координаты $(u_1,...,u_m,v_1,...,v_l)$, в которых три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ и ассоциированная с нею $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ определяются одним и тем же уравнением (2.11), назовем *адаптированными*.

Замечание. Уравнение (2.11) определяет $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ с точностью до преобразований вида

$$\widetilde{u}_\mu = \widetilde{\alpha}_\mu(u_\mu),\quad \mu = \overline{1,m},\qquad \widetilde{v}_s = \widetilde{\beta}_s(v_s),\quad s = \overline{1,l},\qquad \widetilde{z} = \widetilde{\gamma}(z),$$

сохраняющих ее слоения (2.12). При этом уравнение (2.11) преобразуется в следующее:

$$\widetilde{z} = \widetilde{\gamma} \circ \widetilde{f}(\widetilde{\alpha}_1^{-1}(\widetilde{u}_1), ..., \widetilde{\alpha}_m^{-1}(\widetilde{u}_m), \widetilde{\beta}_1^{-1}(\widetilde{v}_1), ..., \widetilde{\beta}_l^{-1}(\widetilde{v}_l)) = \widetilde{\widetilde{f}}(\widetilde{u}_1, ..., \widetilde{u}_m, \widetilde{v}_1, ..., \widetilde{v}_l),$$

а последнее определяет некоторую $(n+1)$-ткань, эквивалентную $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$. С другой стороны, уравнение (2.11) определяет исходную три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, поэтому его можно рассматривать с точностью до преобразований более общего вида

$$\widetilde{u}_\mu = \alpha_\mu(u_1, ..., u_m), \quad \widetilde{v}_s = \beta_s(v_1, ..., v_l), \quad \widetilde{z} = \gamma(z),$$

которые сохраняют слоения (2.13) этой три-ткани, но не сохраняют, вообще говоря, слоения ассоциированной $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$. Отсюда, в частности, следует, что $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ и $\widetilde{W}^\lambda(\widetilde{a},\widetilde{b})$, определяемые разными координатными решетками (a,b) и $(\widetilde{a},\widetilde{b})$ произвольной три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, не являются, вообще говоря, эквивалентными относительно преобразований второго типа.

Замечание. Слоения ассоциированной $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ попарно трансверсальны в области, где выполняются условия:

$$\left|\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial u_1}\right| \neq 0, \quad ..., \quad \left|\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial u_m}\right| \neq 0, \quad \left|\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial v_1}\right| \neq 0, \quad ..., \quad \left|\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial v_l}\right| \neq 0. \tag{2.14}$$

В этой же области уравнение (2.11) задает координатную n-квазигруппу $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ [13].

Пример. Рассмотрим три-ткань $W(1,2,2)$, заданную уравнением

$$z^1 = x^1 y^1 + x^2. \tag{2.15}$$

Здесь $p=1$, $q=r=2$. Эта ткань образована в некоторой области $\mathcal{M} \subset R^3$ семейством прямых $x^1 = \mathrm{const}$, $x^2 = \mathrm{const}$ (вертикальные слои $\mathcal{F}_1$), семейством плоскостей $y^1 = \mathrm{const}$ (горизонтальные слои $\mathcal{F}_2$) и семейством двумерных поверхностей $z^1 = x^1y^1 + x^2 = \mathrm{const}$ (наклонные слои $\mathcal{F}_3$).

Найдем область определения $\mathcal{M}$ три-ткани $W(1,2,2)$, см. п. 1. Сначала заметим, что для произвольной три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ условие максимальности ранга матриц Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ имеет вид $\mathrm{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \mathrm{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \lambda$. Отсюда в силу (2.15) получаем $\mathrm{rank}(y^1, 1) = \mathrm{rank}(x^1) = 1$, поэтому в области $\mathcal{M}$

$$x^1 \neq 0. \tag{2.16}$$

Теперь найдем $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$, ассоциированную с три-тканью $W(1,2,2)$. Из (2.2), (2.3) и (2.4) в силу (2.15) имеем: $\lambda=1$, $m=2$, $l=1$, $n=3$, поэтому $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ является 4-тканью коразмерности 1, а определяющая ее координатная решетка (a,b) образована в области $\mathcal{M}$ одним фиксированным вертикальным слоем $a=(a_1)$ и двумя фиксированными различными горизонтальными слоями $b=(b_1,b_2)$:

$$a_1:\ x^1 = a_1^1, \quad x^2 = a_1^2; \qquad b_1:\ y^1 = b_1^1; \qquad b_2:\ y^1 = b_2^1$$

(здесь a_1^1, a_1^2, b_1^1, b_2^1 — постоянные). Произвольный наклонный слой $\mathcal{F}_3$ три-ткани $W(1,2,2)$ пересекает горизонтальные плоскости b_1 и b_2 соответственно по прямым

$$U_1:\ x^1 b_1^1 + x^2 = u_1^1, \qquad U_2:\ x^1 b_2^1 + x^2 = u_2^1, \tag{2.17}$$

а вертикальную прямую a_1 пересекает в точке V_1, координата y^1 которой находится из уравнения

$$a_1^1 y^1 + a_1^2 = v_1^1. \tag{2.18}$$

Множество вертикальных прямых три-ткани $W(1,2,2)$, пересекающих прямую U_1, обозначим $\overline{U}_1$, а множество вертикальных прямых, пересекающих U_2, обозначим $\overline{U}_2$. Плоскости $\overline{U}_1$ и $\overline{U}_2$ задаются в области $\mathcal{M} \subset R^3$ теми же уравнениями (2.17), что и прямые U_1 и U_2 на сответствующих плоскостях b_1 и b_2. Далее, через точку V_1 проходит горизонтальная плоскость исходной три-ткани $W(1,2,2)$, обозначим ее $\overline{V}_1$, она задается на $\mathcal{M}$ уравнением (2.18). Согласно определению ассоциированной ткани $\widetilde{W}^1(a,b)$, три семейства плоскостей $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, $\overline{V}_1$ (с соответствующими параметрами u_1^1, u_2^1, v_1^1) и семейство наклонных слоев $\mathcal{F}_3$ с параметром z^1, образуют в некоторой области $\widetilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M} \subset R^3$ 4-ткань $\widetilde{W}^1(a,b)$ коразмерности 1, ассоциированную с три-тканью $W(1,2,2)$.

Чтобы найти уравнение 4-ткани $\widetilde{W}^1(a,b)$, необходимо исключить из системы (2.15), (2.17), (2.18) координаты точки $P(x^1,x^2,y^1)$, через которую проходят слои $\overline{U}_1$, $\overline{U}_2$, $\overline{V}_1$ и $\mathcal{F}_3$. В результате получим уравнение

$$a_1^1(b_1^1-b_2^1)z^1-(a_1^1b_1^1+a_1^2-v_1^1)u_2^1+(a_1^1b_2^1+a_1^2-v_1^1)u_1^1=0. \tag{2.19}$$

При этом в области $\widetilde{\mathcal{M}}$ должны выполняться условия (2.9) и (2.10), которые с учетом (2.15), (2.17) и (2.18) принимают вид

$$b_1^1 \neq b_2^1, \quad a_1^1 \neq 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что преобразование

$$\widetilde{v}_1^1=-\frac{a_1^1b_2^1+a_1^2-v_1^1}{a_1^1(b_1^1-b_2^1)} \tag{2.20}$$

является допустимым. Этим преобразованием уравнение (2.19) приводится к виду

$$z^1=\widetilde{v}_1^1u_1^1+(1-\widetilde{v}_1^1)u_2^1, \tag{2.21}$$

где, в силу (2.14),

$$\widetilde{v}_1^1\neq 0, \quad \widetilde{v}_1^1\neq 1, \quad u_1^1-u_2^1\neq 0. \tag{2.22}$$

Замечание. Уравнение (2.21) не содержит параметров координатной решетки (a,b), а потому 4-ткани, определяемые *разными* координатными решетками рассматриваемой три-ткани, эквивалентны.

2. $(m+1)$-ткани и $(l+1)$-ткани коразмерности λ, индуцируемые на слоях три-ткани $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$.

Пусть y_0 — произвольный горизонтальный слой три-ткани $W\equiv W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, отличный от слоев b_μ, $\mu=\overline{1,m}$, координатной решетки (a,b), рис. 58. Согласно определению ассоциированной $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$, слой y_0 будет пересечением l горизонтальных слоев из слоений $\overline{\mathbf{v}}_s$ ассоциированной ткани. Согласно § 1 гл. 8, остальные $m+1$ слоений ассоциированной ткани (то есть m вертикальных слоений $\overline{\mathbf{u}}_\mu$ и третье слоение ткани W) высекают на нем подткань ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$, которая является $(m+1)$-тканью. Обозначим эту подткань $\widetilde{W}^\lambda(b,y_0)$. Легко найти, что размерность слоев подткани $\widetilde{W}^\lambda(b,y_0)$ равна $\lambda(m-1)$, а коразмерность их на слое y_0 равна λ. Заметим, что эта $(m+1)$-ткань существует при $m\geqslant 2$.

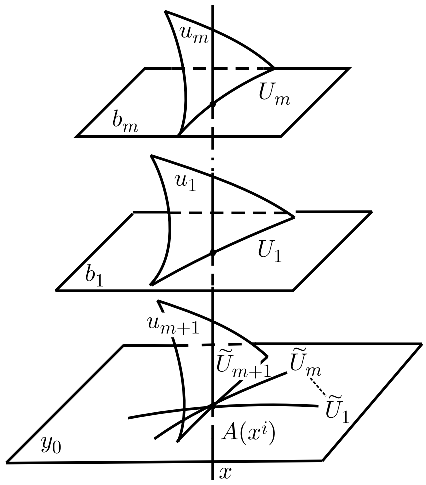

Рис. 58

Аналогичным образом на произвольном вертикальном слое x_0 три-ткани W, отличном от фиксированных вертикальных слоев $a_1,\dots,a_l$ координатной решетки (a,b), при $l\geqslant 2$ горизонтальные и наклонные слои ассоциированной $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ высекают $(l+1)$-ткань также коразмерности λ, которую обозначим $\widetilde{W}^\lambda(a,x_0)$.

Итак, доказано следующее

Предложение 7. *Три-ткань $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$ индуцирует на своем произвольном вертикальном (λl)-мерном слое x_0 $(l+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a,x_0)$ коразмерности λ, и на своем произвольном горизонтальном (λm)-мерном слое y_0 — $(m+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(b,y_0)$ коразмерности λ.*

Заметим, что при $\lambda=1$ получается три-ткань $W(p,q,p+q-1)$ и индуцируемые ею $(p+1)$-ткани $\widetilde{W}(a,x_0)$ и $(q+1)$-ткани $\widetilde{W}(b,y_0)$ коразмерности 1, см. [То-15], [ТоШ-2].

Найдем уравнение $(m+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(b,y_0)$ в адаптированных координатах. Слои этой ткани, проходящие через произвольную точку $A(x,y_0)$ слоя y_0, высекается вертикальными слоями $\widetilde{U}_1,...,\widetilde{U}_m$, уравнения которых имеют вид (2.7), и наклонным слоем $\mathcal{F}_3$, уравнение которого получается из (1.6):

$$u_{m+1}=f(x,y_0), \tag{2.23}$$

Следовательно, уравнение $(m+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(b,y_0)$ получается исключением из уравнений (2.7) и (2.23) локальной координаты x. Запишем его в виде:

$$u_{m+1}=\widetilde{f}_1(u_1,...,u_m,\ y_0). \tag{2.24}$$

Аналогично, уравнение $(l+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,x_0)$ в адаптированных координатах получается исключением локальной координаты y из уравнений (2.8) и уравнения

$$v_{l+1}=f(x_0;\ y). \tag{2.25}$$

Запишем результат в виде:

$$v_{l+1}=\widetilde{f}_2(x_0,\ v_1,...,v_l). \tag{2.26}$$

Заметим, что изотопическим преобразованием (2.8) уравнение (2.24) $(m+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(b,y_0)$ приводится к виду

$$u_{m+1}=\widetilde{f}(u_1,...,u_m;v_{10},...,v_{l0}), \tag{2.27}$$

где $v_{s0}=f(a_s,y_0)$. Аналогично, изотопическим преобразованием (2.7) уравнение (2.26) $(l+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,x_0)$ приводится к виду

$$v_{l+1}=\widetilde{f}(u_{01},...,u_{0m};v_1,...,v_l), \tag{2.28}$$

где $u_{0\mu}=f(x_0,b_\mu)$. Отсюда следует, что уравнения тканей $\widetilde{W}^\lambda(b,y_0)$ и $\widetilde{W}^\lambda(a,x_0)$ могут быть получены из уравнения (2.11) $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$ фиксацией в нем векторных параметров v_s и u_μ соответственно, то есть $v_s=v_{s0}$, $s=\overline{1,l}$; $u_\mu=u_{0\mu}$, $\mu=\overline{1,m}$. Доказана следующая

Теорема 8. *В адаптированных локальных координатах уравнения* (2.27) *и* (2.28) *тканей* $\widetilde{W}^\lambda(b,y_0)$ *и* $\widetilde{W}^\lambda(a,x_0)$, *индуцируемых на горизонтальных и вертикальных слоях три-ткани* $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, *получаются из уравнения* (2.11) $(n+1)$*-ткани* $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$, *ассоциированной с три-тканью* $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, *фиксацией в нем соответствующих векторных параметров* $v_s=v_{s0}$, $s=\overline{1,l}$, *и* $u_\mu=u_{0\mu}$, $\mu=\overline{1,m}$.

Заметим, что в силу условий (2.14) уравнение (2.27) определяет также координатную m-квазигруппу $(m+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(b,y_0)$, а уравнение (2.28) — координатную l-квазигруппу $(l+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,x_0)$.

Пример. Рассмотрим три-ткань $W(1,2,2)$

$$z^1=x^1y^1+x^2,$$

для которой ассоциированная 4-ткань $\widetilde{W}^1(a,b)$ найдена выше, см. уравнение (2.21). Здесь $l=1$, $m=2$, поэтому $(l+1)$-ткань $\widetilde{W}^1(a,x_0)$ не существует, а $(m+1)$-ткань $\widetilde{W}^1(b,y_0)$ является криволинейной три-тканью на плоскости $y^1=y^1_0$. Согласно Теореме 8, уравнение три-ткани $\widetilde{W}^1(b,y_0)$ получается из уравнения (2.21) 4-ткани $\widetilde{W}^1(a,b)$ фиксацией параметра $v_1=(v^1_1)$. Полагая $v^1_1=v^1_{10}$, из (2.20) имеем:

$$\widetilde{v}^1_1=-\frac{a^1_1b^1_2+a^2_1-v^1_{10}}{a^1_1(b^1_1-b^1_2)}=\widetilde{v}^1_{10}.$$

Полагая далее в уравнении (2.21) $\widetilde{v}^1_1=\widetilde{v}^1_{10}$, получим уравнение три-ткани $\widetilde{W}^1(b,y_0)$ в виде

$$z^1=\widetilde{v}^1_{10}u^1_1+(1-\widetilde{v}^1_{10})u^1_2.$$

Преобразование $\widetilde{u}^1_1=\widetilde{v}^1_{10}u^1_1$, $\widetilde{u}^1_2=(1-\widetilde{v}^1_{10})u^1_2$ в силу (2.22) является изотопическим. Этим преобразованием уравнение три-ткани $\widetilde{W}^1(b,y_0)$ приводится к виду $z^1=\widetilde{u}^1_1+\widetilde{u}^1_2$, который показывает, что ткань $\widetilde{W}^1(b,y_0)$ является параллелизуемой [10].

Пример. Рассмотрим три-ткань $W(1,3,3)$, заданную уравнением

$$z^1 = \frac{x^1 y^1 + x^2}{y^1 + x^3}.$$

Здесь $l = 1$, $m = 3$, поэтому $(l+1)$-ткань $\widetilde{W}^1(a, x_0)$ также не существует, а $(m+1)$-ткань $\widetilde{W}^1(b, y_0)$ есть 4-ткань, заданная на произвольном горизонтальном трехмерном слое $y^1 = y_0^1$. Согласно сказанному выше, уравнение 4-ткани $\widetilde{W}^1(b, y_0)$, где $b = (b_1, b_2, b_3)$, получается исключением параметров x^i из уравнений (2.7), (2.23), которые в рассматриваемом случае имеют вид:

$$u_i^1 = \frac{x^1 b_i^1 + x^2}{b_i^1 + x^3}, \quad u_4^1 = \frac{x^1 y_0^1 + x^2}{y_0^1 + x^3}, \quad i = 1, 2, 3,$$

(здесь u_1^1, u_2^1, u_3^1, u_4^1 — параметры семейств двумерных поверхностей, образующих 4-ткань $\widetilde{W}^1(b, y_0)$). Отсюда получаем:

$$(b_1^1 - b_2^1)(y_0^1 - b_3^1)(u_1^1 u_2^1 + u_3^1 u_4^1) + (b_1^1 - b_3^1)(b_2^1 - y_0^1)(u_1^1 u_3^1 + u_4^1 u_2^1) + (b_1^1 - y_0^1)(b_3^1 - b_2^1)(u_1^1 u_4^1 + u_2^1 u_3^1) = 0.$$

Обозначая $u_i = u_i^1$, $u_4 = u_4^1$, $b_i = b_i^1$, $y_0 = y_0^1$ и полагая

$$h_1 = (b_1 - b_2)(y_0 - b_3), \quad h_2 = (b_1 - b_3)(b_2 - y_0), \; h_3 = (b_1 - y_0)(b_3 - b_2),$$

запишем уравнение 4-ткани $\widetilde{W}^1(b, y_0)$ в следующем виде:

$$h_1(u_1 u_2 + u_3 u_4) + h_2(u_1 u_3 + u_4 u_2) + h_3(u_1 u_4 + u_2 u_3) = 0. \tag{2.29}$$

Заметим, что некоторые свойства этой 4-ткани В. Бляшке описывает в [Бл-5]. Более подробно о ней см. в [То-15].

3. Координатый моноид три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

Рассмотрим три-ткань $W(p, q, r)$, определяемую гладким группоидом (1.6) общего вида

$$z = f(x, y) \equiv x \cdot y,$$

где $x = (x^1, ..., x^q)$, $y = (y^1, ..., y^p)$, $z = (z^1, ..., z^\lambda)$, $\lambda = p + q - r$, $\lambda \leqslant p \leqslant q$. Введем некоторую новую алгебраическую операцию $(\circ)$, изотопную группоиду (1.6).

Пусть, как и выше, на многообразии $\mathcal{M}$, несущем три-ткань $W(p, q, r)$, зафиксирована координатная решетка (a, b), где $a = (a_1, ..., a_l)$, $b = (b_1, ..., b_m)$, $l \leqslant p$, $m \leqslant q$. Пусть M — произвольная точка многообразия $\mathcal{M}$, а x, y и z соответственно вертикальный, горизонтальный и наклонный слои ткани $W(p, q, r)$, проходящие через точку M, так что $z = x \cdot y$.

Будем записывать уравнения (2.7) и (2.8) в виде

$$u = R_b(x), \quad v = L_a(y), \tag{2.30}$$

где $u = (u_1, ..., u_m)$, $v = (v_1, ..., v_l)$,

$$R_b\colon\; x \to (u_1, ..., u_m); \quad L_a\colon\; y \to (v_1, ..., v_l). \tag{2.31}$$

Найдем условия, при которых отображения R_b и L_a являются локально биективными. Отображение R_b задается системой (2.7), которая состоит из λm уравнений (так как $u_\mu = (u_\mu^1, ..., u_\mu^\lambda)$, $\mu = \overline{1, m}$) и содержит q параметров вертикального слоя $x = (x^1, x^2, ..., x^q)$. Она имеет (локально!) единственное решение x, если $q = \lambda m$ и ее матрица Якоби невырождена, то есть выполняется условие (2.9).

Аналогично, отображение L_a задается системой (2.8), которая состоит из λl уравнений (так как $v_s = (v_s^1, ..., v_s^\lambda)$, $s = \overline{1, l}$) и содержит p параметров горизонтального слоя $y = (y^1, y^2, ..., y^p)$. Система (2.8) будет иметь единственное решение y, если $p = \lambda l$ и при этом выполняется условие (2.10). Из равенств $q = \lambda m$ и $p = \lambda l$ следует, что $r = \lambda(l + m - 1)$, поэтому ткань $W(p, q, r)$ будет тканью $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$.

Пусть $\widetilde{\mathcal{M}} = \widetilde{X} \times \widetilde{Y}$ такая область многообразия $\mathcal{M}$, несущего ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, в каждой точке которой выполняются условия (2.9) и (2.10), и пусть $\widetilde{Z} = \{z | z \in Z, \ z = f(x,y), \ (x,y) \in \widetilde{\mathcal{M}}\}$. Тогда в области $\widetilde{Z}$ определены обратные функции R_b^{-1} и L_a^{-1},

$$R_b^{-1} \colon \underbrace{(\widetilde{Z} \times \dots \times \widetilde{Z})}_{m} \to \widetilde{X}, \quad x = R_b^{-1}(u), \quad u = (u_1, ..., u_m),$$

$$L_a^{-1} \colon \underbrace{(\widetilde{Z} \times \dots \times \widetilde{Z})}_{l} \to \widetilde{Y}, \quad y = L_a^{-1}(v), \quad v = (v_1, ..., v_l),$$

причем $R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v) = f(x,y) = z \in \widetilde{Z}$.

Так как u_μ, v_s и z — наклонные слои ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, то имеет смысл следующее

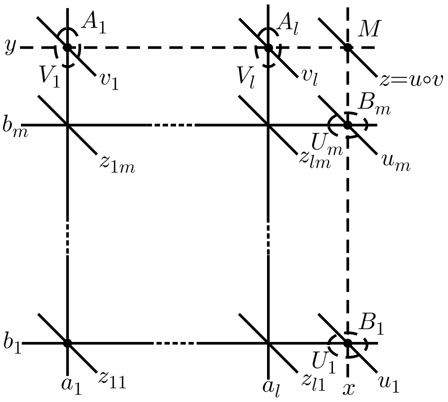

Рис. 59

Определение 8. Отображение

$$(\circ) \colon \underbrace{(\lambda_3 \times \dots \times \lambda_3)}_{m} \times \underbrace{(\lambda_3 \times \dots \times \lambda_3)}_{l} \to \lambda_3,$$

$$z = u \circ v = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v), \tag{2.32}$$

определенное в некоторой области $\widetilde{\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}$, назовем *координатным моноидом* три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ и обозначим $\mu_{(a,b)}(\circ)$.

Геометрический смысл операции $(\circ)$ заключается в следующем. Пусть $u = (u_1, ..., u_m)$ — произвольный набор m достаточно близких различных наклонных слоев в области $\widetilde{\mathcal{M}}$ многообразия $\mathcal{M}$, несущего ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. Слой u_μ, $\mu = \overline{1,m}$, пересекает горизонтальный слой b_μ координатной решетки (a,b) по некоторому подмногообразию U_μ размерности $\lambda(m-1)$. Эти подмногообразия изображены на рис. 59 пунктирными кружками справа. Поскольку $\dim \mathcal{M} = \lambda(l+m)$, то m подмногообразий U_μ размерности $\lambda(m-1)$ допускают на $\mathcal{M}$ (локально!) трансверсальный вертикальный слой x размерности $p = \lambda l$ (на рис. 59 он изображен вертикальной пунктирной линией справа). Согласно определению 3 координатного группоида, параметры $x^1, ..., x^q$ слоя x удовлетворяют уравнениям (2.7), а условие (2.9) означает, что этот слой будет единственным, $x = R_b^{-1}(u)$.

Аналогично, набору l произвольных достаточно близких различных наклонных слоев $v = (v_1, ..., v_l)$ сопоставляется горизонтальный слой y, который трансверсально сечет подмногообразия $V_s = v_s \cap a_s$, $s = \overline{1,l}$, размерности $\lambda(l-1)$ (слой y изображен на рис. 59 горизонтальной пунктирной линией сверху). В силу условия (2.10) слой y будет единственным, $y = L_a^{-1}(v)$. Через точку пересечения слоев x и y проходит единственный наклонный слой $z = x \cdot y$ три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

Из определения 8 операции $(\circ)$ вытекает следующая

Теорема 9. *Координатный моноид* $\mu_{(a,b)}(\circ)$ *существует только для три-тканей вида* $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, *причем в такой области* $\widetilde{\mathcal{M}}$ *многообразия* $\mathcal{M}$, *несущего эту ткань, в которой выполняются условия* (2.9) *и* (2.10).

Например, для три-ткани $W(1,2,2)$, определяемой уравнением

$$z^1 = x^1 + x^2 + y^1,$$

координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ не существует, поскольку ни в одной точке области определения этой ткани не выполняется условие (2.9).

Замечание. При $l = m = 1$ три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ будет тканью $W(\lambda, \lambda, \lambda)$, а ее координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ — координатной лупой $\ell_{(a,b)}(\circ)$ этой ткани. Для три-ткани $W(\lambda, \lambda, \lambda)$ условия (2.9) и (2.10) в силу Предложения 1 выполняются в любой точке ее области определения (см. также замечание на с. 227), поэтому $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$.

Теорема 10. *Всякий координатный моноид* $\mu_{(a,b)}(\circ)$ *три-ткани* $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ *главноизотопен ее координатному группоиду и задается в адаптированных локальных координатах тем же уравнением* (2.11), *что и* $(n+1)$*-ткань* $\widetilde{W}^{\lambda}(a,b)$, $n = l+m$, *ассоциированная с три-тканью* $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

$\square$ Операция $(\circ)$ в координатном моноиде $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W \equiv W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ определяется уравнением (2.32):

$$u \circ v = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v) = x \cdot y = z.$$

Отсюда следует, что операции $(\circ)$ и $(\cdot)$ изотопны, причем изотопия имеет вид

$$(R_b, L_a, id)\colon \ (\cdot) \longrightarrow (\circ).$$

Эта изотопия задается уравнениями (2.7), (2.8). Как показано в Теореме 6, с помощью этих преобразований уравнение (1.6) координатного группоида три-ткани W приводится к виду (2.11):

$$z = x \cdot y = \widetilde{f}(u_1, ..., u_m; v_1, ..., v_l).$$

Из (2.32) и (2.11) получаем уравнение

$$z = u \circ v = \widetilde{f}(u_1, ..., u_m; v_1, ..., v_l),$$

которое, согласно Теореме 6, задает также $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^{\lambda}(a,b)$, ассоциированную с три-тканью W. $\blacksquare$

Следствие. *Координатные моноиды* $\mu_{(a,b)}(\circ)$ *и* $\mu_{(\widetilde{a},\widetilde{b})}(\widetilde{\circ})$ *три-ткани* $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, *связанные с разными координатными решетками* (a,b) *и* $(\widetilde{a},\widetilde{b})$ *этой ткани, главноизотопны.*

Введем аналог понятия единицы для координатного моноида $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. Согласно определению 8 получаем (см. рис. 59!):

$$\begin{cases} (z_{11}, z_{12}, \dots, z_{1m}) \circ (\underline{v_1}, v_2, \dots, v_l) = \underline{v_1}, \\ (z_{21}, z_{22}, \dots, z_{2m}) \circ (v_1, \underline{v_2}, \dots, v_l) = \underline{v_2}, \\ \dots \\ (z_{l1}, z_{l2}, \dots, z_{lm}) \circ (v_1, v_2, \dots, \underline{v_l}) = \underline{v_l}; \end{cases} \tag{2.33}$$

$$\begin{cases} (\underline{u_1}, u_2, \dots, u_m) \circ (z_{11}, z_{21}, \dots, z_{l1}) = \underline{u_1}, \\ (u_1, \underline{u_2}, \dots, u_m) \circ (z_{12}, z_{22}, \dots, z_{l2}) = \underline{u_2}, \\ \dots \\ (u_1, u_2, \dots, \underline{u_m}) \circ (z_{1m}, z_{2m}, \dots, z_{lm}) = \underline{u_m}, \end{cases} \tag{2.34}$$

где $z_{s\mu} = a_s \cdot b_\mu$. Пусть $\widehat{e}_s = (z_{s1}, ..., z_{sm})$ и $\breve{e}_\mu = (z_{1\mu}, ..., z_{l\mu})$ сответственно столбцы и строки матрицы

$$e = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{21} & \dots & z_{l1} \\ z_{12} & z_{22} & \dots & z_{l2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{1m} & z_{2l} & \dots & z_{lm} \end{pmatrix}.$$

Из равенств (2.33) и (2.34) следует, что $\widehat{e}_s \circ v = v_s$, $u \circ \breve{e}_\mu = u_\mu$, поэтому набор столбцов $\widehat{e} = (\widehat{e}_1, ..., \widehat{e}_l)$ матрицы e можно считать аналогом левой единицы, а набор ее строк $\breve{e} = (\breve{e}_1, ..., \breve{e}_m)$ — аналогом правой единицы координатного моноида $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. «Правая единица» и «левая единица» координатного моноида $\mu_{(a,b)}(\circ)$, вообще говоря, не совпадают.

Определение 9. Матрицу $e = (z_{s\mu})$, где $z_{s\mu} = a_s \cdot b_\mu$, $s = \overline{1,l}$, $\mu = \overline{1,m}$ назовем *единичным элементом координатного моноида* $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

При $l = m = 1$ получаем единичный элемент $e = z_{11} = \widehat{e} = \breve{e}$ координатной лупы $\ell_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(\lambda, \lambda, \lambda)$.

Пример. Найдем координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(1,2,2)$, определяемой уравнением

$$z^1 = x^1 y^1 + x^2.$$

В Примере п. 1 найдено уравнение 4-ткани $\widetilde{W}^1(a,b)$, ассоциированной с этой три-тканью. Оно приведено некоторым изотопическим преобразованием к виду (2.21):

$$z^1 = \widetilde{v}_1^1 u_1^1 + (1 - \widetilde{v}_1^1) u_2^1.$$

Согласно Теореме 10, это же уравнение определяет координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ рассматриваемой три-ткани $W(1,2,2)$. Обозначая в уравнении (2.21) $z^1 = z$, $\widetilde{v}_1^1 = v$, $u_1^1 = u_1$, $u_2^1 = u_2$, запишем его в виде

$$z = vu_1 + (1-v)u_2 = (u_1, u_2) \circ v. \tag{2.35}$$

Теперь найдем единичный элемент e координатного моноида (2.35). Для этого запишем систему (2.33), (2.34), которая для рассматриваемой три-ткани $W(1,2,2)$ в силу (2.35) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&(z_{11}, z_{12}) \circ v = vz_{11} + (1-v)z_{12} = v,\\
&(u_1, u_2) \circ z_{11} = z_{11}u_1 + (1 - z_{11})u_2 = u_1,\\
&(u_1, u_2) \circ z_{12} = z_{12}u_1 + (1 - z_{12})u_2 = u_2.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем $z_{11} = 1$, $z_{12} = 0$, поэтому

$$e = \begin{pmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. Для три-ткани $W(2,2,3)$, определяемой уравнением

$$z^1 = x^1 y^1 + x^2 + y^2, \tag{2.36}$$

$\lambda = 1$, $l = 2$, $m = 2$, поэтому координатная решетка (a,b) образована двумя вертикальными слоями $a = (a_1, a_2)$ и двумя горизонтальными слоями $b = (b_1, b_2)$. Уравнения (2.7) и (2.8) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
&u_1^1 = x^1 b_1^1 + x^2 + b_1^2, \quad u_2^1 = x^1 b_2^1 + x^2 + b_2^2,\\
&v_1^1 = a_1^1 y^1 + a_1^2 + y^2, \quad v_2^1 = a_2^1 y^1 + a_2^2 + y^2.
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Исключая из уравнений (2.36), (2.37) переменные x^1, x^2, y^1, y^2, получим уравнение координатного моноида $\mu_{(a,b)}(\circ)$ в виде

$$\begin{vmatrix}
1 & v_1^1 & v_2^1 & z^1\\
1 & z_{11}^1 & z_{21}^1 & u_1^1\\
1 & z_{12}^1 & z_{22}^1 & u_2^1\\
0 & 1 & 1 & 1
\end{vmatrix} = 0,$$

где

$$\begin{aligned}
&z_{11}^1 = a_1^1 b_1^1 + a_1^2 + b_1^2, \quad z_{12}^1 = a_1^1 b_2^1 + a_1^2 + b_2^2,\\
&z_{21}^1 = a_2^1 b_1^1 + a_2^2 + b_1^2, \quad z_{22}^1 = a_2^1 b_2^1 + a_2^2 + b_2^2,
\end{aligned}$$

а матрица

$$e = \begin{pmatrix} z_{11}^1 & z_{21}^1 \\ z_{12}^1 & z_{22}^1 \end{pmatrix}$$

является единичным элементом.

§ 3. Обобщенные три-ткани Рейдемейстера

1. Обобщенные конфигурации Рейдемейстера на три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

Построим на три-ткани $W \equiv W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ конфигурацию, аналогичную конфигурации Рейдемейстера R (см. рис. 10 на с. 45). Зафиксируем $l+1$ достаточно близких вертикальных слоев $x_{\overline{s}}$, $\overline{s} = \overline{1, l+1}$, первого слоения и $m+1$ также достаточно близких горизонтальных слоев $y_{\overline{\mu}}$, $\overline{\mu} = \overline{1, m+1}$, второго слоения ткани W. (Здесь, как и выше, через $x_{\overline{s}}$ и $y_{\overline{\mu}}$ обозначены также параметры соответствующих слоев.) Через точку пересечения слоев $x_{\overline{s}}$ и $y_{\overline{\mu}}$ проходит единственный наклонный слой третьего слоения с параметром $z_{\overline{s}\overline{\mu}}$. Точку пересечения слоев x_{l+1}

и y_{m+1} обозначим через M_{l+1m+1}. Построенная конфигурация изображена на рис. 60 сплошными линиями.

Возьмем еще l произвольных вертикальных слоев $\overline{x}_s$. Эти слои, а также их пересечения с соответствующими наклонными слоями $z_{s\overline{\mu}}$ — многообразия $V_{s\overline{\mu}}$ размерности $\lambda(l-1)$ — обозначены на рис. 60 пунктирными линиями. Простые вычисления показывают, что для каждого фиксированного $\overline{\mu}$ l подмногообразий $V_{s\overline{\mu}}$, $s=\overline{1,l}$, размерности $\lambda(l-1)$ допускают (локально!) единственный трансверсально пересекающий их горизонтальный (λm)-мерный слой $\overline{y}_{\overline{\mu}}$. На рис. 60 слои $\overline{y}_{\overline{\mu}}$, $\overline{\mu}=\overline{1,m+1}$, обозначены горизонтальными пунктирными линиями.

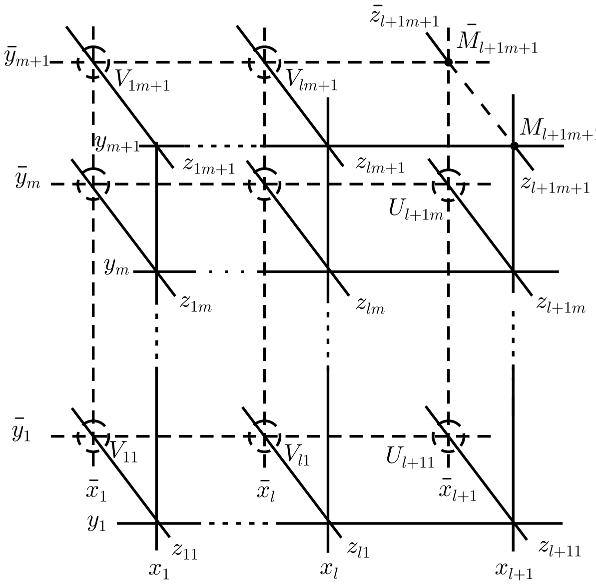

Рис. 60

Рассмотрим далее m первых слоев $\overline{y}_\mu$, $\mu=\overline{1,m}$ (на рис. 60 — все, кроме верхнего). Каждый из них пересекает наклонный слой с соответствующим номером $z_{l+1\mu}$ по некоторому $\lambda(m-1)$-мерному подмногообразию $U_{l+1\mu}$. Эти подмногообразия изображены на рис. 60 пунктирными кружками справа. Подмногообразия $U_{l+1\mu}$ определяют (локально!) единственный трансверсальный вертикальный (λl)-мерный слой $\overline{x}_{l+1}$. Последний пересекается с построенным выше горизонтальным слоем $\overline{y}_{m+1}$ в некоторой точке $\overline{M}_{l+1m+1}$, которая, вообще говоря, не лежит на слое z_{l+1m+1}, что отмечено на рис. 60 пунктиром.

При $l=m=1$ построенная конфигурация совпадает с конфигурацией Рейдемейстера R для три-тканей $W(r,r,r)$ (рис. 10), поэтому назовем ее *обобщенной конфигурацией Рейдемейстера* и обозначим $R(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$.

Если точки M_{l+1m+1} и $\overline{M}_{l+1m+1}$ лежат на одном наклонном слое, то будем говорить, что *конфигурация Рейдемейстера* $R(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$ *замыкается.*

Определение 10. Три-ткань $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, на которой замыкаются все достаточно малые конфигурации $R(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$, назовем *обобщенной три-тканью Рейдемейстера* и обозначим $WR(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$.

По аналогии с теорией три-тканей $W(r,r,r)$ условие замыкания конфигураций $R(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$ можно записать в виде так называемого *условного тождества*, см. § 2 гл. 2:

$$\left.\begin{array}{l} x_s\cdot y_\mu=\overline{x}_s\cdot\overline{y}_\mu=z_{s\mu},\\ x_s\cdot y_{m+1}=\overline{x}_s\cdot\overline{y}_{m+1}=z_{sm+1},\\ x_{l+1}\cdot y_\mu=\overline{x}_{l+1}\cdot\overline{y}_\mu=z_{l+1m}\end{array}\right\}\Longrightarrow x_{l+1}\cdot y_{m+1}=\overline{x}_{l+1}\cdot\overline{y}_{m+1}=z_{l+1m+1},$$

где $s=\overline{1,l}$, $\mu=\overline{1,m}$, $x\cdot y=f(x,y)=z$, см. п. 2 § 1.

Обобщенные конфигурации Рейдемейстера были впервые определены в [ТоШ-2] для три-тканей $W(p,q,p+q-1)$.

2. Сердцевина три-ткани $\boldsymbol{WR(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))}$.

Из определения конфигурации $R(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$ следует, что на ткани $WR(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$ положение слоя $M_{l+1m+1}\overline{M}_{l+1m+1}$ не зависит от выбора вертикальных слоев $\overline{x}_1$, ..., $\overline{x}_l$, а определяется только выбором наклонных слоев $z_{s\mu}$, z_{sm+1}, $z_{l+1\mu}$, $s=\overline{1,l}$, $\mu=\overline{1,m}$, входящих в конфигурацию. Таким образом, возникает отображение

$$\mathcal{C}\colon\underbrace{\lambda_3\times\cdots\times\lambda_3}_{lm+l+m}\to\lambda_3,\qquad z_{l+1m+1}=\mathcal{C}(z_{s\mu},z_{sm+1},z_{l+1\mu}),\tag{3.1}$$

где $z_{\overline{s\mu}} = f(x_{\overline{s}}, y_{\overline{\mu}})$, $z_{\overline{s\mu}} = (z^{\xi}_{\overline{s\mu}})$, $\overline{s} = \overline{1, l+1}$, $\overline{\mu} = \overline{1, m+1}$, $\xi = \overline{1, \lambda}$. Это отображение будем рассматривать как $(lm + l + m)$-арную операцию на базе третьего слоения ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$.

При $l = m = 1$ получаем три-ткань $WR(\lambda, \lambda, \lambda)$ (или ткань R), для которой уравнение $z_{22} = \mathcal{C}(z_{11}, z_{12}, z_{21})$ связывает параметры наклонных слоев z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}, входящих в произвольную конфигурацию Рейдемейстера на этой ткани, см. рис. 61.

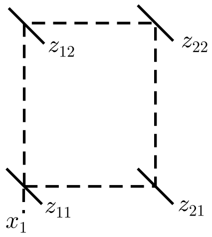

Рис. 61

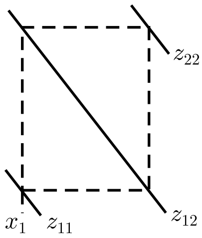

Рис. 62

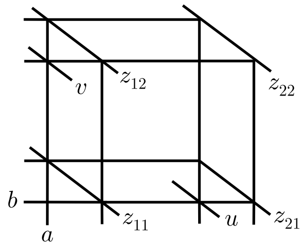

Рис. 63

В частности, при $z_{21} = z_{12}$ конфигурация R становится средней конфигурацией Бола B_m (рис. 13 на с. 46). Три-ткань $W(r, r, r)$, на которой замыкаются все достаточно малые конфигурации B_m называется средней тканью Бола или тканью B_m, см. гл. 2. Для тканей B_m функция $z_{22} = \mathcal{C}(z_{11}, z_{12})$ определена В.Д. Белоусовым в [Б-1], см. также [Б-3], и названа им *сердцевиной три-ткани* B_m (рис. 62).

Определение 11. Функцию $\mathcal{C}$, определенную на три-ткани Рейдемейстера R, назовем *сердцевиной* этой ткани.

Предложение 11. *Сердцевина $\mathcal{C}$ три-ткани Рейдемейстера R может быть записана в виде*

$$z_{22} = \mathcal{C}(z_{11}, z_{12}, z_{21}) = z_{21} \circ (z_{11}/z_{12}), \tag{3.2}$$

или

$$z_{22} = \mathcal{C}(z_{11}, z_{12}, z_{21}) = (z_{21} \setminus z_{11}) \circ z_{12}, \tag{3.3}$$

где $(\circ)$ — операция в какой-либо (неважно, какой) координатной лупе $\ell_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани R, а знаки $/$ и $\setminus$ обозначают соответственно правую и левую обратные операции для $(\circ)$.

□ На ткани R рассмотрим произвольную конфигурацию Рейдемейстера, в которую входят наклонные слои z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22} (рис. 63). Пусть $\ell_{(a,b)}(\circ)$ — координатная лупа три- ткани R, связанная с фиксированным вертикальным слоем a и фиксированным горизонтальным слоем b. Обозначим через u и v такие наклонные слои, что $u \circ z_{11} = z_{21}$, $z_{11} \circ v = z_{12}$, см. рис. 7. Отсюда находим:

$$u = z_{21} \setminus z_{11}, \quad v = z_{11}/z_{12}. \tag{3.4}$$

В силу замыкания конфигураций Рейдемейстера на ткани R имеем:

$$u \circ z_{12} = z_{22}, \quad z_{21} \circ v = z_{22}.$$

Из последних равенств с учетом (3.4) получим (3.2) и (3.3). ■

Следствие. *Сердцевина три-ткани B_m может быть записана в виде $z_{22} = z_{12} \circ (z_{11}/z_{12})$ или $z_{22} = (z_{12} \setminus z_{11}) \circ z_{12}$, см. [Б-3].*

Функция $\mathcal{C}$ для три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ является, в свою очередь, обобщением понятия сердцевины три-ткани R.

Определение 12. Функцию $\mathcal{C}$ вида (3.1) назовем *сердцевиной три-ткани* $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$. Уравнение (3.1), связывающее параметры наклонных слоев, входящих в произвольную обобщенную конфигурацию Рейдемейстера, будем называть также уравнением сердцевины ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$.

Из определения ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ вытекают следующие утверждения.

Теорема 12. *Сердцевина три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ существует тогда и только тогда, когда эта ткань является обобщенной три-тканью Рейдемейстера.*

□ В одну сторону утверждение доказано, так как на ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ сердцевина существует.

Предположим теперь, что для некоторой ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$ сердцевина существует. Вернемся к рис. 60 и вспомним, что набору l вертикальных слоев x_s соответствует точка M_{l+1m+1}, а набору l «сдвинутых» вертикальных слоев $\overline{x}_s$ — точка $\overline{M}_{l+1m+1}$. Но, сдвигая вертикальные слои, мы не меняли положение наклонных слоев $z_{s\mu}$, $z_{l+1\mu}$, z_{sm+1}. Следовательно, в силу того, что существует сердцевина, не должно меняться положение слоя $\overline{z}_{l+1m+1}$. Это означает, что точка $\overline{M}_{l+1m+1}$ должна лежать на том же слое третьего слоения, что и точка M_{l+1m+1}, то есть конфигурация $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, изображенная на рис. 60, замыкается. ■

Теорема 13. *Сердцевина три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ вполне определяет координатный группоид этой ткани.*

□ На рис. 60 зафиксируем lm наклонных слоев, определяемых параметрами $z_{s\mu} = (z^{\xi}_{s\mu})$. Далее, выберем произвольно l вертикальных слоев x_s. Тогда однозначно определятся (как трансверсали) m горизонтальных слоев y_μ. При этом положение наклонного слоя z_{l+1m+1} будет определяться только выбором l наклонных слоев z_{sm+1} и m наклонных слоев $z_{l+1\mu}$. Тем самым, координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ задан, а он в силу теоремы 10 главноизотопен координатному группоиду рассматриваемой три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. ■

Пример 1. Простейшим примером три-ткани Рейдемейстера R является так называемая *параллельная ткань* на плоскости, образованная тремя семействами параллельных прямых. Уравнение такой ткани некоторым изотопическим преобразованием приводится к виду $z = x + y$ (см. п. 4 § 1, Пример 2). Найдем сердцевину этой ткани. Пользуясь уравнением ткани, получаем (см. рис. 61):

$$z_{11} = x_1 + y_1, \quad z_{21} = x_2 + y_1, \quad z_{12} = x_1 + y_2, \quad z_{22} = x_2 + y_2.$$

Исключая из последних уравнений переменные x_1, x_2, y_1, y_2, получим уравнение сердцевины:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & z_{11} & z_{21} \\ 1 & z_{12} & z_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$z_{22} = z_{12} - z_{11} + z_{21}. \tag{3.6}$$

Пример 2. Найдем сердцевину четырехмерной средней три-ткани Бола B_m, заданной уравнениями

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = \frac{x^2 + y^2}{x^1 - y^1}.$$

Имеем (см. рис. 62):

$$\begin{aligned} &z^1_{11} = x^1_1 + y^1_1, \quad z^2_{11} = \frac{x^2_1 + y^2_1}{x^1_1 - y^1_1}, \\ &z^1_{12} = x^1_1 + y^1_2 = x^1_2 + y^1_1, \quad z^2_{12} = \frac{x^2_1 + y^2_2}{x^1_1 - y^1_2} = \frac{x^2_2 + y^2_1}{x^1_2 - y^1_1}, \\ &z^1_{22} = x^1_2 + y^1_2, \quad z^2_{22} = \frac{x^2_2 + y^2_2}{x^1_2 - y^1_2}. \end{aligned}$$

Исключая из этой системы переменные $x_i = (x^j_i)$, $y_i = (y^j_i)$, $i, j = 1, 2$, получим уравнение сердцевины в виде

$$z^1_{22} = -z^1_{11} + 2z^1_{12}, \quad z^2_{22} = -z^2_{11} + 2z^2_{12}.$$

Очевидно, что эта сердцевина изотопна абелевой группе.

Пример 3. Покажем, что для три-ткани $W(1, 2, 2)$, заданной уравнением

$$z^1 = x^1y^1 + x^2,$$

существует сердцевина. Соответствующая система уравнений имеет вид (см. рис. 60):

$$\begin{aligned} &z^1_{11} = x^1_1y^1_1 + x^2_1, \quad z^1_{12} = x^1_1y^1_2 + x^2_1, \quad z^1_{13} = x^1_1y^1_3 + x^2_1, \\ &{}^1_{21} = x^1_2y^1_1 + x^2_2, \quad z^1_{22} = x^1_2y^1_2 + x^2_2, \quad z^1_{23} = x^1_2y^1_3 + x^2_2. \end{aligned}$$

Исключив переменные x_1^1, x_1^2, x_2^1, x_2^2, y_1^1, y_2^1, y_3^1, получим уравнение сердцевины:

$$\begin{vmatrix} 1 & z_{11}^1 & z_{21}^1 \\ 1 & z_{12}^1 & z_{22}^1 \\ 1 & z_{13}^1 & z_{23}^1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.7}$$

Следовательно, в силу теоремы 12, рассматриваемая три-ткань является обобщенной три-тканью Рейдемейстера. В [ТоШ-2] эта ткань обозначена $WR(1,2)$.

Пример 4. Три-ткань $W(1,3,3)$, заданная уравнением

$$z^1 = \frac{x^1 y^1 + x^2}{y^1 + x^3},$$

также является обобщенной три-тканью Рейдемейстера. Действительно, исключая из уравнений

$$z_{1i}^1 = \frac{x_1^1 y_i^1 + x_1^2}{y_i^1 + x_1^3}, \quad z_{2i}^1 = \frac{x_2^1 y_i^1 + x_2^2}{y_i^1 + x_2^3},$$

$i = \overline{1,4}$, переменные x_1^1, x_1^2, x_1^3, x_2^1, x_2^2, x_2^3, y_i^1, придем к уравнению:

$$\begin{vmatrix} 1 & z_{11}^1 & z_{21}^1 & z_{11}^1 z_{21}^1 \\ 1 & z_{12}^1 & z_{22}^1 & z_{12}^1 z_{22}^1 \\ 1 & z_{13}^1 & z_{23}^1 & z_{13}^1 z_{23}^1 \\ 1 & z_{14}^1 & z_{24}^1 & z_{14}^1 z_{24}^1 \end{vmatrix} = 0, \tag{3.8}$$

содержащему только переменные z. Следовательно, уравнение (3.8) является уравнением сердцевины. В [ТоШ-2] эта обобщенная три-ткань Рейдемейстера обозначена $WR(1,3)$.

3. Тождество обобщенной ассоциативности.

В теории три-тканей $W(r,r,r)$ условию замыкания конфигураций определенного вида на ткани соответствует некоторое тождество, выполняемое в координатных лупах $\ell_{(a,b)}(\circ)$ ткани. Так, замыканию конфигураций Рейдемейстера на ткани R соответствует, как известно, тождество ассоциативности $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$. Соответствующая фигура R изображена на рис. 64, где $u_1 = u \circ v$, $v_1 = v \circ w$, $u_1 \circ w = (u \circ v) \circ w$, $u \circ v_1 = u \circ (v \circ w)$.

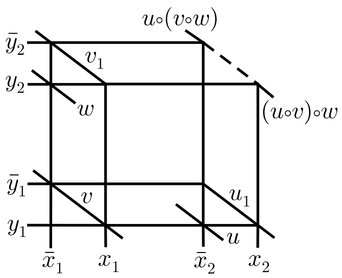

Рис. 64

Следующая теорема обобщает понятие ассоциативности для координатного моноида $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$.

Теорема 14. *Пусть $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ и $w = (w_1, w_2, \dots, w_l)$ — два произвольных набора наклонных слоев ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, и пусть $v_{s\mu}$ — еще один набор lm наклонных слоев, $s = \overline{1,l}$, $\mu = \overline{1,m}$. Обозначим строки и столбцы матрицы $(v_{s\mu})$ следующим образом: $v_\mu^{(l)} = (v_{1\mu}, v_{2\mu}, \cdots, v_{l\mu})$, $v_s^{(m)} = (v_{s1}, v_{s2}, \cdots, v_{sm})$. Три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ будет тканью $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+lm-1))$ тогда и только тогда, когда в каждом ее координатном моноиде выполняется следующее тождество*:

$$u \circ (v_1^{(m)} \circ w, v_2^{(m)} \circ w, \cdots, v_l^{(m)} \circ w) = (u \circ v_1^{(l)}, u \circ v_2^{(l)}, \cdots, u \circ v_m^{(l)}) \circ w. \tag{3.9}$$

□ Зафиксируем на три-ткани $W \equiv W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ координатную решетку (a,b), то есть l вертикальных слоев a_s и m горизонтальных слоев b_μ, $s = 1,2,...,l$, $\mu = 1,2,...,m$. Пусть $\mu_{(a,b)}(\circ)$ — соответствующий координатный моноид.

Для каждого индекса $s = 1,2,...,l$ наклонные слои $v_{s1}, v_{s2}, ..., v_{sm}$ пересекают соответствующие горизонтальные слои $b_1, b_2, ..., b_m$ (с тем же номером) по подмногообразиям $U_{s1}, U_{s2}, ..., U_{sm}$. Как уже отмечалось, существует вертикальный слой три-ткани W, трансверсальный этим подмногообразиям; обозначим его x_s. Тогда в соответствии с (1.6)

$$x_s \cdot b_\mu = v_{s\mu}.$$

Далее, слой w_s пересекает вертикальный слой a_s по подмногообразию V_s, $s = \overline{1, l}$. Подмногообразия $V_1, V_2, ..., V_l$ допускают трансверсальный горизонтальный слой b_{m+1}. В силу (1.6) имеем

$$a_s \cdot b_{m+1} = w_s.$$

Через точку пересечения слоев b_{m+1} и x_s проходит некоторый наклонный слой, обозначим его $\overline{w}_s$. Тогда

$$x_s \cdot b_{m+1} = w_s.$$

Согласно определению операции ($\circ$) (рис. 65) имеем:

$$(v_{11}, v_{12}, ..., v_{1m}) \circ (w_1, w_2, ..., w_l) = x_1 \cdot b_{m+1} = \overline{w}_1,$$
$$(v_{21}, v_{22}, ..., v_{2m}) \circ (w_1, w_2, ..., w_l) = x_2 \cdot b_{m+1} = \overline{w}_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$
$$(v_{l1}, v_{l2}, ..., v_{lm}) \circ (w_1, w_2, ..., w_l) = x_l \cdot b_{m+1} = \overline{w}_l.$$

Слой u_μ пересекает горизонтальный слой b_μ (с тем же номером μ) по подмногообразию U_μ, $\mu = \overline{1, m}$. Подмногообразия $U_1, U_2, ..., U_m$ допускают трансверсальный вертикальный слой a_{l+1}, так что

$$a_{l+1} \cdot b_\mu = u_\mu.$$

Согласно определению операции ($\circ$) (рис. 65) имеем:

$$(u_1, u_2, ..., u_m) \circ (\overline{w}_1, \overline{w}_2, ..., \overline{w}_l) = a_{l+1} \cdot y_{m+1} \overset{\text{def}}{=} \overline{z}.$$

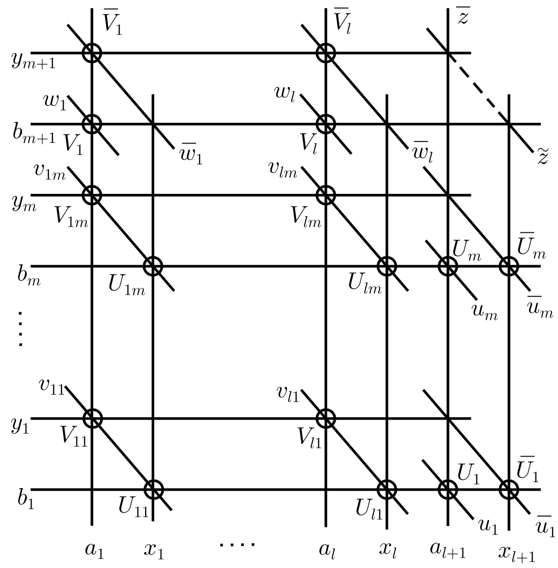

Рис. 65

Для каждого индекса $\mu = 1, 2, ..., m$ слои $v_{1\mu}, v_{2\mu}, ..., v_{l\mu}$ пересекают соответствующие вертикальные слои $a_1, a_2, ..., a_l$ (с тем же номером) по подмногообразиям $V_{1\mu}, V_{2\mu}, ..., V_{l\mu}$. Эти подмногообразия допускают трансверсальный горизонтальный слой y_μ. Следовательно,

$$a_s \cdot y_\mu = v_{s\mu}.$$

Каждый из слоев y_μ пересекает вертикальный слой a_{l+1} в некоторой точке, через которую проходит наклонный слой $\overline{u}_\mu$, так что $\overline{u}_\mu = a_{l+1} \cdot y_\mu$. При этом, согласно определению операции ($\circ$) будут выполняться равенства

$$(u_1, u_2, ..., u_m) \circ (v_{11}, v_{21}, ..., v_{l1}) = a_{l+1} \cdot y_1 = \overline{u}_1,$$
$$(u_1, u_2, ..., u_m) \circ (v_{12}, v_{22}, ..., v_{l2}) = a_{l+1} \cdot y_2 = \overline{u}_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots ,$$
$$(u_1, u_2, ..., u_m) \circ (v_{1m}, v_{2m}, ..., v_{lm}) = a_{l+1} \cdot y_m = \overline{u}_m.$$

Слой $\overline{w}_s$ пересекает соответствующий вертикальный слой a_s (с тем же номером s) по подмногообразию $\overline{V}_s$, $s = \overline{1, l}$. Подмногообразия $\overline{V}_1, \overline{V}_2, ..., \overline{V}_l$ допускают трансверсальный горизонтальный слой y_{m+1}. Поэтому

$$a_s \cdot y_{m+1} = \overline{w}_s.$$

Далее, слой $\overline{u}_\mu$ пересекает горизонтальный слой b_μ по подмногообразию $\overline{U}_\mu$, $\mu = \overline{1, m}$. Пусть x_{l+1} — вертикальный слой, трансверсальный подмногообразиям $\overline{U}_1, \overline{U}_2, ..., \overline{U}_m$, тогда

$$x_{l+1} \cdot b_\mu = \overline{u}_\mu.$$

По определению операции ($\circ$) имеем:

$$(\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_m) \circ (w_1, w_2, ..., w_l) = x_{l+1} \cdot b_{m+1} \overset{\text{def}}{=} \widetilde{z}.$$

Построенные наклонные слои $\overline{z}$ и $\widetilde{z}$ на произвольной три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l + m - 1))$, вообще говоря, не совпадают. Если $\overline{z} = \widetilde{z}$, то, с одной стороны, замыкается обобщенная конфигурация Рейдемейстера, изображенная на рис. 65, поэтому ткань является тканью

$WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1)$. С другой стороны, исключая переменные с чертой из полученных выше равенств, придем к (3.9). ■

При $m = l = 1$ тождество (3.9) обращается в обычное тождество ассоциативности, поэтому назовем (3.9) *тождеством обобщенной ассоциативности.*

Определение 13. Координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, в котором выполняется тождество (3.9), назовем *ассоциативным.*

Пример. Рассмотрим обобщенную три-ткань Рейдемейстера $WR(1,2)$:

$$z^1 = x^1 y^1 + x^2.$$

В силу теоремы 14 каждый координатный моноид этой ткани является ассоциативным. В Примере п. 3 § 2 уравнение координатного моноида рассматриваемой три-ткани записано в виде (2.35):

$$z = vu_1 + (1-v)u_2 = (u_1, u_2) \circ v.$$

Значит, уравнение (2.35) определяет ассоциативный моноид.

4. Групповая $(n+1)$-ткань, индуцируемая три-тканью $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$. Напомним (см. § 5 гл. 1), что групповая три-ткань $W(r,r,r)$ порождается r-мерной группой Ли $G(*)$, $c = a * b$, на прямом произведении $M = G \times G^{-1}$, где G^{-1} — группа с операцией $(\diamond)$, $a \diamond b = b * a$ (здесь мы вводим другие обозначения для групповых операций, так как обозначения, используемые в § 5 гл. 1, уже заняты). На многообразии M размерности $2r$ с операцией $(\circ)$, $(x,y) \circ (a,b) = (x * a, y \diamond b)$, есть три r-мерные подгруппы: $G_1 = (e, G^{-1})$, $G_2 = (G, e)$ и $G_3 = \{(x, \Theta(x)) |\ x \in G,\ \Theta(x) \in G^{-1},\ \Theta(x) = x^{-1}\}$, (здесь e — единица группы G, а Θ — антиизоморфизм $G \to G^{-1}$). Слоения групповой три-ткани определяются на $M = G \times G^{-1}$ смежными классами по подгруппам G_1, G_2, G_3 и задаются уравнениями $a = \mathrm{const}$, $b = \mathrm{const}$, $c = a * b = \mathrm{const}$ соответственно.

Покажем, что с обобщенной три-тканью Рейдемейстера $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ также связана некоторая группа Ли.

Теорема 15. *$(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$, ассоциированная с обобщенной три-тканью Рейдемейстера $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, является групповой тканью, порождаемой некоторой λ-мерной группой Ли G.*

□ Сначала напомним [Го-11], что $(n+1)$-ткань называется групповой, если ее координатная n-квазигруппа (хотя бы одна) является n-группой. Согласно [Го-11] групповая $(n+1)$-ткань коразмерности λ характеризуется тем, что любая ее три-подткань $W(\lambda,\lambda,\lambda)$ является групповой тканью, порождаемой λ-мерной группой Ли, причем координатные группы различных три-подтканей изоморфны. Уравнения координатных квазигрупп три-подтканей $W(\lambda,\lambda,\lambda)$ произвольной $(n+1)$-ткани коразмерности λ получаются из уравнения ее координатной n-квазигруппы фиксацией в нем каких-либо $n-2$ (λ-мерных) параметров [Го-11].

Теперь рассмотрим произвольную три-ткань $W \equiv W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ и ассоциированную с нею $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$. Координатная n-квазигруппа последней задается уравнением (2.11). Фиксируя по-разному в этом уравнении какие-либо $n-2$ параметра (они содержат нижний индекс 0), получим три типа подтканей коразмерности λ:

$$z = \widetilde{f}(u_{01}, ..., u_{0\mu-1}, \underline{u_\mu}, u_{0\mu+1}, ..., u_{0\nu-1}, \underline{u_\nu}, u_{0\nu+1}, ..., u_{0m};\ v_{10}, ..., v_{l0}) \equiv \widetilde{f}_{(\mu,\nu)}(u_\mu, u_\nu), \quad \mu \neq \nu; \tag{3.10}$$

$$z = \widetilde{f}(u_{01}, ..., u_{0m};\ v_{10}, ..., v_{s-10}, \underline{v_s}, v_{s+10}, ..., v_{t-10}, \underline{v_t}, v_{t+10}, ..., v_{l0}) \equiv \widetilde{f}_{(s,t)}(v_s, v_t), \quad s \neq t; \tag{3.11}$$

$$z = \widetilde{f}(u_{01}, ..., u_{0\mu-1}, \underline{u_\mu}, u_{0\mu+1}, ..., u_{0m};\ v_{10}, ..., v_{s-10}, \underline{v_s}, v_{s+10}, ..., v_{l0}) \equiv \widetilde{f}_{(\mu,s)}(u_\mu, v_s). \tag{3.12}$$

Три-подткани $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a,b)$, определяемые уравнениями (3.10), (3.11) и (3.12), обозначим соответственно $W_{(\mu,\nu)}$, $W_{(s,t)}$ и $W_{(\mu,s)}$.

Пусть теперь три-ткань W является обобщенной три-тканью Рейдемейстера. Покажем, что три-ткань $W_{(\mu,\nu)}$ в этом случае является групповой. Для этого достаточно показать, что ткань $W_{(\mu,\nu)}$ обладает сердцевиной. В соответствии с определением сердцевины возьмем два «вертикальных» слоя $u_{\mu 1},\ u_{\mu 2}$ и два «горизонтальных» слоя $u_{\nu 1},\ u_{\nu 2}$ три-ткани $W_{(\mu,\nu)}$ (здесь индексы

μ и ν фиксированы). Через точку $M_{ij} = u_{\mu i} \cap u_{\nu j}$ проходит единственный «наклонный» слой $\widetilde{u}_{ij}$, $i, j = 1, 2$. По определению ткани $W_{(\mu,\nu)}$ имеем:

$$\widetilde{u}_{ij} = \widetilde{f}_{(\mu,\nu)}(u_{\mu i}, u_{\nu j}). \tag{3.13}$$

Найдем уравнение сердцевины три-ткани $W_{(\mu,\nu)}$, связывающее параметры $\widetilde{u}_{ij}$. Для этого рассмотрим на ткани W конфигурацию $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, содержащую горизонтальные слои $y_1 = b_1, \ldots, y_m = b_m$, $y_{m+1} = y_0$ и вертикальные слои, проходящие через точки M_{ij}, обозначим эти слои соответственно x_{ij}, $i, j = 1, 2$. Остальные вертикальные слои выберем произвольно. Через точки $x_{ij} \cap b_\mu$, $x_{ij} \cap b_\nu$ и $x_{ij} \cap y_0$ проходят наклонные слои ткани W с параметрами $x_{ij} \cdot b_\mu$, $x_{ij} \cdot b_\nu$ и $x_{ij} \cdot y_0$ соответственно. Согласно определению $(m+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(b, y_0)$, эти параметры являются также параметрами выделенных слоев $u_{\mu i}$, $u_{\nu i}$ и $\widetilde{u}_{ij}$, при этом $x_{i1} \cdot b_\mu = x_{i2} \cdot b_\mu = u_{\mu i}$, $x_{1j} \cdot b_\nu = x_{2j} \cdot b_\nu = u_{\nu j}$ и $x_{ij} \cdot y_0 = \widetilde{u}_{ij}$.

Для рассматриваемой конфигурации $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, в которую входят слои $u_{\mu i} = x_{ij} \cdot b_\mu$, $u_{\nu j} = x_{ij} \cdot b_\nu$ и $\widetilde{u}_{ij} = x_{ij} \cdot y_0$, уравнение сердцевины может быть записано в виде

$$\Phi(z_{\widehat{s}\widehat{t}}, u_{\mu i}, u_{\nu j}, \widetilde{u}_{ij}) = 0, \tag{3.14}$$

где индексы μ и ν фиксированы, $z_{\widehat{s}\widehat{t}}$ — входящие в конфигурацию наклонные слои (помимо выделенных слоев $u_{\mu i}$, $u_{\nu j}$ и $\widetilde{u}_{ij}$). Фиксируя параметры $z_{\widehat{s}\widehat{t}}$ и исключая из уравнений (3.13) и (3.14) параметры $u_{\mu i}$ и $u_{\nu j}$, получим уравнение сердцевины ткани $W_{(\mu,\nu)}$ в виде

$$\widetilde{\Phi}_{(\mu,\nu)}(\widetilde{u}_{11}, \widetilde{u}_{12}, \widetilde{u}_{21}, \widetilde{u}_{22}) = 0.$$

Но если три-ткань $W_{(\mu,\nu)}$ допускает сердцевину, то она является тканью R, а значит, групповой.

Проводя аналогичные рассуждения для три-тканей $W_{(s,t)}$ и $W_{(\mu,s)}$, найдем, что они также являются групповыми. Следовательно, групповой будет и $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a, b)$. Согласно [15] она порождается некоторой λ-мерной группой Ли G, причем координатные группы три-подтканей ткани $\widetilde{W}^\lambda(a, b)$ изоморфны группе G. ■

В частности, при $l = m = 1$ получаем три-ткань Рейдемейстера R коразмерности λ, то есть групповую три-ткань. Для нее $n = l + m = 2$, поэтому ассоциированная с нею $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a, b)$ будет три-тканью, причем, как показано выше (см. замечание на с. 230), она совпадает с исходной три-тканью, а потому является групповой.

Следствие. Как видно из определения групповой $(n+1)$-ткани (см. выше), любая подткань такой ткани также является групповой. Согласно п. 2 § 2, $(m+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $(l+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a, x_0)$, индуцируемые три-тканью $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, являются подтканями ассоциированной ткани $(n+1)$-ткани $\widetilde{W}^\lambda(a, b)$. Следовательно, если $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^\lambda(a, b)$ является групповой, то групповыми будут также ткани $\widetilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $\widetilde{W}^\lambda(a, x_0)$. Отсюда вытекает, что ткани $\widetilde{W}^\lambda(b, y_0)$ и $\widetilde{W}^\lambda(a, x_0)$, индуцируемые на слоях три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, являются групповыми тканями.

Пример. В [То-16] доказано, что если три-ткань $W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ является обобщенной три-тканью Рейдемейстера, а связанные с нею три-ткани $W_{(\mu,\nu)}$, $W_{(s,t)}$ и $W_{(\mu,s)}$ порождаются абелевой группой Ли, то конечные уравнения такой ткани приводятся к виду

$$z^\xi = \sum_{\mu,s} \underset{\mu s}{C}{}^\xi_{\eta\zeta} \underset{\mu}{x}{}^\eta \underset{s}{y}{}^\zeta + \sum_\mu \underset{\mu}{x}{}^\xi + \sum_s \underset{s}{y}{}^\xi, \tag{3.15}$$

где $\mu = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, l}$, $\xi, \eta, \zeta = \overline{1, \lambda}$, а постоянные $\underset{\mu s}{C}{}^\xi_{\eta\zeta}$ удовлетворяют соотношениям

$$\underset{\mu s}{C}{}^\xi_{\eta\zeta} = \underset{\mu s}{C}{}^\xi_{\zeta\eta}, \quad \underset{\mu s}{C}{}^\xi_{\zeta\sigma} \underset{\mu s}{C}{}^\zeta_{\eta\rho} = \underset{\mu s}{C}{}^\xi_{\zeta\rho} \underset{\mu s}{C}{}^\zeta_{\eta\sigma}. \tag{3.16}$$

Покажем, что в случаях 1) $l = m = 1$, 2) $\lambda = 1$ эта ткань является обобщенной три-тканью Рейдемейстера.

1. При $l = m = 1$ уравнения (3.15) принимают вид

$$z^\xi = C^\xi_{\eta\zeta} x^\eta y^\zeta + x^\xi + y^\xi \tag{3.17}$$

и определяют три-ткань $W(\lambda,\lambda,\lambda)$. С другой стороны, эти уравнения определяют лупу с единицей $e=(0,...,0)$, которая в силу (3.16) является коммутативной и ассоциативной, а потому является группой, обозначим ее $G(\cdot)$. Следовательно, рассматриваемая три-ткань $W(\lambda,\lambda,\lambda)$ — групповая и, значит, является тканью R.

Этот факт можно установить иначе. Согласно теореме 12, три-ткань R характеризуется существованием сердцевины. Покажем, что для три-ткани, заданной уравнениями (3.17), сердцевина существует и задается уравнениями

$$C^{\xi}_{\eta\zeta} z^{\eta}_{11} z^{\zeta}_{22} + z^{\xi}_{11} + z^{\xi}_{22} = C^{\xi}_{\eta\zeta} z^{\eta}_{12} z^{\zeta}_{21} + z^{\xi}_{12} + z^{\xi}_{21}, \tag{3.18}$$

где z_{ij} — параметры наклонных слоев, входящих в произвольную конфигурацию R, $z_{ij}=x_i\times\times y_j$, $i,j=1,2$. Действительно, согласно предложению 11, сердцевина произвольной три-ткани R, порождаемой группой $G(\cdot)$, определяется уравнением (3.2):

$$z_{22}=\mathcal{C}(z_{11},z_{12},z_{21})=z_{21}\cdot(z_{11}/z_{12}),$$

где $/$ — правая обратная операция для $(\cdot)$. Запишем уравнение (3.2) в виде $z_{11}/z_{12}=z_{21}/z_{22}$ и обозначим $z_{11}/z_{12}=z_{21}/z_{22}=v$, тогда

$$z_{12}=z_{11}\cdot v,\ \ z_{22}=z_{21}\cdot v.$$

Отсюда следует, что

$$z_{22}\cdot(z_{11}\cdot v)=(z_{21}\cdot v)\cdot z_{12}. \tag{3.19}$$

В силу коммутативности и ассоциативности операции $(\cdot)$ получаем:

$$\begin{aligned}&z_{22}\cdot(z_{11}\cdot v)=(z_{22}\cdot z_{11})\cdot v,\\ &(z_{21}\cdot v)\cdot z_{12}=(v\cdot z_{21})\cdot z_{12}=v\cdot(z_{21}\cdot z_{12})=(z_{21}\cdot z_{12})\cdot v.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (3.19) имеем $z_{11}\cdot z_{22}=z_{12}\cdot z_{21}$. Из последнего уравнения в силу (3.17) получаем уравнения сердцевины рассматриваемой три-ткани в виде (3.18), что и требовалось показать.

2. При $\lambda=1$ система (3.15) состоит из одного уравнения вида

$$z=\sum_{\mu,s}\underset{\mu s}{C}\underset{\mu}{x}\underset{s}{y}+\sum_{\mu}\underset{\mu}{x}+\sum_{s}\underset{s}{y}, \tag{3.20}$$

где $\mu=\overline{1,m},\ \ m=q,\ \ s=\overline{1,l},\ \ l=p$. Рассмотрим два возможных подслучая: 1) $\operatorname{rank}(\underset{\mu s}{C})=p$; 2) $\operatorname{rank}(\underset{\mu s}{C})=p-1$.

1) Пусть $\operatorname{rank}(\underset{\mu s}{C})=p$, $|\underset{ts}{C}|\neq 0$ и $(\underset{ts}{\widetilde{C}})$ — обратная матрица для $(\underset{ts}{C})$. В этом случае изотопическим преобразованием

$$\underset{s}{\widetilde{x}}=\sum_{\mu}\underset{\mu s}{C}\underset{\mu}{x}+1,\quad \underset{s}{\widetilde{y}}=\underset{s}{y}+\sum_{t}\underset{st}{\widetilde{C}},\quad \widetilde{z}=z+\sum_{s,t}\underset{ts}{\widetilde{C}}$$

уравнение (3.20) приводится к виду

$$\widetilde{z}=\sum_{s}\underset{s}{\widetilde{x}}\underset{s}{\widetilde{y}}+\sum_{\widehat{\mu}}\underset{\widehat{\mu}}{C}\underset{\widehat{\mu}}{x}, \tag{3.21}$$

где $\underset{\widehat{\mu}}{C}=1-\sum_{s,t}\underset{ts}{\widetilde{C}}\underset{\widehat{\mu}t}{C}$, $\widehat{\mu}=\overline{p+1,q}$.

a) Если хотя бы одна из величин $\underset{\widehat{\mu}}{C}$ не равна нулю, то, полагая $\underset{p+1}{\widetilde{x}}=\sum_{\widehat{\mu}}\underset{\widehat{\mu}}{C}\underset{\widehat{\mu}}{x}$, приведем уравнение (3.21) к виду

$$\widetilde{z}=\underset{1}{\widetilde{x}}\underset{1}{\widetilde{y}}+...+\underset{p}{\widetilde{x}}\underset{p}{\widetilde{y}}+\underset{p+1}{\widetilde{x}}. \tag{3.22}$$

b) Если $\underset{\widehat{\mu}}{C}=0$, то уравнение (3.21) приводится к следующему виду:

$$\widetilde{z}=\underset{1}{\widetilde{x}}\underset{1}{\widetilde{y}}+...+\underset{p}{\widetilde{x}}\underset{p}{\widetilde{y}}. \tag{3.23}$$

2) Пусть $\operatorname{rank}(\underset{\mu s}{C}) = p-1$. В этом случае изотопическим преобразованием

$$\underset{a}{\widetilde{x}} = \sum_{\mu} \underset{\mu a}{C}\,\underset{\mu}{x}, \quad \underset{p}{\widetilde{x}} = \sum_{\mu} \underset{\mu}{x}, \quad \underset{p}{\widetilde{y}} = \sum_{s} \underset{s}{y},$$

где $a = \overline{1, p-1}$, уравнение (3.20) приводится к виду

$$\widetilde{z} = \underset{1}{\widetilde{x}}\underset{1}{\widetilde{y}} + ... + \underset{p-1}{\widetilde{x}}\,\underset{p-1}{\widetilde{y}} + \underset{p}{\widetilde{x}} + \underset{p}{\widetilde{y}}. \tag{3.24}$$

Уравнения (3.22), (3.23) и (3.24) получены нами другим способом в [ТоШ-2], где для каждой из этих три-тканей найдена сердцевина. Следовательно, эти ткани являются обобщенными тканями Рейдемейстера. По теореме 15 ассоциированная с каждой из этих тканей $(n+1)$-ткань $\widetilde{W}^{\lambda}(a,b)$ и индуцируемые на их слоях $(m+1)$-ткани $\widetilde{W}^{\lambda}(b,y_0)$ и $(l+1)$-ткани $\widetilde{W}^{\lambda}(a,x_0)$ являются групповыми тканями.

Замечание. С другой стороны, согласно теории физических структур Ю.И. Кулакова, см. [Ку-1], [КуВ-1], уравнения (3.22), (3.23) и (3.24) определяют некоторые классы так называемых бинарных физических структур. Эти классы найдены ранее Г.Г. Михайличенко в [Мих-1]. Об эквивалентности некоторых понятий теории три-тканей и теории физических структур см. в [То-15], [ТоШ-2], [ТоШ-3]. Там, в частности, показывается, что координатный группоид обобщенной ткани Рейдемейстера $W(p,q,p+q-1)$ и только такой ткани определяет бинарную физическую структуру ранга $(p+1,q+1)$, а понятие сердцевины ткани аналогично понятию «феноменологически инвариантная форма физического закона».

§ 4. Три-ткани, определяемые группами Ли преобразований

1. Определение три-ткани $GW(p,q,q)$.

Пусть группа Ли G размерности q действует на гладком p-мерном многообразии Y, то есть задана гладкая функция вида

$$f\colon\ G \times Y \to Y, \quad z = f(a,y), \tag{4.1}$$

удовлетворяющая условиям:

$$f(e,y) = y, \tag{4.2}$$

$$f(a, f(b,y)) = f(\varphi(a,b), y), \tag{4.3}$$

где e — единица группы G, а $\varphi(a,b)$ — операция в группе G [Гор-1]. Следуя [Ва-1], будем называть группу G параметрической группой группы Ли преобразований (4.1). Уравнение (4.1), рассматриваемое с точностью до изотопических преобразований, определяет три-ткань, образованную слоениями

$$\lambda_1\colon\ a = \text{const}, \quad \lambda_2\colon\ y = \text{const}, \quad \lambda_3\colon\ z = f(a,y) = \text{const}$$

размерностей соответственно p, q и q на прямом произведении $\mathcal{M} = G \times Y$. Обозначим эту ткань $GW(p,q,q)$.

2. Обобщенные конфигурации Рейдемейстера на три-ткани $GW(p,q,q)$.

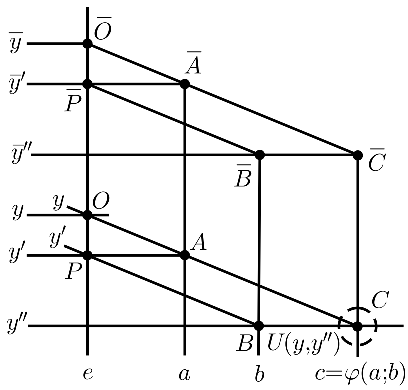

Рис. 66

Выясним геометрический смысл условий (4.2) и (4.3). Для этого рассмотрим вертикальный слой первого слоения ткани $GW(p,q,q)$, определяемый параметром e, и горизонтальный слой второго слоения с параметром y. Через точку их пересечения O проходит наклонный слой третьего слоения, определяемый, в силу (4.2), также параметром y, см. рис. 66. Возьмем еще два произвольных вертикальных слоя с параметрами a и b. Они определяют третий вертикальный слой с параметром $c = \varphi(a,b)$. Пусть наклонный слой y пересекает вертикальный слой a в некоторой точке A. Через A проходит единственный горизонтальный слой y', при этом $y = f(a, y')$). Слой y' пересечет вертикальный слой e в некоторой точке P. Наклонный слой, проходящий через точку P, будет определяться также параметром y'. Этот слой пересечет вертикальный слой b в некоторой точке B. Через B проходит единственный горизонтальный слой y'', при этом $y' = f(b, y'')$. Слой y'' пересечет вертикальный слой c в точке C. Наклонный слой, проходящий через C, определяется параметром $f(c, y'')$, который в силу свойства (4.3) также равен y: $y = f(a, f(b, y'')) = f(c, y'')$. Это означает, что точки A и C лежат на одном наклонном слое.

Далее, если мы проведем аналогичное построение, начав с другого горизонтального слоя $\overline{y}$, то получим новые точки $\overline{A}$ и $\overline{C}$, которые также будут лежать на одном наклонном слое, см. рис. 66. Конфигурация $APBC\overline{A}\overline{P}\overline{B}\overline{C}$ на три-ткани $GW(p, q, q)$ аналогична конфигурации Рейдемейстера R на три-ткани $W(r, r, r)$, см. рис. 10. Обозначим эту конфигурацию $R_e(1, 1)$. Таким образом, верно следующее

Предложение 16. *На три-ткани $GW(p, q, q)$ замыкаются все (то есть для любых $a, b, y, \overline{y}$) конфигурации $R_e(1, 1)$, связанные с вертикальным слоем e.*

Обозначим $R_{x_0}(1, 1)$ аналогичную конфигурацию, связанную с *произвольным* вертикальным слоем x_0. Нетрудно показать, используя геометрический метод доказательства, примененный в работе [ШШ-1], что справедливо

Предложение 17. *На три-ткани $GW(p, q, q)$ замыкаются все конфигурации $R_{x_0}(1, 1)$, связанные с произвольным вертикальным слоем x_0.*

Теперь рассмотрим уравнение (4.1) в предположении, что функция f является гладкой и локально регулярной по каждому из аргументов, а G — произвольное многообразие, не являющееся, вообще говоря, группой Ли. Тогда уравнение (4.1) задает произвольную три-ткань $W(p, q, q)$, на которой фигуры $R_{x_0}(1, 1)$, вообще говоря, не замыкаются, то есть точки C и $\overline{C}$ лежат на разных вертикальных слоях.

Зафиксируем на ткани $W(p, q, q)$ произвольный вертикальный слой x_0 и возьмем еще два вертикальных слоя a и b, достаточно близких к слою x_0, (см. рис. 66, на котором $e \equiv x_0$). На слое x_0 возьмем произвольную точку O и построим точки A, P и B так, как показано на рис. 66. Наклонный слой y и горизонтальный слой y'' пересекаются по подмногообразию размерности $q - p$, которое обозначим $U(y, y'')$.

Предложение 18. *Если на три-ткани $W(p, q, q)$ для любого фиксированного вертикального слоя x_0 и произвольных вертикальных слоев a и b, достаточно близких к слою x_0, существует единственный вертикальный слой, трансверсальный всем подмногообразиям $U(y, y'')$ (то есть при любом y), то на многообразии G возникает структура группы Ли с единицей x_0, а ткань $W(p, q, q)$ будет тканью $GW(p, q, q)$.*

□ Пусть существует единственный вертикальный слой x ткани $W(p, q, q)$, трансверсальный всем подмногообразиям $U(y, y'')$ при условии, что точка O пробегает вертикальный слой x_0. Слой x пересекает горизонтальный слой y'' в точке, которая, с другой стороны, лежит на наклонном слое y, проходящем через точку A. Следовательно, на ткани $W(p, q, q)$ замыкаются конфигурации, изображенные на рис. 66, а значит, для ее координатного группоида f выполняется равенство

$$y = f(x, y'') = f(a, f^{-1}(x_0, f(b, y''))). \tag{4.4}$$

Поскольку слой x не зависит от y, а определяется только выбором слоев a и b, то на базе G первого слоения три-ткани $W(p, q, q)$ возникает бинарная операция, обозначим ее $\overline{\varphi}(a, b) = x$. Покажем, что множество G с операцией $\overline{\varphi}$ является группой. Как видно из рис. 66, уравнение $\overline{\varphi}(a, b) = x$ локально однозначно разрешимо относительно a и b (для фиксированных b и x слой a получается как вертикальная трансверсаль подмногообразий $y \cap f^{-1}(x_0, f(b, y''))$ при любом y'', а для фиксированных a и x слой b есть вертикальная трансверсаль подмногообразий $y'' \cap f(x_0, f^{-1}(a, y))$ также при любом y''). Поэтому $\overline{\varphi}$ — квазигруппа. Далее, из равенства (4.4) следует, что $\overline{\varphi}(a, x_0) = a$, $\overline{\varphi}(x_0, b) = b$. Так как слои a и b могут быть выбраны произвольно, то x_0 — единица, а $\overline{\varphi}$ — лупа.

Теперь покажем, что лупа $\overline{\varphi}$ ассоциативна: $\overline{\varphi}(\overline{\varphi}(a, b), c) = \overline{\varphi}(a, \overline{\varphi}(b, c))$. В самом деле, для любых вертикальных слоев a, b, c и для произвольного горизонтального слоя y'' в силу (4.4) имеем:

$$f(\overline{\varphi}(\overline{\varphi}(a,b),c),y'') = f(\overline{\varphi}(a,b), f^{-1}(x_0, f(c,y''))) = f(a, f^{-1}(x_0, f(b, f^{-1}(x_0, f(c,y''))))) = \\ = f(a, f^{-1}(x_0, f(\overline{\varphi}(b,c),y''))) = f(\overline{\varphi}(a,\overline{\varphi}(b,c)),y'').$$

Таким образом, множество G с операцией $\overline{\varphi}$ является группой.

Положим $\widetilde{y} = f(x_0, y)$, тогда уравнение $z = f(a,y)$ три-ткани $W(p,q,q)$ преобразуется к виду

$$z = f(a,y) = f(a, f^{-1}(x_0, \widetilde{y})) \equiv \widetilde{f}(a, \widetilde{y}). \tag{4.5}$$

Это уравнение определяет три-ткань $\widetilde{W}(p,q,q)$, эквивалентную ткани $W(p,q,q)$, либо ткань $W(p,q,q)$ в новых локальных координатах, см. п. 4 § 1. Покажем, что функция $\widetilde{f}$ удовлетворяет условиям (4.2) и (4.3). В самом деле, в силу (4.4) и (4.5) имеем:

$$\widetilde{f}(x_0, \widetilde{y}) = f(x_0, f^{-1}(x_0, \widetilde{y})) = \widetilde{y},$$
$$\widetilde{f}(\overline{\varphi}(a,b), \widetilde{y}) = f(\overline{\varphi}(a,b), f^{-1}(x_0, \widetilde{y})) = f(\overline{\varphi}(a,b), y) = \\ = f(a, f^{-1}(x_0, f(b,y))) = f(a, f^{-1}(x_0, f(b, f^{-1}(x_0, \widetilde{y})))) = \widetilde{f}(a, \widetilde{f}(b, \widetilde{y})).$$

Следовательно, $\widetilde{f}$ — группа Ли преобразований, причем ее параметрической группой является группа G с операцией $\overline{\varphi}$. Согласно определению (см. п. 4 § 1), порождаемая этой группой преобразований три-ткань $W(p,q,q)$ будет тканью $GW(p,q,q)$. ■

Последнее утверждение можно усилить. Пусть, как и выше, x_0, a и b — произвольные вертикальные слои три-ткани $W(p,q,q)$. Рассмотрим $m = [q/p]$ наклонных слоев этой ткани с параметрами y_μ, $\mu = \overline{1,m}$, см. рис. 67. Подмногообразия $U(y_1, y_1'')$, ..., $U(y_m, y_m'')$ допускают хотя бы один трансверсальный вертикальный слой ткани $W(p,q,q)$. Но $m+1$ многообразий такого вида уже не имеют, вообще говоря, вертикальной трансверсали (здесь и далее подмногообразие $U(y_{\overline{\mu}}, y''_{\overline{\mu}})$ для краткости обозначено $U_{\overline{\mu}}$, $\overline{\mu} = \overline{1, m+1}$).

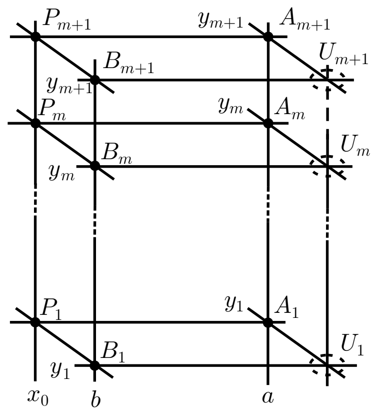

Рис. 67

Определение 14. Конфигурацию, образованную вертикальными слоями x_0, a и b и «параллелограммами» вида $A_{\overline{\mu}} P_{\overline{\mu}} B_{\overline{\mu}} U_{\overline{\mu}}$, где $\overline{\mu} = \overline{1, m+1}$, назовем *обобщенной конфигурацией Рейдемейстера* типа $R_{x_0}(1,m)$.

Замечание. Понятие обобщенной конфигурации Рейдемейстера типа $R(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ определено в п. 3.1 для три-ткани $W(p,q,r) \equiv W(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$, см. рис. 60. Такая ткань будет тканью $R(p,q,q)$ в том и только том случае, если $l = 1$, при этом $\lambda = p$, $q = mp$. На три-ткани $W(p, mp, mp)$ обобщенные конфигурации Рейдемейстера $R(p, mp, mp)$ являются также конфигурациями типа $R_{x_0}(1,m)$.

Определение 15. Если на три-ткани $W(p,q,q)$ существует единственный вертикальный слой, трансверсальный $m+1$ подмногообразиям вида $U_{\overline{\mu}}$, $\overline{\mu} = \overline{1, m+1}$, то будем говорить, что на три-ткани $W(p,q,q)$ *замыкаются* конфигурации $R_{x_0}(1,m)$.

Пусть на три-ткани $W(p,q,q)$ замыкаются *все* конфигурации $R_{x_0}(1,m)$, связанные с вертикальным слоем x_0. Возьмем другой вертикальный слой $\overline{x}_0$, отличный от слоя x_0, и построим конфигурацию $R_{\overline{x}_0}(1,m)$, связанную с этим слоем. Применяя геометрический метод доказательства работы [ШШ-1] и используя замыкание конфигураций $R_{x_0}(1,m)$, получим, что конфигурация $R_{\overline{x}_0}(1,m)$ также замыкается. Тогда, в силу предложения 18, три-ткань $W(p,q,q)$ будет тканью $GW(p,q,q)$. Таким образом, справедлива

Теорема 19. *Если на три-ткани $W(p,q,q)$ замыкаются все конфигурации $R_{x_0}(1,m)$, связанные с некоторым вертикальным слоем x_0, то на ней замыкаются все конфигурации такого вида (то есть при любых x_0), и такая ткань является тканью $GW(p,q,q)$.*

3. Сердцевина три-ткани $GW(p,q,q)$.

По аналогии с введенным в п. 2 § 3 понятием сердцевины три-ткани $WR(\lambda l, \lambda m, \lambda(l+m-1))$ определим понятие сердцевины ткани $GW(p,q,q)$.

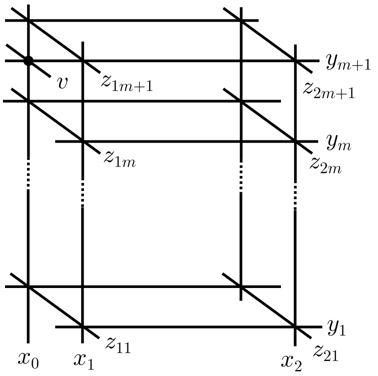

Рис. 68

Произвольная конфигурация $R_{x_0}(1,m)$ содержит $2(m+1)$ наклонных слоев, параметры которых обозначим z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m}, z_{1m+1}; z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m}, z_{2m+1}, см. рис. 68. Если конфигурация замыкается, то эти параметры связаны некоторыми соотношениями

$$\Phi^\rho(z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m}, z_{1m+1}; z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m}, z_{2m+1}) = 0, \qquad (4.6)$$

существенное число которых будет установлено ниже.

Из соотношений (4.6) часть параметров z_{11}, ..., z_{1m}, z_{1m+1}; z_{21}, ..., z_{2m}, z_{2m+1} можно выразить через остальные параметры. Эту функцию, неявно заданную системой (4.6), назовем *сердцевиной три-ткани* $GW(p,q,q)$. Уравнения (4.6) также будем называть уравнениями сердцевины три-ткани $GW(p,q,q)$.

Теорема 20. *Уравнения сердцевины три-ткани $GW(p,q,q)$, определяемой группой Ли преобразований $f\colon\ G\times Y\to Y$, $z=f(a,y)$, могут быть записаны в виде*

$$\varphi^\rho(z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m}, z_{1m+1}) = \varphi^\rho(z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m}, z_{2m+1}),$$

где φ^ρ — инварианты группы преобразований, $\rho = 1, 2, ..., (m+1)p-q$, $m=[q/p]$.

□ Пусть в некоторых локальных координатах уравнение три-ткани $GW(p,q,q)$ имеет вид

$$z^\alpha = f^\alpha(a^i, y^\beta), \qquad (4.7)$$

где $i=\overline{1,q}$, $\alpha,\beta=\overline{1,p}$, причем $p\leqslant q$. Согласно предложению 1, ранги матриц $\left(\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial a^i}\right)$ и $\left(\dfrac{\partial f^\alpha}{\partial y^\beta}\right)$ являются максимальными в каждой точке области определения три-ткани $GW(p,q,q)$, поэтому

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial a^i}\right) = \operatorname{rank}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial y^\beta}\right) = p.$$

Так как $p\leqslant q$, то

$$q = mp + p_1, \qquad (4.8)$$

где $m\in\mathbf{N}$, $m=[q/p]$, $p_1\in\mathbf{Z}_0$, $p_1<p$.

На ткани $GW(p,q,q)$ рассмотрим конфигурацию $R_{x_0}(1,m)$ (рис. 68). Так как она замыкается, то выполняются равенства

$$\begin{cases} z_{11} = f(x_1, y_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{1m} = f(x_1, y_m), \\ z_{1m+1} = f(x_1, y_{m+1}), \end{cases} \qquad \begin{cases} z_{21} = f(x_2, y_1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{2m} = f(x_2, y_m), \\ z_{2m+1} = f(x_2, y_{m+1}), \end{cases} \qquad (4.9)$$

где x_1 — произвольный вертикальный слой ткани $GW(p,q,q)$, а x_2 — ее вертикальный слой, трансверсальный подмногообразиям U_1, ..., U_m, U_{m+1} (размерности $q-p$), которые высекаются на горизонтальных слоях y_1, ..., y_m, y_{m+1} три-ткани соответствующими наклонными слоями z_{21}, ..., z_{2m}, z_{2m+1}, см. рис. 67. Согласно определению 15, слой x_2 — единственный, поэтому матрица Якоби $A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^\alpha(x_2,y_1)}{\partial x_2^i} \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial f^\alpha(x_2,y_m)}{\partial x_2^i} \\ \dfrac{\partial f^\alpha(x_2,y_{m+1})}{\partial x_2^i} \end{pmatrix}$, состоящая из $(m+1)p$ строк и q столбцов, имеет максимальный ранг. Из равенства (4.8) следует, что $q<(m+1)p$, значит, $\operatorname{rank}A=q$. Очевидно, что для любого x_1 ранг матрицы Якоби $(\partial f^\alpha(x_1,y_{\overline{\mu}})/\partial x_1^i)$ системы уравнений $z_{1\overline{\mu}} = f(x_1, y_{\overline{\mu}})$,

$\overline{\mu} = \overline{1, m+1}$, также равен q. Исключая из уравнений (4.9) переменные x_1 и x_2, получим две серии по $(m+1)p - q = p - p_1$ уравнений в каждой:

$$\begin{cases} z^{p_1+1}_{1m+1} = f^{p_1+1}(z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m}, z^1_{1m+1}, ..., z^{p_1}_{1m+1}, y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}), \\ z^{p_1+2}_{1m+1} = f^{p_1+2}(z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m}, z^1_{1m+1}, ..., z^{p_1}_{1m+1}, y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}), \\ ... \\ z^{p}_{1m+1} = f^{p}(z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m}, z^1_{1m+1}, ..., z^{p_1}_{1m+1}, y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}); \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^{p_1+1}_{2m+1} = f^{p_1+1}(z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m}, z^1_{2m+1}, ..., z^{p_1}_{2m+1}, y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}), \\ z^{p_1+2}_{2m+1} = f^{p_1+2}(z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m}, z^1_{2m+1}, ..., z^{p_1}_{2m+1}, y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}), \\ ... \\ z^{p}_{2m+1} = f^{p}(z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m}, z^1_{2m+1}, ..., z^{p_1}_{2m+1}, y_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1}). \end{cases}$$

Выразив из каждой системы переменные $y^{p_1+1}_{m+1}$, ..., y^{p}_{m+1}, получим:

$$y^{\rho}_{m+1} = \varphi^{\rho}(y_1, y_2, ..., y_m, y^1_{m+1}, ..., y^{p_1}_{m+1}, z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m}, z_{1m+1}),$$
$$y^{\rho}_{m+1} = \varphi^{\rho}(y_1, y_2, ..., y_m, y^1_{m+1}, ..., y^{p_1}_{m+1}, z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m}, z_{2m+1}),$$

где $\rho = \overline{p_1 + 1, p}$. Отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} &\varphi^{\rho}(y_1, y_2, ..., y_m, y^1_{m+1}, ..., y^{p_1}_{m+1}, z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m}, z_{1m+1}) = \\ &= \varphi^{\rho}(y_1, y_2, ..., y_m, y^1_{m+1}, ..., y^{p_1}_{m+1}, z_{21}, z_{22}, ..., z_{2m}, z_{2m+1}). \end{aligned} \tag{4.10}$$

В силу замыкания на ткани $GW(p, q, q)$ конфигураций $R_{x_0}(1, m)$, (см. рис. 68), равенства (4.10) должны выполняться тождественно относительно переменных $y_1, y_2, ..., y_{m+1}$ и содержать только переменные $z_{11}, z_{12}, ..., z_{1m+1}$, z_{21}, $z_{22}, ..., z_{2m+1}$; это и есть сердцевина три-ткани $GW(p, q, q)$.

С другой стороны, функции φ^{ρ} связывают переменные $z_{2\overline{\mu}}$ и их образы $z_{1\overline{\mu}}$, получаемые следующим преобразованием группы G: $z_{1\overline{\mu}} = f(x_1, (f^{-1}(x_2, z_{2\overline{\mu}}))$, $\overline{\mu} = \overline{1, m+1}$, см. рис. 68. Следовательно, φ^{ρ} являются инвариантами рассматриваемой группы преобразований (напомним (см., например, [Ва-1]) что инвариантом группы преобразований называется функция от переменных, которая сохраняется при всех допустимых преобразованиях). ■

Пример 1. Рассмотрим три-ткань $GW(1, q, q)$, порождаемую q-мерной группой преобразований на прямой. Известно [Гор-1], что максимальная размерность группы Ли, допускающей одномерное представление, равна трем. Следовательно, ткани $GW(1, q, q)$ существуют только при $q = 1, 2, 3$ и определяются соответственно группой параллельных переносов, аффинной и проективной группами на прямой [Гор-1]:

1) $q = 1,\ GW(1, 1, 1)\colon\ z = y + a;$ 2) $q = 2,\ GW(1, 2, 2)\colon\ z = a^1 y + a^2;$

3) $q = 3,\ GW(1, 3, 3)\colon\ z = \dfrac{a^1 y + a^2}{y + a^3}.$

Обозначив в этих уравнениях $a = x$, получим уравнения три-тканей, которые рассмотрены в п. 2 § 3, где для каждой из них найдено уравнение сердцевины. Запишем последние в виде равенства инвариантов соответствующей группы преобразований.

1. Для три-ткани $GW(1, 1, 1)$, определяемой уравнением $z = a + y$, уравнение ее сердцевины (3.6) легко приводится к виду

$$z_{12} - z_{11} = z_{22} - z_{21}.$$

Здесь инвариант — величина отрезка.

2. Уравнение сердцевины (3.7) три-ткани $GW(1, 2, 2)$ эквивалентно равенству

$$\frac{z_{12} - z_{11}}{z_{13} - z_{11}} = \frac{z_{22} - z_{21}}{z_{23} - z_{21}}.$$

Здесь инвариант — простое отношение трех точек.

3. Сердцевина (3.8) три-ткани $GW(1,3,3)$ приводится к виду

$$\frac{(z_{11}-z_{12})(z_{13}-z_{14})}{(z_{11}-z_{13})(z_{12}-z_{14})}=\frac{(z_{21}-z_{22})(z_{23}-z_{24})}{(z_{21}-z_{23})(z_{22}-z_{24})},$$

а инвариантом является сложное отношение четырех точек.

В рассмотренных выше примерах $p=1$, поэтому число q/p — целое, и имеется один инвариант (одно уравнение сердцевины). Приведем пример, когда q не кратно p.

Пример 2. Для три-ткани $GW(2,3,3)$, определяемой группой движений

$$\begin{cases} z^1=y^1\sin a^3+y^2\cos a^3+a^1,\\ z^2=-y^1\cos a^3+y^2\sin a^3+a^2,\end{cases}$$

$p=2$, $q=3$, $m=[3/2]=1$, поэтому число инвариантов и, соответственно, уравнений сердцевины равно $(m+1)p-q=(1+1)2-3=1$. После вычислений получим следующее уравнение:

$$(z^1_{11}-z^1_{12})^2+(z^2_{11}-z^2_{12})^2=(z^1_{21}-z^1_{22})^2+(z^2_{21}-z^2_{22})^2.$$

Здесь инвариант — длина отрезка.

4. Три-ткани, порождаемые аффинной и проективной группами на плоскости. Рассмотрим три-ткань $GW(2,6,6)$, определяемую аффинной группой G на плоскости:

$$\begin{cases} z^1=a^1y^1+a^2y^2+a^3,\\ z^2=a^4y^1+a^5y^2+a^6.\end{cases}\tag{4.11}$$

Теорема 21. *Аффинная группа на плоскости обладает двумя четырехточечными инвариантами.*

□ Система (4.11) содержит 6 параметров a^i, $i=1,2,...,6$. Чтобы их исключить, зафиксируем на плоскости 4 произвольные точки $y_{\overline{\mu}}=(y^1_{\overline{\mu}},y^2_{\overline{\mu}})$, $\overline{\mu}=1,2,3,4$, и найдем их образы $z_{\overline{\mu}}=(z^1_{\overline{\mu}},z^2_{\overline{\mu}})$:

$$z^1_{\overline{\mu}}=a^1y^1_{\overline{\mu}}+a^2y^2_{\overline{\mu}}+a^3,\quad z^2_{\overline{\mu}}=a^4y^1_{\overline{\mu}}+a^5y^2_{\overline{\mu}}+a^6.$$

Исключая из последней системы параметры a^i, получим уравнения

$$\begin{vmatrix} z^1_1 & y^1_1 & y^2_1 & 1\\ z^1_2 & y^1_2 & y^2_2 & 1\\ z^1_3 & y^1_3 & y^2_3 & 1\\ z^1_4 & y^1_4 & y^2_4 & 1\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} z^2_1 & y^1_1 & y^2_1 & 1\\ z^2_2 & y^1_2 & y^2_2 & 1\\ z^2_3 & y^1_3 & y^2_3 & 1\\ z^2_4 & y^1_4 & y^2_4 & 1\end{vmatrix}=0,$$

которые можно записать в следующем виде:

$$\frac{\begin{vmatrix} y^1_1 & y^2_1 & 1\\ y^1_2 & y^2_2 & 1\\ y^1_3 & y^2_3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y^1_1 & y^2_1 & 1\\ y^1_2 & y^2_2 & 1\\ y^1_4 & y^2_4 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} z^1_1 & z^2_1 & 1\\ z^1_2 & z^2_2 & 1\\ z^1_3 & z^2_3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z^1_1 & z^2_1 & 1\\ z^1_2 & z^2_2 & 1\\ z^1_4 & z^2_4 & 1\end{vmatrix}}\equiv I_1,\qquad \frac{\begin{vmatrix} y^1_1 & y^2_1 & 1\\ y^1_3 & y^2_3 & 1\\ y^1_4 & y^2_4 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y^1_2 & y^2_2 & 1\\ y^1_3 & y^2_3 & 1\\ y^1_4 & y^2_4 & 1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} z^1_1 & z^2_1 & 1\\ z^1_3 & z^2_3 & 1\\ z^1_4 & z^2_4 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z^1_2 & z^2_2 & 1\\ z^1_3 & z^2_3 & 1\\ z^1_4 & z^2_4 & 1\end{vmatrix}}\equiv I_2.$$

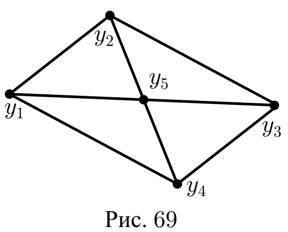

Рис. 69

Из этих равенств видно, что величины I_1, I_2 являются инвариантами рассматриваемой аффинной группы. ■

Приведем геометрическое доказательство теоремы 21.

С тремя точками плоскости, не лежащими на одной прямой, невозможно связать никакого аффиного инварианта. Зафиксируем на плоскости четыре точки y_1, y_2, y_3 и y_4. Пусть y_5 — точка пересечения диагоналей y_1y_3 и y_2y_4 четырехугольника $(y_1y_2y_3y_4)$, см. рис. 69. Обозначим через S_{123} площадь треугольника с вершинами y_1,y_2,y_3, через S_{124} — площадь треугольника с вершинами y_1,y_2,y_4 и так далее. Отношение площадей S_{125} и S_{123} этих треугольников является аффинным инвариантом, так как оно равно отношению их оснований:

$$\frac{S_{125}}{S_{123}}=\frac{y_1y_5}{y_1y_3}.$$

Аналогично находим еще три аффинных инварианта:

$$\frac{S_{125}}{S_{124}} = \frac{y_2 y_5}{y_2 y_4}, \quad \frac{S_{345}}{S_{234}} = \frac{y_4 y_5}{y_4 y_2}, \quad \frac{S_{345}}{S_{134}} = \frac{y_3 y_5}{y_3 y_1}.$$

Исключая из этих уравнений S_{125} и S_{345}, получим два инварианта: $\dfrac{S_{123}}{S_{124}} = I_1$, $\dfrac{S_{134}}{S_{234}} = I_2$, которые совпадают с найденными выше. ■

Теперь найдем сердцевину три-ткани $GW(2,6,6)$. Пусть, как и выше, $z_{\overline{\mu}}$ — образы точек $y_{\overline{\mu}}$, $\overline{\mu} = 1,2,3,4$, при некотором наборе параметров $a^1, ..., a^6$, а $\overline{z}_{\overline{\mu}}$ — образы тех же точек $y_{\overline{\mu}}$ при другом наборе параметров. Тогда получим равенства

$$\frac{S(y_1,y_2,y_3)}{S(y_1,y_2,y_4)} = \frac{S(z_1,z_2,z_3)}{S(z_1,z_2,z_4)}, \quad \frac{S(y_1,y_3,y_4)}{S(y_2,y_3,y_4)} = \frac{S(z_1,z_3,z_4)}{S(z_2,z_3,z_4)},$$
$$\frac{S(y_1,y_2,y_3)}{S(y_1,y_2,y_4)} = \frac{S(\overline{z}_1,\overline{z}_2,\overline{z}_3)}{S(\overline{z}_1,\overline{z}_2,\overline{z}_4)}, \quad \frac{S(y_1,y_3,y_4)}{S(y_2,y_3,y_4)} = \frac{S(\overline{z}_1,\overline{z}_3,\overline{z}_4)}{S(\overline{z}_2,\overline{z}_3,\overline{z}_4)}.$$

Исключая из последних уравнений переменные $y_{\overline{\mu}}$, найдем уравнения сердцевины три-ткани $GW(2,6,6)$ в виде

$$\frac{S(z_1,z_2,z_3)}{S(z_1,z_2,z_4)} = \frac{S(\overline{z}_1,\overline{z}_2,\overline{z}_3)}{S(\overline{z}_1,\overline{z}_2,\overline{z}_4)}, \quad \frac{S(z_1,z_3,z_4)}{S(z_2,z_3,z_4)} = \frac{S(\overline{z}_1,\overline{z}_3,\overline{z}_4)}{S(\overline{z}_2,\overline{z}_3,\overline{z}_4)}.$$

Рассмотрим группу проективных преобразований плоскости:

$$\rho z^{\overline{\alpha}} = a^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}} y^{\overline{\beta}}, \quad \overline{\alpha}, \overline{\beta} = 1,2,3. \tag{4.12}$$

Теорема 22. *Проективная группа преобразований плоскости имеет два пятиточечных инварианта.*

□ Пусть на плоскости задана декартова прямоугольная система координат. С четырьмя точками плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой, невозможно связать никакой проективный инвариант, не равный -1. Зафиксируем на плоскости пять точек $y_{\overline{\mu}}$, $\overline{\mu} = 1,2,3,4,5$. Пусть S_{123} — площадь треугольника с вершинами y_1, y_2, y_3 и так далее. Покажем, что выражение

$$\frac{S_{123} S_{425}}{S_{423} S_{125}} \equiv \mathcal{I}_1$$

является проективным инвариантом.

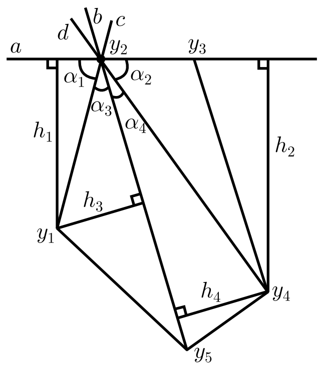

Рис. 70

Обозначим углы при вершине y_2: $\alpha_1 = (c,a)$, $\alpha_2 = (d,a)$, $\alpha_3 = (c,b)$, $\alpha_4 = (d,b)$, см. рис. 70. Пусть h_1 и h_3 — перпендикуляры, опущенные из точки y_1 на прямые $y_2 y_3$ и $y_2 y_5$ соответственно, h_2 и h_4 — перпендикуляры, опущенные на те же прямые из точки y_4. Как видно из рис. 70, справедливо равенство

$$\mathcal{I}_1 = \frac{S_{123} S_{425}}{S_{423} S_{125}} = \frac{h_1 h_4}{h_2 h_3}.$$

Находя высоты h_1, h_2, h_3, h_4 из соответствующих прямоугольных треугольников и подставляя их в последнее равенство, получим:

$$\mathcal{I}_1 = \frac{S_{123} S_{425}}{S_{423} S_{125}} = \frac{\sin(c,a)\sin(d,b)}{\sin(d,a)\sin(c,b)}.$$

Выражение справа является, как известно, проективным инвариантом — сложным отношением четверки прямых a, b, c, d, поэтому $\mathcal{I}_1$ — проективный инвариант.

Аналогичным образом найдем еще один проективный инвариант, связанный с точкой y_2: $\mathcal{I}_2 = \dfrac{S_{123} S_{524}}{S_{523} S_{124}}$. Можно показать, что другие инварианты, связанные с рассматриваемыми пятью точками, выражаются через найденные два инварианта $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$. ■

Найдем сердцевину три-ткани, определяемой уравнениями (4.12). Эта ткань образована тремя слоениями размерностей 2, 8 и 8 на многообразии $G \times Y$ размерности 10, обозначим ее

$GW(2,8,8)$. Для точек $y_{\overline{\mu}}$, $\overline{\mu}=1,2,3,4,5$, и их образов $z_{\overline{\mu}}$ при некотором наборе параметров $a^{\overline{\alpha}}_{\overline{\beta}}$, $\overline{\alpha},\overline{\beta}=1,2,3$, имеем равенства

$$\frac{S'_{123}S'_{425}}{S'_{423}S'_{125}}=\frac{S_{123}S_{425}}{S_{423}S_{125}}=\mathcal{I}_1,\quad \frac{S'_{123}S'_{524}}{S'_{523}S'_{124}}=\frac{S_{123}S_{524}}{S_{523}S_{124}}=\mathcal{I}_2, \tag{4.13}$$

где $S_{123}=S(y_1,y_2,y_3)$, $S'_{123}=S(z_1,z_2,z_3)$ и так далее.

Пусть $\overline{z}_{\overline{\mu}}$ — образы тех же точек $y_{\overline{\mu}}$ при другом наборе параметров. Обозначим $\overline{S}_{\overline{\mu}_1\overline{\mu}_2\overline{\mu}_3}= S(\overline{z}_{\overline{\mu}_1},\overline{z}_{\overline{\mu}_2},\overline{z}_{\overline{\mu}_3})$, $\overline{\mu}_1\neq\overline{\mu}_2\neq\overline{\mu}_3$. Тогда получим аналогичные равенства

$$\frac{\overline{S}_{123}\overline{S}_{425}}{\overline{S}_{423}\overline{S}_{125}}=\frac{S_{123}S_{425}}{S_{423}S_{125}}=\mathcal{I}_1,\quad \frac{\overline{S}_{123}\overline{S}_{524}}{\overline{S}_{523}\overline{S}_{124}}=\frac{S_{123}S_{524}}{S_{523}S_{124}}=\mathcal{I}_2. \tag{4.14}$$

Исключая из уравнений (4.13) и (4.14) переменные $y_{\overline{\mu}}$, найдем сердцевину три-ткани $GW(2,8,8)$ в виде

$$\frac{\overline{S}_{123}\overline{S}_{425}}{\overline{S}_{423}\overline{S}_{125}}=\frac{S'_{123}S'_{425}}{S'_{423}S'_{125}},\quad \frac{\overline{S}_{123}\overline{S}_{524}}{\overline{S}_{523}\overline{S}_{124}}=\frac{S'_{123}S'_{524}}{S'_{523}S'_{124}}.$$

В [То-15], [ТоШ-6] эти результаты обобщены для многомерных три-тканей, определенных проективной группой произвольной размерности.

5. Сердцевина три-ткани $GW(p,mp,mp)$.

Предложение 23. *Уравнение сердцевины три-ткани $GW(p,mp,mp)$ и только такой ткани может быть записано в виде*

$$(z_{11},z_{12},...,z_{1m})/z_{1m+1}=(z_{21},z_{22},...,z_{2m})/z_{2m+1}, \tag{4.15}$$

где $(/)$ — правая обратная операция для операции $(\circ)$ в координатном моноиде $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $GW(p,mp,mp)$.

□ Сначала покажем, что координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(p,q,q)$ существует только в случае, если число q кратно p, то есть $q=mp$. Действительно, согласно теореме 9 координатный моноид существует только для три-тканей вида $W(\lambda l,\lambda m,\lambda(l+m-1))$. Для три-ткани $W(p,q,q)$ имеем $q=\lambda m=\lambda(l+m-1)$. Отсюда следует, что $l=1$, поэтому $p=\lambda l=\lambda$ и $q=\lambda m=mp$. В этом случае координатная решетка образована одним вертикальным слоем a и m горизонтальными слоями $b_1,b_2,...,b_m$. Согласно определению 8, координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(p,mp,mp)$ есть бинарная операция $z=(u_1,u_2,...,u_m)\circ v$, см. рис. 59.

Найдем уравнение сердцевины три-ткани $GW(p,mp,mp)$. Пусть на рис. 68 $x_0=a$, $y_1= b_1$, ..., $y_m=b_m$. Тогда по определению операции $(\circ)$ имеем: $(z_{11},z_{12},...,z_{1m})\circ v=z_{1m+1}$ и $(z_{21},z_{22},...,z_{2m})\circ v=z_{2m+1}$. Исключая из этих равенств параметр v, получим уравнение сердцевины рассматриваемой три-ткани в виде (4.15). Число инвариантов вида $(z_{11},z_{12},...,z_{1m})/z_{1m+1}$ (и уравнений сердцевины) равно p. ■

В частности, при $p=1$ получаем три-ткань $GW(1,m,m)$ (или $GW(1,q,q)$), для всех классов которой сердцевина записана в виде (4.15), см. пример 1 п. 3.

При $m=1$ получается групповая три-ткань $W(p,p,p)$ (ткань (R)), порождаемая p-мерной группой G. Сердцевина такой ткани определяется уравнением $z_{11}/z_{12}=z_{21}/z_{22}$. Заметим, что последнее равенство непосредственно следует из замыкания фигур R, см. рис. 63.

§ 5. Три-ткани, определяемые квазигруппами Бола преобразований

1. Определение три-ткани $B_l(p,q,q)$.

Пусть $Q(*)$ — локальная дифференцируемая q-мерная квазигруппа, Y — гладкое p-мерное многообразие, $(p\leqslant q)$, и на прямом произведении $Q\times Y$ задана гладкая функция

$$f\colon\ Q\times Y\to Y,\quad z=f(a,y), \tag{5.1}$$

такая, что

1) в каждой точке множества $Q\times Y$ ранги матриц Якоби $\left(\dfrac{\partial f}{\partial a}\right)$ и $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ максимальны;

2) для любых $y \in Y$ и $a, b \in Q$ выполняется условие

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(a * b, y), \tag{5.2}$$

где $f^{-1}\colon\ Q \times Y \to Y$, $y = f^{-1}(a, z)$. Тогда будем говорить, что функция f определяет *действие* квазигруппы $Q(*)$ на многообразии Y по правилу (5.2).

Предложение 24. *Если квазигруппа $Q(*)$ действует на многообразии Y по правилу* (5.2), *то она изотопна левой лупе Бола.*

□ Рассмотрим три-ткань $W(p, q, q)$, образованную на многообразии $\mathcal{M} = Q \times Y$ тремя слоениями

$$\lambda_1\colon\ a = \text{const}, \quad \lambda_2\colon\ y = \text{const}, \quad \lambda_3\colon\ z = f(a, y) = \text{const}$$

размерностей соответственно p, q и q. На ткани $W(p, q, q)$ возьмем два произвольных достаточно близких вертикальных слоя a и b, вертикальный слой $c = a * b$ и произвольный горизонтальный слой y (рис. 71). Точку пересечения горизонтального слоя y и вертикального слоя a обозначим A. Через A проходит единственный наклонный слой $f(a, y)$. Этот слой пересекает вертикальный слой b в некоторой точке B. Через B проходит единственный горизонтальный слой $f^{-1}(b, f(a, y))$, который, в свою очередь, пересекает вертикальный слой a в некоторой точке C. Через C проходит единственный наклонный слой $f(a, f^{-1}(b, f(a, y)))$. С другой стороны, слой y пересекает вертикальный слой c в некоторой точке, обозначим ее D. Через D проходит единственный наклонный слой $f(c, y)$. Равенство (5.2) означает, что точки C и D лежат на одном наклонном слое.

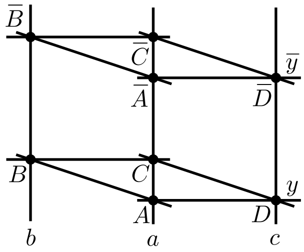

Рис. 71

Если провести аналогичное построение, начав с другого горизонтального слоя $\overline{y}$, то получатся новые точки $\overline{C}$ и $\overline{D}$, которые также лежат на одном наклонном слое в силу того же равенства (5.2). В результате получается конфигурация $ABCD\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$, изображенная на рис. 71. Она аналогична известной левой конфигурации Бола B_l на три-ткани, образованной слоениями одинаковой размерности (см. рис. 11).

Таким образом, тождеству (5.2) соответствует условие замыкания на три-ткани $W(p, q, q)$ конфигураций, изображенных на рис. 71. Используя это условие, докажем, что квазигруппа $Q(*)$ является леводистрибутивной, то есть выполняется тождество

$$a * (b * c) = (a * b) * (a * c).$$

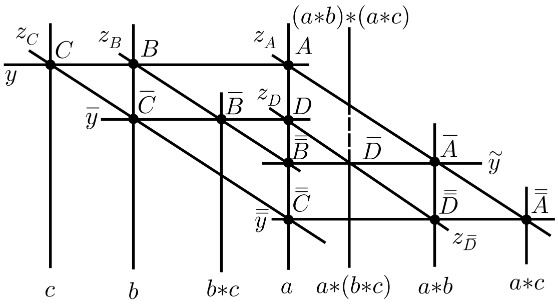

Рис. 72

Пусть a, b, c — произвольные вертикальные слои три-ткани $W(p, q, q)$ и $a * b$, $a * c$, $b * c$, $a * (b * c)$, $(a * b) * (a * c)$ — вертикальные слои, определяемые соответствующими произведениями в квазигруппе $Q(*)$, рис. 72. Пусть y — произвольный горизонтальный слой ткани $W(p, q, q)$; A, B, C — точки пересечения этого слоя со слоями a, b, c соответственно и z_A, z_B, z_C — наклонные слои, проходящие через указанные точки. Наклонный слой z_C пересекает вертикальный слой b в некоторой точке $\overline{C}$; через последнюю проходит единственный горизонтальный слой (обозначим его $\overline{y}$), который пересекает вертикальный слой $b * c$ в точке $\overline{B}$. Эта точка в силу равенства (5.2) лежит на наклонном слое z_B. Получаем «параллелограмм» $BC\overline{C}\overline{B}$, связывающий слои b, c и $b * c$.

Аналогично строится «параллелограмм» $AC\overline{\overline{C}}\overline{\overline{A}}$, связывающий слои a, c и $a * c$; здесь точки A и $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{y}} \cap (a * c)$ в силу того же равенства (5.2) лежат на одном наклонном слое z_A.

Далее обозначим $D = \overline{y} \cap a$ и $\overline{\overline{B}} = z_B \cap a$. Пусть $\widetilde{y}$ — горизонтальный слой, проходящий через точку $\overline{\overline{B}}$, и пусть $\overline{D} = \widetilde{y} \cap (a * (b * c))$. В силу равенства (5.2) точки D и $\overline{D}$ лежат на одном наклонном слое, обозначим его z_D. «Параллелограмм» $D\overline{B}\overline{\overline{B}}\overline{D}$ связывает вертикальные слои a,

$b * c$ и $a * (b * c)$. На наклонном слое z_D лежит точка $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{y}} \cap (a * b)$, поскольку «параллелограмм» $D\overline{C}\overline{\overline{C}}\overline{\overline{D}}$ связывает слои a, b и $a * b$.

Теперь рассмотрим «параллелограмм» $AB\,\overline{\overline{B}}\overline{A}$, где $\overline{A} = \widetilde{y} \cap (a * b)$. Он связывает слои a, b и $a * b$, поэтому точка $\overline{A}$ лежит на слое z_A. На этом же слое, как показано выше, лежит и точка $\overline{\overline{A}}$, поэтому параметр наклонного слоя $z_{\overline{\overline{D}}}$ равен $f(a * b, f^{-1}(a * c, f(a * b, \widetilde{y})))$. Наклонный слой, проходящий через точку $\overline{D}$, определяется параметром $f(a * (b * c), \widetilde{y})$. Так как точки $\overline{D}$ и $\overline{\overline{D}}$ лежат на одном наклонном слое, получаем равенство

$$f(a * b, f^{-1}(a * c, f(a * b, \widetilde{y}))) = f(a * (b * c), \widetilde{y}).$$

С другой стороны, в силу равенства (5.2)

$$f(a * b, f^{-1}(a * c, f(a * b, \widetilde{y}))) = f((a * b) * (a * c), \widetilde{y}),$$

поэтому

$$f(a * (b * c), \widetilde{y}) = f((a * b) * (a * c), \widetilde{y}).$$

Так как слой $\widetilde{y}$ — произвольный (поскольку произвольно был выбран слой y, см. рис. 72), то отсюда следует равенство $a * (b * c) = (a * b) * (a * c)$. Тем самым свойство левой дистрибутивности доказано.

Аналогично доказываются свойства левой обратимости $a * (a * b) = b$ и идемпотентости $a * a = a$.

Таким образом, если квазигруппа $Q(*)$ действует на многообразии Y по правилу (5.2), то она является идемпотентой, левообратимой и леводистрибутивной. Согласно [АГ-1], лупа, изотопная квазигруппе с такими свойствами, является левой лупой Бола. ■

Определение 16. Гладкое действие $f\colon\ Q \times Y \to Y$ локальной дифференцируемой квазигруппы Бола $Q(*)$ на гладком многообразии Y, определяемое правилом (5.2), назовем *квазигруппой Бола преобразований*. Квазигруппу Бола $Q(*)$ мы будем называть *параметрической квазигруппой* квазигруппы Бола преобразований.

Определение 17. Три-ткань $W(p, q, q)$, определяемую квазигруппой Бола преобразований, назовем *обобщенной левой тканью Бола* и обозначим $B_l(p, q, q)$.

Согласно определению 3, квазигруппа Бола преобразований $f\colon\ Q \times Y \to Y$ является локальным координатным группоидом три-ткани $B_l(p, q, q)$, мы будем записывать ее также в виде $z = a \cdot y$. Уравнение (5.1) ткани $B_l(p, q, q)$ будем рассматривать с точностью до изотопических преобразований вида (1.8).

Предложение 25. *Квазигруппа Бола преобразований f изотопна группоиду f^{-1}, который также является квазигруппой Бола преобразований.*

□ Пусть $B_l(p, q, q)$ — три-ткань, порождаемая квазигруппой Бола преобразований $f\colon\ Q \times Y \to Y$. Определим на многообразии $\mathcal{M} = Q \times Y$ точечное отображение $\varphi_a(A) = B$, см. рис. 73. Здесь a — фиксированный вертикальный слой ткани $B_l(p, q, q)$, A — произвольная точка многообразия $\mathcal{M}$, b и y_A — соответственно вертикальный и горизонтальный слои ткани, проходящие через точку A, z — наклонный слой, проходящий через точку пересечения слоев a и y_A, и, наконец, $B = z \cap (a * b)$.

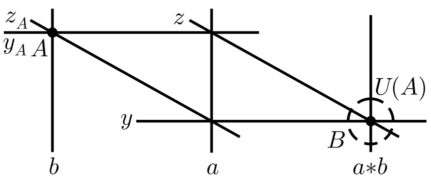

Рис. 73

Поскольку на многообразии $\mathcal{M} = Q \times Y$ точки A и B имеют следующие координаты: $A = (b, y_A)$, $B = (a * b, f^{-1}(a * b, z))$, где $z = f(a, y_A)$, то отображение φ_a можно записать также в виде

$$\varphi_a\colon\ (b, y_A) \to (a * b, f^{-1}(a * b, f(a, y_A))).$$

Из определения операции φ_a следует, что для каждой точки $A \in b$ ее образ $\varphi_a(A)$ лежит на слое $a * b$, и для каждой точки $A' \in y_A$ — $\varphi_a(A') \in z$. Пусть теперь точка A перемещается по наклонному слою z_A. Последний пересекает вертикальный слой a в некоторой точке, через которую проходит единственный горизонтальный слой, обозначим его y, см. рис. 73. Так как в силу равенства (5.2) $B = y \cap (a * b)$, то $\varphi_a(A') \in y$ для любой точки A' слоя z_A.

Таким образом, при отображении φ_a вертикальные слои ткани переходят в вертикальные слои этой же ткани: $b \to a * b$, а горизонтальные и наклонные слои ткани меняются местами: $y_A \to z,\ z_A \to y$, где $z = f(a, y_A)$, $y = f^{-1}(a, z_A)$ (параметр a фиксирован).

С другой стороны, последние уравнения определяют изотопическое преобразование (α, β, γ), где

$$\alpha\colon\ b \to a * b = \widetilde{b}, \quad \beta\colon\ y_A \to f(a, y_A) = \widetilde{y}, \quad \gamma\colon\ z_A \to f^{-1}(a, z_A) = \widetilde{z}.$$

При этом уравнение $z_A = f(b, y_A)$, связывающее параметры слоев три-ткани $B_l(p, q, q)$, проходящих через произвольную точку $A \in \mathcal{M}$, в силу равенства (5.2) преобразуется к виду

$$\widetilde{z} = f^{-1}(a, z_A) = y = f^{-1}(a * b, z) = f^{-1}(a * b, f(a, y_A)) = f^{-1}(\widetilde{b}, \widetilde{y}) \equiv \widetilde{f}(\widetilde{b}, \widetilde{y}). \tag{5.3}$$

Отсюда следует, что координатный группоид f три-ткани $B_l(p, q, q)$ изотопен группоиду $\widetilde{f} \equiv f^{-1}$.

Теперь покажем, что функция $\widetilde{f}$ удовлетворяет тождеству (5.2):

$$\widetilde{f}(\widetilde{a}, \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{b}, \widetilde{f}(\widetilde{a}, \widetilde{y}))) = \widetilde{f}(\widetilde{a} * \widetilde{b}, \widetilde{y}), \tag{5.4}$$

то есть $\widetilde{f}$ является квазигруппой Бола преобразований. В самом деле, в силу идемпотентности и левой обратимости операции $(*)$ имеем:

$$\widetilde{a} = a * a = a,\ \ \widetilde{a} * \widetilde{b} = a * (a * b) = b. \tag{5.5}$$

Так как по определению $\widetilde{f}(\widetilde{b}, \widetilde{y}) = f^{-1}(a * b, z)$, то с учетом (5.5) получаем:

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(\widetilde{a} * \widetilde{b}, \widetilde{y}) &= \widetilde{f}((a * a) * (a * b), \widetilde{y}) = \widetilde{f}(a * (a * b), \widetilde{y}) = f^{-1}(b, z), \\ \widetilde{f}(\widetilde{a}, \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{b}, \widetilde{f}(\widetilde{a}, \widetilde{y}))) &= \widetilde{f}(\widetilde{a}, \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{b}, f^{-1}(a, z))) = \\ &= \widetilde{f}(\widetilde{a}, \widetilde{f}^{-1}(\widetilde{b}, y_A)) = \widetilde{f}(\widetilde{a}, f(a * b, y_A)) = f^{-1}(a, f(a * b, y_A)). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Поскольку на ткани $B_l(p, q, q)$ замыкаются конфигурации, изображенные на рис. 71, то имеем равенство

$$f^{-1}(a, f(a * b, y_A)) = f^{-1}(b, z).$$

Отсюда в силу (5.6) получаем (5.4). ■

Верно также обратное утверждение.

Предложение 26. *Если $Q(*)$ — произвольная локальная дифференцируемая квазигруппа, $f\colon Q \times Y \to Y$ — локальный гладкий группоид и в окрестности любого фиксированного элемента a_0 множества Q группоид $z = f(a, y)$ изотопическим преобразованием*

$$\alpha\colon\ a \to a_0 * a = \widetilde{a}, \quad \beta\colon\ y \to f(a_0, y) = \widetilde{y}, \quad \gamma\colon\ z \to f^{-1}(a_0, z) = \widetilde{z}$$

приводится к виду $\widetilde{z} = f^{-1}(\widetilde{a}, \widetilde{y})$, то f является квазигруппой Бола преобразований с параметрической квазигруппой $Q(*)$.

□ Подставляя выражения

$$\widetilde{z} = f^{-1}(a_0, z) = f^{-1}(a_0, f(a, y)), \quad f^{-1}(\widetilde{a}, \widetilde{y}) = f^{-1}(a_0 * a, f(a_0, y))$$

в уравнение $\widetilde{z} = f^{-1}(\widetilde{a}, \widetilde{y})$, получим равенство

$$f^{-1}(a_0, f(a, y)) = f^{-1}(a_0 * a, f(a_0, y)) \equiv \overline{y}.$$

Отсюда находим: $f(a, y) = f(a_0, \overline{y}),\ f(a_0, y) = f(a_0 * a, \overline{y})$. Исключая y из последней системы, получим равенство (5.2) в виде

$$f(a_0, f^{-1}(a, f(a_0, \overline{y}))) = f(a_0 * a, \overline{y}).$$

Следовательно, f — квазигруппа Бола преобразований с параметрической квазигруппой $Q(*)$. ■

Замечание. При $p = q$ группоиды f и f^{-1} являются квазигруппами, f^{-1} называется парастрофом f, см. § 2.2. В рассматриваемом случае $(p \leqslant q)$ группоиды $f : Q \times Y \to Y$ и $f^{-1}\colon Q \times Y \to Y$ также можно называть парастрофами. Из Предложения 25 следует, что парастроф f^{-1} квазигруппы Бола преобразований f определяет на том же многообразии $\mathcal{M} = Q \times Y$

три-ткань $\widetilde{B}_l(p,q,q)$, эквивалентную ткани $B_l(p,q,q)$. При этом отображение $\varphi_a: \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, переводящее слои ткани $B_l(p,q,q)$ в слои ткани $\widetilde{B}_l(p,q,q)$, является внутренним автоморфизмом ткани $B_l(p,q,q)$. С другой стороны, отображение φ_a определяет изотопию парастрофов f и f^{-1}. В работе [ТоШ-10] с помощью автоморфизмов φ_a найдены структурные уравнения три-ткани $B_l(p,q,q)$ и получены соотношения на компоненты ее тензора кривизны.

2. Локальные симметрии на три-ткани $B_l(p,q,q)$.

Предложение 27. *База первого слоения три-ткани $B_l(p,q,q)$ является локально симметрическим пространством.*

□ Пусть $B_l(p,q,q)$ — три-ткань, определяемая квазигруппой Бола преобразований $f: Q \times Y \to \to Y$ с параметрической квазигруппой $Q(*)$. С другой стороны, множество Q является базой первого слоения λ_1 три-ткани $B_l(p,q,q)$. Следуя [СМ-4], определим на Q семейство функций S_a, таких, что $S_a(b) = a * b$ для любых $a \in Q$ и $b \in U_a \subset Q$, где U_a — достаточно малая окрестность точки a. Так как операция $(*)$ идемпотентна, левообратима и леводистрибутивна, то согласно [СМ-4] функции S_a являются локальными симметриями, а многообразие $\{Q, S_a\}$ будет локально симметрическим пространством. ■

Замечание. Каждая функция S_a (то есть при любом $a \in Q$) индуцирует на первом слоении λ_1 три-ткани $B_l(p,q,q)$ отображение $b \to S_a(b)$, где a, b и $S_a(b) = a * b$ — параметры вертикальных слоев ткани. Это отображение также является локальной симметрией, обозначим ее также S_a, $S_a: \lambda_1 \to \lambda_1$. Заметим, что в силу равенства (5.2) вертикальный слой $S_a(b) = a * b$ три-ткани $B_l(p,q,q)$ может быть получен как вертикальная трансверсаль $(q-p)$-мерных подмногообразий $U(A) = z \cap y$ при условии, что слой a фиксирован, а точка A пробегает вертикальный слой b, см. рис. 73. Будем говорить, что слой $S_a(b) = a * b$ симметричен слою b относительно слоя a.

3. Обобщенные левые конфигурации Бола на три-ткани $W(p,q,q)$.

Рассмотрим произвольную три-ткань $W(p,q,q)$, образованную слоениями размерностей p, q и q, причем $p \leqslant q$. Фиксируем два достаточно близких вертикальных слоя a и b этой ткани. Возьмем на слое a произвольную точку A и построим точки B и C так, как показано на рис. 71. Проведем через A горизонтальный слой (обозначим его y), а через C — наклонный слой, его обозначим z. Слои y и z пересекаются по $(q-p)$-мерному подмногообразию, которое обозначим $U(y)$.

Предложение 28. *Если на ткани $W(p,q,q)$ для любых достаточно близких вертикальных слоев a и b существует единственный вертикальный слой, трансверсальный всем достаточно близким подмногообразиям $U(y)$, то ткань $W(p,q,q)$ является тканью $B_l(p,q,q)$.*

□ Допустим, что существует единственный вертикальный слой (обозначим его x), трансверсальный всем подмногообразиям $U(y)$ при условии, что точка A пробегает вертикальный слой a три-ткани $W(p,q,q)$. Слой x пересекает горизонтальный слой y в точке, которая, с другой стороны, лежит на слое z, проходящем через точку C. Следовательно, на ткани $W(p,q,q)$ замыкаются конфигурации, изображенные на рис. 71, а значит, для ее координатного группоида f выполняется тождество (5.2):

$$f(a, f^{-1}(b, f(a,y))) = f(x,y).$$

Поскольку слои a и b выбраны произвольно, то на первом слоении ткани $W(p,q,q)$ возникает бинарная операция φ, такая, что $\varphi(a,b) = x$.

Покажем, что уравнение $\varphi(a,b) = x$ локально однозначно разрешимо относительно переменных a и b, то есть φ — квазигруппа. Действительно, для фиксированных вертикальных слоев a и x слой b однозначно определяется как вертикальная трансверсаль подмногообразий $f(a,y) \cap f^{-1}(a, f(x,y))$ при любом y. Теперь зафиксируем параметры b и x, а равенство (5.2) запишем в виде равносильной ему системы уравнений:

$$f(a,y) = f(b,\overline{y}), \quad f(a,\overline{y}) = f(x,y).$$

Отсюда следует, что для любых y и $\overline{y}$ вертикальный слой a трансверсален подмногообразиям $y \cap f(b,\overline{y})$ и $\overline{y} \cap f(x,y)$, а значит, определяется однозначно. Таким образом, операция φ является квазигруппой, а группоид f, согласно определению 16, будет квазигруппой Бола преобразований (с параметрической квазигруппой φ). Следовательно, три-ткань $W(p,q,q)$, определяемая группоидом f, является тканью $B_l(p,q,q)$. ■

Предложение 28 можно усилить. Пусть, как и выше, a и b — произвольные достаточно близкие вертикальные слои три-ткани $W(p,q,q)$. Рассмотрим $m=[q/p]$ также достаточно близких горизонтальных слоев этой ткани с параметрами y_μ, $\mu=\overline{1,m}$. Каждый из них определяет слои $A_\mu B_\mu$, $B_\mu C_\mu$ (рис. 74) и соответствующее подмногообразие $U(y_\mu)$. На многообразии $\mathcal{M}=Q\times Y$ размерности $q+p$ существует p-мерный вертикальный слой ткани $W(p,q,q)$, трансверсальный подмногообразиям $U(y_1)$, ..., $U(y_m)$. Но $m+1$ многообразий $U(y_{\overline{\mu}})$, $\overline{\mu}=\overline{1,m+1}$, уже не имеют, вообще говоря, общей трансверсали, являющейся вертикальным слоем ткани $W(p,q,q)$, см. рис. 74.

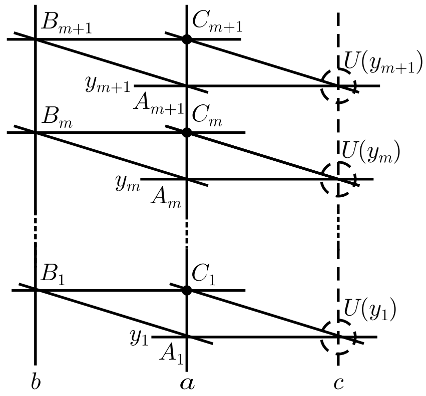

Рис. 74

Определение 18. Конфигурацию, образованную двумя вертикальными слоями a и b и «параллелограммами» вида $A_{\overline{\mu}}B_{\overline{\mu}}C_{\overline{\mu}}U(y_{\overline{\mu}})$, $\overline{\mu}=\overline{1,m+1}$, назовем *обобщенной левой конфигурацией Бола* и обозначим $B_l(1,m)$.

Определение 19. Будем говорить, что конфигурация $B_l(1,m)$ *замыкается*, если существует единственный вертикальный слой три-ткани $W(p,q,q)$, трансверсальный всем достаточно близким подмногообразиям $U(y_{\overline{\mu}})$, $\overline{\mu}=\overline{1,m+1}$, входящим в эту конфигурацию.

Теорема 29. *Если на три-ткани $W(p,q,q)$ замыкаются все конфигурации $B_l(1,m)$, то она является тканью $B_l(p,q,q)$.*

□ На ткани $W(p,q,q)$ рассмотрим произвольную конфигурацию $B_l(1,m)$, см. рис. 74. Допустим, что она замыкается, то есть существует единственный вертикальный слой c, трансверсальный всем подмногообразиям $U(y_1)$, ..., $U(y_{m+1})$. Пусть y — произвольный горизонтальный слой ткани, отличный от слоев $y_{\overline{\mu}}$, $\overline{\mu}=\overline{1,m+1}$. Этот слой пересекает вертикальный слой c в некоторой точке D. Построим, как и выше, точки $A=a\cap y$, $B=b\cap z$ и $C=a\cap\overline{y}$, где z — наклонный слой, проходящий через точку A, а $\overline{y}$ — горизонтальный слой, проходящий через точку B. Точки C и D будут лежать на одном наклонном слое (обозначим его $\overline{z}$), поскольку на рассматриваемой ткани $W(p,q,q)$ замыкаются *все* конфигурации $B_l(1,m)$, а значит, замыкается любая из конфигураций, в которую входит горизонтальный слой y и какие-либо m горизонтальных слоев $y_{\overline{\mu}_1}$, ..., $y_{\overline{\mu}_m}$ из набора y_1, ..., y_m, y_{m+1}. При этом вертикальный слой c будет трансверсален подмногообразиям $U(y_{\overline{\mu}_1})$, ..., $U(y_{\overline{\mu}_m})$, $U(y)$, где $U(y)=y\cap\overline{z}$. Так как горизонтальный слой y выбран произвольно, то вертикальный слой c будет трансверсален всем подмногообразиям $U(y)$ для любого y. Следовательно, в силу Предложения 28, три-ткань $W(p,q,q)$ является тканью $B_l(p,q,q)$. ■

Замечание. Уравнение $c=a*b$, с одной стороны, определяет параметрическую квази-группу квазигруппы Бола преобразований (5.1), а с другой стороны, связывает параметры a, b и c вертикальных слоев соответствующей три-ткани $B_l(p,q,q)$, входящих в произвольную конфигурацию $B_l(1,m)$ (рис. 74). В частности, при $q=p$ три-ткань $B_l(p,q,q)$ становится левой тканью Бола B_l, образованной слоениями одинаковой размерности, а конфигурация $B_l(1,m)$ — левой конфигурацией Бола (рис. 11 на с. 45), так как $m=[q/p]=1$. Для координатной квазигруппы $z=f(a,y)$ ткани B_l существует левая обратная квазигруппа $a={}^{-1}f(z,y)$, которая, согласно [9], определяет среднюю ткань Бола B_m. При этом вертикальные слои ткани B_l становятся наклонными слоями ткани B_m, наклонные слои ткани B_l — вертикальными слоями ткани B_m, а горизонтальные слои ткани B_l — горизонтальными слоями ткани B_m. Поэтому любая левая конфигурация Бола (B_l) на ткани B_l, определяемой квазигруппой f, будет средней конфигурацией Бола (B_m) (рис. 13) на ткани B_m, определяемой квазигруппой ${}^{-1}f$. Следовательно, уравнение $c=a*b$ будет связывать параметры наклонных слоев ткани B_m, входящих в конфигурацию (B_m), а значит, будет уравнением сердцевины ткани B_m, см. п. 2 §3. Поэтому операцию $(*)$ на первом слоении ткани B_l также можно называть *сердцевиной* этой ткани. В общем случае $(p\leqslant q)$ координатный группоид f три-ткани $B_l(p,q,q)$ квазигруппой, вообще говоря, не является, значит, невозможно однозначно определить группоид ${}^{-1}f$ и соответствующую ткань B_m. Тем не менее, поскольку уравнение $c=a*b$ связывает параметры вертикальных слоев ткани $B_l(p,q,q)$, входящих в произвольную конфигурацию $B_l(1, m)$, то операцию $(*)$ на первом слоении ткани $B_l(p, q, q)$ можно также называть *сердцевиной* ткани $B_l(p, q, q)$.

Определение 20. Параметрическую квазигруппу $c = a * b$ квазигруппы Бола преобразований (5.1) будем называть *сердцевиной* соответствующей три-ткани $B_l(p, q, q)$.

4. Тождество обобщенной альтернативности.

Рассмотрим три-ткань $W(p, q, q)$, для которой число q кратно p, то есть $q = mp$. Для такой ткани, как показано в п. 5 §4, существует координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ с операцией $z = (u_1, ..., u_m) \circ v$, см. рис. 75. Найдем тождество в координатных моноидах ткани $W(p, mp, mp)$, соответствующее замыканию на этой ткани обобщенных левых конфигураций Бола $B_l(1, m)$.

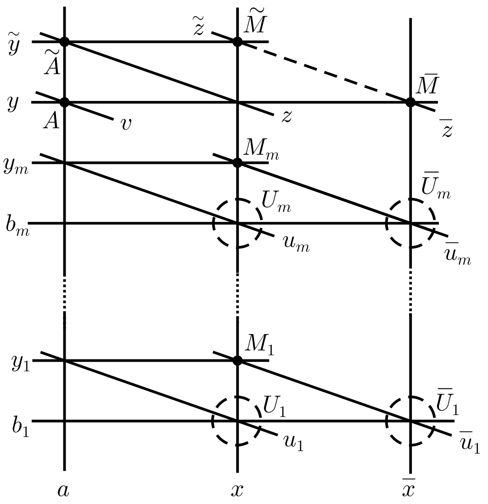

Рис. 75

Зафиксируем на три-ткани $W(p, mp, mp)$, один вертикальный слой a и m горизонтальных слоев $b_1, b_2, ..., b_m$ (рис. 75). Согласно п. 5 §4, эти слои образуют координатную решетку ткани $W(p, mp, mp)$. Пусть $u_1, u_2, ..., u_m$ и v — произвольные достаточно близкие наклонные слои три-ткани $W(p, mp, mp)$. Слой u_μ, $\mu = \overline{1, m}$, пересекает соответствующий (с тем же номером) горизонтальный слой b_μ по некоторому подмногообразию U_μ, $U_\mu = u_\mu \cap b_\mu$, $\dim U_\mu = q - p = p(m-1)$. Подмногообразия $U_1, U_2, ..., U_m$ допускают единственный трансверсальный вертикальный слой, обозначим его x. Тогда $f(x, b_\mu) \equiv x \cdot b_\mu = u_\mu$.

Наклонный слой v пересекает вертикальный слой a в некоторой точке A, через которую проходит горизонтальный слой, обозначим его y. Тогда $f(a, y) \equiv a \cdot y = v$. Наклонный слой, проходящий через точку пересечения слоев x и y, обозначим z. Согласно определению операции $(\circ)$ имеем:

$$(u_1, u_2, ..., u_m) \circ v = x \cdot y = z.$$

Слой z пересекает вертикальный слой a в некоторой точке $\widetilde{A}$, через которую проходит горизонтальный слой $\widetilde{y}$, так что $a \cdot \widetilde{y} = z$. Обозначим $\widetilde{M} = x \cap \widetilde{y}$ и пусть $\widetilde{z}$ — наклонный слой, проходящий через точку $\widetilde{M}$. Тогда, как видно из рис. 75,

$$(u_1, u_2, ..., u_m) \circ z = x \cdot \widetilde{y} = \widetilde{z},$$

и с учетом предыдущих равенств получаем:

$$\widetilde{z} = (u_1, u_2, ..., u_m) \circ ((u_1, u_2, ..., u_m) \circ v). \tag{5.7}$$

Далее, наклонный слой u_μ пересекает вертикальный слой a в некоторой точке, через которую проходит горизонтальный слой y_μ, $\mu = \overline{1, m}$, так что $a \cdot y_\mu = u_\mu$. Слои $y_1, y_2, ..., y_m$ пересекают вертикальный слой x соответственно в точках $M_1, M_2, ..., M_m$, через каждую из которых проходит наклонный слой, обозначим эти слои $\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_m$. Тогда $x \cdot y_\mu = \overline{u}_\mu$ и согласно определению операции $(\circ)$ имеем:

$$(u_1, u_2, ..., u_m) \circ u_1 = \overline{u}_1, \quad ..., \quad (u_1, u_2, ..., u_m) \circ u_m = \overline{u}_m.$$

Слой $\overline{u}_\mu$ пересекает горизонтальный слой b_μ по подмногообразию $\overline{U}_\mu$, $\mu = \overline{1, m}$. Эти подмногообразия допускают трансверсальный вертикальный слой $\overline{x}$, который пересекает горизонтальный слой y в точке $\overline{M}$. Поэтому $\overline{x} \cdot b_\mu = \overline{u}_\mu$.Обозначим через $\overline{z}$ наклонный слой, проходящий через точку $\overline{M}$. Тогда по определению операции $(\circ)$

$$(\overline{u}_1, \overline{u}_2, ..., \overline{u}_m) \circ v = \overline{z}.$$

С учетом предыдущих равенств получаем:

$$\overline{z} = ((u_1, u_2, ..., u_m) \circ u_1, (u_1, u_2, ..., u_m) \circ u_2, ..., (u_1, u_2, ..., u_m) \circ u_m) \circ v. \tag{5.8}$$

Наклонные слои $\overline{z}$ и $\widetilde{z}$ совпадают тогда и только тогда, когда на ткани $W(p, q, q)$ замыкаются обобщенные конфигурации $B_l(1, m)$, см. рис. 75. С другой стороны, равенство $\overline{z} = \widetilde{z}$ с учетом выражений (5.7) и (5.8) принимает вид

$$((u_1, ..., u_m) \circ u_1, ..., (u_1, ..., u_m) \circ u_m) \circ v = (u_1, .., u_m) \circ ((u_1, .., u_m) \circ v). \tag{5.9}$$

Доказана

Теорема 30. *Пусть $u_1, u_2, ..., u_m$ и v — произвольные наклонные слои три-ткани $W(p, mp, mp)$. Ткань $W(p, mp, mp)$ будет тканью $B_l(p, mp, mp)$ тогда и только тогда, когда в каждом ее координатном моноиде $\mu_{(a,b)}(\circ)$ выполняется тождество* (5.9).

При $m = 1$ тождество (5.9) обращается в тождество левой альтернативности $(u \circ u) \circ v = u \circ (u \circ v)$, которое, как известно, выполняется в координатных лупах три-ткани Бола B_l, образованной слоениями одинаковой размерности. Поэтому назовем (5.9) *тождеством обобщенной альтернативности.*

Определение 21. Координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ три-ткани $W(p, mp, mp)$, в котором выполняется тождество (5.9), назовем *альтернативным.*

Пример 1. Покажем, что три-ткань $W(2, 3, 3)$, определяемая уравнениями

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + y^1 - a^3 y^2 (a^2 + y^2), \\ z^2 = a^2 + y^2, \end{cases} \tag{5.10}$$

является обобщенной левой тканью Бола $B_l(2, 3, 3)$. Для этого достаточно показать, что уравнения (5.10) задают действие некоторой трехпараметрической квазигруппы Бола на двумерном многообразии, то есть выполняется тождество (5.2):

$$f(a, f^{-1}(b, f(a, y))) = f(c, y).$$

Найдем уравнения квазигруппы $c = a * b$. Для этого запишем тождество (5.2) в виде двух равенств:

$$f(a, y) = f(b, \overline{y}), \quad f(c, y) = f(a, \overline{y}). \tag{5.11}$$

Для три-ткани (5.10) имеем:

$$\begin{cases} a^1 + y^1 - a^3 y^2 (a^2 + y^2) = b^1 + \overline{y}^1 - b^3 \overline{y}^2 (b^2 + \overline{y}^2), \quad a^2 + y^2 = b^2 + \overline{y}^2, \\ c^1 + y^1 - c^3 y^2 (c^2 + y^2) = a^1 + \overline{y}^1 - a^3 \overline{y}^2 (a^2 + \overline{y}^2), \quad c^2 + y^2 = a^2 + \overline{y}^2. \end{cases}$$

Исключая $\overline{y} = (\overline{y}^1, \overline{y}^2)$ из последней системы, получим уравнения, которые удовлетворяются тождественно относительно $y = (y^1, y^2)$ в том и только том случае, если выполняются равенства

$$\begin{cases} c^1 = 2a^1 - b^1 - (a^2 - b^2)(a^2(a^3 - b^3) + a^3(a^2 - b^2)), \\ c^2 = 2a^2 - b^2, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{cases} \tag{5.12}$$

Тем самым доказано, что уравнения (5.10) определяют квазигруппу Бола преобразований с параметрической квазигруппой Бола (5.12). Следовательно, рассматриваемая три-ткань является обобщенной левой тканью Бола $B_l(2, 3, 3)$.

Согласно Предложению 24, параметрическая квазигруппа (5.12) должна быть идемпотентной, левообратимой и леводистрибутивной, а изотопная ей лупа — левой лупой Бола. В этом можно убедиться непосредственной проверкой. Можно показать также (см. [To-7]), что квазигруппа (5.12) является сердцевиной известной средней ткани Бола [Ф-6]:

$$w^1 = u^1 + v^1 - u^2 v^2 (u^3 + v^3), \quad w^2 = u^2 + v^2, \quad w^3 = u^3 + v^3.$$

Эта три-ткань является *эластичной*, см. § 3 гл. 7.

Пример 2. Рассмотрим другую шестимерную эластичную три-ткань E_2, определяемую уравнениями (§ 3 гл. 7)

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = x^2 + y^2 e^{-2x^1} + (x^3 y^1 - x^1 y^3) e^{-2x^1}, \quad z^3 = x^3 + y^3.$$

Поскольку эластичные ткани образуют собственный подкласс тканей B_m [Ш-12], то эта ткань является средней тканью Бола. Изотопическим преобразованием

$$x^2 e^{2x^1} + x^1 x^3 \to x^2, \quad y^2 - y^1 y^3 \to y^2, \quad z^2 e^{2z^1} + z^3 z^1 \to z^2$$

уравнения ткани E_2 приводятся к виду

$$\begin{cases} z^1 = x^1 + y^1, \\ z^2 = (x^2 + y^2) e^{2y^1} + (x^3 + y^3)(x^1 + y^1 + (y^1 - x^1) e^{2y^1}), \\ z^3 = x^3 + y^3. \end{cases} \tag{5.13}$$

Найдем левую обратную квазигруппу для квазигруппы (5.13), затем переобозначим переменные: $x^i \to z^i$, $z^i \to a^i$, $y^i \to -y^i$. В результате получим уравнения

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + y^1, \\ z^2 = (a^2 - a^3 a^1) e^{2y^1} + y^2 + a^3(a^1 + 2y^1), \\ z^3 = a^3 + y^3. \end{cases} \tag{5.14}$$

Эти уравнения, с одной стороны, определяют шестимерную левую ткань Бола, а, с другой стороны, задают действие некоторой трехпараметрической квазигруппы Бола $Q(*)$ на трехмерном многообразии Y.

Найдем уравнения параметрической квазигруппы $c = a * b$. Для этого запишем равенства (5.11) с учетом (5.14) и исключим из полученной системы переменные y^i и $\overline{y}^i$. После вычислений получим:

$$\begin{cases} c^1 = 2a^1 - b^1, \\ c^2 = a^2 (e^{-2(a^1 - b^1)} + e^{2(a^1 - b^1)}) - b^2, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{cases} \tag{5.15}$$

Согласно определению 20, эти же уравнения задают сердцевину левой ткани Бола (5.14).

Рассмотрим первые два уравнений (5.14):

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + y^1, \\ z^2 = (a^2 - a^3 a^1) e^{2y^1} + y^2 + a^3(a^1 + 2y^1). \end{cases} \tag{5.16}$$

Как видно, в правую часть не входит переменная y^3. Это означает, что уравнения (5.16) определяют группоид $f:\ Q \times \overline{Y} \to \overline{Y}$, где $\overline{Y} = \{(y^1, y^2)\}$, $\overline{Y} \subset Y$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что для этого группоида равенства (5.2) удовлетворяются тождественно в силу (5.15). Это значит, что уравнения (5.16) задают действие трехпараметрической квазигруппы Бола (5.15) на двумерной плоскости $\overline{Y}$. Следовательно, уравнения (5.16) определяют обобщенную левую ткань Бола $B_l(2,3,3)$ на пятимерном многообразии $Q \times \overline{Y}$.

Пример 3. Для координатной квазигруппы шестимерной три-ткани B_m (см. [Ф-6]):

$$z^1 = x^1 + y^1 e^{-2\varepsilon z^3}, \quad z^2 = x^2 e^{-2\varepsilon z^3} + y^2 - 2\varepsilon z^1 y^3, \quad z^3 = x^3 + y^3$$

уравнения левой обратной квазигруппы некоторым изотопическим преобразованием приводятся к виду

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + y^1 e^{-a^3}, \\ z^2 = a^2 + (y^2 - a^1 y^3) e^{a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3. \end{cases} \tag{5.17}$$

Эти уравнения, с одной стороны, определяют шестимерную левую ткань Бола, а, с другой стороны, задают на трехмерном многообразии Y действие трехпараметрической левой квазигруппы Бола $Q(*)$:

$$\begin{cases} c^1 = a^1 + (a^1 - b^1)e^{b^3 - a^3}, \\ c^2 = a^2 + (a^2 - b^2)e^{a^3 - b^3} - (a^1 - b^1)(a^3 - b^3)e^{a^3}, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{cases} \tag{5.18}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения

$$\begin{cases} z^2 = a^2 + (y^2 - a^1 y^3)e^{a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3. \end{cases} \tag{5.19}$$

задают действие трехпараметрической квазигруппы (5.18) на двумерной плоскости $\overline{Y} = \{(y^2, y^3)\}$, $\overline{Y} \subset Y$.

Уравнения (5.19) определяют также обобщенную левую ткань Бола $B_l(2,3,3)$ на пятимерном многообразии $Q \times \overline{Y}$.

Пример 4. Для шестимерной средней ткани Бола B_m (см. (4.50)):

$$z^1 = x^1 e^{2\varepsilon z^3} + y^1 + 2\varepsilon z^2 x^3, \quad z^2 = x^2 + y^2 e^{2\varepsilon z^3}, \quad z^3 = x^3 + y^3,$$

уравнения левой ткани Бола B_l, определяемой левой обратной квазигруппой, могут быть приведены к виду

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + (y^1 - y^3 a^2)e^{-a^3}, \\ z^2 = a^2 + y^2 e^{a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3. \end{cases} \tag{5.20}$$

Уравнения (5.20) определяют также действие некоторой трехпараметрической левой квазигруппы Бола $Q(*)$ на трехмерном многообразии Y. Уравнения квазигруппы $Q(*)$ (сердцевины ткани (5.20)) находятся непосредственными вычислениями и имеют вид

$$\begin{cases} c^1 = a^1 + (a^1 - b^1)e^{b^3 - a^3} - (a^2 - b^2)(a^3 - b^3)e^{-a^3}, \\ c^2 = a^2 + (a^2 - b^2)e^{a^3 - b^3}, \\ c^3 = 2a^3 - b^3. \end{cases} \tag{5.21}$$

Как и выше, можно показать, что уравнения

$$\begin{cases} z^1 = a^1 + (y^1 - a^2 y^3)e^{-a^3}, \\ z^3 = a^3 + y^3 \end{cases} \tag{5.22}$$

задают действие квазигруппы (5.21) на двумерной плоскости $\overline{Y} = \{(y^1, y^3)\}$, $\overline{Y} \subset Y$. Уравнения (5.22) определяют также обобщенную левую ткань Бола $B_l(2,3,3)$.

Замечание. Для рассмотренных выше три-тканей $B_l(2,3,3)$ $p = 2$, $q = 3$, то есть q не кратно p. Поэтому координатный моноид $\mu_{(a,b)}(\circ)$ для таких тканей не существует.

Примечание. Изучением квазигрупп преобразований и их физическими приложениями занимались А.И. Баталин [Бат-1], А.И. Нестеров [Не-1] и другие, см. об этом в [ЛПС-1], [То-15]. Обобщение теории групп Ли преобразований для луп Муфанг и Бола начато в работах П.О. Михеева [Мх-2], [Мх-4], который рассматривал квазигруппу преобразований как семейство преобразований гладкого многообразия, не замкнутое, вообще говоря, относительно композиции. Мы определили квазигруппу Бола преобразований как *действие* локальной гладкой квазигруппы Бола на гладком многообразии. Это позволило привлечь к изучению квазигрупп Бола преобразований методы теории три-тканей, см. также [ТоШ-9], [ТоШ-10], [То-15].

Приложение 2

ГЕОМЕТРИЯ ТКАНЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Е.В. Ферапонтов

Несмотря на многочисленные и глубокие связи теории тканей с алгебраической и дифференциальной геометрией, теорией неассоциативных структур, до последнего времени практически отсутствовали какие бы то ни было физические приложения. В этом разделе мы рассматриваем два приложения. Одно возникает при изучении геометрии характеристик на решениях систем дифференциальных уравнений гидродинамического типа (Кильп [Кл-1], [Кл-2], Ферапонтов [Фе-1]-[Фе-4]), другое — при построении инвариантов волновых систем (Балк, Ферапонтов [БФ-3]).

§ 1. Геометрия тканей и системы гидродинамического типа

Системами гидродинамического типа называются квазилинейные системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$u^i_t + v^i_j(u)u^i_x = 0, \quad u = (u^1, ..., u^n), \tag{1}$$

где t — время, x — одномерная координата, $u^i(x,t)$, $i = 1, ..., n$ — искомые функции, причем элементы матрицы (v^i_j) предполагаются не зависящими от t, x. Системы вида (1), как правило, возникают в задачах газовой динамики, химической кинетики, методе усреднения Уизема и т. д. (см., например, [Ц-2]). Решения $u^i(x,t)$ системы (1) удобно представлять себе как двумерные поверхности n-мерного пространства $R^n(u^1, ..., u^n)$, параметризованные координатами x, t. Эти интегральные многообразия могут пересекаться по кривым, которые называются характеристиками.

Обозначим $\lambda^i(u)$ собственные числа матрицы $v^i_j(u)$ и предположим, что все они вещественны и различны, т. е. система (1) является *строго гиперболической*. Тогда характеристики задаются уравнениями $dx - \lambda^i dt = 0$ и образуют на каждом решении системы n однопараметрических семейств кривых, т. е. n-ткань. Поскольку λ^i явно зависит от u, свойства этой ткани зависят, вообще говоря, от выбранного решения, так что n-ткани из характеристик на разных решениях системы (1) могут оказаться неэквивалентными.

Возникает естественная задача: выделить из всего семейства решений системы (1) те решения, на которых ткань из характеристик устроена наиболее «просто» — например, является шестиугольной. Первые результаты в этом направлении принадлежат Кильп [Кл-1], [Кл-2], где геометрия характеристик изучалась методом внешних форм Картана. Так, в [Кл-2] найдены все решения уравнений одномерного неизэнтропического течения политропного газа:

$$\begin{aligned} &\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0, \\ &u_t + uu_x + \frac{p_x}{\rho} = 0, \\ &p_t + up_x + \gamma p u_x = 0 \end{aligned}$$

(ρ — плотность, u — скорость, p — давление, $\gamma = \mathrm{const}$ — показатель политропы), на которых характеристики образуют *шестиугольную ткань*. Оказалось, что при $\gamma = -1$ (уравнение газовой динамики при $\gamma = -1$ известны под названием «газ Чаплыгина») три-ткань из характеристик является шестиугольной на любом решении, в то время как при $\gamma \neq -1$ решения с шестиугольной три-тканью образуют конечнопараметрическое семейство и характеризуются линейной зависимостью скорости u от координаты x: $u = a(t)x + b(t)$. Эти решения известны в газовой динамике как решения с «линейным профилем поля скоростей» ([Сд-1], с. 318).

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением систем (1), приводимых к диагональной форме
$$R^i_t + \lambda^i(R)R^i_x = 0, \tag{2}$$
причем для определенности будем считать, что число уравнений системы равно трем: $i = 1, 2, 3$. Разумеется, приведение системы (1) к диагональному виду (2) возможно лишь в том случае, когда сеть собственных направлений матрицы v^i_j является голономной. Координаты R^i вдоль собственных направлений называются *инвариантами Римана* системы (1). Требование существования инвариантов Римана, вообще говоря, не является принципиальным при изучении геометрии характеристик, и принято нами лишь с целью упрощения дальнейших выкладок.

Поскольку система (2) эквивалентна системе внешних уравнений $dR^i \wedge (dx - \lambda^i dt) = 0$, характеристики $dx - \lambda^i dt = 0$ являются линиями уровня инвариантов Римана: $R^i = \mathrm{const}$. При изучении геометрии характеристик наиболее естественными представляются следующие задачи.

1. Описать все системы (2) из трех уравнений, у которых характеристики образуют шестиугольную три-ткань на любом решении.

2. Для системы (2), не попавшей в первый класс, найти все решения с шестиугольной три-тканью из характеристик (в общем случае эти решения будут зависеть лишь от конечного числа параметров).

Перед тем, как перейти к обсуждению этих задач, дадим необходимые определения.

Определение 1. Система (2) называется *слабо нелинейной*, если для любого i выполнено условие $\partial\lambda^i/\partial R^i = 0$. Слабая нелинейность тесно связана с таким хорошо известным в физике явлением опрокидывания (градиентная катастрофа), характерным для систем гидродинамического типа. Оказывается, что условие слабой нелинейности препятствует опрокидыванию, и решения $R^i(x, t)$, являющиеся однозначными функциями в начальный момент времени $t = 0$, остаются таковыми в процессе всей эволюции ([РС-1]).

Определение 2. Система (2) называется *полугамильтоновой*, если
$$\partial_k\Big(\frac{\partial_j\lambda^i}{\lambda^j - \lambda^i}\Big) = \partial_j\Big(\frac{\partial_k\lambda^i}{\lambda^k - \lambda^i}\Big), \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial R^i},$$
для любой тройки индексов $i \neq j \neq k \neq i$. Условие полугамильтоновости эквивалентно наличию у системы гидродинамического типа бесконечного числа законов сохранения ([Ц-1]).

Теорема ([Фе-1], [Фе-2]). *Для того чтобы три-ткань из характеристик была шестиугольной на любом решении системы* (2), *необходимо и достаточно, чтобы система* (2) *была одновременно слабо нелинейной и полугамильтоновой.*

□ Сначала несколько слов о технике исследования. Поскольку характеристики задаются уравнениями $dx - \lambda^i dt = 0$, $i = 1, 2, 3$, удобно ввести 1-формы
$$\omega^1 = (\lambda^3 - \lambda^2)(dx - \lambda^1 dt), \quad \omega^2 = (\lambda^1 - \lambda^3)(dx - \lambda^2 dt).$$
Тогда характеристики первого, второго и третьего семейств запишутся соответственно в виде
$$\omega^1 = 0, \quad \omega^2 = 0, \quad \omega^1 + \omega^2 = 0.$$
Найдем форму связности рассматриваемой три-ткани, т. е. такую 1-форму ω, что
$$d\omega^1 = \omega \wedge \omega^1, \quad d\omega^2 = \omega \wedge \omega^2$$
(см. §4 гл. 1). Непосредственные вычисления приводят к следующему результату:
$$\begin{aligned}\omega = \big(R^1_x\partial_1\lambda^1 + R^2_x\partial_2\lambda^2 + R^3_x\partial_3\lambda^3\big)\,dt + \partial_1\ln(\lambda^1 - \lambda^2)(\lambda^1 - \lambda^3)dR^1 +\\ + \partial_2\ln(\lambda^2 - \lambda^1)(\lambda^2 - \lambda^3)dR^2 + \partial_3\ln(\lambda^3 - \lambda^1)(\lambda^3 - \lambda^2)dR^3.\end{aligned} \tag{3}$$
Условие шестиугольности имеет вид $d\omega = 0$. Требуя, чтобы это условие выполнялось тождественно в силу уравнений (2), т. е. три-ткань из характеристик была шестиугольной на любом решении системы, получим утверждение сформулированной выше теоремы. ■

Как видим, условие шестиугольности оказалось непосредственно связанным с такими чисто качественными физическими понятиями, как невозможность градиентной катастрофы и наличие бесконечного числа законов сохранения.

Замечание. Для систем, не приводимых к инвариантам Римана, аналог сформулированной теоремы был установлен в [Фе-1], [Фе-2]. Там же было показано, что всякая слабо нелинейная полугамильтонова система (2) из трех уравнений линеаризуется подходящим преобразованием типа Беклунда [В-1].

Для решения второй задачи необходимо присоединить к уравнениям (2) дифференциальную связь $d\omega = 0$, где ω вычисляется по формуле (3), и исследовать на совместность получившуюся неопределенную систему. Эта процедура будет проиллюстрирована ниже на примере системы уравнений хроматографии. Заметим, что для уравнений хроматографии (и в некоторых других случаях) интегрирование соответствующей неопределенной системы также опирается на один из классических результатов теории тканей, а именно, на теорему Графа–Зауэра (см. Предисловие).

Трехкомпонентная система уравнений хроматографии в инвариантах Римана имеет следующий вид [Ц-2]:

$$\begin{aligned} R^1_t + R^1(R^1R^2R^3)R^1_x = 0,\\ R^2_t + R^2(R^1R^2R^3)R^2_x = 0,\\ R^3_t + R^3(R^1R^2R^3)R^3_x = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Эта система не обладает свойством слабой нелинейности, хотя и является полугамильтоновой. Докажем, следуя [Фе-4], что ее решения, несущие шестиугольную три-ткань из характеристик, существуют с произволом в 9 постоянных и параметризуются алгебраическими кривыми третьей степени. Несложные вычисления показывают, что условие $d\omega = 0$ для системы (4) приводит к дифференциальной связи

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ln(R^1R^2R^3) = 0,$$

которую нужно присоединить к уравнениям (4). Следовательно, произведение $R^1R^2R^3$ может быть записано в виде $R^1R^2R^3 = \varphi'(t)/f'(x)$, где $\varphi(t)$ и $f(x)$ — некоторые функции одного аргумента, которые будут найдены позже, а штрих означает дифференцирование по соответствующему аргументу. Подставляя в (4) выражение для $R^1R^2R^3$, имеем:

$$R^i_t/\varphi'(t) + R^iR^i_x/f'(x) = 0.$$

Перейдем к новым независимым переменным $T = \varphi(t)$, $X = f(x)$. В результате получим три независимых уравнения

$$R^i_T + R^iR^i_X = 0,$$

общее решение которых имеет вид

$$g^i(R^i) = X - R^iT, \tag{5}$$

где $g^i(R^i)$ — три произвольные функции одного аргумента. Следовательно, в переменных T, X характеристики $R^i = \mathrm{const}$ являются прямыми линиями. Поскольку нас интересуют решения с шестиугольной три-тканью из характеристик, мы можем воспользоваться теоремой Графа–Зауэра, согласно которой всякая прямолинейная шестиугольная три-ткань образована прямыми, принадлежащими алгебраической кривой третьего класса. Другими словами, существует многочлен $P_3(u, v)$ третьей степени от двух переменных, которому удовлетворяют коэффициенты прямых (5), образующих ткань:

$$P_3(R^i, g^i(R^i)) = 0.$$

Вспоминая, что $g^i(R^i) = X - R^iT$, получим, что R^i являются корнями уравнения третьей степени

$$P_3(R, X - RT) = 0.$$

Возвращаясь к старым координатам t, x, получим

$$P_3(R, f(x) - R\varphi(t)) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, решения системы (4) с шестиугольной три-тканью из характеристик являются корнями многочлена (6) третьей степени относительно R. Функции $\varphi(t)$ и $f(x)$ определяются из условия согласования $R^1R^2R^3 = \varphi'(t)/f'(x)$. В самом деле, по теореме Виета из (6) получаем выражение

$$R^1R^2R^3 = \frac{f^3 + af^2 + bf + c}{\varphi^3 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi + \gamma},$$

где постоянные a, b, c, α, β, γ выражаются через коэффициенты многочлена $P_3(u, v)$. Функции $\varphi(t)$ и $f(x)$ могут быть найдены отсюда после очевидного разделения переменных.

n-компонентная система уравнений хроматографии при $n > 3$ имеет вид

$$R^i_t + R^i\left(\prod_{k=1}^{n} R^k\right)R^i_x = 0.$$

Процедура, аналогичная только что описанной, позволяет построить ее точные решения, выделяемые дифференциальной связью

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \ln\left(\prod_{k=1}^{n} R^k\right) = 0.$$

Это условие также имеет вполне конкретный геометрический смысл. А именно, оно означает, что на соответствующих решениях n-ткань из характеристик имеет максимальный ранг $r = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ([Фе-4], см. также гл. 8).

§ 2. Интегрирование слабо нелинейных полугамильтоновых систем гидродинамического типа методами теории тканей

Задача изучения геометрии характеристик для систем гидродинамического типа при числе уравнений $n > 3$ представляется более интересной, чем при $n = 3$, поскольку при $n > 3$ у n-ткани из кривых на плоскости появляется новый нетривиальный топологический инвариант — ранг, максимальное значение которого не превосходит $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Для $n = 3$ понятие ранга не дает ничего нового, т. к. ткани ранга 1 — это в точности шестиугольные ткани; однако, уже с $n = 4$ использование ранга приводит к нетривиальным результатам. В частности, в [Фе-3] удалось явно проинтегрировать все слабо нелинейные полугамильтоновые системы при любом числе уравнений.

Напомним, что мы рассматриваем диагональные системы

$$R^i_t + \lambda^i(R)R^i_x = 0, \quad i = 1, ..., n,$$

собственные числа $\lambda^i(R)$ которых удовлетворяют следующим условиям:

1) $\partial_i\lambda^i = 0$ для любого i (слабая нелинейность);

2) $\partial_k\left(\frac{\partial_j\lambda^i}{\lambda^j - \lambda^i}\right) = \partial_j\left(\frac{\partial_k\lambda^i}{\lambda^k - \lambda^i}\right)$ для любой тройки $i \neq j \neq k \neq i$ (полугамильтоновость).

При $n = 2$ и λ^1, $\lambda^2 \neq \mathrm{const}$ всякая слабо нелинейная полугамильтоновая система приводится к виду

$$R^1_t + R^2R^1_x = 0, \quad R^2_t + R^1R^2_x = 0. \tag{7}$$

Подобные системы возникают в теории минимальных поверхностей трехмерного евклидова пространства, в газовой динамике (так называемый газ Чаплыгина) и т. д. Общее решение системы (7) записывается формулами

$$\begin{aligned} &\int^{R^1} \frac{\xi d\xi}{f_1(\xi)} + \int^{R^2} \frac{\xi d\xi}{f_2(\xi)} = x + \mathrm{const}, \\ &\int^{R^1} \frac{d\xi}{f_1(\xi)} + \int^{R^2} \frac{d\xi}{f_2(\xi)} = t + \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{8}$$

где функции $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ и константы в правых частях (8) являются произвольными. Выражая из этих формул R^1, R^2 как функции x, t, получим общее решение системы (7), что можно проверить непосредственным дифференцированием (8) по x и по t. При выборе

$$f_1(\xi) = f_2(\xi) = 2i\sqrt{\prod_{s=1}^{5}(\xi - E^s)}\,, \quad i^2 = -1, \quad E^s = \text{const},$$

задача отыскания величин R^1 и R^2 как функций от x и t превращается в классическую проблему обращения Якоби, возникающую, например, при построении конечнозонных решений *уравнения Кортевега–де Фриза* (КдФ). Функция $U(x,t)$, определяемая формулой

$$U(x,t) = \sum_{s=1}^{5} E^s - 2\big(R^1(x,t) + R^2(x,t)\big),$$

удовлетворяет нелинейному уравнению

$$4U_t + U_{xxx} - 6UU_x + 2\sum_s E^s U_x = 0,$$

которое с точностью до перенормировки совпадает с уравнением КдФ. Решения КдФ, получаемые таким образом, носят название «двузонных» (см., например, [Алб-1]).

Для построения n-зонных решений уравнения КдФ рассмотрим n-компонентное обобщение системы (7):

$$R^i_t + \left(\sum_{k=1}^{n} R^k - R^i\right) R^i_x = 0, \quad i = 1, ..., n. \tag{7$'$}$$

Несложно убедиться в том, что эта система является слабо нелинейной и полугамильтоновой. Ее общее решение дается формулами, аналогичными (8) (см. [Фе-3]):

$$\begin{aligned}
&\int^{R^1} \frac{\xi^{n-1} d\xi}{f_1(\xi)} + ... + \int^{R^n} \frac{\xi^{n-1} d\xi}{f_n(\xi)} = x + \text{const},\\
&\int^{R^1} \frac{\xi^{n-2} d\xi}{f_1(\xi)} + ... + \int^{R^n} \frac{\xi^{n-2} d\xi}{f_n(\xi)} = t + \text{const},\\
&\int^{R^1} \frac{\xi^{j} d\xi}{f_1(\xi)} + ... + \int^{R^n} \frac{\xi^{j} d\xi}{f_n(\xi)} = \text{const}, \quad j = n-3, ..., 0,
\end{aligned} \tag{9}$$

где функции $f_1(\xi), ..., f_n(\xi)$, а также константы в правых частях (9) являются произвольными. Выбирая

$$f_1(\xi) = ... = f_n(\xi) = 2i\sqrt{\prod_{s=1}^{2n+1}(\xi - E^s)}\,,$$

мы опять придем к проблеме обращения Якоби и решению уравнения КдФ:

$$U(x,t) = \sum_{s=1}^{2n+1} E^s - 2\sum_{k=1}^{n} R^k(x,t).$$

Это и есть так называемые n-зонные решения. Поскольку в теории КдФ переменные R^i имеют смысл нулей собственной функции ψ ассоциированного оператора Шредингера $\Big(-\dfrac{d^2}{dx^2} + U\Big)\psi = E\psi$, рассматриваемая слабо нелинейная система (7$'$) описывает эволюцию нулей ψ-функции для потенциала $U(x,t)$, эволюционирующего в силу уравнения КдФ.

Цель параграфа — получить формулы, аналогичные (9), для любой слабо нелинейной полугамильтоновой системы. Эти формулы всегда имеют следующую общую структуру:

$$\begin{gathered}
\int^{R^1} \frac{\varphi_1^1(\xi)d\xi}{f_1(\xi)} + ... + \int^{R^n} \frac{\varphi_1^n(\xi)d\xi}{f_n(\xi)} = x + \mathrm{const}, \\
\int^{R^1} \frac{\varphi_2^1(\xi)d\xi}{f_1(\xi)} + ... + \int^{R^n} \frac{\varphi_2^n(\xi)d\xi}{f_n(\xi)} = t + \mathrm{const}, \\
\int^{R^1} \frac{\varphi_j^1(\xi)d\xi}{f_1(\xi)} + ... + \int^{R^n} \frac{\varphi_j^n(\xi)d\xi}{f_n(\xi)} = \mathrm{const}, \quad j = 3, ..., n,
\end{gathered} \tag{10}$$

где функции $f_1(\xi), ..., f_n(\xi)$ и константы в правых частях (10) могут быть выбраны произвольно, в то время как функции $\varphi_j^i(\xi)$ определяются рассматриваемой системой и являются фиксированными. В рассмотренном выше примере мы имели $\varphi_j^i(\xi) = \xi^{n-j}$. Заметим, что ввиду произвольности функций $f_1(\xi), ..., f_n(\xi)$ всегда можно добиться того, чтобы для любого $i = 1, ..., n$ выполнялось условие $\varphi_n^i = 1$, в результате чего последняя строка (10) примет вид

$$\int^{R^1} \frac{d\xi}{f_1(\xi)} + ... + \int^{R^n} \frac{d\xi}{f_n(\xi)} = \mathrm{const}.$$

При такой нормировке оставшиеся $n(n-1)$ функции $\varphi_j^i(\xi)$ одного аргумента ($i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., (n-1)$) уже однозначно определяются рассматриваемой системой.

Полное разделение переменных, наблюдаемое в (10), объясняется некоторыми простыми свойствами ткани из характеристик, к изучению которых мы сейчас переходим. Для дальнейших целей n-ткань из характеристик $dx - \lambda^i dt = 0$ (или же $R^i = \mathrm{const}$) оказывается удобным дополнить до $(n+2)$-ткани, присоединив 2 однопараметрических семейства кривых $x = \mathrm{const}$, $t = \mathrm{const}$ — линии уровня независимых переменных. Вычислим ранг этой ткани, т. е. число линейно независимых абелевых уравнений вида

$$dA^1 + ... + dA^n + df(t) + dg(x) = 0, \tag{11}$$

где функции A^i постоянны вдоль характеристик i-го семейства, а $g(x)$ и $f(t)$ постоянны вдоль линий $t = \mathrm{const}$ и $x = \mathrm{const}$ соответственно. У слабо нелинейных полугамильтоновых систем имеется естественный класс функций A^i, постоянных вдоль характеристик, — так называемые обобщенные функции тока.

Определение 3. Пусть $B^i(R)(dx - \lambda^i dt)$ — интеграл рассматриваемой системы, который обращается в нуль вдоль характеристики i-го семейства (напомним, что интегралом называется 1-форма, замкнутая на любом решении системы). Тогда функция A^i, определяемая соотношением

$$dA^i = B^i(R)(dx - \lambda^i dt),$$

является постоянной вдоль характеристик i-го семейства и называется *обобщенной функцией тока*. Разумеется, A^i будет зависеть от выбранного решения.

Несложно показать, что интегралы $B^i(dx - \lambda^i dt)$, обращающиеся в нуль вдоль характеристик, существуют только у слабо нелинейных полугамильтоновых систем. Функции B^i являются при этом решениями переопределенной системы

$$dB^i = B^i \sum_{j \neq i} \frac{\partial_j \lambda^i}{\lambda^j - \lambda^i}\, dR^j + c^i dR^i \tag{12}$$

(c^i — неопределенные параметры), которая, как легко проверить, является совместной. Заметим, что вместе с $B^i(dx - \lambda^i dt)$ интегралом будет и любое выражение вида $\varphi^i(R^i)B^i(dx - \lambda^i dt)$, где $\varphi^i(R^i)$ — произвольная функция аргумента R^i.

Попробуем найти как можно больше абелевых соотношений (11), выбирая в качестве A^i обобщенные функции тока и считая $f(t)$ и $g(x)$ линейными: $f(t) = at$, $g(x) = bx$. Подставляя $dA^i = B^i(dx - \lambda^i dt)$ в (11), получим

$$B^1(dx - \lambda^1 dt) + ... + B^n(dx - \lambda^n dt) + adt + bdx = 0,$$

откуда $\sum B^i = -b$, $\sum B^i\lambda^i = a$. Дифференцируя эти соотношения с учетом (12), найдем явное выражение для коэффициентов c^i:

$$c^i = -\sum_{j\neq i} B^j \frac{\partial_i\lambda^j}{\lambda^i - \lambda^j}.$$

В результате мы пришли к замкнутой линейной системе

$$\begin{aligned} dA^i &= B^i(dx - \lambda^i dt), \quad i = 1, ..., n, \\ dB^i &= B^i \sum_{j\neq i} \frac{\partial_j\lambda^i}{\lambda^j - \lambda^i}\, dR^j - \Bigg(\sum_{j\neq i} B^j \frac{\partial_i\lambda^j}{\lambda^i - \lambda^j}\Bigg) dR^i. \end{aligned} \tag{13}$$

Несложная проверка показывает, что при условии слабой нелинейности и полугамильтоновости система (13) замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Следовательно, она определяет n линейно независимых наборов обобщенных функций тока, связанных соотношением $\sum\limits_i B^i = \text{const}$, $\sum\limits_i B^i\lambda^i = \text{const}$. Тем самым получено n линейно независимых абелевых соотношений вида (11), т. е. верна

Теорема ([Фе-3]). *Ранг $(n+2)$-ткани, образованной характеристиками и линиями $x = \text{const}$, $t = \text{const}$ на общем решении любой слабо нелинейной полугамильтоновой системы, равен n.*

Замечание. Строго говоря, приведенные выше рассуждения дают лишь оценку для ранга, поскольку мы могли бы получить дополнительные соотношения вида (11), отказавшись от выбора в качестве A^i обобщенных функций тока, а также от линейности величин $f(t)$ и $g(x)$. На самом деле этого не происходит, и на общем решении ранг в точности равен n, хотя и может «подскакивать» на отдельно взятых решениях.

Для интегрирования слабо нелинейных полугамильтоновых систем выберем базис (A^i_j, B^i_j), $j = 1, ..., n$, из n линейно независимых решений линейной системы (13), нормировав их таким образом, чтобы для первого решения выполнялись соотношения $\sum_i^n B^i_1 = 1$, $\sum_i^n B^i_1\lambda^i = 0$, т. е.

$$dA^1_1 + ... + dA^n_1 = dx; \tag{14$_1$}$$

для второго выполнялись соотношения $\sum_i^n B^i_2 = 0$, $\sum_i^n B^i_2\lambda^i = -1$, т. е.

$$dA^1_2 + ... + dA^n_2 = dt; \tag{14$_2$}$$

а на оставшихся $(n-2)$-х решениях выполнялись соотношения $\sum_i^n B^i_j = \sum_i^n B^i_j\lambda^i = 0$, $j = 3, ..., n$, т. е.

$$dA^1_j + ... + dA^n_j = 0. \tag{14$_3$}$$

Поскольку любые две обобщенные функции тока, отвечающие i-му семейству характеристик, отличаются множителем $\varphi^i(R^i)$, зависящим лишь от соответствующего инварианта Римана R^i, имеем:

$$dA^i_j = \varphi^i_j(R^i)dA^i_n, \quad j = 1, ..., n-1. \tag{15}$$

Подчеркнем, что функции $\varphi^i(R^i)$ однозначно определяются системой (13). Поскольку на решениях выполняются соотношения

$$dR^i \wedge (dx - \lambda^i dt) = 0, \quad dA^i_n \wedge (dx - \lambda^i dt) = 0,$$

то функция тока A^i_n зависит только от R^i, т. е. на любом решении dA^i_n можно представить в виде

$$dA^i_n = \frac{dR^i}{f_i(R^i)},$$

где $f_i(R^i)$ зависят от выбора решения. Соотношения (15) перепишутся в виде

$$dA^i_j = \frac{\varphi^i_j(R^i)dR^i}{f_i(R^i)}, \quad j = 1, ..., n-1,$$

после чего интегрирование (14) приводит к формулам (10) для общего решения, причем по построению $\varphi^i_n = 1$.

Пример. Для слабо нелинейной полугамильтоновой системы

$$R^i_t + \left(\sum_{k=1}^n R^k - R^i\right)R^i_x = 0, \quad i = 1, ..., n,$$

линейная система (13) имеет вид

$$dA^i = B^i(dx - \lambda^i dt), \quad \lambda^i = \sum_{k=1}^n R^k - R^i,$$

1. Решение (A^i_1, B^i_1) этой системы, удовлетворяющее условию $\sum\limits_i B^i_1 = 1$, $\sum\limits_i B^i_1\lambda^i = 0$, дает

$$dA^i_1 = \frac{(R^i)^{n-1}}{\prod_{k\neq i}(R^i - R^k)}(dx - \lambda^i dt).$$

2. Решение (A^i_2, B^i_2), удовлетворяющее условию $\sum\limits_i B^i_2 = 0$, $\sum\limits_i B^i_2\lambda^i = -1$, дает

$$dA^i_2 = \frac{(R^i)^{n-2}}{\prod_{k\neq i}(R^i - R^k)}(dx - \lambda^i dt).$$

3. Решения (A^i_j, B^i_j), удовлетворяющие условиям $\sum\limits_i B^i_j = 0$, $\sum\limits_i B^i_j\lambda^i = 0$, дают

$$dA^i_j = \frac{(R^i)^{n-j}}{\prod_{k\neq i}(R^i - R^k)}(dx - \lambda^i dt), \quad j = 3, ..., n.$$

Эти результаты основаны на тождествах

$$\sum_{i=1}^n \frac{(R^i)^{s-1}}{\prod_{k\neq i}(R^i - R^k)} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad s = 1, ..., n-1, \\ 1 & \text{при} \quad s = n, \\ \sum\limits_{i=1} R^k & \text{при} \quad s = n+1. \end{cases}$$

Легко проверить, что в данном случае

$$dA^i_j = (R^i)^{n-j}dA^i_n, \quad j = 1, ..., n-1,$$

т. е. $\varphi^i_j(R^i) = (R^i)^{n-j}$. Подстановка этих выражений в (10) дает общее решение рассматриваемой системы.

§ 3. О ранге ткани и инвариантах волновых систем

В этом параграфе мы следуем работе [БФ-3]. Начнем с простейших примеров.

Пример 1. Представим себе две одномерные волны с импульсами k_1, k_2 и законами дисперсии $\omega_1(k_1)$, $\omega_2(k_2)$, которые, взаимодействуя друг с другом, превращаются в две новые волны с импульсами k_3, k_4 и законами дисперсий $\omega_3(k_3)$, $\omega_4(k_4)$. Условия сохранения импульса и энергии записываются в виде

$$k_1 + k_2 = k_3 + k_4, \quad \omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) = \omega_3(k_3) + \omega_4(k_4), \tag{16}$$

и определяют в четырехмерном пространстве R^4 с координатами k_1, k_2, k_3, k_4 двумерную поверхность, называемую резонансным многообразием. Предположим, что на резонансном многообразии выполняется дополнительное соотношение

$$\varphi_1(k_1) + \varphi_2(k_2) = \varphi_3(k_3) + \varphi_4(k_4), \tag{17}$$

которое не представимо в виде линейной комбинации уравнений (16), т. е. $\varphi_i(k_i) \neq ak_i + b\omega_i(k_i)$, где a и b — постоянные. Соотношение (17) можно интерпретировать как дополнительный закон сохранения волновой системы, т. е. ее инвариант. Важность изучения инвариантов волновых систем неоднократно подчеркивается в [ЗШ-1], [ЗШ-2]. Согласно теории тканей наличие дополнительного соотношения (17) означает, что 4-ткань из кривых, определенная на резонансном многообразии (16) уравнениями $k_i = \mathrm{const}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, имеет ранг 3. Заметим, что поскольку максимально возможное значение ранга 4-ткани кривых на плоскости равно трем, у рассматриваемой волновой системы существует не более одного дополнительного инварианта. Таким образом, задача описания резонансных многообразий (16), допускающих дополнительный инвариант (17), — это задача описания 4-тканей кривых максимального ранга 3. Ее решение хорошо известно: всякая 4-ткань максимального ранга 3 является спрямляемой и образована прямыми, принадлежащими алгебраической кривой четвертого класса [Бл-1].

Пример 2. Рассмотрим две двумерные волны с импульсами k_1 и k_2 (k_1, k_2 — векторы из R^2) и законами дисперсии $\omega_1(k_1)$, $\omega_2(k_2)$, которые, взаимодействуя друг с другом, превращаются в одну волну с импульсом k и законом дисперсии $\omega(k)$:

$$k_1 + k_2 = k, \quad \omega_1(k_1) + \omega_2(k_2) = \omega(k). \tag{18}$$

Уравнения (18) определяют в шестимерном пространстве R^6 трехмерную поверхность M^3, называемую резонансным многообразием. Уравнения $k_1 = \mathrm{const}$, $k_2 = \mathrm{const}$, $k = \mathrm{const}$ определяет на резонансном многообразии M^3 двупараметрическое семейство кривых. Эти семейства образуют криволинейную три-ткань W. Ткани такого типа изучались в [БВ-1], [Бол-2] и [Нз-2]. Заметим, что ткань W автоматически имеет ранг 3, поскольку каждое из уравнений (18) представляет собой абелево уравнение, фигурирующее в определении ранга.

Как в примере 1, законом сохранения назовем дополнительное соотношение вида

$$\varphi_1(k_1) + \varphi_2(k_2) = \varphi(k), \tag{19}$$

которое тождественно выполняется на резонансном многообразии M^3, однако не представимо в виде линейной комбинации соотношений (18), $\varphi_i(k_i) \neq ak_i + b\omega_i(k_i)$. С геометрической точки зрения наличие дополнительного соотношения (19) означает, что ранг три-ткани W строго больше трех, причем число дополнительных соотношений (19) в точности равно рангу этой ткани.

Задача о ранге три-ткани кривых в пространстве подробно исследовалась в работах Бляшке и Вальберера [БВ-1], Назирова [Нз-2]. Полученное ими описание три-тканей максимального ранга позволяет дать полную классификацию резонансных многообразий (18), допускающих дополнительные инварианты (19), см. [БФ-3].

Для волновой системы общего вида имеется d r-мерных волн с импульсами $k_i \in R^r$, $1, \ldots, d$, и законами дисперсии $\omega_i(k_i)$. Резонансное многообразие задается уравнениями

$$k_1 + \ldots + k_d = 0, \quad \omega_1(k_1) + \ldots + \omega_d(k_d) = 0 \tag{20}$$

и определяет $(dr - r - 1)$-мерную поверхность в пространстве R^{dr} с координатами $k_1, \ldots, k_d$. Рассмотрим на резонансном многообразии d-ткань, слои i-го слоения которой задаются уравнениями $k_i = \mathrm{const}$. Эта ткань автоматически имеет ранг $r + 1$, так как все уравнения (20) являются абелевыми. Наличие дополнительного инварианта

$$\varphi_1(k_1) + \ldots + \varphi_d(k_d) = 0$$

означает, что ранг построенной ткани строго больше $r + 1$. Таким образом, в самой общей постановке задача описания волновых систем с дополнительными инвариантами сводится к описанию d-тканей из поверхностей коразмерности r на многообразии размерности $dr - r - 1$ и ранга, строго большего $r + 1$. Примеры 1 и 2 получаются соответственно при $d = 4$, $r = 1$ и $d = 3$, $r = 2$. Подчеркнем, что для других значений d и r и размерности многообразия ткани, равной $dr - r - 1$, задача о ранге вообще не исследовалась.

Конкретные примеры резонансных многообразий с дополнительными инвариантами, а также обсуждение ряда физических приложений имеются в [БФ-3].

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$A = (A_1, A_2, A_3)$ — автотопия три-ткани или квазигруппы
A^r — аффинное пространство размерности n
$\mathcal{A}_q$ — группа автотопий квазигруппы q
$\mathcal{A}_W$ — группа автотопий (или автоморфизмов) три-ткани W
AW — алгебраизуемая ткань
AW^2 — двумерная три-ткань над алгеброй A
AX^2 — двумерное многообразие над алгеброй A
$AG(r,n)$ — почти грассманова структура
$AGW(d,n,r)$ — почти грассманизуемая d-ткань
$\mathcal{A}_W(p)$ — группа изотропии точки p три-ткани W, т. е. группа автоморфизмов ткани W, оставляющих неподвижной точку p
$a = (a^i_{jk})$ — тензор кручения три-ткани
$\underset{\alpha\beta}{a}{}^i{}_{jk}$ — тензор кручения связности $\Gamma_{\alpha\beta}$, присоединенной к три-ткани
$\underset{uv}{a}{}^i{}_{jk}$ — тензор кручения ткани $W(n+1,n,r)$
α_ℓ, α_r — коммутаторы лупы
$b = (b^i_{jk\ell})$ — тензор кривизны три-ткани
$\underset{\alpha\beta}{b}{}^i{}_{jk\ell}$, $\overset{\star}{b}{}^i{}_{jk\ell}$ — тензоры кривизны связностей $\underset{\alpha\beta}{\Gamma}$, $\overset{\star}{\Gamma}$, присоединенных к три-ткани
$\underset{uv}{b}{}^i{}_{jk\ell}$ — тензор кривизны ткани $W(n+1,n,r)$
B_ℓ — левая фигура Бола, также класс левых тканей Бола
B_r — правая фигура Бола, также класс правых тканей Бола
B_m — средняя фигура Бола, также класс средних тканей Бола
β_ℓ, β_r — правый и левый ассоциаторы лупы
c^i_{jk} — структурный тензор группы (алгебры) Ли
$C(r,n)$ — конус Сегре
$\mathrm{Der}A$ — алгебра дифференцирований алгебры A
δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам
E — фигура, определяемая тождеством эластичности, также класс тканей, на которых замыкаются все фигуры E
e — единица лупы (группы)
$\underset{\alpha}{e}_i$ — касательные векторы к слою слоения λ_α три-ткани
ε^{ijk}, ε_{ijk} — дискриминантные тензоры
$\mathcal{F}_\alpha$ — слой три- или d-ткани, принадлежащий слоению λ_α
G — группа Ли
$\mathbf{GL}(n)$ — полная линейная группа
$G(r,n)$ — грассманово многообразие r-мерных подпространств проективного пространства P^n
GW — грассманова ткань
G_W — G-структура, присоединенная к три-ткани W
Γ — связность Черна три-ткани
$\underset{\alpha\beta}{\Gamma}$, $\underset{\alpha\beta}{\widetilde{\Gamma}}$, $\overset{\star}{\Gamma}$ — инвариантные аффинные связности, присоединенные к три-ткани
$\gamma(W)$ — пучок аффинных связностей, присоединенных к три-ткани W
H — шестиугольная фигура, также класс шестиугольных три-тканей
$H^{2\rho}$ — трансверсальный 2ρ-вектор три-ткани
$I = (I_1, I_2, I_3)$ — изотопия три-тканей, квазигрупп
J_ℓ, J_r, J_m — левое, правое и среднее ядра касательной W-алгебры три-ткани
ℓ_p, $\ell(a,b)$ — координатная лупа три-ткани, связанная с точкой $p = (a,b)$

$\ell(a,b)$ — LP-изотоп квазигруппы
$LW(d,n,r)$ — линеаризуемая d-ткань
L_a — левый сдвиг в лупе (группе)
λ_α — слоение ткани
$\underset{s}{\Lambda}$, $\underset{p,q}{\Lambda}$ — члены тейлоровского разложения произведения xy в лупе
$\Lambda = (\lambda^i_j)$ — основной аффиннор 4-ткани
M — тождество Муфанг, также класс три-тканей Муфанг
N_ℓ, N_r, N_m — левое, правое и среднее ядра лупы
∇, $\overset{\alpha\beta}{\widetilde{\nabla}}$, $\overset{\alpha\beta}{\nabla}$, $\overset{\star}{\nabla}$ — операторы ковариантного дифференцирования относительно инвариантных связностей, присоединенных к три-ткани
∇_δ — оператор ковариантного дифференцирования по вторичным параметрам
$\mathbf{O}(n)$ — ортогональная группа
P^n — проективное пространство размерности n
π^i_j — инвариантные формы полной линейной группы
$\pi(d,n)$ — граница Кастельнуово
$\pi(d,n,r)$ — точная верхняя граница для ранга ткани $W(d,n,r)$
$q = (\cdot, X_\alpha)$ — трехбазисная квазигруппа
$q(\cdot)$ — квазигруппа
Q — лупа, квазигруппа, группоид
$\omega = (\omega^i_j)$ — формы связности Черна
$\underset{\alpha}{\omega} = (\underset{\alpha}{\omega}{}^i)$ — базисные формы слоения λ_α три- или d-ткани
$\underset{\alpha\beta}{\omega}{}^i{}_j$ — формы связности $\Gamma_{\alpha\beta}$
R — фигура Рейдемейстера, также класс групповых три-тканей (тканей R)
$\mathcal{R}(X)$ — расслоение реперов многообразия X
$\mathcal{R}(W)$ — расслоение адаптированных реперов три-ткани W
R_a — правый сдвиг в лупе (группе)
$S(r,n)$ — многообразие Сегре $P^r \times P^n \to P^{rn+r+n}$
$\mathbf{SL}(n)$ — специальная линейная группа
T_e — касательное пространство к лупе в единице e
T — фигура Томсена, также класс параллелизуемых (регулярных) три-тканей
$T_p(X)$ — касательное пространство к многообразию X в точке p
V^2, $V^{2\rho}$ — трансверсальные поверхности три-ткани
$W(d,n,r)$ — d-ткань коразмерности r на многообразии размерности nr
$W = (X, \lambda_\alpha)$ — три-ткань W, образованная на многообразии X слоениями λ_α
W_0 — три-ткань, образованная тремя семействами параллельных плоскостей
$\varphi_{\alpha\beta}$ — отображение, определяемое слоями слоения λ_γ, $\gamma \neq \alpha, \beta$ на три-ткани
X — дифференцируемое многообразие
X_α — а) база слоения λ_α; б) гиперповерхности, определяющие грассманову ткань
(X, B, π) — расслоенное пространство с базой B и проекцией $\pi : X \to B$
X_G — G-структура на многообразии X
$\wedge$ — символ внешнего умножения
$[,]$ — коммутатор
$(,,)$ — ассоциатор
$<,,>$ — тернарная операция
$/$ и $\backslash$ — правая и левая обратные операции в квазигруппе
$[\alpha, \beta, \gamma]$ — три-подткань d-ткани

Список литературы

Аз-1. Азизова (Селиванова), Н.Х.: *О тканях из кривых и поверхностей.* Ученые зап. МГПИ **374** (1970), N 1, Вопросы дифференциальной геометрии, 7–17 (РЖМат, 1971, 8А509; MR **58** #30834.)

А-1. Акивис, М.А.: *О канонических разложениях уравнений локальной аналитической квазигруппы.* ДАН СССР **188** (1969), N 5, 967–970 (РЖМат, 1970, 3А468).

А-2. Акивис, М.А.: *О три-тканях многомерных поверхностей.* Тр. геом. сем. (ВИНИТИ АН СССР) **2** (1969), 7–31 (РЖМат, 1970, 4А647).

А-3. Акивис, М.А.: *О локальной дифференцируемой квазигруппе и три-ткани, которые определяются тройкой гиперповерхностей.* Сиб. мат. ж. **14** (1973), N 3, 467–474 (РЖМат, 1973, 9А669).

А-4. Акивис, М.А.: *Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей.* Исследования по теории квазигрупп и луп, Кишинев, «Штиинца» 1973, 3–12 (РЖМат, 1973, 12А635).

А-5. Акивис, М.А.: *Об изоклинных три-тканях и их интерпретации в линейчатом пространстве проективной связности.* Сиб. мат. ж. **15** (1974), N 1, 3–15 (РЖМат, 1974, 6А797).

А-6. Акивис, М.А.: *О почти комплексной структуре, присоединенной к три-ткани многомерных поверхностей.* Тр. сем. каф. геом., Казанский ун-т, Казань, Вып. 8 (1975), 11–15 (РЖМат, 1976, 2А831).

А-7. Акивис, М.А.: *О замкнутых G-структурах на дифференцируемом многообразии.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **7** (1975), 69–79 (РЖМат, 1976, 9А623).

А-8. Акивис, М.А.: *О локальных алгебрах многомерной три-ткани.* Сиб. мат. ж. **17** (1976), N 1, 5–11 (РЖМат, 1976, 7А888).

А-9. Акивис, М.А.: *Об интегрировании структурных уравнений три-ткани Муфанг минимальной размерности.* Дифференциальная геометрия, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1977, 3–9 (РЖМат, 1977, 12А775).

А-10. Акивис, М.А.: *Многомерная дифференциальная геометрия.* Калинин, Калининский гос. ун-т, 1977, 99 с. (РЖМат, 1984, 7А630).

А-11. Акивис, М.А.: *О геодезических лупах и локальных тройных системах пространства аффинной связности.* Сиб. мат. ж. **19** (1978), N 2, 243–253 (РЖМат, 1978, 9А684).

А-12. Акивис, М.А.: *Ткани и почти грассмановы структуры.* ДАН СССР **252** (1980), N 2, 267–270 (РЖМат, 1980, 9А653).

А-13. Акивис, М.А.: *Об одном классе три-тканей, определяемых тройкой гиперповерхностей.* Сиб. мат. ж. **22** (1981), N 1, 3–7 (РЖМат, 1981, 6А684).

А-14. Акивис, М.А.: *Об одном геометрическом условии изоклинности многомерной три-ткани.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, 3–7 (РЖМат, 1982, 1А890).

А-15. Акивис, М.А.: *Дифференциально-геометрические структуры, связанные с три-тканью.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, 3–6 (РЖМат, 1982, 12А733).

А-16. Акивис, М.А.: *Ткани и почти грассмановы структуры.* Сиб. мат. ж. **23** (1982), N 6, 6–15 (РЖМат, 1983, 4А804).

А 17. Акивис, М.А.: *Webs and almost Grassmannian structures*, Differential Geometry (Budapest, 1979), 23–40, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, **31**, North-Holland, Amsterdam, 1982. (MR 84m:53024; Zbl 516:53012.)

А 18. Акивис, М.А.: *О локальном условии алгебраизуемости системы подмногообразий вещественного проективного пространства.* ДАН СССР **272** (1983), N 6, 1289–1291 (РЖМат, 1984, 3А602; MR 85c:53018; Zbl 547:53006).

А 19. Акивис, М.А.: *Дифференциальная геометрия тканей.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **15** (1983), 187–213 (РЖМат, 1984, 7А630).

А 20. Акивис, М.А.: *О вполне изотропных подмногообразиях четырехмерной псевдоконформной структуры.* Изв. вузов. Матем. **1983**, N 1 (247), 3–11 (РЖМат, 1983, 8А727; MR 84i:53016; Zbl 512:53056 & 526:53054).

А-21. Акивис, М.А.: *Об условии алгебраизуемости тройки кривых в трехмерном проективном пространстве.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 129–136 (РЖМат, 1987, 7А701).

А-22. Акивис, М.А.: *О некоторых соотношениях между тензорами кривизны и кручения многомерной три-ткани.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 23–32 (РЖМат, 1988, 6А794).

А-23. Акивис, М.А.: *Three-webs and closed G-structures.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1991, 4–22 (РЖМат, 1993, 3А641).

А-24. Акивис, М.А.: *Drei-Gewebe und geschlossene G-Strukturen.* Proc. of the 3rd Congress of Geometry (Thessaloniki, 1991), Aristotle University, Thessaloniki, 1992, 35–40. (MR 93f:53016; Zbl 774:53009.)

А-25. Акивис, М.А.: *Bol webs and non-Euclidean geometries.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1994, 16–26.

А-26. Акивис, М.А.: *Три-ткани Бола и неевклидовы геометрии.* Памяти Лобачевского. Сборник трудов, Т. III, часть 2, Казань, 1995, 12–27.

А-27. Акивис, М.А.: *On the real theory of four-dimensional conformal structures.* J. Geom. Phys. 21 (1996), no. 1, 55–80 (MR1421255 (97k:53016); Zbl 871:53011.)

А-28. Акивис, М.А.: *Selected Papers* Edited by V. V. Goldberg, Heldermann Verlag, 2008, xxxviii+596 pp. (Zbl 1137:01025.)

АА-1. Акивис, М.А.; Апресян, Ю.А.: *О три-тканях* $W(n+1, n+1, n)$ *на многообразии размерности* $2n+1$. Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1990, 4–10 (РЖМат, 1991,1А806).

АГ-1. Акивис, М.А.; Герасименко, С.А.: *О некоторых фигурах замыкания на многообразиях с симметрией.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, 7–11 (РЖМат, 1982,12А734).

АГ-2. Акивис, М.А. ; Герасименко, С.А.: *Многомерные ткани Боля.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **18** (1986), 73–104 (РЖМат, 1987,5А730).

АГо-1. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей.* ДАН СССР **203** (1972), N 2, 263–266 (РЖМат, 1972, 7А577).

АГо-2. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей.* Тр. геометр. сем. (ВИНИТИ АН СССР) **4** (1973), 179–204 (РЖМат, 1974, 5А372).

АГо-3. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *О четыре-ткани и локальной дифференцируемой тернарной квазигруппе, определяемой четверкой поверхностей коразмерности два.* Изв. вузов. Матем. **1974**, N 5, 12–24 (РЖМат, 1975, 1А790).

АГо-4. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Projective differential geometry of submanifolds.* North-Holland, Amsterdam, 1993, xii+362 pp. (MR 94i:53001; Zbl 865:53013.)

АГо-5. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Conformal differential geometry and its generalizations*, Wiley-Interscience (John Wiley and Sons), 1996, xiv+383 pp. (MR 98a:53023; Zbl 863:53002.)

АГо-6. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *On geometry of hypersurfaces of a pseudoconformal space of Lorentzian signature.* J. Geom. Phys. 26 (1998), no. 1–2, 112Ц-126. (MR1626056 (99e:53095); Zbl 971:53012.)

АГо-7. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Conformal and Grassmann structures.* Differential Geom. Appl. 8 (1998), no. 2, 177–203. (MR1626434 (99f:53012); Zbl 924:53025.)

АГо-8. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *On four-dimensional three-webs with integrable transversal distributions.* Rend. Sem. Mat. Messina, Ser. II, 5 (20) (1998), 33–52 (2000). (MR1746041 (2001h:53021); Zbl 971:53009.) 1999.

АГо-9. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Semiintegrable almost Grassmann structures.* Differ. Geom. Appl. 10 (1999), no. 3, 257–294. (MR1692442 (2000f:53028); Zbl 921:53006.)

АГо-10. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Algebraic aspects of web geometry.* Comment. Math. Univ. Carolin. 41 (2000), no. 2, 205–236. (MR1780866 (2001i:53026); Zbl 1042:53007.)

АГо-11. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Differential geometry of webs.* Chapter 1 in Handbook of Differential Geometry, pp. 1–152, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2000. (MR1736852 (2001f:53036); Zbl 968:53001.)

АГо-12. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Solution of Belousov's problem.* Discussiones Mathematicae: General Algebra and Applications 51 (2001), no. 1, 193–203. (RZhMat 2002 #11 A182; MR1868620 (2002h:20098); Zbl 1002:20047.)

АГо-13. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Dually degenerate varieties and the generalization of a theorem of Griffths-Harris.* Acta Appl. Math. 86 (2005), no. 3, 249–265. (MR2136366 (2006e:14067); Zbl 1081:53501.)

АГо-14. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Local algebras of a differentiable quasigroup.* Bull. Amer. Math. Soc. 43 (2006), no. 2, 1–20. (MR2216110 (2007m:20110) MR2223012 (2008a:20100); Zbl 1100:53021.) 2007.

АГо-15. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Дифференциальная геометрия тканей типа Веронезе.* Изв. вузов. Матем. **2007**, N 10, 3–26.

АГо-16. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.: *Дифференциальная геометрия тканей типа Лагранжа.* Изв. вузов. Матем. **2007**, N 12, 17–29.

АГоЛ-1. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.; Лычагин, В.В.: *Linearizability of d-webs, $d \geqslant 4$, on two-dimensional manifolds.* Selecta Math. 10 (2004), no. 4, 431–451. (РЖМат 2006 #2 A513; MR2134451 (2006j:53019); Zbl 1073:53021.)

ААГо-1. Акивис, М.А.; Арутюнян, С.А.; Гольдберг, В.В.; Лумисте, Ю.Г.; Мирзоян, В. А.; Розенфельд, Б.А.; Шелехов, А.М.: *To the memory of a friend.* Современная матенматика и ее приложения, 32 (2005), 3–6 (Russian).

АГоК-1. Акивис, М.А.; Гольдберг, В.В.; Киккава, М.; Кириченко, В.Ф.; Смит (Smith, J. D. H.): *Alexander M. Shelekhov.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2002, 7–10 (РЖМат 2004 #12 A15; MR2021702; Zbl 1081:01505.)

АДХ-1. Акивис, М.А.; Деген (Degen, W.L.F.); Хофман (Hofmann, K. H.); Киккава, М.; Шелехов, А.М.; Смит (Smith, J. D. H.): *Vladislav Victorovich Goldberg.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2000, 6–13 (MR1839716; Zbl 985:01529.)

АШ-1. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани и ассоциатора связанной с ней локальной квазигруппы.* Сиб. мат. ж. **12** (1971), N 5, 953–960 (РЖМат, 1972, 1А1088).

АДХ-1. Акивис, М.А.; Деген (Degen, W.L.F.); Хофман (Hofmann, K.H.); Шелехов, А.М.; Смит (Smith, J.D.H.): *Vladislav V. Goldberg.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State University, 1995, 5–19 (РЖМат, 1997, 3А9, 3А10).

АШ-2. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *О локальных дифференцируемых квазигруппах и связностях, присоединенных к три-ткани.* Сиб. мат. ж. **12** (1971), N 6, 1181–1191 (РЖМат, 1972, 3А671).

АШ-3. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *О структуре многообразия изоклинных поверхностей изоклиной три-ткани.* Сб. статей по дифф. геом., Калинин, Калининский гос. унив., 1974, 11–20 (РЖМат, 1975, 8А672).

АШ-4. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *Локальные аналитические квазигруппы и лупы.* Калинин, Калининский гос. унив., 1980, 31 с.

АШ-5. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *Геометрические и абстрактные три-ткани.* Псков, Гос. пед. ин-т, 1980, 31с.

АШ-6. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *Основы теории тканей.* Калинин, Калининский гос. унив., 1981, 88 с.

АШ-7. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *О подтканях многомерных три-тканей.* Сиб. мат. ж., 1985, Деп. в ВИНИТИ 9.10 1985, N 7130–В85 ДЕП (РЖМат, 1986, 2А770 Деп.)

АШ-8. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *Введение в теорию три-тканей.* Калинин, Калининский гос. унив., 1985, 85 с.

АШ-9. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *О канонических координатах в локальной аналитической лупе.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. унив., 1986, 120–124 (РЖМат, 1986, 8А208).

АШ-10. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *On subwebs of 3-webs and subalgebras of local W_k-algebras.* Acta Math. Hungar. **52** (1988), N3–4, 265–271 (РЖМат, 1989, 12А723; MR 90d:53028; Zbl 674:53017).

АШ-11. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *Об альтернаторах четвертого порядка локальной аналитической лупы и три-тканях многомерных поверхностей.* Изв. вузов. Матем. **1989**, N 4, 12–16 (РЖМат, 1989, 9А546).

АШ-12. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992, xvii+358 pp. (MR1196908 (93k:53021); Zbl 771:53001.)

АШ-13. Акивис, М.А.; Шелехов, А.М.: *The contravariant theory of three-webs.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1993, 20–32 (РЖМат, 1993, 11А576).

Ал-1. Алберт (Albert, A.A.): *Quasigroups I.* Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943), no. 3, 507–519. (MR **5**, p. 229; Zbl. **63**, p. A6.)

Ал-2. Алберт (Albert, A.A.): *Quasigroups II.* Trans. Amer. Math. Soc. **55** (1944), no. 3, 401–409. (MR **6**, p. 42; Zbl. **63**, p. A6.)

Алб-1. Альбер (Alber, S.I.) *Investigation of equations of Korteweg-de Vries by the method of recurrence relations.* J. London Math. Soc. **19** (1979), no. 2, 467–480. (MR 81b:35084; Zbl. 413.53064.)

Ан-1. Амбарова, Н.В.: *Об одном классе плоскостных три-тканей в P_{2r}.* Матер. 12 конф. молод. ученых УДН, М., 1989, ч. 2. Ун-т Дружбы народов, М., 1989, 27–30. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 12.07.89, N 4616–В89 (РЖМат, 1989, 11А716 ДЕП).

Ан-1. Андикян, М.А.: *О трансверсальном распределении на многомерной три-ткани.* Изв. вузов. Матем. **1981**, N 4, 69–73 (РЖМат, 1981, 10А560).

Ан-2. Андикян, М.А.: *Три-ткани в касательном расслоении, определяемом многомерной поверхностью аффинного пространства.* Укр. геом. сб. **24** (1981), 3–12 (РЖМат, 1981, 8А734).

Ан-3. Андикян, М.А.: *О три-тканях в касательном расслоении дифференцируемого многообразия.* Уч. зап. Ереван. ун-та. Естествен. науки, 1981, N 1, 3–12 (РЖМат, 1981, 11А737).

Ан-4. Андикян, М.А.: *О три-тканях, симметрично присоединенных к нормализованной поверхности аффинного пространства.* ДАН АрмССР **72** (1981), N 4, 231–237 (РЖМат, 1982, 2А783).

Ан-5. Андикян, М.А.: *Однородные три-ткани в касательном расслоении и финслеровы пространства.* Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. унив, 1985, 8–19 (РЖМат, 1985, 10А714; MR 87i:53098; Zbl 576:53009).

Ан-6. Андикян, М.А.: *Аффинные связности, индуцированные три-тканью в касательном расслоении.* Математика, N 3, Ереванский унив., Ереван, 1985, 138–148. (MR 88d:53011; Zbl 673:53012.)

Ан-7. Андикян, М.А.: *О тензорах кручения и кривизны три-ткани на касательном расслоении.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. унив, 1988, 119–124 (РЖМат, 1988, 6А799).

Ап-1. Апресян, Ю.А.: *Три-ткани из кривых и гиперповерхностей и семейства диффеоморфизмов одномерных многообразий.* Дифференциальная геометрия, Калинин, Калининский гос. унив, 1977, 10–12 (РЖМат, 1977, 12А779).

Ап-2. Апресян, Ю.А.: *О многомерных три-тканях, образованных двумя семействами гиперповерхностей и одним семейством кривых.* Изв. вузов. Матем. **1977**, N 4, 132–135 (РЖМат, 1978, 1А644).

Ап-3. Апресян, Ю.А.: *Трехпараметрическое семейство диффеоморфизмов кривой на кривую, содержащее два линейных комплекса однопараметрических подсемейств специального типа.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. унив, 1984, 8–15 (РЖМат, 1985, 1А846; MR 88c:53001; Zbl 558:53009).

Ап-4. Апресян, Ю.А.: *Об одном классе три-тканей на четырехмерном многообразии и соответствующем дифференциальном уравнении третьего порядка.* Изв. вузов. Матем. **1985**, N 1, 3–8 (РЖМат, 1985, 6А584; MR 86f:53013; Zbl 569:53008.)

Ар-1. Аракелян, Г.С.: *Некоторые классы многомерных три-тканей, у которых поверхности одного из семейств принадлежат поверхностям другого семейства.* Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. (1981), N 2, 3–7 (РЖМат, 1981, 7А675).

Ар-2. Аракелян, Г.С.: *Подткани многомерной три-ткани максимального ранга.* Изв. вузов. Матем. **1988**, N 6, 29–46 (РЖМат, 1989, 11А717). (Zbl 729:53018.)

Ац-1. Ацел (Aczel, J.): *Quasigroups, nets and nomograms.* Adv. in Math. **1** (1965), no. 3, 383–450 (РЖМат, 1966, 10А425; MR **33** #1395; Zbl. **135**, p. 36).

Ац-2. Ацел (Aczel, J.): *On the Thomsen condition for webs.* J. Geom. **17** (1981), no. 2, 155–160 (РЖМат, 1982, 9А553; MR 83e:20081; Zbl. 482.51004).

Бай-1. Баймуратов, Х.А.: *О четыре-ткани, порожденной асимптотическими распределениями на трехмерной поверхности в P^5.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур, вып. 10 (1979), Калининград, Калиниградский гос. ун-т, 10–15 (РЖМат, 1980, 1А818; MR 84b:53009; Zbl 449:53010).

Бала-1. Балабанова, Р.С.: *Конформно-равнорътни мрежи и тритъкани.* Науч. тр. Пловдив. ин-та, 1972 **10**, N 2, 29–39 (РЖМат, 1973, 3А692).

Бала-2. Балабанова, Р.С.: *Към геометрията на шестоъгълните тритъкани.* Науч. тр. Пловдив. ун-та, мат., 1973, **11**, N 2, 29–35 (РЖМат, 1974, 2А642).

Бала-3. Балабанова, Р.С.: *Шестоъгълни три-тъкани от снопове окръжности, два от които са спрегнати.* Науч. тр. Пловдив. ун-та, мат., 1973, **11** , N 4, 128–141 (РЖМат, 1975, 11А736).

Бала-4. Балабанова, Р.С.: *Шестиугольные три-ткани на поверхности.* Изв. вузов. Матем. **1973**, N 9, 3–8 (РЖМат, 1974, 3А536).

Бала-5. Балабанова, Р.С.: *Равнопутные вращаемые три-ткани в римановой геометрии.* Изв. вузов. Матем. **1974**, N 4, 14–16 (РЖМат, 1974, 12А448).

Бала-6. Балабанова, Р.С.: *Метрически-чебышевские три-ткани в двумерной римановой геометрии.* Докл. Болг. АН, **27** (1974), N 6, 751–753 (РЖМат, 1974, 12А449).

Бала-7. Балабанова, Р.С.: *Полосатые три-ткани в двумерной римановой геометрии.* Изв. вузов. Матем. **1975**, N 1, 3–8 (РЖМат, 1975, 9А522).

Бд-1. Баландина, Г.А.: *Some note on elastic webs.* Webs and Quasigroups, 1996-1997, Tver, Tver State Univ., 94–95 (РЖМат, 1998, 11А502).

БдШ-1. Баландина, Г.А.; Шелехов, А.М.: *On general theory of elastic webs.* Webs and Quasigroups, 1995, Tver, Tver State Univ., 62–74 (РЖМат, 1997, 3А341).

Бал-1. Балк, А.М.: *A new invariant for Rossby wave systems.* Phys. Lett. A **155** (1991), 20–24. (MR 92f:35134; Zbl 874:35089.)

Бал-2. Балк, А.М.: *New conservation laws for the interaction of nonlinear waves.* SIAM Review, **39** (1997) 68–94. (MR 97m:35164; Zbl 874:35089.)

БФ-1. Балк, А.М., Ферапонтов, Е.В.: *Invariants of 4-wave interactions.* Phys. D, **65** (1993), 274–288 (MR 94k:76082; Zbl 772:73022.)

БФ-2. Балк, А.М., Ферапонтов, Е.В.: *Wave systems with infinite number of invariants.* Phys. D, **70** (1994), 100–114 (MR 94m:35298; Zbl 809:35077.)

БФ-3. Балк, А.М., Ферапонтов, Е.В.: *Invariants of wave systems and web geometry.* In: Nonlinear waves and weak turbulence (ed. V. E. Zakharov). Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, vol 182, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 1–30.

Ба-1. Барлотти (Barlotti, A.): *Certain topics in the theory of* 3*-webs.* Conference on Binary Systems and their Applications (Taormina, 1978), pp. 3–6, Tecnoprint, Bologna, 1981 (MR 83m:20006; Zbl 559:53006.)

Ба-2. Барлотти (Barlotti, A.): *Geometry of quasigroups.* Глава XII в книге *Quasigroups and loops: theory and applications*, Heldermann-Verlag, Berlin, 1990, см. [ЧПС-1].

БаШ-1. Барлотти, Штрамбах (Barlotti, A.; Strambach, K.): *The geometry of binary systems.* Adv. Math., **49** (1983), no. 1, 1–105 (РЖМат, 1984, 3А325; MR 84k:51005; Zbl. 518.20064).

Бар-1. Бартошевич, М.А.: Плоско-параллельные ткани гиперповерхностей, ДАН СССР **124** (1959), N 5, 970–972.

Барч-1. Барч (Bartsch, H.): *Übertragung der Achtflachengewebeeigenschaften auf Hyperflächengeweben des n-dimensionalen Raumes.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **17** (1951), 1–21 (РЖМат, 1953, 100383; MR **13**, 277; Zbl **43**, p. 369).

Барч-2. Барч (Bartsch, H.): *Hyperflächengewebe des n-dimensionalen Raumes.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **32** (1951), 249–269 (РЖМат, 1954, 3066; MR **13**, 775; Zbl **44**, p. 362).

Барч-3. Барч (Bartsch, H.): *Über eine Klasse von Hyperflächengeweben.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **34** (1953), 349–364 (MR **14**, p. 1119; Zbl **51**, p. 387.)

Бат-1. Баталин, И.А.: *Quasigroup construction and first class constraints.* J. Math. Phys 22 (9), Sept. 1981, 1837–1849.

Бау-1. Бауман (Baumann, J.): *Eine gewebetheoretische Methode in der Theorie der holomorphen Abbildungen: Starrheit und Nichtäquivalenz von analytischen Polyedergebieten.* Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, 2. Serie, Heft 24, 1982, 152 pp. (Zbl 545:32001.)

Б-1. Белоусов, В.Д.: *Сердцевина лупы Бола.* Исследования по общей алгебре. Кишинев, 1965, 53–65.

Б-2. Белоусов, В.Д.: *Уравновешенные тождества в квазигруппах.* Мат. сб. **70** (1966), N 1, 55–97 (РЖМат, 1966, 12А257).

Б-3. Белоусов, В.Д.: *Основы теории квазигрупп и луп.* М., Наука, 1967, 223 с. (РЖМат, 1967, 11А212К).

Б-4. Белоусов, В.Д.: *Алгебраические сети и квазигруппы.* Кишинев, Штиинца, 1971, 165 с. (РЖМат, 1972, 8А311К).

Б-5. Белоусов, В.Д.: *n-арные квазигруппы.* Кишинев, Штиинца, 1972, 227 с. (РЖМат, 1973, 6А277К).

Б-6. Белоусов, В.Д.: *Конфигурации в алгебраических сетях.* Кишинев, Штиинца, 1979, 142 с. (РЖМат, 1979, 8А196К).

Б-7. Белоусов, В.Д.: *Автотопии и антиавтотопии в квазигруппах.* Матем. исслед., Кишинев, 1988, N 102, 3–26 (РЖМат, 1988, 7А232).

БР-1. Белоусов, В.Д.; Рыжков В.В.: *Об одном способе получения фигур замыкания.* Матем. исслед. (Кишинев) **1** (1966), вып.2, 140–150 (РЖМат, 1967, 7А227).

БР-2. Белоусов, В.Д.; Рыжков В.В.: *Геометрия тканей.* Алгебра. Геометрия. Топология (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **10** (1972), 159–188 (РЖМат, 1973, 2А602).

Бс-1. Белявская, Г.В.: *Теория квазигрупп: ядра, центр, коммутант.* Bul. Acad. Stiinte Rep. Moldova. Mat. **1996**, N 2, 47–71 (РЖМат, 1998, 11А133).

Бе-1. Бескин, Л.Н.: *Псевдокэлеровы системы.* Науч. докл. высшей школы (1958), N 5, 21–28.

БШ-1. Биллиг, В.А.; Шелехов, А.М.: *О классификации тождеств с одной переменной в гладкой локальной лупе.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 24–32 (РЖМат, 1987, 7А722).

БШ-2. Биллиг, В.А.; Шелехов, А.М.: *Классификация тождеств длины 12 порядка 4 с одной переменной в локальной аналитической лупе.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1990, 10–18 (РЖМат, 1991, 9А244).

Бн-1. Бланк, Я.П.: *К проблеме Н.Г. Чеботарева об обобщенных поверхностях переноса.* Харьков. гос. ун-т. Записки матем. об-ва (4) **23** (1952), 103–112.

Бл-1. Бляшке (Blaschke, W.): *Введение в геометрию тканей.* М., Физматгиз, 1959, 144 с. (РЖМат, 1961, 6А475К). Перевод с немецкого (Blaschke, W.: *Einführung in die Geometrie der Waben.* Birkhäuser-Verlag, Basel-Stuttgart, 1955, 108 pp. MR **17**, p. 780; Zbl. **68**, p. 365.)

Бл-2. Бляшке (Blaschke, W.): *Thomsens Sechseckgewebe. Zueinander diagonale Netze.* Math. Z. **28** (1928), 150–157.

Бл-3. Бляшке (Blaschke, W.): *Zwei Kurvenscharen und eine Flächenschar.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1931), 48–63. (Zbl **3**, p. 325.)

Бл-4. Бляшке (Blaschke, W.): *Abzählungen für Kurvengewebe und Flächengewebe.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1933), 239–312. (Zbl. **7**, p. 78.)

ББ-1. Бляшке, Бол (Blaschke, W.; Bol, G.): *Geometrie der Gewebe.* Springer-Verlag, Berlin, 1938, viii+339 pp. (Zbl. **20**, p. 67.)

БлБ-1. Бляшке, Бомпиани (Blaschke, W.; Bompiani, E.): *Ragionamenti enumerative sui tessuti musti.* Rend. Accad. Naz. Lincei Sci. Fis. Mat. Natur. (6) **19** (1934), 469–473 (Zbl **9**, p. 228.)

БВ-1. Бляшке, Вальберер (Blaschke, W.; Walberer, P.): *Die Kurven* 3*-Gewebe höchsten Ranges im* R^3. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **10** (1934), 180–200 (Zbl. **9**, p. 378.)

Бв-1. Бовиль (Beauville, A.): *Géométrie des tissus (d'apres S.S. Chern and P.A. Griffiths).* Séminaire Bourbaki (1978/79), Exp. no. 531, 103-119. Lecture Notes in Math. **770**, Springer, Berlin, 1980 (РЖМат, 1980, 11А738; MR 82a:53017; Zbl. 436.57088).

Бг-1. Богданов С.: *About Riemannian metric adjoined to three-web.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State University, 1992, 28–41.

Бг-2. Богданов С.: *Риманова метрика на многомерной три-ткани и связанные с ней дифференциально-геометрические структуры.* Функциональный анализ и приложения **27** (1993), N 1, 65–67 (РЖМат, 1993, 9А494; MR 94g:53011; Zbl 804:53019).

Бг-3. Богданов С.: *Многомерные три-ткани с почти эрмитовой структурой.* Докл. ежегодн. науч. конф. физ.-мат. фак. Самар. гос. пед. ин-та (Самара, апр. 1996). Самара, 1996, 4–6.

Бол-1. Бол (Bol, G.): *Über zwei Kurvenscharen and eine Flächenschar*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1932), no. 1, 93–94. (Zbl **3**, p. 327.)

Бол-2. Бол (Bol, G.): *Über* 3*-Gewebe in vierdimensionalen Raum.* Math. Ann. **110** (1935), 431–463 (Zbl. **10**, p. 222.)

Бол-3. Бол (Bol, G.): *Über ein bemerkenswertes* 5*-Gewebe in der Ebene.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1936), 387–393 (Zbl. **14**, pp. 230–231.)

Бол-4. Бол (Bol, G.): *Gewebe und Gruppen.* Math. Ann. 114 (1937), 414–431 (Zbl. **16**, p. 226.)

Бо-1. Болодурин, В.С.: *К инвариантной теории точечных соответствий трех проективных пространств.* Изв. вузов. Матем. **1982**, N 5, 9–15 (РЖМат, 1982, 9А586).

Бо-2. Болодурин, В.С.: *Некоторые дифференциально-геометрические свойства точечных соответствий четырех прямых.* Изв. вузов. Матем. **1983**, N 1 (248), 27–35 (РЖМат, 1983, 8А720; MR 85c:53031; Zbl 523:53011 535:53014).

Бо-3. Болодурин, В.С.: *О точечных соответствиях между проективными прямыми.* Изв. вузов. Матем. **1984**, N 12 (271), 17–23 (РЖМат, 1985, 5А307; MR 86h:53012; Zbl 564:53005 & 579:53009).

Бо-4. Болодурин, В.С.: *К теории точечных соответствий* $n+1$ *проективных пространств.* Изв. вузов. Матем. **1985**, N 5 (276), 15–22 (РЖМат, 1985, 10А676; MR 87g:53021; Zbl 592:53008).

Бо-5. Болодурин, В.С.: *Pointwize correspondences between projective spaces and* $(n+1)$*-webs.* Webs and Quasigroups, 1994, Tver, Tver State Univ., 67–71 (РЖМат, 1995, 6А488).

Бом-1. Бомпиани (Bompiani, E.): *Sui tessuti musti di superficie e di curve.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **10** (1934), 317–324 (Zbl **9**, p. 228.)

Бц-1. Боцу, В.П.: *Прямое доказательство обобщенной теоремы Графа-Зауэра.* Сборник статей по дифференциальной геометрии, Калинин, Калиниский гос. ун-т, 1974, 36-51 (РЖМат, 1975, 8А673).

Бц-2. Боцу, В.П.: *Об одном классе четырехмерных шестиугольных три-тканей.* Укр. геом. сб. **18** 1975, 27-36 (РЖМат, 1976, 4А732).

Бц-3. Боцу, В.П.: *Об изоклинности четырехмерных шестиугольных три-тканей.* Моск. гидромелиоративн. ин-т, 1984. Деп. в ВИНИТИ АН СССР, 14.08.1984, N 5824-84ДЕП (РЖМат, 1984, 12А755Деп.)

Бц-4. Боцу, В.П.: *Об одном свойстве четырехмерных шестиугольных три-тканей.* Моск. гидромелиоративный ин-т, Москва, 1986, Деп. в ВИНИТИ АН СССР 6.01.1986, N 117–В86.

Бр-1. Брак (Bruck, R. H.): *Loops with transitive automorphism groups.* Pac. J. Math. **1** (1951), no. 1, 481–483 (MR **13** #620; Zbl. **44**, p. 11.)

Бр-2. Брак (Bruck, R. H.): *What is a loop ?* In Studies in Modern Algebra, A. A. Albert (ed.) (MAA Studies in Mathematics, vol. 2), Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963, 59–99 (MR **26** #3750; Zbl **199**, p. 52.)

Бр-3. Брак (Bruck, R. H.): *A survey of binary systems.* Springer-Verlag, Berlin, 1971, 3rd printing, viii+185 pp. (РЖМат, 1971, 7А282К; MR **20** #76; Zbl. **81**, p. 17 & **141**, p. 14.)

БрП-1. Брак, Пейдж (Bruck, R. H.; Paige, L.J.): *Loops whose inner mappings are automorphisms.* Ann. Math. (2) **63** (1956), 308–323 (РЖМат, 1958, 1028; MR **17**, p. 943; 3Zbl. **74**, p. 17.)

Бу-1. Бурдуян (Burdujan, I.): *On binary triple algebras.* Analele stiintifice ale universitatii «AL.I.CUZA» IASI, vol. XXXIX, s.I.a, Matematica, 1993, f.1, 49–56 (РЖМат, 1996, 2А105).

Бэ-1. Буэту (Bouetou, T.B.): *Classification of solvable Lie triples systems of dimension 3.* M. SC. Thesis, Moscow, Moscow Friendship of Nations University, 1992.

Бэ-2. Буэту (Bouetou, T.B.): *On Bol algebras.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1995, 75–83.

БэМ-1. Буэту (Bouetou, T.B.); Михеев, П.О.: *On isotopy of Bol algebras.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1994, 47–49.

БэМ-2. Буэту (Bouetou, T.B.); Михеев, П.О.: *Some examples of Bol loops.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1995, 84.

Бч-1. Бычек, В.М.: *О координатных три-тканях на подмногообразиях обобщенного пространства Аппеля.* Моск. гос. пед. ин-т. М., 1980. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 13.10.1980, N 4335-80 ДЕП. (РЖМат, 1981, 1А713 Деп.)

Ва-1. Ванчурова (Vanzurova, A.): *On three-web manifolds.* Report of the Czech Meeting on Incidence Structures 1993, Palacký Univ., Olomouc, 1993, 56–66 (Zbl 794:53021.)

Ва-2. Ванчурова (Vanzurova, A.): *On* $(3, 2, n)$*-webs.* Acta Sci. Math. (Szeged), **59**, No. 3–4 (1994), 657–677 (MR 96d:53015; Zbl 828:53017.)

Ва-3. Ванчурова (Vanzurova, A.): *Parallelisability conditions for three-web manifolds.* Arch. Math. **31**, No. 1 (1995), Brno, 74–84. (MR 96i:53022; Zbl 835:53019.)

Ва-4. Ванчурова (Vanzurova, A.): *Special connections on smooth* 3*-web manifolds.* Proceedings of the 15th Winter School «Geometry and Physics» (Srní, 1995), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **1996**, no. 43, 217–228 (MR 98c:53014.)

Ва-5. Ванчурова (Vanzurova, A.): *On torsion of a 3-web.* Mathem. Bohemica, **120**(1995), N 4, 387–392 (MR 97c:53020; Zbl 851:53006.)

Ва-6. Ванчурова (Vanzurova, A.): *Projectors of a 3-web.* Differential Geom. and Appl. (Proc. Conf., Aug. 28–Sept. 1, 1995, Brno), Masaryk Univ., Brno 1996, 329-335 (MR 97e:53021; Zbl 858:53017.)

Ва-7. Ванчурова (Vanzurova, A.): *Connections for non-holonomic* 3*-webs.* Proceedings of the 16th Winter School «Geometry and Physics», (Srní, 1996), Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **1997**, no. 46, 169–176 (MR 98h:53027.)

Ва-8. Ванчурова (Vanzurova, A.): *Tensor approach to multidimensional webs.* Math. Bohem. **123** (1998), no. 3, 225–242.

В-1. Васильев, А.М.: *Теория дифференциально-геометрических структур.* М., МГУ, 1987, 192 с. (РЖМат, 1988, 2А764К).

Ва-1. Васильева, М.В.: *Группы Ли преобразований.* М., Моск. гос. пед. ин-т, 1969, 175 с.

Вр-1. Верба (Индрупская), И.Е.: *Три-ткани из кривых, удовлетворяющих одному уравнению Пфаффа.* Геометрия однородных пространств, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1976, 82–88 (РЖМат, 1976, 4А727).

Вр-2. Верба (Индрупская), И.Е.: *Неголономные три-ткани.* Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1978, 18–25 (РЖМат, 1979, 4А745).

Ве-1. Веселяева, Т.Ю.: *Об одной три-ткани на проективной плоскости* R_nP_2 *над алгеброй* R_n *матриц.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, 16–20 (РЖМат, 1986, 8А793).

Ве-2. Веселяева, Т.Ю.: *О некоторых три-тканях на проективных плоскостях над ассоциативными алгебрами.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 66–74 (РЖМат, 1988, 6А796).

Ве-2. Веселяева, Т.Ю.: *О некоторой три-ткани на проективной плоскости над алгеброй терниона.* Геометрия погруженных многообразий, Моск. гос. пед. ин-т, М., 1989, 3–10 (РЖМат, 1992, 7А705; MR 93i:53018; Zbl 776:53011).

Вч-1. Вечтомов, В.Е.: *О фигурах замыкания для одного класса универсальных тождеств.* Матем. исследования **10** (1975), вып. 2(36), 36–63 (РЖМат, 1976, 1А265).

Вч-2. Вечтомов, В.Е.: *К вопросу об универсальных приводимых тождествах.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, 30–37 (РЖМат, 1982, 1А265).

ВЮ-1. Виноградов, А.М.; Юмагужин, В.А.: *Дифференциальные инварианты тканей на двумерных многообразиях.* Матем. заметки **48** (1990), N 1, 26–37 (РЖМат, 1990, 12A716; MR 91i:53035; Zbl 714:53019).

Во-1. Восканян, В.К.: *О конформной структуре, присоединенной к криволинейной* $(n+1)$*-ткани.* Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, 33–38 (РЖМат, 1985, 10A715).

Во-2. Восканян, В.К.: *Криволинейные* $(n+1)$*-ткани на многообразии* M^n. Математика, N 3, Ереван, Ереванский ун-т, 1985, 163–175 (MR 88i:53048; Zbl 673:53011.)

Во-3. Восканян, В.К.: *О криволинейной* $(n+1)$*-ткани на гиперповерхности проективного пространства* P^{n+1}. Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, 21–28 (РЖМат, 1986, 8A794).

Во-4. Восканян, В.К.: *Об аффинных связностях и геодезических лупах на многообразии, несущем* $(n+1)$*-ткань из кривых* $W(n+1,n,1^*)$. Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 58–66 (РЖМат, 1988, 6A795).

Во-4. Восканян, В.К.: *Curvilinear* $(n+1)$*-webs on n-dimensional manifolds.* Diff. Geom. and Appl.Proc. Conf. Dubrovnic, Yune 26–Yuly 3, 1988. Novi Sad, 1989, 401–408 (РЖМат, 1990, 4A825).

Ву-1. Вуд (Wood, J.A.): *An algebraization theorem for local hypersurfaces in projective space.* Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, 1982, 87 pp.

Ву-2. Вуд (Wood, J.A.): *A simple criterion for local hypersurfaces to be algebraic.* Duke Math. J. **51** (1984), no. 1, 235–237 (MR 85d:14069; Zbl. 584.14021.)

Г-1. Галкин, В.М.: *Квазигруппы.* Алгебра. Геометрия. Топология (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **26** (1988), 3–44 (РЖМат, 1989, 3A168; MR 89k:20103; Zbl 675:20057 & 697:20050).

Гв-1. Гвоздович, Н.В.: *О три-тканях максимальной подвижности.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Калининград, Калининградский гос. ун-т, 1981, N 12, 13-17 (РЖМат, 1981, 11A736).

Гв-2. Гвоздович, Н.В.: *Инфинитезимальные автоморфизмы три-тканей Боля и Муфанг.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, 83–91 (РЖМат, 1982, 1A933).

Гв-3. Гвоздович, Н.В.: *Об инфинитезимальных автоморфизмах многомерных три-тканей.* Изв. вузов. Матем. **1982** N 5, 73–75 (РЖМат, 1982, 9A599).

Гв-4. Гвоздович, Н.В.: *Некоторые вопросы общей теории инфинитезимальных автоморфизмов многомерных три-тканей.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, 49–54 (РЖМат, 1985, 10A716).

ГЗ-1. Гельфанд, И.М.; Захаревич, И.С.: *Webs, Veronese surfaces and bihamiltonian systems.* J. Funct. Anal. **99** (1991), no. 1, 150–178 (РЖМат, 1992, 4A594; MR 93d:58070; Zbl 739:58021).

Ге-1. Герасименко, С.А.: *О некоторых соотношениях для тензора кривизны многомерной* $(n+1)$*-ткани.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1984, 52–56 (РЖМат, 1985, 1A840; MR 858c:53011; Zbl 558:53015).

Ге-2. Герасименко, С.А.: *Вычисление компонент тензора кривизны* $(n+1)$*-ткани.* VI Прибалт. геом. конф., тезисы докл., Таллин, 1984, 34.

Ге-3. Герасименко, С.А.: *Трансверсально-геодезические* $(n+1)$*-ткани.* Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, 148–154 (РЖМат, 1985, 10A720; MR 83e:53024; Zbl 572:53020).

Ге-4. Герасименко, С.А.: *Многомерные* $(n+1)$*-ткани Боля.* Моск. гос. пед. ин-т, 1985. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 4.10.1985, N 7082-В85 (РЖМат, 1986, 1A865 Деп).

Гис-1. Гис (Ghys, E.): *Flots transversalement affine et tissus feuilletés.* Supplément Bull. Soc. Math. France, Mémoire 46, **119** (1991), 123–150 (РЖМат, 1992, 11A360; MR 92i:57026; Zbl 761:57016).

Гг-1. Глаголев, Н.А.: *Курс номографии.* М., Высшая школа, 1961, 268 с.

Гл-1. Головко, И.А.: *Условия замыкания в квазигруппах.* Бул. Акад. Штиинца РССМолд., Изв. Ан. Молд. ССР. Сер. физ.-техн. и матем. наук **3** (1971), 17–21 (РЖМат, 1972, 5A247).

Го-1. Гольдберг, В.В.: *О* $(n+1)$*-тканях многомерных поверхностей.* ДАН СССР **210** (1973), N 4, 756–759 (РЖМат, 1973, 10A606).

Го-2. Гольдберг, В.В.: *О* $(n+1)$*-тканях многомерных поверхностей.* Изв. Мат. ин-т. Бълг. АН. **15** (1974), 405–424 (РЖМат, 1975, 5A707).

Го-3. Гольдберг, В.В.: *Изоклинные* $(n+1)$*-ткани многомерных поверхностей.* ДАН СССР **218** (1974), N 5, 1005–1008 (РЖМат, 1975, 2A721).

Го-4. Гольдберг, В.В.: *Трансверсально-геодезические, шестиугольные и групповые три-ткани, образованные поверхностями разных размерностей.* Сборник статей по дифференциальной геометрии, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1974, 52–69 (РЖМат, 1975, 8A674).

Го-5. Гольдберг, В.В.: *Об инвариантной характеристике некоторых условий замыкания в тернарных квазигруппах.* Сиб. мат. ж. **16** (1975), N 1, 29–43 (РЖМат, 1975, 7А343).

Го-6. Гольдберг, В.В.: *О локальных тернарных квазигруппах, связанных с 4-тканью многомерных поверхностей.* Сиб. мат. ж. **16** (1975), N 2, 247–263 (РЖМат, 1975, 10А551).

Го-7. Гольдберг, В.В.: *О $(n+1)$-ткани, определяемой $n+1$ поверхностями коразмерности $n-1$.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **7**, (1975), 173–195 (РЖМат, 1976, 9А637).

Го-8. Гольдберг, В.В.: *О почти грассмановом многообразии, связанном с $(n+1)$-тканью многомерных поверхностей.* Изв. вузов. Матем. **1975**, N 8, 29–35 (РЖМат, 1976, 4А734).

Го-9. Гольдберг, В.В.: *О диагональной четыре-ткани, образованной четырьмя связками многомерных плоскостей проективного пространства.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **7**)1975), 197–213 (РЖМат, 1976, 9А638).

Го-10. Гольдберг, В.В.: *Об одном свойстве тканей с нулевой кривизной.* Изв. вузов. Матем. **1975**, N 9, 10–13 (РЖМат, 1976, 6А660).

Го-11. Гольдберг, В.В.: *О приводимых, групповых и $(2n+2)$-эдричных $(n+1)$-тканях многомерных поверхностей.* Сиб. мат. ж. **17** (1976), N 1, 44–57 (РЖМат, 1976, 7А889).

Го-12. Гольдберг, В.В.: *К теории 4-тканей многомерных поверхностей на дифференцируемом многообразии X_{2r}.* Изв. вузов. Матем. **1977**, N 11, 118–121 (РЖМат, 1978, 7А885).

Го-13. Гольдберг, В.В.: *К теории 4-тканей многомерных поверхностей на дифференцируемом многообразии X_{2r}.* Сердика **6** (1980), N 2, 105–119 (РЖМат, 1981, 5А654).

Го-14. Гольдберг, В.В.: *Multidimensional four-webs on which the Desargues and triangle figures are closed.* Geom. Dedicata **12** (1982), no. 3, 267–285 (РЖМат, 1982, 11А614; MR 83i:53031; Zbl. 488.53009).

Го-15. Гольдберг, В.В.: *A classification of six-dimensional group four-webs of multidimensional surfaces.* Tensor (N.S.) **36** (1982), no. 1, 1–8 (РЖМат, 1984, 9А686; MR 87b:53024; Zbl. 478.53009).

Го-16. Гольдберг, В.В.: *The solutions of the Grassmannization and algebraization problems for $(n+1)$-webs of codimension r on a differentiable manifold of dimension nr.* Tensor (N.S.) **36** (1982), no. 1, 9–21 (РЖМат, 1984, 9А685; MR 87a:53027; Zbl. 479.53014).

Го-17. Гольдберг, В.В.: *Grassmann and algebraic four-webs in a projective space.* Tensor (N.S.) **38** (1982), 179–197 (РЖМат, 1984, 10А615; MR 87e:53024; Zbl. 513.53009).

Го-18. Гольдберг, В.В.: *Tissus de codimension r et de r-rang maximum.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **297** (1983), no. 6, 339–342 (РЖМат, 1984, 7А631; MR 85f:53020; Zbl. 539.53012).

Го-19. Гольдберг, В.В.: *An inequality for the 1-rank of a scalar web $SW(d,2,r)$ and scalar webs of maximum 1-rank.* Geom. Dedicata **17** (1984), no. 2, 109–129 (РЖМат, 1985, 8А798; MR 86f:53014; Zbl. 554.53014).

Го-20. Гольдберг, В.В.: *4-tissus isoclines exceptionnels de codimension deux et de 2-rang maximal.* C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), no. 11, 593–596 (РЖМат, 1986, 3А889; MR 87b:53025; Zbl. 579. 53015).

Го-21. Гольдберг, В.В.: *Isoclinic webs $W(4,2,2)$ of maximum 2-rank.* Differential Geometry (Peniscola, 1985), 168–183. Lecture Notes in Math. **1209**, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1986 (РЖМат, 1987, 8А647; MR 88h:53021; Zbl. 607.53008).

Го-22. Гольдберг, В.В.: *Nonisoclinic 2-codimensional 4-webs of maximum 2-rank.* Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), no. 4, 701–708 (РЖМат, 1988, 5А755; MR 88i:53037; Zbl. 628.53018).

Го-23. Гольдберг, В.В.: *Theory of Multicodimensional $(n+1)$-Webs.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1988, xxii+466 pp. (MR 90h:53021; Zbl. 668:53001.)

Го-24. Гольдберг, В.В.: *On a linearizability condition for a three-web on a two-dimensional manifold.* Differential Geometry, (Peniscola, 1988), 223–239. Lecture Notes in Math. **1410**, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1989 (MR 91a:53032; Zbl. 689.53008.)

Го-25. Гольдберг, В.В.: *On the Chern-Griffiths formulas for an upper bound for the rank of a web.* Differential Geometry and Its Applications (Brno, 1989), 54–57, World Scientific Publishing, Teaneck, NJ, 1990.

Го-26. Гольдберг, В.В.: *Local differentiable quasigroups and webs.* Глава X в книге *Quasigroups and loops: theory and applications*, 263–311. Heldermann-Verlag, Berlin, 1990, см. [ЧПС-1].

Го-27. Гольдберг, В.В.: *Rank problems for webs $W(d,2,r)$.* Differential Geometry and Its Applications (Eger, 1989), 317–357, Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai 56, North- Holland Publ. Co., Amsterdam-New York, 1992 (MR1211665 (94c:53029); Zbl 789:53008).

Го-28. Гольдберг, В.В.: *Web geometry and related fields* 23.8 – 29.8.1992. Tagungsbericht 38/1992, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 1992, 1–11.

Го-29. Гольдберг, В.В.: *Maximum 2-rank webs $AGW(6,3,2)$.* Differential Geometry and Its Applications, **2** (1992), no. 2, 133–165 (MR 94i:53005; Zbl 735:53011.)

Го-30. Гольдберг, В.В.: *On $(n+1)$-subwebs of an $(n+1)$-web and local algebras associated with them.* Acta Math. Hungar. **62** (1993), no. 1–2, 57–79 (MR 94k:53024; Zbl 735:53010 796:53013.)

Го-31. Гольдберг, В.В.: *Rank problems for webs.* Differential Geometry, Proceedings of the Symposium in Honour of Professor Su Buchin (Shanghai, China, Sept. 17–23, 1991). World Scientific Publishing Co., Singapore, 1993, 59–78 (MR 96h:53019; Zbl 785:53016).

Го-32. Гольдберг, В.В.: *Curvilinear 4-webs with equal curvature forms of its 3-subwebs.* Webs and Quasigroups, 1993, Tver, Tver State Univ., 9–19 (РЖМат, 1993, 11A575).

Го-33. Гольдберг, В.В.: *Special classes of curvilinear 4-webs with equal curvature forms of their 3-subwebs.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1996–1997, 24–39 (РЖМат, 1998, 11A498).

Го-34. Гольдберг, В.В.: *Gerrit Bol* (1906–1989) *and his contribution to web geometry.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1994, 4–15 (MR1413332 (97g:01029); Zbl 896:53014 1995).

Го-35. Гольдберг, В.В.: *A classification and examples of four-dimensional isoclinic webs.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1998–1999, 32–66 (MR1754040 (2001g:53025); Zbl 928:53007).

Го-36. Гольдберг, В.В.: *Multidimensional $(n+1)$-webs with reduct reducible subwebs* Rend. Sem. Mat. Messina, Ser. II 21 (1999), no. 6, 27–32 (2001) (MR1852019 (2002g:53017); Zbl 1013:53006. 12).

Го-37. Гольдберг, В.В.: *Goursat's $(n+1)$-webs.* Rend. Sem. Mat. Messina, Ser. II 21 (1999), no. 6, 53–65 (2001) (MR1852021 (2002i:53021); Zbl 1013:53007).

Го-38. Гольдберг , В.В.: *A classification and examples of four-dimensional nonisoclinic webs.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2000, 24–62 (MR1839718 (2002i:53020); Zbl 1007:53008).

Го-39. Гольдберг, В.В.: *Four-webs in the plane and their linearizability.* Acta Appl. Math. 80 (2004), no. 1, 35–55 (MR2034574 (2005g:53023); Zbl 1066:53041).

Го-40. Гольдберг, В.В.: *Maximum rank webs are not necessarily almost Grassmannizable.* Hokkaido Math. J. 33 (2004), no. 3, 569–583 (MR2104829 (2006c:53011); Zbl 1073:53022).

Го-41. Гольдберг, В.В.: *On the existence of paratactical three-webs.* Изв. вузов. Матем. **2008**, N 4, 22–27.

ГоЛ-1. Гольдберг, В.В.; Лычагин, В.В.: *On linearization of planar three-webs and Blaschke's conjecture.* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I 341 (2005), no. 3, 169–173 (MR2158839 (2006i:53015); Zbl 1102:53051).

ГоЛ-2. Гольдберг, В.В.; Лычагин, В.В.: *On the Blaschke conjecture for 3-webs.* J. Geom. Anal. 16 (2006), no. 1, 69–115 (MR2211333 (2007b:53026); Zbl 1104:53011).

ГоЛ-3. Гольдберг , В.В.; Лычагин , В.В.: *Абелевы уравнения и проблема ранга для плоских тканей.* Изв. Вузов. Матем. **2007**, N 10, 40–76 (MR2381928 (2008k:53029)).

ГоЛ-4. Гольдберг , В.В.; Лычагин (Goldberg, V.V.; Lychagin, V. V.): *Geodesic webs on a two-dimensional manifold and Euler equations.* Acta Appl. Math. 109 (2010), т. 1, 5–17.

ГоЛ-5. Гольдберг, В.В.; Лычагин, В.В. : *On rank problems for planar webs and projective structures.* In: Differential Equations: Geometry, Symmetries and Integrability. Proceedings of the Fifth Abel Symposium. Tromso, Norway. June 17–22, p. 75–107.

ГоЛ-6. Гольдберг, В.В.; Лычагин , В.В.: *Hyperplanar webs and Euler equations.* Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, т. 6, 2, 2009, 276–287.

ГоЛ-7. Гольдберг, В.В.; Лычагин , В.В.: *Геодезические ткани гиперповерхностей.* Доклады РАН, т. 425 (2009), 6, 737–740.

ГоР-1. Гольдберг, В.В.; Роска (Rosca, R.): *Geometry of exceptional webs $EW(4,2,2)$ of maximum 2-rank.* Note Mat. **VIII** (1988), no. 1, 141–153. (Zbl. 707.53017.)

ГоШ-1. Гольдберг, В.В.; Шелехов, А.М.: *On Grassmanizable Group 3-Webs.* Acta Appl. Math. (2008) 101: 53–57.

Гор-1. Горбацевич В. В., Онищик А. Л. *Группы Ли преобразований.* Современные проблемы математики. Фундаментальные направления (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР) **20** (1988), 103–240.

Гр-1. Гриффитс (Griffiths, P.A.): *Variations on a theorem of Abel.* Invent. Math. **35** (1976), 321–390 (РЖМат, 1976, 6A319; MR **55** #8036; Zbl. 339.14003).

Гр-2. Гриффитс (Griffiths, P.A.): *On Abel's differential equations.* Algebraic Geometry, J.J. Sylvester Sympos., Johns Hopkins Univ., Baltimore, Md., 1976, 26–51. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Md, 1977 (MR **58** #655.)

ГР-1. Гудаир, Робинсон (Goodaire, E. G.; Robinson, D.A.): *A class of loops which are isomorphic to all loop isotopes.* Canad. J. Math. **34** (1982), no. 3, 662–672 (РЖМат, 1983, 2A177; MR 83k:20079; Zbl 467:20052 488:20056).

Да-1. Дамиано (Damiano, D.B.): *Webs, abelian equations, and characteristic classes.* Ph.D. Thesis, Brown University, 1980, 98 pp.

Да-2. Дамиано (Damiano, D.B.): *Webs and characteristic forms on Grassmann manifolds.* Amer. J. Math. **105** (1983), 1325–1345 (РЖМат, 1984, 7A632; MR 85g:53014; Zbl. 528.53022).

Д-1. Драгунов, В.К.: *О координатной три-ткани на поверхности в пространстве кубической метрики.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, 86–93 (РЖМат, 1982, 12А736) (MR 84a:53014; Zbl. 499.53015.)

Д-2. Драгунов, В.К.: *О семействе кубических сфер, соприкасающихся с кубической поверхностью в пространстве кубической метрики K^3.* Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, 133–139 (РЖМат, 1985, 10А670; MR 87j:53016; Zbl 572:53015).

Д-3. Драгунов, В.К.: *О существовании координатной три-ткани Дарбу на поверхности в пространстве K^3.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, 29–36 (РЖМат, 1986, 8А752; MR 88i:53036; Zbl 617:53027).

Дю-1. Дюфур (Dufour, J. P.): *Triplets de fonctions et stabilité des enveloppes.* C. r. Acad. sci. Paris, Sér. I **293** (1981), no. 10, 509–512 (РЖМат, 1982, 7А670; MR 83j:58019; Zbl 486:58005).

Дю-2. Дюфур (Dufour, J. P.): *Introduction aux tissus.* Semin. Gaston Darboux Geom. Topologie Differ. 1990–1991, 1992, 55–76. (MR 93j:53019; Zbl 769:53005.)

ДНФ-1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.: *Современная геометрия. Методы и приложения.* т. 1 (с. 336); т. 2 (с. 296); т. 3 (с. 288), Эдиториал УРСС, Москва, 2001.

ДД-1. Дюфур, Джейн (Dufour, J.P.; Jean, P.): *Rigidity of webs and families of hypersurfaces.* Singularities and Dynamical Systems (Iráklion, 1983), North-Holland Math. Stud., 103, North-Holland, Amsterdam/New York, 1985, 271–283 (РЖМат, 1986, 1А749; MR 87b:53023; Zbl. 583.57015).

Е-1. Евтушик, Л.Е.; Лумисте, Ю.Г.; Остиану, Н.М.; Широков, А.П.: *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **9** (1979), 5–246 (РЖМат, 1980, 1А800К).

Ж-1. Жогова, Т.Б.: *О фокальной три-ткани двупараметрического семейства двумерных плоскостей в P_5.* Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1978, 40–46 (РЖМат, 1979, 4А722; MR 82a:53010; Zbl 444:53009.)

Ж-2. Жогова, Т.Б.: *Об одном классе двупараметрических семейств двумерных плоскостей в P_5 с шестиугольной фокальной тканью.* Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1979, 44–50 (РЖМат, 1980, 9А650; MR 82f:53026; Zbl 484:53004).

Ж-3. Жогова, Т.Б.: *К вопросу о проективном изгибании двупараметрических семейств двумерных плоскостей в P^5.* Изв. вузов. Матем., 1979. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 23.07.1979, N 2761-79 ДЕП (РЖМат, 1979, 10А485 Деп).

Ж-4. Жогова, Т.Б.: *О квазигруппе, порождаемой одним классом двупараметрических семейств двумерных плоскостей в P_5.* Изв. вузов. Матем. (1980), N 2, 63–66 (РЖМат, 1980, 6А749; MR 81f:53009; Zbl 449:53038).

Ж-5. Жогова, Т.Б.: *О проективном изгибании двупараметрических семейств двумерных плоскостей в P^5.* Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1980, 33–37 (РЖМат, 1981, 10А540; MR 83k:53013; Zbl 543:53007).

ЗШ-1. Захаров, В.Е.; Шульман, Е.И.: *Degenerative dispersion laws, motion invariants and kinetic equations.* Phys. D **1** (1980), 192–202 (MR 81j:35017).

ЗШ-2. Захаров, В.Е.; Шульман, Е.И.: *On additional motion invariants of classical hamiltonian wave systems.* Phys. D **29** (1988), 283–320 (MR 89k:58137; Zbl. 651.35080).

ЗБШ-1. Захаров, В.Е.; Балк, А.М.; Шульман, Е.И.: *Conservation and scattering in nonlinear wave systems.* В книге: *Important Developments in Soliton Theory*, Eds A. S. Fokas and V. E. Zakharov, (Springer-Verlag, 1993), pp. 375–404 (MR 95h:35227; Zbl 832:35134.)

Зл-1. Златанов, Г: *Геометрия сетей и тканей в пространстве аффинной связности.* Докл. Болг. АН **41** (1988), N 9, 31–34 (РЖМат, 1989, 7А567).

Зл-2. Златанов, Г: *К вопросу об одном векторе, связанном с три-тканью.* Funct. et approxim. 1988, N 16, 149–157 (РЖМат, 1989, 2А708).

Зл-3. Златанов (Zlatanov, G.): *On the geometry of the $(2n+1)$-webs in $2n$-dimensional affinely connected spaces A_{2n}.* J. Geom., **39** (1990) N 1–2, 192–200 (РЖМат, 1992, 5А551).

ЗБ-1. Златанов, Г.; Бизова, Г.С.: *О геометрии сетей и четырех-тканей в пространстве A_3.* Сердика Бълг. мат. спис. **16** (1990) N 2, 126–134 (РЖМат, 1991, 1А787).

И-1. Иванов, А.Д.: *Об интерпретации четырехмерных тканей Боля в трехмерном проективном пространстве.* Геометрия однородных пространств, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1973, 42–57 (РЖМат, 1973, 11А594).

И-2. Иванов, А.Д.: *Конечные уравнения четырехмерных тканей Боля.* Сборник статей по дифференциальной геометрии, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1974, 70–78 (РЖМат, 1975, 8А675).

И-3. Иванов, А.Д.: *О четырехмерных тканях Боля эллиптического и гиперболического типов.* Изв. вузов. Матем. **1975**, N 9, 25–34 (РЖМат, 1976, 6А659).

И-4. Иванов, А.Д.: *О четырехмерных тканях Боля параболического типа.* Изв. вузов. Матем. **1976**, N 1, 42–47 (РЖМат, 1976, 10А422).

И-5. Иванов, А.Д.: *Взаимно полярные ткани Боля гиперболического типа.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Калининград, Калининградский гос. ун-т, 1979, N 10, 30–35 (РЖМат, 1980, 1А819).

Вр-3. Индрупская (Верба), Е.А.: *Неголономные три-ткани максимального ранга.* Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1979, 57–61 (РЖМат, 1980, 9А651).

Вр-4. Индрупская (Верба), Е.А.: *Четырехмерные неголономные три-ткани максимального ранга.* Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1981, 45–58 (РЖМат, 1983, 3А705).

Вр-5. Индрупская (Верба), Е.А.: *Три-ткани $W_{2r+1}(3, r+1, 1)$ максимального ранга с невырожденным тензором неголономности, индуцируемые параллелизуемой тканью $W_{2(r+1)}(3, r+1)$.* Ткани и квазигруппы. Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 56–67 (РЖМат, 1988, 7А723).

Кан-1. Канаев, Б.Г.: *О шестиугольных три-тканях, образованных плоскостями пространства P^4.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 92–97 (РЖМат, 1988, 6А798).

Ка-1. Картан, А. (Cartan, H.): *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* М., Наука, 1971 (РЖМат, 1971, 12Б30К).

Кр-1. Картан, Э. (Cartan, E.): *Les sous-groupes des groupes continus de transformations.* Ann. Sci. École Norm. (3) **25** (1908), 57–194. (См. также É. Cartan, *Œuvres Completes*, Centre National de la Researche Scientifique, Paris, 1984, Partie II, 719–856.)

Кр-2. Картан, Э. (Cartan, E.): *Геометрия римановых пространств.* М.– Л., ОНТИ, 1936.

Кр-3. Картан, Э. (Cartan, E.): *Риманова геометрия в ортогональном репере.* М., МГУ, 1960.

Кр-4. Картан, Э. (Cartan, E.): *Пространства аффинной, проективной и конформной связности.* Казань, КГУ, 1962.

Кр-5. Картан, Э. (Cartan, E.): *Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения.* М., МГУ, 1962.

Кр-6. Картан, Э. (Cartan, E.): *Теория конечных непрерывных групп и дифференциальная геометрия, изложенные методом подвижного репера.* М., МГУ, 1963.

Кв. *Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике.* Тр. ин-та физики академии наук Эстонии. Тарту, 1990, 235 с.

Кер-1. Керво (Cerveau, D.): *Théorémes de type Fuchs pour les tissus feuilletés.* В книге: Camacho, C. (ed.) et al., Complex analytical methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992) Astérisque **222** (1994), 49–92 (MR 94k:76082; 95e:32035; Zbl 824:32008).

Ке-1. Кердман, Ф.С.: *Аналитические лупы Муфанг в целом.* Алгебра и логика **18** (1979), N 5, 523–555 (РЖМат, 1980, 8А206).

Ки-1. Киккава (Kikkawa, M.): *On local loops in affine manifolds.* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser A-I Math. **28** (1964), 199–207 (MR **32** #4627; Zbl **141**, p. 196).

Ки-2. Киккава (Kikkawa, M.): *System of local loops on a manifold and affine connection.* Bull. Shimane Univ. Natur. Sci. no. 16 (1966), 12–14 (MR **53** #1457).

Ки-3. Киккава (Kikkawa, M.): *On locally reductive spaces and tangent algebras.* Mem. Fac. Lit. Sci. Shimane Univ. Natur. Sci. **5** (1972), 1–13 (РЖМат, 1966, 2А266; MR **47** #990; Zbl 241:53015.)

Ки-4. Киккава (Kikkawa, M.): *On some quasigroups of algebraic models of symmetric spaces. I.* Mem. Fac. Lit. Shimane Univ. Natur. Sci. **6** (1973), 9–13 (MR **48** #6304; Zbl 264:53028.)

Ки-5. Киккава (Kikkawa, M.): *On some quasigroups of algebraic models of symmetric spaces. II.* Mem. Fac. Lit. Shimane Univ. Natur. Sci. **7** (1974), 29–35 (MR **49** #7384; Zbl 279:53046.)

Ки-6. Киккава (Kikkawa, M.): *Geometry of homogeneous Lie loops.* Hiroshima Math. J. **5** (1975), no. 2, 141–179 (РЖМат, 1976, 2А848; MR **52** #4182; Zbl 396:53024).

Ки-7. Киккава (Kikkawa, M.): *A note on subloops of a homogeneous Lie loop and subsystems of its triple systems.* Hiroshima Math. J. **5** (1975), no. 3, 439–446 (РЖМат, 1976, 7А909; MR **52** #9117; Zbl 312:53036).

Ки-8. Киккава (Kikkawa, M.): *On some quasigroups of algebraic models of symmetric spaces. III.* Mem. Fac. Lit. Sci. Shimane Univ. Natur. Sci. **9** (1975), 7–12 (MR **54** #442; Zbl 322:20035).

Ки-9. Киккава (Kikkawa, M.): *On the left translations of homogeneous loops.* Mem. Fac. Lit. & Sci., Shimane Univ. Natur. Sci. **10** (1976), 19–25 (MR **55** #5778; Zbl 364:20076).

Ки-10. Киккава (Kikkawa, M.): *Totally geodesic imbeddings of homogeneous systems into their enveloping Lie groups.* Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **18** (1984), 1–8 (MR 86f:53056; Zbl 563:53043).

Ки-11. Киккава (Kikkawa, M.): *Canonical connections of homogeneous Lie loops and 3-webs*. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **19** (1985), 37–55 (MR 87j:53077; Zbl 588:53014).

Ки-12. Киккава (Kikkawa, M.): *Remarks on canonical connections of loops with the left inverse property*. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **20** (1986), 9–19 (MR 88i:53038; Zbl 625:53045).

Ки-13. Киккава (Kikkawa, M.): *Affine homogeneous structures on analytic loops*. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **21** (1987), 1–15 (MR 89k:53047; Zbl 647:53012).

Ки-14. Киккава (Kikkawa, M.): *Remarks on Akivis left loops*. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **29** (1995), 1–9 (MR 96m:20119; Zbl 843:22008).

Ки-15. Киккава (Kikkawa, M.): *Generalizations of Lie triple algebras*. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. **30-B** (1997), 37–47 (MR 98f:17002; Zbl 886:17007).

Кл-1. Кильп, Х.О.: *Квазилинейные системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с m неизвестными функциями от двух переменных и с несовпадающими характеристиками (геометрическая теория)*. Уч. зап. Тартусского гос. ун-та, 1971, Т. 281, 63–85 (РЖМат, 1972, 8Б389).

Кл-2. Кильп, Х.О.: *Две квазилинейные системы S^1_{32} из механики с шестиугольной три-тканью характеристик (геометрическая теория)*. Уч. зап. Тартусского гос. ун-та, 1975, Т. 374, 63–78 (РЖМат, 1976, 8А893).

Кл-3. Кильп, Х.О.: *Геометрия квазилинейных систем дифференциальных уравнений и m-ткани*. Уч. зап. Тартусского гос. ун-та, 1984, Т. 665, 14–22 (РЖМат, 1984, 7А635; MR 85g:53015; Zbl 553:53008.)

Кл-4. Кильп, Х.О.: *Bäcklund transformations and geometry of multidimensional three-webs*. Topological Phases in Quantum Theory (Dubna, 1988), 425–436, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1989 (MR 92h:53039; Zbl 721:53019).

Кк-1. Клековкин, Г.А.: *Пучок связностей Вейля и нормальная конформная связность на многообразии с относительно инвариантной квадратичной формой*. Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, 47–55 (РЖМат, 1982, 1А929).

Кк-2. Клековкин, Г.А.: *О пучке связностей Вейля, присоединенном к четырехмерной три-ткани*. Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1981, 59–62 (РЖМат, 1983, 3А706).

Кк-3. Клековкин, Г.А.: *О геометрии четырехмерной три-ткани*. Кировский гос. пед. ин-т, Киров, 1982, Деп. в ВИНИТИ 4.08.1982, N 4288–82ДЕП (РЖМат, 1982, 11А618 ДЕП).

Кк-4. Клековкин, Г.А.: *О тензоре Вейля псевдоконформной структуры, присоединенной к четырехмерной три-ткани*. Кировский гос. пед. ин-т, Киров, 1982, Деп. в ВИНИТИ 4.08.1982, N 4289–82ДЕП (РЖМат, 1982, 11А617 Деп.)

Кк-5. Клековкин, Г.А.: *О некоторых примерах четырехмерных изоклинных не трансверсально-геодезических три-тканей*. Кировск. пед. ин-т, 1982. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 26.10.1982, N 5335-82 Деп.

Кк-6. Клековкин, Г.А.: *Геометрии Вейля, порожденные четырехмерной три-тканью*. Укр. геом. сб. **1983**, Вып.26, 56–63 (РЖМат, 1983, 12А878).

Кк-7. Клековкин, Г.А.: *Четырехмерные три-ткани с ковариантно постоянным тензором кривизны*. Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1984, 56–63 (РЖМат, 1985, 1А841).

Кк-8. Клековкин, Г.А.: *О строении поверхности пространства Аппеля над неприводимой алгеброй*. Докл. ежегодн. науч. конф. физ.-мат. фак. Самар.гос. пед. ин-та (Самара, март., 1994). Самара, 1994, 30–31 (РЖМат, 1995, 6А484).

Кк-9. Клековкин, Г.А.: *Некоторые задачи геометрии четырехмерных три-тканей*. Докл. ежегодн. науч. конф. физ.-мат. фак. Самар.гос. пед. ин-та (Самара, апр., 1996). Самара, 1996, 9–12.

КкТ-1. Клековкин, Г.А.; Тимошенко, В.В.: *Вещественные реализации три-тканей над двумерными алгебрами*. Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1984, 63–69 (РЖМат, 1985, 1А842).

КкТ-2. Клековкин, Г.А.; Тимошенко, В.В.: *Координатная три-ткань на поверхности пространства Аппеля над алгеброй и ее вещественная реализация*. Куйбыш. гос. пед. ин-т, Куйбышев, 1989. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 15.03.1989, N 1661-В89 (РЖМат, 1989, 7А565).

КкТ-3. Клековкин, Г.А.; Тимошенко, В.В.: *Конечные уравнения вещественных реализаций тканей $W(R(e))$, $W(R(\varepsilon))$ с кривизной, равной делителю нуля*. Куйбыш. гос. пед. ин-т, Куйбышев, 1988. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 15.03.1989, N 1662-В89 (РЖМат, 1989, 7А566).

Кн-1. Кнессер (Knesser, H.): *Gewebe und Gruppen*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **9** (1932), 147–151 (Zbl. **6**, p. 33.)

КН-1. Кобаяси, Ш.; Номизду, К.: *Основы дифференциальной геометрии, т.1,2*. М., Наука, 1981.

Кос-1. Костырев, Г.Е.: *Ткани и неинволютивные распределения*. Геометрия вложенных многообразий. Москва, Моск. гос. пед. ин-т, 1985, 49–56 (MR 90k:53032.)

Кос-2. Костырев, Г.Е.: *Проективная интерпретация ткани специального вида.* Балашов. гос. пед. ин-т, Балашов, 1993. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 15.07.1993, N 2005-В93 (РЖМат, 1993, 11А580 ДЕП).

К-1. Кузьмин, Е.Н.: *Простые алгебры Мальцева над полем характеристики нуль.* ДАН СССР **181** (1968), N 6, 1324–1326 (РЖМат, 1969, 1А282).

К-2. Кузьмин, Е.Н.: *Алгебры Мальцева и их представления.* Алгебра и логика **7** (1968), N 4, 48–69 (РЖМат, 1969, 7А230).

К-3. Кузьмин, Е.Н.: *Алгебры Мальцева размерности пять над полем характеристики нуль.* Алгебра и логика **9** (1970), N 5, 691–700 (РЖМат, 1971, 8А240).

К-4. Кузьмин, Е.Н.: *О связи между алгебрами Мальцева и аналитическими лупами Муфанг.* Алгебра и логика **10** (1971), N 1, 3–22 (РЖМат, 1971, 11А309).

Ку-1. Кулаков, Ю. И.: *Элементы теории физических структур (с добавлением Г.Г. Михайличенко).* Новосибирск, 1968, 227 с.

КуВ-1. Кулаков, Ю. И.; Владимиров, Ю. С.; Карнаухов, А. В.: *Введение в теорию физических структур и бинарную геометрофизику.* М.: Архимед, 1992, 183 с.

Кс-1. Кууск, Ёрд (Kuusk, P.; Örd, Ju.): *Kinematics and uncertainty of a quantum test particle in a curved space-time.* Phys. Lett. B **421** (1998), 99–104.

КсП-1. Кууск, Ёрд, Паал (Kuusk, P.; Örd, Ju.; Paal, E.): *Geodesic multiplication and the theory of gravity.* J. Math. Phys. **35**, No. 1, (1994), 321–334 (MR 94k:17056; Zbl 806:53085).

КсП-2. Кууск, Ёрд, Паал (Kuusk, P.; Örd, Ju.; Paal, E.): *Geodesic multiplication and geometrical BRST-like operators.* Eesti Tead. Akad. Toimetised Füüs. Mat. **44** (1995), No. 4, 437–449 (MR 97e:81161; Zbl 846:53060).

КсП-3. Кууск, Ёрд, Паал (Kuusk, P.; Örd, Ju.; Paal, E.): *Quantum kinematics of a test particle in a curved space-time.* Classical Quantum Gravity **14** (1997), no. 10, 2917–2926 (MR 98f:53055; Zbl 887:53061).

КП-1. Кууск, Паал (Kuusk, P.; Paal, E.): *Geodesic multiplication as a tool for classical and quantum gravity.* Tallinna Tehnika Ül. Toimetised. Matemaatika. Füüsika I **733** (1992), 33–42.

КП-2. Кууск, Паал (Kuusk, P.; Paal, E.): *Geodesic multiplication in the theory of gravity.* Proc. 2nd Alexander Friedmann Intern. Sem. on Gravity and Cosmology, Eds: Yu. N. Gnedin, et al., Central Astronomical Observatory at Pulkovo, Russian Acad. Sci. and Friedmann Lab. Publ., St. Petersburg, 1994, 324–335.

КП-3. Кууск, Паал (Kuusk, P.; Paal, E.): *Geodesic loops and BRST-like cohomology.* Eesti Tead. Akad. Toimetised Füüs. Mat. **45** (1996), No. 2–3, 128–133 (MR 97i:53084; Zbl 868:53028).

КП-4. Кууск, Паал (Kuusk, P.; Paal, E.): *Geodesic multiplication and BRST-like operators.* General Relativity and Gravitation **28** (1996), No. 8, 991–998 (MR 97h:53079; Zbl 863:53052).

КП-5. Кууск, Паал (Kuusk, P.; Paal, E.): *Local differentiable loops and BRST-like cohomology.* Algebras Groups Geom. **13** (1996), No. 8, 465–469 (Zbl 874:20047).

Л-1. Лазарева, В.Б.: *Три-ткани, образованные семействами окружностей на плоскости.* Дифференциальная геометрия, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1977, 49–64 (РЖМат, 1977, 12А780).

Л-2. Лазарева, В.Б.: *Три-ткани на двумерной поверхности в триаксиальном пространстве.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Калининград, Калининский гос. ун-т, 1979, N 10, 54–79 (РЖМат, 1980, 1А820).

Л-3. Лазарева, В.Б.: *О три-тканях, порожденных тремя r-плоскостями в проективном пространстве размерности* $2r+1$. Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, 56–68 (РЖМат, 1982, 1А893).

Л-4. Лазарева, В.Б.: *Об одном классе многомерных параллелизуемых три-тканей.* Материалы 5 конф. молодых ученых УДН. Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы. М., 1982, 47–50. Деп. в ВИНИТИ 15.07 1982, N 3814-82 Деп. (РЖМат, 1982, 11А615 Деп.)

Л-5. Лазарева, В.Б.: *О три-ткани Дарбу на поверхности в триаксиальном пространстве.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, 45–55 (РЖМат, 1982, 12А735).

Л-6. Лазарева, В.Б.: *Об одном классе поверхностей, несущих сеть кривых второго порядка.* Материалы 6 конф. молодых ученых УДН. Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы. М., 1983, 104–107. Деп. в ВИНИТИ 5.03 1984, N 1316-84 Деп. (РЖМат, 1984, 7А583 Деп.)

Л-7. Лазарева, В.Б.: *О соприкасающихся гомографиях точечного соответствия трех прямых.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1984, 70–76 (РЖМат, 1985, 1А817).

Л-8. Лазарева, В.Б.: *О гомографиях Годо в трехмерном проективном пространстве.* Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, 84–89 (РЖМат, 1985, 10А605).

Л-9. Лазарева, В.Б.: *К геометрии n-аксиального пространства.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 68–75 (РЖМат, 1987, 7А705).

Л-10. Лазарева, В.Б.: *Параллелизуемые три-ткани, образованные пучками окружностей.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 74–77 (РЖМат, 1988, 6А797).

Л-11. Лазарева, В.Б.: *Three-axial geometry and its multidimensional analogues.* Diff. Geom. and Appl. Proc. of Conf., Dubrovnik, June 26–July 3, 1988. Univ. Novi Sad, Novi Sad, 1989, 141–144 (РЖМат, 1990, 6А547; MR 91a:53033).

Л-12. Лазарева, В.Б.: *On some five-dimensional Moufang loops*, Geometry, Proc. 3rd Congr., Thessaloniki/Greece 1991, 376–384 (1992) (MR 93i:20086; 766:53003.)

Л-13. Лазарева, В.Б.: *Three-webs on cubic surfaces.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1996–1997, 101–126 (РЖМат, 1998, 11А503).

ЛО-1. Лазарева, В.Б.; Орлова, О.В.: *Об одном классе шестиугольных три-тканей, образованных пучками окружностей.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, 115–119 (РЖМат, 1986, 8А797).

ЛШ-1. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *О геометрической интерпретации инвариантного оснащения точечного соответствия трех прямых.* Изв. вузов. Матем. **1984** N9, 43–47 (РЖМат, 1985, 3А676).

ЛШ-2. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *Примеры G-тканей размерности 4,6,8,10 с различными касательными алгебрами.* Деп.в ВИНИТИ, 26.07.1989, N 5030-B89 (РЖМат, 1989, 12А721ДЕП).

ЛШ-3. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *An addition to the problem of analytic G-loops.* Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике, Тарту, 1990, 89–97 (РЖМат, 1991, 8А307).

ЛШ-4. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *Around a Blaschke problem in the web theory.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1996–1997, 65–73 (РЖМат, 1998, 11А501).

ЛШ-5. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *Three-webs formed by pencils of conics.* Webs and quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2000, 63–76.

ЛШ-6. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *Hexagonal three-webs formed by conics.* Rendiconti del seminario matemetico di Messina/Atti del Congresso Internazionale in onore di Pasquale Calapso, Messina 12–14 ott., 1998. Palermo, 2000, 241–252.

ЛШ-7. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *An example of hexagonal but non-parallelizable four-web formed by 4 pencils of spheres.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2002, 49–52.

ЛШ-8. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *Конфигурации и ткани, порождаемые пучками сфер.* Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Чебоксары, изд. ЧГПУ, 2006, 87–95.

ЛШ-9. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *О триангуляциях плоскости пучками коник.* Матем. сб. **198** (2007), N 11, 107–134.

ЛШ-10. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *К проблеме классификации регулярных 4-тканей, образованных пучками сфер.* Изв. вузов. Матем. **2007**, N 12, 70–76.

ЛШ-11. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *Теоремы о границах криволинейной три-ткани и их приложение к проблеме триангуляции плоскости пучками кривых второго порядка.* Тезисы международной конференции «Геометрия в Одессе-2008», «Наука», Одесса, 2008, 97.

ЛШ-12. Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М.: *О триангуляциях плоскости пучками кривых второго порядка.* Тверской гос. ун-т, Тверь, 2009. Деп. В ВИНИТИ 21.01.09, N 25-B2009, 63 с.

Лп-1. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований.* Тр. Московск. мат. об-ва **2** (1953), 275–383 (РЖМат, 1953, 433).

Лп-2. Лаптев Г.Ф. *Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии.* Тр. геом. сем. (ВИНИТИ АН СССР) **1** (1966), 139–190 (РЖМат, 1957, 6А382).

Лп-3. Лаптев Г.Ф. *Структурные уравнения главного расслоенного многообразия.* Тр. геом. сем. (ВИНИТИ АН СССР) **2** (1969), 161–178 (РЖМат, 1970, 4А623).

Лт-1. Литтл (Little, J.B.): *On webs of maximum rank.* Geom. Dedicata **31** (1986), no. 19–35 (MR 90g:53023; Zbl. 677.53017).

Ли-1. Ли (Lie, S.): *Die Theorie der Translationflächen und das Abelesche Theorem.* Gesammelte Abhandlungen, Bd. **2**, Abt. 2, Teubner, Leipzig and Ascheoug and Co., Oslo, 1937, 526–579 (Zbl. **17**, p. 190).

Лх-1. Лихнерович, А.: *Теория связностей в целом и группа голономий.* М., 1960.

Ло-1. Лоос, О.: *Симметрические пространства.* М., Наука, 1985 (РЖМат, 1985, 9А367К).

ЛПС-1. Лыхмус Я., Паал Э., Соргсепп Л. *Неассоциативность в математике и физике.* Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Труды института физики, Тарту, 1990, Т. 66, 8–22.

М-1. Мальцев, А.И.: *Аналитические лупы.* Мат. сб. **36** (1955), N 3, 569–575 (РЖМат, 1956, 7204).

Ма-1. Манин, Ю.И.: *Кубические формы.* М., Наука, 1972 (РЖМат, 1972, 12А376К).

Ма-1. Мантуров, О.В.; Нестеров, А.И.; , Михеев, П.О.; Матвеев, О.А.; Шелехов, А.М.: *Lev V. Sabinin.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2002, 19–23.

Мих-1. Михайличенко, Г.Г.: *Решение функциональных уравнений в теории физических структур.* Докл. АН СССР **206** (1972), N 5, 1056–1058.

Ми-1. Михайлов, Ю.И.: *О структуре почти грассмановых многообразий.* Изв. вузов. Матем. **1978**, N 2, 62–72 (РЖМат, 1978, 12А1056).

Мх-2. Михеев, П.О.: *О лупах преобразований.* Деп. в ВИНИТИ 1985 N 4531–85.

Мх-2. Михеев, П.О.: *О G-свойстве локальных аналитических луп Бола.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, 54–59 (РЖМат, 1986, 8А205).

Мх-3. Михеев, П.О.: *Идемпотентные квазигруппы многообразия с геодезическими.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 41–46 (РЖМат, 1988, 6А770).

Мх-4. Михеев, П.О.: *Quasigroups of transformations.* В сб.: Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Труды института физики, Тарту, 1990, Т. 66, 54–66.

Мх-5. Михеев, П.О.: *Об альтернаторах четвертого порядка три-ткани, присоединенной к аналитической лупе.* Изв. вузов. Матем. **1991**, N 6, 36–38.

Мх-6. Михеев, П.О.: *On a problem of Chern-Akivis-Shelekhov on hexagonal three-web.* Aeq. Math. **51** (1996), 1-11.

Мх-7. Михеев, П.О.: *Moufang loops and their enveloping groups.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1993, 33–43 (РЖМат, 1994, 2А217).

МхС-1. Михеев, П.О.; Сабинин, Л.В.: *Гладкие квазигруппы и геометрия.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **20** (1988), 75–110 (РЖМат, 1989, 1А748).

МхС-2. Михеев, П.О.; Сабинин, Л.В.: *Quasigroups and differential geometry.* Глава X в книге *Quasigroups and loops: theory and applications*, 357–430. Heldermann-Verlag, Berlin, 1990, см. [ЧПС-1] (Zbl. 721.53018).

МШ-1. Мищенко, С.Г., Шелехов, А.М.: *О подтканях и подлупах.* Матем. иссл. (Квазигруппы и их системы), вып. 113, 1990, 66–71 (РЖМат, 1990, 10А159).

Му-1. Муфанг (Moufang, R.): *Zur Struktur von Alternativ Körpern.* Math. Ann. **110** (1935), 416–430 (Zbl. **10**, p. 4).

Н-1. Надь (Nagy, P.): *On the canonical connection of a three-web.* Publ. Math. Debrecen **32** (1985), no. 1–2, 93–99 (РЖМат, 1986, 10А755; MR 87a:53028; Zbl. 586.53005).

Н-2. Надь (Nagy, P.): *Invariant tensorfields and the canonical connection of a 3-web.* Aequationes Math. **35** (1988), no. 1, 31–44 (РЖМат, 1988, 10А569; MR 89h:53052; Zbl. 644.53013).

Н-3. Надь (Nagy, P.): *On complete group 3-webs and 3-nets.* Arch. Math. (Basel) **53** (1989), no. 4, 411–413 (РЖМат, 1990, 4А826; MR 90g:53024; Zbl. 696.53008).

Н-4. Надь (Nagy, P.): *3-nets with maximal family of two-dimensional subnets.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **61** (1991), 203–211 (РЖМат, 1993, 9А495; MR 93a:53011; Zbl 767:53012).

Н-5. Надь (Nagy, P.): *Extension of local loop isomorphisms.* Monats. Math. **112** (1991), no. 3, 221–225 (MR 92k:20134; Zbl 737:53016).

Н-6. Надь (Nagy, P.): *Moufang Lie loops and homogeneous spaces.* Acta Sci. Math. **56** (1992), no. 3–4, 259–267 (MR 94m:20140; Zbl 794:53031).

Н-7. Надь (Nagy, P.): *Moufang loops and Malcev algebras.* Semin. Sophus Lie Darmstadt **3** (1993), no. 1, 65–68 (MR 94h:20074; Zbl 786:22006).

Н-8. Надь (Nagy, P.): *On collineation groups generated by Bol reflections.* J. Geom. **48** (1993), no. 1–2, 63–78 (Zbl 793:51001).

НШ-1. Надь, Штрамбах (Nagy, P.; Strambach, K.): *Loops as invariant sections in groups and their geometry.* Canad. J. Math. **46** (1994), no. 5, 1027–1056 (MR 95h:20088; Zbl 814:20055).

НШ-2. Надь, Штрамбах (Nagy, P.; Strambach, K.): *Loops, their cores and symmetric spaces.* Isr. J. Math., **105** (1998), 285–322.

Нз-1. Назиров, Т.Ж.: *О 3-тканях кривых.* Вестник МГУ, сер. Матем.– Мех. **1965**, N 1, 37–50 (РЖМат, 1965, 7А411; MR **32** #9054; Zbl 135:21801).

Нз-2. Назиров, Т.Ж.: *О максимальном ранге 3-тканей кривых в пространстве.* Вестн. МГУ. сер. Матем.– Мех. **1965**, N 5, 27–34 (РЖМат, 1966, 2А550; MR **32** #9054; Zbl. **148**, p. 155).

На-1. Накаи (Nakai, I.): *Topology of webs of divisors in a linear system of a complex manifold.* Preprint, IHES, 1985.

На-2. Накаи (Nakai, I.): *Topology of complex webs of codimension one and geometry of projective space curves.* Topology **26** (1987), 475–504 (MR 89b:14010; Zbl 647:57018).

На-3. Накаи (Nakai, I.): *On the topological structure of smooth equivariant mappings: II. Topological instability and non-stabilization theorems.* Proc. Lond. Math. Soc., (3) **58**, No. 1, 1989, 169–208 (РЖМат, 1989, 12A625; MR 90k:58023; Zbl 687:57014).

На-4. Накаи (Nakai, I.): *Superintegrable foliations and web structure.* Geometry and Analysis in Dynamical Systems (Kyoto, 1993), 126–139, Adv. Ser. Dynam. Syst., 14, World Sci. Publ, River Edge, NJ, 1994 (MR 96f:58122: Zbl 882:58038).

На-5. Накаи (Nakai, I.): *Some problems on the moduli of first order PDE with complete integrals and web geometry in their solutions.* Nilpotent Geometry and Analysis (Japanese) (Kyoto, 1993), Súrikaisekikenkyúsho Kókyúroku No. 875 (1994), 168–178 (MR 96f:58018).

На-6. Накаи (Nakai, I.): *Notes on versal definition of first order PDE and web structure.* J. Differential Equations **118** (1995), no. 2, 253–292 (MR 96e:58017; Zbl 827:58005).

На-7. Накаи (Nakai, I.): *Web geometry: Microcosmos.* Ryuukoku Univ., Kagakugijjyutsu kyoudou kennkuu Center, Seminar Reports, 1996, 29–98 (Japanese.)

На-8. Накаи (Nakai, I.): *Curvature of curvilinear* 4*-webs and pencils of one forms.* Topology of holomorphic dynamical systems and related topics (Kyoto, 1995), Súrikaisekikenkyúsho Kókyúroku No. 955 (1996), no. 8, 109–132 (MR 98a:53026).

На-9. Накаи (Nakai, I.): *Curvature of curvilinear* 4*-webs and pencils of one forms: Variation on the theme a theorem of Poincaré, Mayrhofer and Reidemeister on curvilinear* 4*-webs.* Comment. Math. Helv. **73** (1998), 177–205.

Нг-1. Нгуен Зоан Туан (Nguen Zoan Tuan): *О многомерных три-тканях типа* $W(P,P,Q)$. Геометрия погруженных многообразий, Моск. гос. пед. ин-т, М., 1986, 101–112 (РЖМат, 1986, 11A787; MR 88k:53032; Zbl 655:53014).

Нг-2. Нгуен Зоан Туан (Nguen Zoan Tuan): *Некоторые подклассы три-тканей* $W(P,P,Q)$ *с постоянными компонентами основного тензора.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 82–87 (РЖМат, 1988, 7A724; MR 88i:53031; Zbl 617:53023).

Не-1. Нестеров А.И.: *Квазигрупповые идеи в физике.* В сб.: Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике. Труды института физики. Тарту, 1990, Т. 66, 107–120.

НеС-1. Нестеров А.И.; Степаненко В.А.: *О методах неассоциативной алгебры в геометрии и физике.* Ин-т физ. СО АН СССР. Препр., 1986, N 400Ф, 48 с. (РЖМат, 1987, 3A514).

Ни-1. Нишимори (Nishimori, T.): *Octahedral webs on closed manifolds.* Tôhoku Math. J. **32** (1980), no. 3, 399–410 (РЖМат, 1981, 4A850; MR 82h:53025; Zbl 447:57019).

Ни-1. Нишимори (Nishimori, T.): *Some remarks on octahedral webs.* Japan J. Math. (N.S.) **7** (1981), no. 1, 169–179 (MR 85h:53018; Zbl 474:57013).

О-1. Орлова, В.Г.: *О многомерных три-тканях максимального ранга.* Изв. вузов. Матем. **1976**, N 1, 55–63 (РЖМат, 1976, 10A424; MR **57** #7427; Zbl. 337.53019).

О-2. Орлова, В.Г.: *Об одном классе многомерных три-тканей максимального ранга.* Геометрия однородных пространств, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1976, 89–93 (РЖМат, 1976, 4A728).

П-1. Паал (Paal, E.): *Mal'tsev algebras and generalized Lie equations.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1992, 69–78 (MR 94f:17030; Zbl 861:17021).

П-2. Паал (Paal, E.): *Moufang loops and generalized Lie equations.* Eesti Tead. Akad. Toimetised Füüs. Mat. **41** (1992), No. 2, 125–132 (РЖМат, 1993, 3A190; MR 94f:20136; Zbl 823:22004).

П-3. Паал (Paal, E.): *Moufang–Mal'tsev symmetry.* Eesti Tead. Akad. Toimetised Füüs. Mat. **42** (1993), No. 2, 157–165 (MR 95a:81138; Zbl 802:58026).

П-4. Паал (Paal, E.): *Birepresentations of Mal'tsev algebras.* Tallinna Tehnika Ül. Toimetised. Matemaatika. Füüsika II **738** (1994), 19–32.

Па-1. Павлюченко, Ю.: *On deformation of webs.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1992, 79–85.

Пд-1. Пиджакова Л.М. *Об одном классе изоклинных три-тканей.* Изв. вузов. Матем. **2008**, N 11, 60–67.

Пд-2. Пиджакова Л.М. *Редуктивная структура, связанная с тканью* W^{∇}. Тезисы докладов международной конференции «Геометрия в Одессе-2008». Одесса, 19–24 мая 2008, 114.

Пд-3. Пиджакова Л.М. *О специальных три-тканях* W^{∇}. Тезисы докладов международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Г.Ф. Лаптева. Москва–Тверь, 25–28 августа 2009, с. 26.

ПдШ-1. Пиджакова Л.М., Шелехов А.М.: *On properties of four-dimensional torsion-free three-webs with covariantly constant curvature tensor.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2000, 77–84.

Пи-1. Пикерт (Pickert, G.): *Projective Ebenen.* 2nd edition. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/. New York, 1975, ix+371 pp. (РЖМат, 1976, 2A393K; MR **51** #6577; Zbl. 307.50001).

Пом-1. Помаскина, Л. А.: *Идемпотентные квазигруппы, определенные на многомерной три-ткани.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, 55–63 (РЖМат, 1982, 12А232; MR 84d:20075; Zbl 501:53007).

По-1. Постников, М.М.: *Лекции по геометрии, V. Группы Ли и алгебры Ли.* М., Наука, 1982 (РЖМат, 1982, 10А225К).

Пн-1. Пуанкаре (Poincaré, H.): *Les surfaces de translation et les fonctions abéliennes.* Bull. Soc. Math. France **29** (1901), 61–86.

Пф-1. Пфлюгфельдер (Pflugfelder, H.O.): *Quasigroups and loops: introduction.* Heldermann-Verlag, Berlin, 1990, iii+147 pp. (Zbl. 715.20043).

Ра-1. Радо (Rado, F.): *Generalisation of space webs for certain algebraic structures.* Studia Univ. Babeş–Bolyai Ser. Math. Phys. **1960**, no. 1, 41–55 (Рум.) (РЖМат, 1962, 9А334; MR **32** #395; Zbl **124**,p. 368).

Ра-2. Радо (Rado, F.): *Eine Bedingung für die Regularität der Gewebe.* Mathematika (RPR) 1960, 2 , N 2, 325–334 (РЖМат, 1962, 6А402).

Р-1. Рейдемейстер (Reidemeister, K.): *Gewebe und Gruppen.* Math. Z. 29 (1928), 427–435.

Р-2. Рейдемейстер (Reidemeister, K.): *Grundlagen der Geometrie.* Springer-Verlag, Berlin, 1930, 147 pp. (Jbuch. **56**, p. 483.)

РС-1. Рождественский, Б.Л.; Сидоренко, А.Д.: *О невозможности градиентной катастрофы для слабо нелинейных систем.* Ж. вычислит.матем. и матем. физики **7** (1967), N 5, 1176–1179 (РЖМат, 1968, 3В305).

Рж-1. Рыжков, В.В.: *Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами.* Алгебра. Топология. Геометрия. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) 1971, 153–174 (РЖМат, 1972, 3А649; MR **50** # 1136).

РУ-1. Рыжков, В.В.; Ухмыленко В.Н.: *On webs formed by linear congruences of lines.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1992, 86–92.

С-1. Сабинин, Л.В.: *О геометрии луп.* Мат. заметки **12** (1972), N 5, 605–616 (РЖМат, 1973, 4А309).

С-2. Сабинин, Л.В.: *О нелинейной геометрической алгебре.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 32–37 (РЖМат, 1988, 6А765).

С-3. Сабинин, Л.В.: *Однородные пространства и квазигруппы.* Изв. вузов. Матем. **1996**, N 7 (410), 77–84 (MR 97k:53053; Zbl 874:53037).

СМ-1. Сабинин, Л.В.; Михеев, П.О.: *О симметрической связности в пространстве аналитической лупы Муфанг.* ДАН СССР **262** (1982), N 4, 807–809 (РЖМат, 1982, 6А669).

СМ-2. Сабинин, Л.В.; Михеев, П.О.: *Об аналитических лупах Бола.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, 102–109 (РЖМат, 1982, 12А227).

СМ-3. Сабинин, Л.В.; Михеев, П.О.: *О геометрии гладких луп Бола.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1984, 144–154 (РЖМат, 1985, 1А867).

СМ-4. Сабинин, Л.В.; Михеев, П.О.: *Теория гладких луп Бола.* М., Ун-т Дружбы народов, 1985, 80 с. (РЖМат, 1986, 7А211К).

СМ-5. Сабинин, Л.В.; Михеев, П.О.: *О локальных аналитических лупах с тождеством правой альтернативности.* Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, 72–75 (РЖМат, 1985, 10А244).

СМ-6. Сабинин, Л.В.; Михеев, П.О.: *Об инфинитезимальной теории локальных аналитических луп.* ДАН СССР **297** (1987), N 4, 801–804 (РЖМат, 1988, 4А698).

СМ-7. Сабинин, Л.В.; Михеев, П.О.: *О дифференциальной геометрии луп Бола.* ДАН АН СССР **281** (1985), 1055–1057 (РЖМат, 1985, 9А612; MR 86k:53022; Zbl 587:53021.)

Са-1. Сантилли, Р.М. (Santilli, R.M.): *Lie-admissible approach to the hadronic structure.* Vol. 1, Hadronic Press, Inc., MA (1978).

Сд-1. Седов, Л.И.: *Методы подобия и размерности в механике.* М., Наука, 1981.

Се-1. Сейгл (Sagle, A.A.): *Mal'cev algebras.* Trans. Amer. Math. Soc. **101** (1961), no. 3, 426–458 (РЖМат, 1963, 5А293; MR **26** #1343; Zbl. **101**, p. 23).

Аз-2. Селиванова (Азизова), Н.Х.: *Интранзитивные семейства преобразований.* Изв. вузов. Матем. **1984**, N 12 (271), 69–71 (РЖМат, 1985, 5А629; MR 86i:53016; Zbl 564:53008 & 579:53014).

Аз-3. Селиванова (Азизова), Н.Х.: *О три-ткани из кривых и гиперповерхностей и однопараметрическом семействе диффеоморфизмов.* Горьковский инж.-строит. ин-т, Горький, 1988. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 6.06.1988 N 4448-В88 (РЖМат, 1988, 10А570ДЕП).

См-1. Смит (Smith, J. D. H.): *Multilinear algebras and Lie's Theorem for formal n-loops.* Arch. Math. (Basel) **51** (1988), 169–177 (MR 90e:17007; Zbl 627:22003 642:22001).

Со-1. Соколова, Т.А.: *К вопросу о точечном соответствии между тремя проективными пространствами.* Труды геом. семинара **4** (1973), 269–283 (РЖМат, 1974, 3А518; MR **50** # 14525; Zbl 311:50013).

Ст-1. Стернберг, С.: *Лекции по дифференциальной геометрии.* М., Мир, 1970 (РЖМат, 1971, 7А754К).

Та-1. Тарарин, В.М.: *On ordered three-webs.* Webs and Quasigroups, 1994, Tver, Tver State Univ., 72–75 (РЖМат, 1995, 6А489).

Т-1. Тимошенко, В.В.: *О три-тканях над коммутативными ассоциативными алгебрами.* Укр. геом. сб. **18** (1975), 136–151 (РЖМат, 1976, 4А733).

Т-2. Тимошенко, В.В.: *О три-тканях над коммутативными ассоциативными алгебрами.* Изв. вузов. Матем. **1975**, N 11, 109–112 (РЖМат, 1976, 9А639).

Т-3. Тимошенко, В.В.: *О подтканях, определяемых делителями нуля коммутативной ассоциативной алгебры.* Геометрия однородных пространств, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1976, 102–115 (РЖМат, 1977, 4А729).

Т-4. Тимошенко, В.В.: *О три-тканях над алгеброй, кривизна которых является делителем нуля.* Укр. геом. сб. **20** (1977), 102–114 (РЖМат, 1977, 11А632).

Т-5. Тимошенко, В.В.: *О три-тканях над алгеброй, кривизна которых является делителем нуля.* Изв. вузов. Матем. **1977**, N 3, 116–118 (РЖМат, 1977, 12А777).

Т-6. Тимошенко, В.В.: *Три-ткани над некоторыми классами коммутативных ассоциативных алгебр.* Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1978, 104–111 (РЖМат, 1979, 4А746).

Т-7. Тимошенко, В.В.: *О структуре многомерной три-ткани, являющейся вещественной реализацией три-ткани над коммутативной ассоциативной алгеброй.* Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1979, 93–100 (РЖМат, 1980, 9А652).

Т-8. Тимошенко, В.В.: *О 4-тканях над коммутативными ассоциативными алгебрами.* Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1981, 104–111 (РЖМат, 1983, 3А707).

Т-9. Тимошенко, В.В.: *d-ткани на двумерном многообразии над коммутативной ассоциативной алгеброй A и их вещественные реализации.* Геометрия погруженных многообразий, М., Моск. гос. пед. ин-т, 1989, 90–94 (РЖМат, 1992, 7А706; MR 93g:53003; Zbl 780:53013).

То-1. Толстихина, Г.А.: *О четырехмерных тканях с симметричным тензором кривизны.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, 12–22 (РЖМат, 1982, 1А891).

То-2. Толстихина, Г.А.: *Об инвариантных трансверсальных распределениях четырехмерных три-тканей.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, 115–120 (РЖМат, 1982, 12А737).

То-3. Толстихина, Г.А.: *О классификации четырехмерных три-тканей W.* Материалы 5 конференции молодых ученых УДН, Часть 1, М., УДН, 1982, 43-46. Деп. в ВИНИТИ АН СССР 15.07.1982, N 3814-82 (РЖМат, 1982, 11А616Деп.)

То-4. Толстихина, Г.А.: *Об одном свойстве 4-ткани, имеющей групповую подткань.* Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, 121–128 (РЖМат, 1985, 10А718).

То-5. Толстихина, Г.А.: *О главных направлениях на r-мерной поверхности, определяемых $2r$-мерной три-тканью.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 99–107 (РЖМат, 1987, 7А725).

То-6. Толстихина, Г.А.: *О связности, индуцируемой идемпотентной квазигруппой на гладком многообразии многомерной три-ткани.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 16–23 (РЖМат, 1988, 6А793).

То-7. Толстихина, Г.А.: *О сердцевине координатной квазигруппы некоторой шестимерной три-ткани Боля.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1990, 18–22 (РЖМат, 1991, 1А808).

То-8. Толстихина, Г.А.: *Сеть линий, определяемая грассманизуемой три-тканью на гладком подмногообразии.* Изв. вузов. Матем. **1990**, N 7 (338), 83–87 (РЖМат, 1991, 5А629; MR 92b:53018; Zbl 714:53018).

То-9. Толстихина, Г.А.: *The locally symmetric S-structure determined by a Bol web.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1991, 147–155 (РЖМат, 1993, 3А591).

То-10. Толстихина, Г.А.: *О локально плоской структуре, связанной с тканью Боля.* Алгебраические методы в геометрии. Сборник научных трудов. М., УДН, 1992, 56–61 (РЖМат, 1994, 2А592; Zbl 805:53012.)

То-11. Толстихина, Г.А.: *On subquasigroups of idempotent quasigroup defined by a three-web.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1993, 51–55 (РЖМат, 1993, 11А578).

То-12. Толстихина, Г.А.: *On subquasigroups of idempotent quasigroup defined by a three-web, II.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1994, 57–59 (РЖМат, 1995, 8А157).

То-13. Толстихина, Г.А.: *On deformation of multidimensional 3-webs.* Webs and Quasigroups,Tver, Tver State Univ., 1995, 127–134 (РЖМат, 1997, 3А443).

То-14. Толстихина, Г.А.: *On associative smooth monoids.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2002, 53–59.

То-15. Толстихина, Г.А.: *Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей.* Современная математика и ее приложения (Итоги науки и техники ВИНИТИ) **32** (2005), 29–116.

То-16. Толстихина, Г.А.: *К геометрии гладких отображений $R^q \times R^p \to R^\lambda$, обобщающих группы.* Вестник Тверского гос. ун-та, серия Прикладная математика, вып. 5, N 11(39), 2007, 19–38.

ТоШ-1. Tolstikhina, G.A.; Shelekhov, A.M.: *On normal subwebs of multidimensional three-webs and ideals of its tangent W-algebras.* Webs and quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1998–99, 85–91.

ТоШ-2. Толстихина, Г.А.; Шелехов, А.М. : *О три-тканях W(p,q,p+q-1), на которых замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера* Деп. в ВИНИТИ РАН, М., 2001, N 1869-B2001, 46 стр.

ТоШ-3. Толстихина, Г.А.; Шелехов, А.М.: *Обобщенная ассоциативность в гладких группоидах.* Доклады РАН **383** (2002), N 1, 32–33.

ТоШ-4. Tolstikhina, G.A.; Shelekhov, A.M.: *The three-web defined by affine transformation group.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2002, 46–48.

ТоШ-5. Толстихина, Г.А.; Шелехов, А.М.: *Три-ткани, определяемые группами преобразований.* Доклады РАН **385** (2002), N 4, 1–3.

ТоШ-6. Толстихина, Г.А.; Шелехов, А.М.: *Многоточечные инварианты групп преобразований и определяемые ими три-ткани.* Изв. вузов. Матем. **2003**, N 11(498), 82–87.

ТоШ-7. Толстихина, Г.А.; Шелехов, А.М.: *Вложение три-ткани, определяемой группой преобразований, в групповую три-ткань.* Тверь, Тверской госуниверситет, деп. В ВИНИТИ 08.05.2003, N 880-B2003, 17 с., библ. 9.

ТоШ-8. Tolstikhina, G.A.; Shelekhov, A.M.: *Three-webs defined by transformations groups.* Proc. of International Conference «Loops-03», Prague, 2003, Vol. 1, 218–221.

ТоШ-9. Толстихина, Г.А.; Шелехов, А.М.: *О квазигруппах Бола преобразований.* Докл. РАН **401** (2005), N 2, 166–168.

ТоШ-10. Толстихина, Г.А.; Шелехов, А.М.: *О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей.* Изв. Вузов. матем. **2005**, N 5(516), 56–62.

Тм-1. Томсен (Thomsen, G.): *Un teoreme topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isotermo-asintotiche.* Boll. Un. Mat. Ital. Bologna **6** (1927), 80–85.

Тр-1. Трофимов, В.В.: *Введение в геометрию многообразий с симметриями.* М., МГУ, 1989 (РЖМат, 1990, 1А624К).

У-1. Уткин, А.А.: *О три-ткани, определяемой на поверхности норм-кривой.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, 71–77 (РЖМат, 1986, 8А795).

У-2. Уткин, А.А.: *О существовании координатной три-ткани Дарбу на гладкой поверхности в пространстве N^3.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 113–119 (РЖМат, 1987, 7А703).

У-3. Уткин, А.А.: *О соприкасающихся кубических сферах поверхности пространства N^3.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 51–58 (РЖМат, 1988, 6А776).

У-4. Уткин, А.А.: *О геометрическом условии принадлежности тройки кривых трехмерного пространства одной норм-кривой.* Изв. вузов. Матем. **1989**, N 5, 82–84 (РЖМат, 1989, 10А632).

У-5. Уткин, А.А.: *On connections determined by a normal cubic on a smooth surface.* Webs and Quasigroups, 1992, Tver, Tver State Univ., 97–105.

У-6. Уткин, А.А.: *On some geometric sign of algebraizability criterion for a triple of curves.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1995, 135–138 (MR 97h:53007; Zbl 845:53012).

УШ-1. Уткин, А.А.; Шелехов, М.А.: *К геометрии гладкой поверхности пространства N^3.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 120–128 (РЖМат, 1987, 7А704).

УШ-2. Уткин, А.А.; Шелехов, М.А.: *On local classification of curvilinear three-webs.* Webs and quasigroups, Tver State Univ., 1998–99, 76–85.

УШ-3. Уткин, А.А.; Шелехов, М.А.: *О три-тканях, определяемых линейным дифференциальным уравнением первого порядка.* Изв. вузов. Матем. **2001**, N 11(474), 54–57.

УШ-4. Уткин, А.А.; Шелехов, М.А.: *Три-ткани, определяемые уравнением Риккати.* Изв. Вузов. Матем. **2004**, N 11(510), 87–90.

УШ-5. Уткин, А.А.; Шелехов, М.А.: *Классификация криволинейных три-тканей* Современная математика и ее приложения (Итоги науки и техники ВИНИТИ) **32** (2005), 117–150.

Ум-1. Ухмыленко, В.Н.: *Об одной классификации криволинейных 4-тканей в четырехмерном многообразии.* Ткани и квазигруппы, Калинин, КГУ, 1988, 130–135 (РЖМат, 1988, 6А800).

Ум-2. Ухмыленко, В.Н.: *Об одной классификации криволинейных 5-тканей в пятимерном многообразии.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1990, 29–32 (РЖМат, 1991, 1А810).

Ф-3. Федорова, В.И.: *О три-тканях с частично-кососимметричным тензором кривизны.* Изв. вузов. Матем. **1976**, N 11, 114–117 (РЖМат, 1977, 6А556).

Ф-4. Федорова, В.И.: *Об одном классе три-тканей W_6 с частично-кососимметричным тензором кривизны.* Укр. геом. сб. **20** (1977), 115–124 (РЖМат, 1977, 11А633).

Ф-5. Федорова, В.И.: *Об условии, определяющем многомерные три-ткани Боля.* Сиб. мат. ж. **19** (1978), N 4, 922–928 (РЖМат, 1978, 12А1076).

Ф-6. Федорова В. И. *Шестимерные три-ткани Боля с симметричным тензором a_{ij}.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, 110–123.

Ф-7. Федорова, В.И.: *Об интерпретации шестимерной три-ткани Боля в трехмерном проективном пространстве.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, 142–148 (РЖМат, 1982, 12А739).

Ф-8. Федорова, В.И.: *О классификации шестимерных три-тканей Боля.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1984, 124–132 (РЖМат, 1985, 1А844).

Фн-1. Феньвеш (Fenyves, F.): *Extra loops I.* Publ. Math. Debrecen **15** (1968), 235–238 (РЖМат, 1969, 11А201; MR **38** #5976; Zbl. **172**, p. 24).

Фн-2. Феньвеш (Fenyves, F.): *Extra loops II: On loops with identities of Bol–Moufang type.* Publ. Math. Debrecen **16** (1969), 187–192 (1970) (РЖМат, 1971, 6А251; MR **41** #7017; Zbl. 221.20097).

Фе-1. Ферапонтов, Е.В.: *Слабо нелинейные полугамильтоновы системы дифференциальных уравнений с точки зрения теории тканей.* Уч. зап. Тартусского ун-та, **803** (1988), 103–114 (РЖМат, 1989, 2А709).

Фе-2. Ферапонтов, Е.В.: *Системы трех дифференциальных уравнений гидродинамического типа с шестиугольной три-тканью из характеристик на решениях.* Функцион. анализ и его прил. **23** (1989), N 2, 79–80.

Фе-3. Ферапонтов, Е.В.: *Интегрирование слабо нелинейных полугамильтоновых систем гидродинамического типа методами теории тканей.* Мат. сб. **181** (1990), N 9, 1220–1235.

Фе-4. Ферапонтов, Е.В.: *Уравнения гидродинамического типа с точки зрения теории тканей.* Мат. заметки **50** (1991), N 5, 97–108 (РЖМат, 1992, 8А546).

Фе-5. Ферапонтов, Е.В.: *Web Gemetry and Mathematical Physics.* В кн.: Акивис, М.А.; Шелехов, А.М. *Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992, с. 310–323 (см. [АШ-12]).

Фк-1. Фиников, С.П.: *Метод внешних форм Картана.* М.-Л., Гостехиздат, 1948.

ФоГо-1. Фоменко, А.Т.; Гольдберг, В.В.; Кириченко, В.Ф.; Рыжков, В.В.; Шелехов, А.М.: *Макс Айзикович Акивис.* Webs and Quasigroups, 1993, Tver, Tver State Univ., 4–8 (РЖМат, 1994, 1А24).

ФоГо-2. Фоменко, А.Т.; Гольдберг, В.В.; Кириченко, В.Ф.; Рыжков, В.В.; Шелехов, А.М.: *Макс Айзикович Акивис.* Успехи матем. наук, 48 (1993), no. 3 (291), 213–216 (MR1243632; Zbl 967:01510).

ФоГо-3. Фоменко, А.Т.; Гольдберг, В.В.; Фридман, Я.; Кириченко, В.Ф.; Шелехов, А.М.: *Maks Aizikovich Akivis.* Webs and Quasigroups 1998-1999, Tver, Tver State Univ., 1999, 7–11 (MR1754038 (2001c:01028a); Zbl 924:01015).

ФоГо-4. Фоменко, А.Т.; Гольдберг, В.В.; Кириченко, В.Ф.; Лычагин, В.В.; Шелехов, А.М.: *Maks A. Akivis.* J. Generalized Lie Theory and Appl. 2 (2008), no. 1, 1–18 (MR2383544 (2008k:53030)).

Хн-1. Ханган (Hangan, Th.): *Géométrie différentielle grassmannienne.* Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **11** (1966), no. 5, 519–531 (РЖМат, 1967, 3А429; MR **34** #744; Zbl. **163**, p. 434).

Хт-1. Хартсхорн (Hartshorn, R.): *Алгебраическая геометрия.* М., Мир, 1981.

Ф-1. Хасина (Федорова), В.И.: *О шестимерных тканях Муфанг.* Сборник статей по дифференциальной геометрии, Калинин, Калининский гос. désinstitut, 1975, вып. 2, 35–39 (РЖМат, 1976, 3А822).

Ф-2. Хасина (Федорова), В.И.: *О многомерных три-тканях с эластичными W-алгебрами.* Сиб. мат. ж. **17** (1976), N 4, 945–959 (РЖМат, 1976, 2А735).

Хел-1. Хелгасон, С.: *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.* М., Мир, 1964.

Хе-1. Хено (Heńaut, A.): *Sur la linéarisation des tissus de* $\mathbf{C}^2$. Topology **32** (1993), 531–542 (MR 94g:53013; Zbl 799:32010).

Хе-2. Хено (Hеńaut, A.): *Caractérisation des tissus de* $\mathbf{C}^2$ *dont le rang est maximal et qui sont linéarisables.* Compositio Math. **94** (1994), 247–268 (MR 96a:32057; Zbl 877:53013).

Хе-3. Хено (Hеńaut, A.): *Introduction à la géométrie des tissus.* L'École Doctorate de Mathématique de Bordeaux, 1994, 122 pp.

Хе-4. Хено (Hеńaut, A.): *Systèmes différentiels, nombre Castelnuovo et rang des tissus de* $\mathbf{C}^n$. Publ. R. I. M. S., Kyoto Univ. **31** (1995), 703–720 (MR 97b:32042).

Хе-5. Хено (Hеńaut, A.): *On the linearization problem and some questions for webs in* $\mathbf{C}^2$. Algebraic Geometry and Singularities, La Ràbida 1991, Progress in Math. **134**, Birkhäuser, Basel, 1996, 197–207 (MR 97h:14010; Zbl 858:53016).

Хе-6. Хено (Hеńaut, A.): *Tissus linéaires et théorèmes d'algébrisation de type Abel-inverse et Reiss-inverse.* Geom. Dedicata **65** (1997), 89–101 (РЖМат, 1997, 12А402) (MR 98g:14010; Zbl 868:53015).

Хе-7. Хено (Hеńaut, A.): *Sur l algébrisation des tissus de codimension n de* $\mathbf{C}^{2n}$. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998), no. 1, 131–143 (MR 99a:53012).

Хе-8. Хено (Hеńaut, A.): *Sur la géométrie des tissus.* Actes des Journées sur les Tissus, Toulouse 1996 (to appear).

ХП-1. Ходж, Пидо (Hodge, W.V.D.; Pedoe, D.): *Методы алгебраической геометрии.* Т.1 — М., ИЛ, 1954; Т.2 — М., ИЛ, 1954 (РЖМат, 1956, 5454К); Т.3 — М., ИЛ, 1955.

Х-1. Холмс (Holmes, J.P.): *Differentiable power associative groupoids.* Pacif. J. Math. **42** (1972), no.2, 391–394 (РЖМат, 1973, 1Б625).

ХС-1. Холмс, Сейгл (Holmes, J.P.; Sagle, A.A.): *Analytic H-spaces, Campbell-Hausdorff formula, and alternative algebras.* Pacific J. Math. **91** (1980), no. 1, 105–134 (РЖМат, 1981, 11А300; MR 82d:17005; Zbl. 448.17016).

ХШ-1. Хофман, Штрамбах (Hofmann, K.H., Strambach, K.) *Lie's fundamental theorems for local analytical loops.* Pacific J. Math. **123** (1986), no. 2, 301–327 (РЖМат, 1987, 2А479; MR 87k:17002; Zbl. 596.22002).

ХШ-2. Хофман, Штрамбах (Hofmann, K.H., Strambach, K.) *The Akivis algebra of a homogeneous loop.* Mathematika **33** (1986), no. 1, 87–95 (РЖМат, 1987, 3А268; MR 88d:17003; Zbl. 601.22002).

ХШ-3. Хофман, Штрамбах (Hofmann, K.H., Strambach, K.) *Topological and analytic loops.* Глава IX в книге *Quasigroups and loops: theory and applications*, с. 205–262. Heldermann-Verlag, Berlin, 1990, см. [ЧПС-1].

ХШ-4. Хофман, Штрамбах (Hofmann, K.H., Strambach, K.) *Torsion and curvature in smooth loops.* Publ. Math. Debrecen **38** (1991), no. 3–4, 189–214 (РЖМат, 1992, 2А623).

Ц-1. Царев, С.П.: *О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа.* ДАН СССР **282** (1985), N 3, 534–537 (РЖМат, 1985, 11Б749).

Ц-2. Царев, С.П.: *Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа.* Изв. АН СССР **54** (1990), N 5, 1048–1058.

Ча-1. Чакмазян, А.В.: *О плоскостной три-ткани в проективном пространстве.* ДАН Арм. ССР **56** (1973), 263–268 (РЖМат, 1974, 4А554; MR **49** #1342).

Ча-2. Чакмазян, А.В.: *О геодезических три-тканях на двумерном многообразии аффинной связности.* ДАН Арм. ССР **59** (1974), 136–140 (РЖМат, 1975, 10А550; MR **51** #11310; Zbl 309:53020).

Чб-1. Чеботарев, Н.Г.: *О поверхностях переноса.* Матем. сб. **31** (1924), 434–445.

Чб-2. Чеботарев, Н.Г.: *Поверхности переноса в многомерном пространстве.* Тр. Всесоюзн. матем. съезда, М., 1927, 232–234.

ЧПС-1. Чейн, Пфлюгфельдер, Смит (Chein, O.; Pflugfelder, H.; Smith, J.D.H.) — ред.: *Quasigroups and loops: theory and applications.* Heldermann-Verlag, Berlin, 1990, xii+568 pp. (Zbl. 704.00017).

Чен-1. Ченцова, И.А.: *О точечных соответствиях между тремя кривыми, заданными на проективных плоскостях.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1990, 77–83 (РЖМат, 1991, 1А796; MR 91h:53026; Zbl 701:53023).

Ч-1. Черн (Chern, S.S.): *Eine Invariantentheorie der Dreigewebe aus r-dimensionalen Mannigfaltigkeiten in* $\mathbf{R}_{2r}$. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1936), no. 1–2, 333–358 (Zbl. **13**, p. 418).

Ч-2. Черн (Chern, S.S.): *Abzählungen für Gewebe.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **11** (1936), no. 1–2, 163–170 (Zbl. **11**, p. 132).

Ч-3. Черн (Chern, S.S.): *Web geometry.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **6** (1982), no. 1, 1–8 (РЖМат, 1982, 9А600; MR 84g:53024; Zbl. 483.53012).

Ч-4. Черн (Chern, S.S.): *The Mathematical works of Wilhelm Blaschke—an update.* Wilhelm Blaschke Gesammelte Werke, Thales-Verlag, Essen, Vol. 5 (1985), 21–23 (MR 89a:01100; Zbl 656:53003).

Ч-5. Черн (Chern, S.S.): *Wilhelm Blaschke and web geometry.* In Wilhelm Blaschke Gesammelte Werke, Thales-Verlag, Essen, Vol. 5 (1985), 25–28 (MR 89a:01100; Zbl 656:53003).

ЧГ-1. Черн, Гриффитс (Chern, S.S.; Griffiths, Ph.): *Linearization of webs of codimension one and maximum rank.* Proc. Intern. Symp. on Algebraic Geometry, 1977, Kyoto, Japan, 85–91 (MR 81k:53010; Zbl. 406.14003).

ЧГ-2. Черн, Гриффитс (Chern, S.S.; Griffiths, Ph.): *Abel's theorem and webs.* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **80** (1978), no. 1–2, 13–110 (РЖМат, 1978, 12А1078; MR 80b:53008; Zbl. 386.14002).

ЧГ-3. Черн, Гриффитс (Chern, S.S.; Griffiths, Ph.): *An inequality for the rank of a web and webs of maximum rank.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **5** (1978), no. 3, 539–557 (РЖМат, 1979, 4А655; MR 80b:53009.; Zbl. 402.57001).

ЧГ-4. Черн, Гриффитс (Chern, S.S.; Griffiths, Ph.): *Corrections and addenda to our paper «Abel's theorem and webs».* Jahresber. Deutsch. Math.-Verein **83** (1981), 78–83 (РЖМат, 1981, 11А474; MR 82k:53030; Zbl. 474.14003).

Шн-1. Шандра, И.Г.: *On an isotranslated $n\pi$-structure and connections preserving a non-holonomic $(n+1)$-coweb.* Webs and Quasigroups, 1994, Tver, Tver State Univ., 60–66 (РЖМат, 1995, 6А487).

Шв-1. Шварц, Л.: *Анализ.* М., Мир, 1972.

Шей-1. Шейдерер (Scheiderer, C.): *Gewebegeometrie 10.6 bis 16.6.1984.* Tagungsbericht 27/1984, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 1984.

Ш-1. Шелехов, А.М.: *Об одном классе три-тканей.* Дифф. геометрия, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1977, 130–137 (РЖМат, 1977, 12А776).

Ш-2. Шелехов, А.М.: *О локальных алгебрах циклической три-ткани.* Дифф.геометрия многообразий фигур, Калининград, Калининградский гос. ун-т, 1980, вып.11, 115–122 (РЖМат, 1981, 1А714).

Ш-3. Шелехов, А.М.: *О восьмимерных циклических три-тканях.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, 124–135 (РЖМат, 1982, 1А895).

Ш-4. Шелехов, А.М.: *О три-тканях с частично симметричным тензором кривизны.* Сиб. мат. ж. **1** (1981), 210–219 (РЖМат, 1981, 6А685).

Ш-5. Шелехов, А.М.: *Об алгебраической восьмимерной три-ткани на многообразии пучков кривых второго порядка.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, 133–142 (РЖМат, 1982, 12А738).

Ш-6. Шелехов, А.М.: *О характеристическом свойстве грассмановых тканей, определяемых кубическим симметроидом.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1984, 112–117 (РЖМат, 1985, 1А843).

Ш-7. Шелехов, А.М.: *Тождества с одной переменной в лупах, эквивалентные моноассоциативности.* Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, 89–93 (РЖМат, 1985, 10А257).

Ш-8. Шелехов, А.М.: *О замкнутых g-структурах, определяемых многомерными три-тканями.* Калинин, Калининский гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 25.12 1985, N 8815-В (РЖМат, 1986, 4А877 Деп.)

Ш-9. Шелехов, А.М.: *О вычислении ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, 96–103 (РЖМат, 1986, 8А796).

Ш-10. Шелехов, А.М.: *О тканях, определяемых детерминантной поверхностью.* Изв. вузов. Матем. **1986**, N 3, 84–86 (РЖМат, 1986, 8А792).

Ш-11. Шелехов, А.М.: *О дифференциально-геометрических объектах высших порядков многомерной три-ткани.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **19** (1987), 101–154 (РЖМат, 1988, 4А670).

Ш-12. Шелехов, А.М.: *О три-тканях с эластичными координатными лупами.* Калинин, Калининский гос. ун-т. Деп.в ВИНИТИ 2.12.1987, N 8465-В87 (РЖМат, 1988, 3А857 Деп).

Ш-13. Шелехов, А.М.: *Об автоморфизмах локальных аналитических луп.* Калинин, Калининский гос. ун-т. Деп.в ВИНИТИ 2.12 1987, N 8466-В87 (РЖМат, 1988, 4А441 Деп).

Ш-14. Шелехов, А.М.: *О три-тканях и квазигруппах, определяемых детерминантной гиперкубикой.* Томский геометр. сб., вып. 29, 1988, 55–64 (РЖМат, 1988, 12А706).

Ш-15. Шелехов, А.М.: *О касательной W_4-алгебре многомерной три-ткани.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 4–16 (РЖМат, 1988, 6А792).

Ш-16. Шелехов, А.М.: *Об инвариантных тензорах аналитической лупы.* Калинин, Калининский гос. ун-т. Деп.в ВИНИТИ 2.02 1988, N 887-В88 (РЖМат, 1988, 6А802ДЕП).

Ш-17. Шелехов, А.М.: *О каноническом разложении локальной аналитической моноассоциативной лупы.* Калинин, Калининский гос. ун-т. Деп.в ВИНИТИ 9.03 1988, N 1879-В88 (РЖМат, 1988, 7А224 Деп).

Ш-18. Шелехов, А.М.: *On the closed G-structure associated to a hexagonal 3-web.* Diff. Geom. and Appl./Proc. of Conf. Dubrovnic, June 26–July 3, 1988. Univ. Novi Sad, Novi Sad, 1989, 323–326.

Ш-19. Шелехов, А.М.: *О касательных алгебрах многомерной три-ткани и локальной аналитической лупы.* Калинин, Калининский гос. ун-т. Деп.в ВИНИТИ 2.01 1989, N 8-В89 (РЖМат, 1989, 4А657 Деп).

Ш-20. Шелехов, А.М.: *Об интегрировании замкнутых g_W-структур.* Калинин, Калининский гос. ун-т. Деп.в ВИНИТИ, 26.07 1989, N 5031-В89 (РЖМат, 1989, 12А722 Деп).

Ш-21. Шелехов, А.М.: *The g-structure associated with a multidimensional hexagonal* 3*-web, is closed.* J. Geom. 35 (1989), 167–176 (MR 90h:53022; Zbl. 699.53025).

Ш-22. Шелехов, А.М.: *Классификация многомерных три-тканей по условиям замыкания.* Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР) **21**, 1989, 109–154 (РЖМат, 1990, 5А712).

Ш-23. Шелехов, А.М.: *Вычисление вторых ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1990, 49–55 (РЖМат, 1991, 1А807).

Ш-24. Шелехов, А.М.: *Автотопии три-тканей и геометрические три-ткани.* Изв. вузов. Матем. **1990**, N5, 75–77 (РЖМат, 1991, 5А628).

Ш-25. Шелехов, А.М.: *Structure of analytic Moufang three-webs.* В кн.: Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике, Тарту, 1990, 79–88 (РЖМат, 1991, 8А686).

Ш-26. Шелехов, А.М.: *The loops identities and the closed G_W-structures.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1991, 138–146 (РЖМат, 1993, 3А187).

Ш-27. Шелехов, А.М.: *New closure conditions and some problems in loop theory.* Aequationes Math. **41** (1991), no. 1, 79–84 (Zbl. 719.20037).

Ш-28. Шелехов, А.М.: *On the theory of G-webs and G-loops.* Global Differential Geometry and Global Analysis (Berlin, 1990), 265–271, Lecture Notes in Math. **1481**, Springer-Verlag, Berlin et al, 1991.

Ш-29. Шелехов, А.М.: *Об аналитических решениях уравнения $x(yx) = (xy)x$.* Матем. заметки **50** (1991), N 4, 132–140 (РЖМат, 1992, 5А550).

Ш-30. Шелехов, А.М.: *Regular automorphisms of 3-webs and kernels of loops.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1992, 106–116.

Ш-31. Шелехов, А.М.: *The isotopically invariant loop variety lying between Moufang loop variety and Bol loop variety.* Proc. of the 3rd International Confer. in Geometry. Thessaloniki/Greece 1991, 376–384 (1992) (MR 93i:20087; Zbl 763:53018).

Ш-32. Шелехов, А.М.: *A good formula for 3-web curvature tensor.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1993, 44–50 (РЖМат, 1993, 11А577).

Ш-33. Шелехов, А.М.: *On a subclass of Bol loops.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1994, 27–33 (РЖМат, 1995, 8А153).

Ш-34. Шелехов, А.М.: *The structure of Bol web E_1.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1994, 34–46 (РЖМат, 1995, 6А486).

Ш-35. Шелехов, А.М.: *Three-webs whose coordinate loops are left conjugacy closed.* Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1995, 114–126 (РЖМат, 1997, 3А432).

Ш-36. Шелехов, А.М.: *Multidimensional three-webs whose coordinate loops are conjugacy closed.* Webs and Quasigroups 1996–1997, Tver, Tver State Univ., 1997, 40–53 (РЖМат, 1998, 11А499).

Ш-37. Шелехов, А.М.: *Isoclinic cc-webs.* Webs and Quasigroups 1996–1997, Tver, Tver State Univ., 1997, 54–64 (РЖМат, 1998, 11А500).

Ш-38. Шелехов, А.М.: *Generalized St. Rober's condition for multidimensional 3-webs.* Webs and quasigroups 1998–99, Tver, Tver State Univ., 99, 67–71.

Ш-38. Шелехов, А.М.: *Криволинейные три-ткани, допускающие однопараметрическое семейство автоморфизмов.* Изв. вузов. Матем. **2005**, N 5(516), 68–70.

Ш-39. Шелехов, А.М.: *О три-тканях, образованных пучками окружностей.* Современная математика и ее приложения (Итоги науки и техники ВИНИИ). **32** (2005), 7–28.

Ш-40. Шелехов, А.М.: *Об условиях линеаризуемости гладких отображений грассмановых многообразий.* В сб. Теория функций и ее приложения. Материалы Всероссийской научной конф. Тверь, 2009, с. 89–94.

ШД-1. Шелехов, А.М.; Демидова, Л.А.: *О некоторых фигурах замыкания на три-ткани.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, 42–47 (РЖМат, 1982, 1А892).

ШП-1. Shelekhov, A.M.; Pidzhakava, L.M.: *A remark on A-webs.* Webs and quasigroups 1998–99, Tver State Univ., 1999, 71–75.

ШП-2. Shelekhov, A.M.; Pidzhakava, L.M.: *On three-webs with covariantly constant torsion and curvature tensors.* Webs and quasigroups 1998–1999, Tver State Univ., 1999, 92–103.

ШШ-1. Шелехов, А.М.; Шестакова, М.А.: *О геометрическом доказательстве универсальности некоторых тождеств в лупах.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1984, 118–124 (РЖМат, 1985, 1А325).

ШШ-2. Шелехов, А.М.; Шестакова, М.А.: *О тождествах в лупах со слабой ассоциативностью.* Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, 115–121 (РЖМат, 1985, 10А258).

Шс-1. Шестакова, М.А.: *Структурные уравнения шестимерной шестиугольной три-ткани.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, 140–145 (РЖМат, 1988, 6А801).

Шс-2. Шестакова, М.А.: *Пример шестиугольной три-ткани с частично симметричным тензором кривизны.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1990, 22–29 (РЖМат, 1991, 1А809).

Шс-3. Шестакова, М.А.: *On the theory of six-dimensional hexagonal three-webs.* Webs and Quasigroups, 1993, Tver, Tver State Univ., 56–62 (РЖМат, 1993, 11А579).

Шс-4. Шестакова, М.А.: *Characterization of some hexagonal 3-web in terms of associated Lie algebras.* Webs and Quasigroups 1996–1997, Tver, Tver State University, 1997, 133–141 (РЖМат, 1998, 11А504).

Шс-5. Шестакова, М.А.: *On geometry of a six-dimensional hexagonal three-web* H^1_s. Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2002, 106–117.

Шф-1. Шефферс (Scheffers, G.): *Das Abel'sche Theorem und das Lie'sche Theorem über Translationflächen.* Acta Math. **28** (1904), 65–91.

Ер-1. Эрдоган (Erdogan, H. I.): *Düzlemde 6-gen doku teşkil eden čember demety 3-üzleri.* Ph. D. Thesis, Istanbul Teknik Ueniversitesi, Istanbul, 1974.

Ер-2. Эрдоган (Erdogan, H. I.): Erdogan, H. I., *Triples of circle-pencils forming a hexagonal three-web in* E^2. J. Geom. **35** (1989), no. 1/2, 39–65 (MR 91a:53031; Zbl 677:51016).

Ер-3. Эрдоган (Erdogan, H. I.): *Hexagonal-surface-webs formed by n pencils of spheres belonging to the same bundle.* J. Geom. **38** (1990), no. 1/2, 39–41 (MR 91e:53025; Zbl 677:51016).

Ер-4. Эрдоган (Erdogan, H. I.): *Die Sechseck-n-Waben in der Ebene, welche von n Kreis büscheln erzeugt werden.* J. Geom. **40** (1991), no. 1/2, 47–59 (MR 92a:51021; Zbl 732:53013).

Я-1. Ямагути (Yamaguti, K.): *On algebras of totally geodesic space (Lie triple systems).* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser A **21** (1957), no. 2, 107–113 (РЖМат, 1960, 4982; MR **20** #6482; Zbl **84**, p. 184).

Я-2. Ямагути (Yamaguti, K.): *On the Lie triple system and its generalization.* J. Sci. Hiroshima Univ. Ser A **A21** (1958), 155–160 (MR **20** #6483; Zbl **84**, p. 184).

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Научное издание

АКИВИС Макс Айзикович
ШЕЛЕХОВ Александр Михайлович

МНОГОМЕРНЫЕ ТРИ-ТКАНИ
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Монография

Оригинал-макет: Н.Л. Иванова
Технический редактор: А.В. Жильцов

Подписано в печать 27.01.2010. Формат 60×90 1/8.
Усл. печ. л. 32. Тираж 300 экз. Заказ 28.
Тверской государственный университет
Редакционно-издательское управление
Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.
Тел. РИУ: (4822) 35-60-63