

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тверской государственный университет»

А.М. Шелехов, В.Б. Лазарева, А.А. Уткин

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТРИ-ТКАНИ
(дифференциально-топологическая теория)

Монография

ТВЕРЬ 2013

УДК 514.763.7
ББК В151.62
Ш 42

Шелехов А.М., Лазарева В.Б., Уткин А.А.

Криволинейные три-ткани: монография. — Тверь: Твер. гос. ун-т, 2013. — 232 с., илл. 44, библ. 107.

ISBN 978-5-7609-0798-1

Допущено Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия по спецкурсу для студентов, аспирантов и магистрантов вузов, обучающихся по специальностям "Математика" "Прикладная математика" "Компьютерная безопасность".

Книга включает теорию криволинейных три-тканей и ее приложения, в частности, к теории гладких квазигрупп и луп, к дифференциальным уравнениям. В ней собраны все существенные результаты, полученные за последние 50 лет. Каждая глава сопровождается набором задач.

Книга предназначена для студентов и аспирантов, научных работников и преподавателей, специализирующихся по дифференциальной геометрии и ее приложениям.

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор *В.Ф. Кириченко*

Доктор физико-математических наук, профессор *Л.Е. Евтушик*

ISBN 978-5-7609-0798-1

© Шелехов А.М., Лазарева В.Б.
Уткин А.А., 2013

Все права на издание книги, использование и воспроизведение содержащихся в ней материалов принадлежат авторам.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Основные понятия, связанные с криволинейными три-тканями	10
§ 1.1. Определение криволинейной ткани. Область определения три-ткани, границы	10
§ 1.2. Эквивалентные три-ткани. Регулярные три-ткани	14
§ 1.3. Условия регулярности три-ткани	19
§ 1.4. Координатные квазигруппы и луны три-ткани	23
§ 1.5. Конфигурации на три-тканях	27
§ 1.6. Конфигурации на три-тканях и тождества в координатных лунках	32
§ 1.7. Основная теорема о шестиугольных три-тканях.	33
§ 1.8. Прямолинейные три-ткани.	37
§ 1.9. Грассмановы три-ткани и «проблема анаморфозы»	41
§ 1.10. Три-ткани и универсальные тождества	45
§ 1.11. Канонические координаты на три-ткани и в ее координатной лунке	54
Задачи	58
Глава 2. Дифференциальная геометрия криволинейных три-тканей.	64
§ 2.1. Структурные уравнения криволинейной три-ткани	64
§ 2.2. Криволинейные три-ткани, у которых одна из ковариантных производных кривизны равна нулю	69
§ 2.3. Три-ткани, определяемые линейным дифференциальным уравнением.	74
§ 2.4. Три-ткани, определяемые уравнением Риккати	78
§ 2.5. Автоморфизмы криволинейной три-ткани	82
§ 2.6. Структурные уравнения грассмановой три-ткани.	87
§ 2.7. Эквивалентность грассмановых тканей и проблема Гронвола	91
§ 2.8. Инвариантная характеристика спрямляемых три-тканей	96
§ 2.9. Инвариантные формы нерегулярной три-ткани	102
Задачи	104
Глава 3. Круговые три-ткани	108
§ 3.1. Уравнение круговой три-ткани. Границы. Интерпретация Дарбу	108

§ 3.2. Регулярные круговые три-ткани.	111
§ 3.3. Пары пучков окружностей, для которых граничная кривая Γ распадается.	117
§ 3.4. Классификация регулярных круговых три-тканей параболического типа.	123
§ 3.5. Классификация регулярных круговых три-тканей, у которых по крайней мере два пучка не принадлежат одной связке.	128
§ 3.6. Классификация регулярных круговых три-тканей с точностью до круговых преобразований.	131
Задачи.	140
Глава 4. Три-ткани Бурау.	141
§ 4.1. Задача о триангуляции плоскости семействами коник. Три-ткани Бурау. Классификация пучков коник.	141
§ 4.2. Конструкции на кубической поверхности, связанные с три-тканями Бурау.	145
§ 4.3. Регулярные специальные три-ткани Бурау вида W_1 и перспективно эквивалентные им ткани вида \widetilde{W}_1 . Случай 1: две из образующих ℓ_i имеют общую точку.	150
§ 4.4. Регулярные специальные три-ткани Бурау вида W_2 и перспективно эквивалентные им ткани вида \widetilde{W}_2 . Случай 2: образующая ℓ_2 пересекает образующие ℓ_1 и ℓ_3	157
§ 4.5. Регулярные специальные три-ткани Бурау вида W_3 и перспективно эквивалентные им ткани вида \widetilde{W}_3 . Случай 3: все три образующие ℓ_i лежат в одной плоскости.	169
§ 4.6. Проективная классификация регулярных три-тканей, перспективно эквивалентных специальным регулярным три-тканям Бурау.	175
Задачи.	184
Глава 5. Три-ткани, определяемые кубическим абсолютом.	185
§ 5.1. Координатные три-ткани на поверхностях в пространстве Ашеля.	185
§ 5.2. Координатные три-ткани на поверхностях триаксиального пространства.	191
§ 5.3. Координатные три-ткани на поверхностях в пространстве с кубическим абсолютом.	194
§ 5.4. Координатные три-ткани на поверхностях в пространстве кубической метрики.	203
§ 5.5. Три-ткани, образованные семействами окружностей.	209
Задачи.	214
Приложение 1. Вычисление ковариантных производных кривизны три-ткани через частные производные от функции ткани.	216
Список основных обозначений.	219

Оглавление 5

Список литературы 221

Предметный указатель 228

ПРЕДИСЛОВИЕ

k -тканью называют совокупность k гладких слоений на гладком многообразии. Простейшие ткани — это сети на поверхности в евклидовом, аффинном или проективном пространстве. Их обобщение привело к наиболее широкому понятию — к многомерной ткани, образованной слоениями разных, вообще говоря, размерностей.

В двадцатые годы 20 века В. Бляшке, Т. Томсен, К. Рейдемейстер и другие начали рассматривать k -ткани из кривых и из поверхностей с точностью до локальных диффеоморфизмов. Это наиболее широкое отношение эквивалентности, при котором сохраняется лишь инцидентность точек и слоев, образующих три-ткань. Главным объектом этой теории являются конфигурации, образованные слоями ткани, причем теория криволинейных тканей является содержательной при $k > 2$. Один из важнейших результатов того времени был получен Томсеном в [Тм-1]: всякая криволинейная три-ткань, на которой замыкаются шестиугольные конфигурации, локально диффеоморфна три-ткани, образованной тремя семействами параллельных прямых (подробное доказательство приведено в § 1.6).

Обзор результатов того времени имеется в книге «Геометрия тканей» (1938), написанной В. Бляшке совместно с Г. Боллом ([ББ-1]), см. также [БР-1].

С точностью до локальных диффеоморфизмов три-ткань вполне определяется уравнением вида $z = f(x, y)$, где f — гладкая функция. Поэтому теория тканей имеет разнообразные приложения в разных разделах математики и физики. В своей последней книге [Бл-1], посвященной теории тканей, Бляшке писал, что «геометрия тканей тесно связана с вопросами аксиоматического обоснования элементарной и проективной геометрии, алгебраической теорией групп, теорией непрерывных групп Ли, с проективной и алгебраической геометрией, с классической и проективной дифференциальной геометрией, с римановой геометрией и ее обобщениями, вариационным исчислением и теорией функций, с формами Пфаффа и дифференциальными уравнениями, теорией расслоенных пространств». К этому списку мы можем добавить теорию квазигрупп и луп, конформную геометрию, теоретическую физику.

Изначально основная проблема теории криволинейных три-тканей была связана с номографией и называлась «проблемой анаморфозы»: найти условие на функцию $f(x, y)$ (желательно в инвариантной фор-

ме), при котором определяемая ею три-ткань эквивалентна прямолинейной три-ткани. Эта задача связана с возможностью представления функции двух переменных одной из наиболее простых номограмм — так называемой номограммой из выравненных точек. Задача оказалась необычайно сложной, и полностью была решена совсем недавно. В сокращенном виде ее решение приведено во второй главе. Кроме того, в этой книге мы приводим решение и некоторых других проблем: проблемы Гронвола об эквивалентности прямолинейных тканей, проблемы Бляшке об описании всех регулярных тканей, образованных пучками окружностей, и некоторых других.

Проблемы, связанные с номографией, были сформулированы в конце 19 — начале 20 века, и с тех пор стимулировали развитие теории три-тканей. В дальнейшем это развитие затормозилось вследствие сложности указанных выше номографических проблем, и увлечения многомерными тканями. В итоге теория многомерных тканей стала интенсивно развиваться, а теория плоских (криволинейных) тканей долгое время оставалась в тени своей несомненно более богатой геометрическими фактами многомерной «соседки» и развивалась не столь интенсивно.

Настоящая книга восполняет указанный пробел. В ней собраны все содержательные результаты, полученные по теории криволинейных три-тканей за последние 50 лет. В этой книге мы используем некоторые результаты монографий [АШ-3] и [АШ-4], посвященных теории многомерных три-тканей, и детализируем их для плоского случая.

В первой главе рассматриваются основные понятия, связанные с три-тканью. В частности, подробно обсуждается вопрос о границах области определения ткани, дана классификация границ. Выведено условие Сен-Робера регулярности ткани, выраженное через производные третьего порядка от функции ткани. Указаны также два более эффективных признака регулярности — теорема о непараболических границах регулярной ткани, использующая производные не выше первого порядка от функции ткани, и условия линейаризации, вообще не использующие производных. С помощью теоремы о границах в гл. 3 решена проблема Бляшке о перечислении регулярных круговых тканей. Условия линейаризации удобно использовать для тканей, заданных алгебраическим уравнением, с их помощью в гл. 4 перечислены все регулярные специальные ткани Бурау.

В гл. 1 доказана теорема Томсена о регулярности шестиугольной три-ткани. Вводятся понятия координатных квазигрупп и луп ткани. Рассматриваются конфигурации на три-тканях и соответствующие им условные тождества в координатной квазигруппе и тождества в координатных лупах. С помощью три-ткани доказывается универсальность некоторых тождеств в лупах и обосновывается способ получения универсального (производного) тождества.

В этой же главе детально рассматриваются два важных класса тканей — прямолинейные и грассмановы. В связи с этим рассмот-

рены некоторые свойства кубических кривых. Доказаны теоремы Графа–Зауэра и Шаля, дающие условие регулярности прямолинейной и грассмановой три-ткани. Показано, что эти условия эквивалентны обобщению известной теоремы Паскаля для кривых второго порядка на случай кубической кривой (или теоремы Бриансона для кривой третьего класса). Вводятся канонические координаты в локальной гладкой лупе и на три-ткани, обобщающие канонические координаты в группе Ли. Доказано существование таких координат и указаны некоторые их свойства. Доказана теорема Дюфура [Дю-1]: всякое непрерывное отображение гладкой три-ткани на гладкую три-ткань является гладким.

Во второй главе рассматривается дифференциальная геометрия криволинейных три-тканей. Получены структурные уравнения три-ткани, формула для вычисления ее кривизны, указаны относительные и абсолютные дифференциальные инварианты. Доказывается, что ткани, у которых одна из ковариантных производных кривизны равна нулю, определяются некоторым обобщенным уравнением Абеля. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы три-ткань определялась а) линейным дифференциальным уравнением, б) уравнением Риккати. Найден вид уравнения ткани, допускающей однопараметрическое семейство автоморфизмов. Выведены структурные уравнения грассмановой три-ткани, доказано, что гладкое отображение грассмановой ткани на грассманову является обязательно проективным преобразованием, откуда вытекает положительное решение проблемы Гронвола, см. [Ш-8]. Приведено решение проблемы спрямляемости криволинейных тканей, данное в совместных работах В.В. Гольдберга и В.В. Лычагина.

В главе 3 рассматривается проблема, сформулированная В. Бляшке в середине 20 века: перечислить все регулярные ткани, образованные пучками окружностей (такие ткани мы называем круговыми). Мы приводим ее подробное решение, данное в совместных работах А.М. Шелехова и В.Б. Лазаревой. Используя теоремы о границах криволинейной регулярной ткани, они показали, что, с точностью до круговых преобразований, имеется всего 48 типов таких тканей.

В четвертой главе рассматриваются специальные ткани Бурау, образованные пучками коник (кривых второго порядка) на кубической поверхности. А именно, пусть V — кубическая поверхность (кубика) в трехмерном проективном пространстве, и пусть $\ell_i, i = 1, 2, 3$, — 3 прямые, лежащие на V . Плоскости, проходящие через ℓ_i , пересекают V по кривым второго порядка, которые образуют три-ткань W . Мы называем ее тканью Бурау, который, по-видимому, первый установил, что такая ткань является регулярной, если прямые ℓ_i находятся в общем положении, то есть попарно скрещиваются (см. об этом в [Бл-1], стр. 127–128; простое доказательство будет приведено в конце § 4.3). Но три-ткань Бурау не будет, вообще говоря, регулярной, если прямые ℓ_i находятся в специальном расположении. Такие ткани мы назы-

ваем специальными тканями Бурау. Проблема описания регулярных специальных тканей Бурау (и проективно эквивалентных им тканей на плоскости) оказалась трудной задачей, и была решена в совместных работах А.М. Шелехова и В.Б. Лазаревой. В гл. 4 детально рассматривается их доказательство. Показано, что в случае, если кубика не распадается на плоскость и квадртку, существует 38 проективно различных типов тканей, образованных пучками коник на плоскости, перспективно эквивалентных регулярным специальным тканям Бурау.

В пятой главе рассматриваются координатные три-ткани, определяемые на произвольной гладкой поверхности проективного пространства некоторым «кубическим абсолютом»: тройкой прямых в несобственной плоскости (результаты В.И. Бычек); тройкой прямых в пространстве (В.Б. Лазарева); кубической норм-кривой в пространстве (А.А. Уткин); кубической кривой в несобственной плоскости (В.К. Драгунов). В последнем параграфе рассматривается образ Дарбу три-ткани, образованной тремя произвольными семействами окружностей, — три кривые и квадртка в трехмерном проективном пространстве. В каждом из этих случаев показано, как методом внешних форм и подвижного репера Эли Картана получить структурные уравнения координатной три-ткани, найти ее кривизну, и, следовательно, найти необходимое и достаточное условие регулярности. Результаты второй и пятой глав показывают высокую эффективность метода Картана в теории тканей.

Предполагается, что читатель знаком с основными понятиями проективной и дифференциальной геометрии, внешнего дифференциального исчисления и с методом подвижного репера в классических геометриях.

Все рассматриваемые в книге функции предполагаются гладкими и вещественными, хотя во многих случаях рассмотрения можно проводить и в комплексной области.

Параграфы и формулы нумеруются отдельно в каждой главе. Каждая глава сопровождается набором задач. К тексту книги прилагается список литературы, указатель обозначений и предметный указатель.

В заключение выражаем сердечную признательность Л.М. Пиджаковой, Н.Л. Ивановой и А.Е. Алексеевой за большую помощь в подготовке рукописи к печати и Е.В. Корнетовой и А.А. Михеевой за тщательное изготовление рисунков.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, СВЯЗАННЫЕ С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ТРИ-ТКАНЯМИ

§ 1.1. Определение криволинейной ткани. Область определения три-ткани, границы

Предварительно вспомним некоторые необходимые для дальнейшего сведения из курса дифференциальной геометрии.

Пусть \mathbb{R}^2 — евклидова плоскость, x, y — декартовы координаты на ней, $F(x, y)$ — гладкая функция, определенная в некоторой области D плоскости. Гладкость означает, что в каждой точке области D существуют частные производные всех порядков функции $F(x, y)$ по всем ее аргументам. В этой книге мы рассматриваем только гладкие функции.

Уравнение $F(x, y) = u$, где $u \in I \subset \mathbb{R}$, определяет в области D семейство кривых, которое называется слоением и замечательно тем, что через каждую точку области D проходит одна и только одна кривая из этого семейства. Переменная u называется параметром семейства.

Рассмотрим более общую ситуацию. Уравнение

$$F(x, y, u) = 0,$$

где $F(x, y, u)$ — гладкая функция, также определяет в некоторой области D плоскости семейство λ кривых, зависящих от параметра u . Если уравнение $F(x, y, u) = 0$ нелинейно относительно параметра u , то через каждую точку области D могут проходить несколько, и даже счетное множество линий семейства λ . Чтобы найти параметры линий, проходящих через точку $p(x, y)$, надо разрешить уравнение $F(x, y, u) = 0$ относительно u . Решения имеют вид $u_\xi = u_\xi(x, y)$, где ξ пробегает значения из некоторого подмножества натуральных чисел. Каждое из полученных уравнений определяет в области D слоение. Таким образом, уравнение $F(x, y, u) = 0$ определяет в области D k сло-

ений (не обязательно различных), где k — некоторое натуральное число, нуль или бесконечность, в зависимости от функции F и области D . Будем говорить, что слоения $u_\xi = u_\xi(x, y)$ принадлежат семейству $F(x, y, u) = 0$.

Согласно теореме о неявной функции, уравнение $F(x, y, u) = 0$ можно разрешить относительно переменной u только при условии $F_u \equiv \frac{\partial}{\partial u} F(x, y, u) \neq 0$. Множество точек, определяемых системой $F = 0, F_u = 0$, называется дискриминантной кривой семейства λ . Дискриминантная кривая включает в себя огибающую семейства, особые точки кривых семейства и особенности самого семейства. Итак, в точках дискриминантной кривой уравнение семейства λ нельзя разрешить относительно параметра u , то есть у этих точек не существует таких окрестностей, в которых кривые семейства образуют слоение.

Пусть теперь даны 3 семейства линий $\lambda_i, i = 1, 2, 3$:

$$\lambda_1: F_1(x, y, u_1) = 0, \quad \lambda_2: F_2(x, y, u_2) = 0, \quad \lambda_3: F_3(x, y, u_3) = 0, \quad (1.1)$$

где F_i — гладкие функции, u_i — параметры семейств.

Определение 1. Будем говорить, что три семейства λ_i гладких кривых образуют в некоторой области D плоскости \mathbb{R}^2 *три-ткань* W , если:

- а) в области D заданы 3 слоения, принадлежащие семействам λ_i , по одному из каждого семейства;
- б) в каждой точке p области D линии этих слоений трансверсальны (то есть никакие две из них не касаются в точке p);
- в) у каждой точки p области D есть окрестность $U_p, U_p \subset D$, такая, что каждая линия из заданных слоений пересекает ее не более одного раза.

Условие в) исключает кривые, которые ведут себя подобно иррациональной обмотке тора: пересечение последней с любой окрестностью представляет собой объединение всюду плотного (но не континуального!) множества непересекающихся гладких дуг.

Обычно, областью определения три-ткани W называют наибольшую область D плоскости, в которой выполняются свойства а)–в). В этом случае границы области D будем называть границами три-ткани W , граничными кривыми или просто границей.

Исключив из уравнений (1.1) переменные x и y , получим уравнение

$$F(u_1, u_2, u_3) = 0, \quad (1.2)$$

которое связывает параметры линий ткани ¹⁾, проходящих через точку (x, y) . Уравнение (1.2) называется *уравнением три-ткани* W , а

¹⁾ Далее наряду с термином «три-ткань» будем употреблять термин «ткань».

функция $F(u_1, u_2, u_3)$ называется *функцией три-ткани*. Отметим, что

1) вид функции F зависит только от вида функций F_i , но не зависит от выбора слоений, принадлежащих семействам λ_i и образующим ткань W ;

2) все переменные входят в F существенно.

Уравнения слоений, образующих ткань W , будем записывать в виде:

$$u_1(x, y) = u_1, \quad u_2(x, y) = u_2, \quad u_3(x, y) = u_3. \quad (1.3)$$

Пусть \mathcal{F} — наибольшая область плоскости, в которой функции F_i , рассматриваемые как функции от переменных x, y , имеют смысл. Согласно вышесказанному, дискриминантные кривые D_i семейств λ_i не входят в область определения D три-ткани. Будем называть кривые D_i *границами третьего рода* ткани W .

В области $D' \equiv \mathcal{F} / \bigcup D_i$ условие а) определения 1 будет выполнено, но условие б), вообще говоря, может не выполняться. Трансверсальность линий ткани будет нарушаться в точках *граничных кривых* Γ_i , определяемых уравнениями

$$\Gamma_i: \quad \Delta_{jk} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial x} & \frac{\partial u_j}{\partial y} \\ \frac{\partial u_k}{\partial x} & \frac{\partial u_k}{\partial y} \end{vmatrix} = 0. \quad (1.4)$$

В точках кривой Γ_i касаются линии семейств λ_j и λ_k , где $i, j, k = 1, 2, 3, i \neq j \neq k$. Таким образом, область D определения ткани W можно определить как $D = D' / \bigcup \Gamma_i$.

Замечание 1. Практически уравнения вида (1.1) используются чаще, чем уравнения (1.3). Например, пучок кривых обычно задают уравнением $f_1(x, y) + u f_2(x, y) = 0$, а не уравнением $u = -\frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$, поскольку во втором случае «теряется» базисная кривая пучка $f_2(x, y) = 0$. Но при этом в первом случае в области изменения переменных x, y остается дискриминантная кривая пучка, которая в данном случае состоит из общих точек всех кривых пучка и определяется системой $f_1(x, y) = f_2(x, y) = 0$. Напомним, что общие точки семейства кривых называют *вершинами* или характеристическими точками.

Компоненты граничных кривых Γ_i могут быть по-разному расположены относительно линий ткани. Возможны следующие варианты.

1. Общий случай: параметры линий ткани, касающихся друг друга вдоль компоненты границы Γ_i , зависят от точки касания. Такие компоненты будем называть *границами первого рода* ткани W .

2. Параметры линий ткани, касающихся друг друга вдоль компоненты границы Γ_i , не зависят от точки касания, то есть постоянны вдоль Γ_i . В этом случае компонента представляет собой общую линию

двух семейств. Такие линии будем называть *границами второго рода* ткани W . ¹⁾

В частности, возможен случай, когда параметры линий одного семейства постоянны вдоль некоторой компоненты границы, а параметры линий другого меняются. Такая компонента будет линией одного из семейств, входящей в состав дискриминантной кривой другого семейства (в частности, огибающей линии другого семейства). Но такие кривые не входят в область D' , они расположены вне ее (мы назвали их выше границами третьего рода).

Границы Γ_i могут содержать *параболические точки*, в которых касаются линии всех трех семейств ткани. Совокупность параболических точек будем называть *параболической границей*. *Параболическая граница первого рода* не совпадает ни с одной из линий ткани и в ее точках касаются линии всех семейств ткани. *Параболическая граница второго рода* представляет собой общую линию всех трех семейств ткани. Вне области D' расположены *параболические границы третьего рода*: это может быть а) линия одного из семейств ткани, входящая в состав дискриминантной кривой двух других семейств, или б) общая кривая двух семейств, входящая в состав дискриминантной кривой третьего семейства.

Замечание 2. Особые точки кривых, образующих три-ткань W , входят в состав дискриминантных кривых, исключенных из области D .

Замечание 3. Как видно из предыдущего замечания, три-ткани будут рассматриваться локально (за некоторым исключением, о котором будет сказано в конце § 1.2, см. также задачу 1.48). Поэтому излагаемая локальная теория три-тканей без существенных изменений переносится и на три-ткани, рассматриваемые на любом гладком двумерном многообразии.

Пример 0. Простейшая три-ткань образована тремя семействами параллельных прямых. Обозначим ее Π . Область определения ткани Π — вся плоскость \mathbb{R}^2 . У параллельной ткани Π нет границ I рода, но на проективной плоскости, которая получается дополнением плоскости \mathbb{R}^2 бесконечно удаленной прямой ℓ_∞ , эта прямая будет для ткани Π параболической границей второго рода.

Пример 1. Три-ткань W_0 , образованная тремя пучками прямых с вершинами A , B и C , имеет границу второго рода $AB \cup BC \cup AC$, но не имеет границ первого рода. Область определения ткани W_0 состоит из семи связных областей, $D = \mathbb{R}^2 / AB \cup BC \cup AC$.

Пример 2. Регулярная ткань, образованная декартовой сетью и линиями уровня функции $z = x^2 + y^2$, имеет границу первого рода — объединение координатных осей x и y , а бесконечно удаленная прямая ℓ_∞ , находящаяся вне области действия декартовых координат x и y , есть параболическая граница второго рода.

¹⁾ Далее будем говорить короче: граница второго рода.

Пример 3. Три-ткань, образованная семействами

$$\begin{aligned} u_1(f(x, y) - g(x, y)) &= c_1, & u_2(g(x, y) - h(x, y)) &= c_2, \\ u_3(h(x, y) - f(x, y)) &= c_3 \end{aligned}$$

имеет параболическую границу первого рода.

Пример 4. Три-ткань

$$\begin{aligned} u_1(x, y) + c_1 u_0(x, y) &= 0, & u_2(x, y) + c_2 u_0(x, y) &= 0, \\ u_3(x, y) + c_3 u_0(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

имеет параболическую границу второго рода — $u_0(x, y) = 0$.

Еще раз отметим принципиальное различие между границами первого и второго рода: в точках границы первого рода нарушено условие трансверсальности линий ткани (они касаются), но выполнено условие инцидентности (через каждую точку проходят три линии ткани, по одной из каждого семейства). В точках границы второго рода нарушено условие инцидентности (линии разных семейств совпадают).

Границы второго рода можно найти с помощью следующего утверждения.

Теорема 1.1. Пусть существуют такие значения параметров $u_1 = a_1$ и $u_2 = a_2$, при которых уравнение (1.2) три-ткани W тождественно удовлетворяется относительно параметра u_3 . Тогда либо а) значениям $u_1 = a_1$ и $u_2 = a_2$ соответствуют совпавшие линии семейств (граница второго рода, входящая в состав Γ_3), либо б) точка пересечения линий $u_1 = a_1$ и $u_2 = a_2$ является вершиной третьего семейства. Другие границы второго рода и вершины находятся аналогично.

□ В самом деле, если линии $u_1 = a_1$ и $u_2 = a_2$ совпадают, то линия третьего семейства, проходящая через точку их пересечения, становится неопределенной. Если же линии $u_1 = a_1$ и $u_2 = a_2$ различны, то они пересекаются в некоторой точке p , и тогда тождество $F(a_1, a_2, u_3) \equiv 0$ означает, что через точку p проходят все линии третьего семейства. ■

Следствие. Если линии $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$, $u_3 = a_3$ имеют общую часть — параболическую границу второго рода, то параметры a_1, a_2, a_3 удовлетворяют трем тождествам: $F(a_1, a_2, u_3) \equiv 0$, $F(a_1, u_2, a_3) \equiv 0$, $F(u_1, a_2, a_3) \equiv 0$.

§ 1.2. Эквивалентные три-ткани.

Регулярные три-ткани

Определение 2. Пусть три-ткань W задана в области D и три-ткань \tilde{W} — в области \tilde{D} . Ткани W и \tilde{W} называются эквивалентными, если существует локальный диффеоморфизм $\varphi: D \rightarrow \tilde{D}$, который линии ткани W переводит в линии соответствующего семейства ткани \tilde{W} .

Если такой диффеоморфизм φ существует, то в силу пункта в) определения 1 он индуцирует 3 локальных диффеоморфизма на семействах линий ткани:

$$\tilde{u}_1 = \alpha(u_1), \quad \tilde{u}_2 = \beta(u_2), \quad \tilde{u}_3 = \gamma(u_3). \quad (1.5)$$

Пусть уравнение ткани W записано в виде (1.2), а уравнение ткани \tilde{W} — в виде

$$\tilde{F}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = 0. \quad (1.6)$$

Поскольку всякие три линии ткани W , проходящие через одну точку, перейдут в три линии ткани \tilde{W} , также проходящие через одну точку, то уравнения этих тканей будут связаны между собой следующим образом:

$$\tilde{F}(\alpha(u_1), \beta(u_2), \gamma(u_3)) = 0 \Leftrightarrow F(u_1, u_2, u_3) = 0. \quad (1.7)$$

Обратно: пусть существует тройка локальных диффеоморфизмов (α, β, γ) такая, что уравнения тканей удовлетворяют условию (1.7). Тогда определен локальный диффеоморфизм $\varphi: D \rightarrow \tilde{D}$, который точку пересечения слоев ткани W с параметрами u_i переводит в точку пересечения соответствующих слоев ткани \tilde{W} с параметрами \tilde{u}_i . Из определения отображения φ следует, что оно индуцирует отображения α, β, γ .

Таким образом, понятие эквивалентности тканей можно ввести двумя способами: с помощью локального диффеоморфизма φ или тройкой локальных диффеоморфизмов (α, β, γ) .

Из проведенных рассуждений вытекают два простых следствия:

- 1) уравнение (1.2) три-ткани W определено не однозначно, а с точностью до преобразований вида (1.5);
- 2) две три-ткани эквивалентны тогда и только тогда, когда уравнение одной из них получается из уравнения другой при помощи преобразований вида (1.5).

Выше было отмечено (§ 1.1), что вид функции ткани зависит только от вида функций F_i , определяющих семейства λ_i , но не зависит от выбора слоений, принадлежащих семействам λ_i и образующим ткань W . Поэтому ткань W эквивалентна ткани, образованной другими слоениями, принадлежащими семействам λ_i .

Условие (1.7) примет более простой вид, если уравнение (1.2) ткани W (аналогично и для ткани \tilde{W}) разрешить относительно одной из переменных, например, записать его в виде

$$u_3 = f(u_1, u_2). \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) также называется уравнением ткани. Условие (1.7) в этом случае примет вид

$$\tilde{f}(\alpha(u_1), \beta(u_2)) = \gamma(f(u_1, u_2)). \quad (1.9)$$

Рассмотрим ткани, эквивалентные параллельным тканям. Такие ткани называются *параллелизуемыми* или *регулярными*. Найдем вид уравнения регулярной три-ткани.

Семейства параллельных прямых, образующих параллельную три-ткань Π , запишем в виде

$$\lambda_i: \quad a_i x + b_i y + c_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

где a_i и b_i — постоянные, а c_i — параметры. Исключая из этих уравнений переменные x и y , получим уравнение ткани: $Ac_1 + Bc_2 + Cc_3 = 0$. После допустимых преобразований вида (1.5): $Ac_1 = u_1, Bc_2 = u_2, Cc_3 = u_3$ получим уравнение параллельной три-ткани в наиболее простом виде:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0. \quad (1.10)$$

Поскольку допустимы преобразования вида (1.5), то получаем, что уравнение любой регулярной (параллелизуемой) три-ткани имеет вид

$$\alpha(u_1) + \beta(u_2) + \gamma(u_3) = 0, \quad (1.11)$$

или

$$u_3 = f(\alpha(u_1) + \beta(u_2)). \quad (1.12)$$

Покажем, что ткань W_0 (пример 1) эквивалентна ткани Π . Запишем уравнения прямых AB , BC и AC соответственно в виде $\ell_3 = 0$, $\ell_1 = 0$ и $\ell_2 = 0$, тогда уравнения пучков, образующих три-ткань W_0 , можно записать так: $\ell_2 + u_1 \ell_3 = 0$, $\ell_3 + u_2 \ell_1 = 0$ и $\ell_1 + u_3 \ell_2 = 0$. Исключая координаты (они входят в ℓ_i), получим уравнение ткани: $u_1 u_2 u_3 = -1$.

Поскольку прямые ℓ_i не входят в область определения ткани, то $u_1 u_2 u_3 \neq 0$. Рассмотрим, например, область, в которой $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $u_3 < 0$ и перепишем уравнение ткани в виде $u_1 u_2 (-u_3) = 1$. Логарифмируя, получим $\ln u_1 + \ln u_2 + \ln(-u_3) = 0$. Это уравнение имеет вид (1.11), следовательно, ткань W_0 является регулярной.

Пример 5. Пусть S — окружность радиуса r с центром в начале координат. Через произвольную точку p вне окружности проходят 3 прямые: две касательные к окружности и одна через начало координат. Таким образом, определена три-ткань, обозначим ее W . Обозначим через u_1 , u_2 и u_3 углы, которые указанные прямые образуют с осью OX . Эти углы связаны соотношением $u_3 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$, которое и есть уравнение ткани W . Полученное уравнение имеет вид (1.11), следовательно, ткань W является регулярной.

Пример 6 (В. Бляшке). Даны 3 эллиптических пучка окружностей с вершинами A и B , B и C , C и A . Они образуют три-ткань (обозначим ее W), область определения которой есть вся плоскость без окружности, проходящей через точки A , B и C (обозначим ее S). Пусть p — некоторая точка внутри окружности S . Обозначим через

u_1 , u_2 и u_3 углы, под которыми из точки p видны дуги BC , CA и AB соответственно. Эти углы можно взять в качестве параметров заданных пучков окружностей (докажите!). Поскольку $u_1 + u_2 + u_3 = 2\pi$, то рассматриваемая три-ткань также является регулярной.

Пример 7. Ткань W образована двумя параболическими пучками окружностей с вершиной в начале координат и линиями центров OX и OY соответственно, и семейством концентрических окружностей с центром в начале координат (гиперболический пучок с нулевыми окружностями в начале координат и в бесконечно удаленной точке).

В первом пучке в качестве базисных окружностей возьмем начало координат и радикальную ось пучка — ось OY . Их уравнения $x^2 + y^2 = 0$ и $x = 0$, поэтому уравнение пучка будет $x^2 + y^2 + u_1x = 0$. Аналогично находим уравнение второго параболического пучка: $x^2 + y^2 + u_2y = 0$. Уравнение третьего семейства — $x^2 + y^2 = (u_3)^2$. Исключая из этих уравнений переменные x и y , найдем уравнение ткани: $\frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} = \frac{1}{u_3^2}$. Как видно, это уравнение локально эквивалентно уравнению (1.11), следовательно, и эта ткань является регулярной.

Пример 8. Ткань W образована декартовой сетью $x = u_1$, $y = u_2$ и гиперболическим пучком окружностей с нулевыми окружностями $(a, 0)$ и $(-a, 0)$. Уравнение гиперболического пучка запишется в виде $(x - a)^2 + y^2 + u_3x = 0$. Исключая из уравнений семейств переменные x и y , найдем уравнение ткани: $(u_1 - a)^2 + u_2^2 + u_1u_3 = 0$. Пользуясь условием Сен-Робера (§ 1.3), покажите, что эта ткань регулярной не является.

Теорема 1.2. *Всякая три-ткань эквивалентна ткани, образованной координатной сетью и некоторым семейством кривых.*

□ Пусть три-ткань W задана семействами (1.3). В окрестности регулярной точки p якобианы Δ_{jk} (см. (1.4)) отличны от нуля, поэтому отображение φ , заданное уравнениями

$$u_1(x, y) = u_1, \quad u_2(x, y) = u_2, \quad (1.13)$$

является локальным диффеоморфизмом, определенным в некоторой окрестности точки p , со значениями в плоскости переменных u_1, u_2 . Как видно из (1.12), отображение φ переводит линии первого семейства $u_1(x, y) = \text{const}$ ткани W в координатные линии $u_1 = \text{const}$, линии второго семейства $u_2(x, y) = \text{const}$ — в линии $u_2 = \text{const}$. Образ линий третьего семейства на плоскости получается так: надо выразить из уравнений (1.13) переменные x и y и подставить их в третье уравнение (1.3). Но тогда, согласно определению, мы получим уравнение ткани (1.8). Итак, мы получили в плоскости параметров три-ткань \widetilde{W} , эквивалентную исходной три-ткани W , и образованную координатными линиями $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$ и линиями уровня функции ткани W : $f(u_1, u_2) = \text{const}$. ■

Замечание 4. Результат предыдущей теоремы можно еще сформулировать так: *три-ткань W , рассматриваемая с точностью до*

локальных диффеоморфизмов, вполне определяется своим уравнением. Если же взять более узкое отношение эквивалентности (например, с точностью до преобразований какой-либо группы Ли, действующей на плоскости), то заданная ткань W не будет, вообще говоря, эквивалентна ткани \widetilde{W} , определяемой уравнением ткани W в плоскости параметров. То есть, ткань W не будет определяться своим уравнением. Еще можно сказать, что уравнение ткани отражает только ее инцидентные свойства. Поэтому дифференциально-топологическая теория тканей, которую мы рассматриваем — с наиболее широким отношением эквивалентности в классе гладких функций — эквивалентна теории гладких функций двух переменных, рассматриваемых с точностью до преобразований вида (1.5). Именно это обстоятельство и делает теорию тканей приложимой к любой теории, где объектом изучения является гладкая функция двух переменных: дифференциальные уравнения, некоторые физические законы, двусторонне разрешимые бинарные операции (квазигруппы и лупы) и т.д., см., например, [Бл-1], [Фе-1]-[Фе-5], [УШ-3], [УШ-4], [ДД-2], приложения в [АШ-4], §§ 3–4, 10 этой главы.

Замечание 5. Уравнение ткани (1.8) не может быть продолжено на область, содержащую точки параболической границы. Действительно, в таких точках все 3 слоя ткани касаются, и поэтому никакие 2 из них нельзя взять в качестве координатных линий.

В заключение приведем несколько полезных утверждений о границах ткани.

Пусть ткань W задана уравнением (1.8), то есть в плоскости параметров. Напомним, что она образована слоениями $u_1 = \text{const}$, $u_2 = \text{const}$ и $u_3 = f(u_1, u_2) = \text{const}$. Два первых слоения в области действия локальных координат u_1 и u_2 не имеют общей линии — границы второго рода. Но если эта область допускает проективизацию, то их границей второго рода будет прямая ℓ_∞ .

Для других пар слоений граница первого рода состоит из точек, в которых линии уровня $u_3 = \text{const}$ касаются координатных линий. В них градиент (f_{u_1}, f_{u_2}) функции f либо вертикален, либо горизонтален. С другой стороны, границами второго рода Γ_1 или Γ_2 могут быть только координатные линии, а для последних градиент обладает аналогичным свойством. Поэтому верно следующее

Предложение 1.3. Пусть ткань W задана уравнением (1.8), тогда границы Γ_1 и Γ_2 удовлетворяют соответственно уравнениям $f_{u_1} = 0$ и $f_{u_2} = 0$. При этом границы второго рода, входящие в Γ_1 или Γ_2 есть решения $u_1 = \text{const}$ и $u_2 = \text{const}$ уравнений $f_{u_2} = 0$ и $f_{u_1} = 0$ соответственно.

Что касается параболических границ, то для них верно

Предложение 1.4. Пусть три-ткань W задана уравнением (1.2). Тогда в точках параболической границы выполняются условия $\frac{\partial F}{\partial u_i} = 0$, $i = 1, 2, 3$, то есть таким точкам соответствуют

особые точки поверхности, определяемой в пространстве параметров уравнением (1.2).

□ В самом деле, якобианы Δ_{jk} , определяющие границы Γ_i (см. (1.4)), пропорциональны частным производным $\frac{\partial F}{\partial u_i}$, а в параболических точках эти якобианы обращаются в нуль. ■

§ 1.3. Условия регулярности три-ткани

При изучении того или иного класса тканей всегда возникает задача: найти подкласс регулярных тканей. Эту задачу можно решать непосредственно, приводя уравнение ткани к виду (1.11). Но этот способ не является вполне эффективным. Укажем дифференциальное необходимое и достаточное условие регулярности ткани.

Теорема 1.5 (условие Сен-Робера). *Три-ткань W , заданная уравнением (1.8), является регулярной тогда и только тогда, когда f удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} \ln \frac{f_{u_1}}{f_{u_2}} = 0. \quad (\text{CR})$$

□ Пусть три-ткань W , заданная уравнением (1.8), является регулярной. Тогда f имеет вид (1.12):

$$u_3 = f(\alpha(u_1) + \beta(u_2)).$$

Дифференцируя, находим: $f_{u_1} = f' \alpha'(u_1)$, $f_{u_2} = f' \beta'(u_2)$, поэтому $f_{u_1}/f_{u_2} = \alpha'(u_1)/\beta'(u_2)$, $\ln(f_{u_1}/f_{u_2}) = \ln(\alpha'(u_1)) - \ln(\beta'(u_2))$ и уравнение (CR) удовлетворяется.

Обратно, пусть для некоторой ткани W выполняется условие (CR). Решение дифференциального уравнения (CR) можно записать в виде

$$\ln \frac{f_{u_1}}{f_{u_2}} = \ln p(u_1) - \ln q(u_2),$$

откуда $f_{u_1}/f_{u_2} = p(u_1)/q(u_2)$ или $f_{u_1} = \mu p(u_1)$, $f_{u_2} = \mu q(u_2)$. Далее имеем:

$$\begin{aligned} df &= f_{u_1} du_1 + f_{u_2} du_2 = \mu(p(u_1) du_1 + q(u_2) du_2) = \\ &= \mu(d\alpha(u_1) + d\beta(u_2)) = \mu d(\alpha(u_1) + \beta(u_2)). \end{aligned}$$

Такой вид дифференциала означает, что функция f зависит от переменной $\alpha(u_1) + \beta(u_2)$, и мы получаем уравнение (1.12). ■

Пользуясь условием Сен-Робера, легко установить, что ткань, рассмотренная в примере 8 (§ 1.2), не является регулярной.

В случае, если три-ткань задана уравнением (1.2), условие регулярности может быть записано в виде [Бл-1]:

$$A_{23} + A_{31} + A_{12} = 0, \quad A_{ij} = \frac{F_{iij}}{F_i^2 F_j} - \frac{F_{ijj}}{F_i F_j^2} + \frac{F_{ij}}{F_i F_j} \left(\frac{F_{jj}}{F_j^2} - \frac{F_{ii}}{F_i^2} \right), \quad (1.14)$$

где через F_i, F_{ij}, F_{ijk} обозначены соответствующие частные производные функции ткани $F(u_1, u_2, u_3)$. Эта формула легко выводится с помощью структурных уравнений ткани, см. зад. 2.6.

Пример 9. Уравнение регулярной ткани W_0 найдено в §1.2 при некотором специальном выборе базисных прямых в пучках. Найдем теперь уравнение ткани W_0 в произвольных базисах. Пусть ℓ_i и m_i — базисные прямые пучка λ_i , $i = 1, 2, 3$. Левые части уравнений этих прямых будем обозначать теми же символами ℓ_i и m_i . Не теряя общности, можно считать, что линейные формы ℓ_i независимы, поэтому можно положить $m_i = a_i^j \ell_j$. Тогда уравнение произвольной прямой пучка λ_i запишется в виде $\ell_i - u_i m_i = 0$ или $(a_i^j - u_i \delta_i^j) \ell_j = 0$ (по индексу i суммирование нет). Здесь u_i — параметры пучков, которые будем считать однородными, то есть полагать, что u_i^{-1} может принимать значение 0.

Исключив из этих уравнений формы ℓ_i , содержащие координаты, мы получим уравнение рассматриваемой три-ткани W_0 :

$$\det(a_i^j - u_i \delta_i^j) = 0. \quad (1.15)$$

Заметим, что уравнение (1.15) является полилинейным относительно параметров u_i , и его можно записать в виде

$$A u_1 u_2 u_3 + B_1 u_2 u_3 + B_2 u_1 u_3 + B_3 u_1 u_2 + C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 + D = 0, \quad (1.16)$$

где A, B_1, \dots, D — постоянные. Очевидно и обратное: *всякое уравнение, полилинейное относительно переменных u_i , можно записать в виде (1.15) или (1.16) и считать, следовательно, уравнением некоторой три-ткани W_0 .*

Заметим, что три-ткани W_0 и Π эквивалентны, то есть локально диффеоморфны, но они не являются проективно эквивалентными, поскольку (в отличие от ткани W_0) вершины пучков параллельных прямых ткани Π лежат на одной (бесконечно удаленной) прямой, обозначим ее ℓ_∞ . Понятие параллельной ткани не является проективно инвариантным, в то время как понятие ткани W_0 проективно инвариантно.

Укажем еще два условия регулярности.

Условия линеаризации

Пусть \widetilde{W} — криволинейная три-ткань, заданная уравнением

$$F(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \widetilde{u}_3) = 0. \quad (1.2')$$

Допустим, эта ткань является регулярной, тогда она эквивалентна ткани W_0 , а ее уравнение должно приводиться к виду (1.16) допустимыми преобразованиями вида (1.5). В этом случае будем говорить, что преобразования (1.5) линеаризуют уравнение (1.2').

Теорема 1.6 (о линеаризации). *Уравнение (1.2') может быть линеаризовано по переменной \tilde{u}_1 преобразованием вида $\tilde{u}_1 = \alpha(u_1)$ тогда и только тогда, когда F есть композиция:*

$$F(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = F(\tilde{u}_1, \varphi(\tilde{u}_2, \tilde{u}_3)). \quad (1.17)$$

□ В самом деле, пусть подстановка $\tilde{u}_1 = \alpha(u_1)$ линеаризует уравнение (1.2'), то есть уравнение $F(\alpha(u_1), \tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = 0$ линейно относительно u_1 . Из него находим $u_1 = \varphi(\tilde{u}_2, \tilde{u}_3)$, откуда $\tilde{u}_1 = \alpha(\varphi(\tilde{u}_2, \tilde{u}_3))$. Это означает, что верно (1.17). Обратно, если верно (1.17), то из равенства $F = 0$ находим $\varphi(\tilde{u}_2, \tilde{u}_3) = \tilde{\alpha}(\tilde{u}_1) \equiv u_1$. ■

В дальнейшем мы будем рассматривать ткани, для которых F — многочлен. Тогда уравнение ткани \tilde{W} запишем в виде

$$\tilde{u}_1^n P_0 + \tilde{u}_1^{n-1} P_1 + \dots + P_n = 0, \quad (1.18)$$

где P_i — многочлены от переменных \tilde{u}_2 и \tilde{u}_3 . Многочлены P_i определены с точностью до общего множителя — дробно-рациональной функции λ от переменных \tilde{u}_2 и \tilde{u}_3 . Поэтому условие линеаризации по переменной \tilde{u}_1 в этом случае означает, что, с точностью до множителя, многочлены P_i являются многочленами от некоторой дробно-рациональной функции $\varphi = U/V$ от переменных \tilde{u}_2 и \tilde{u}_3 : $\lambda P_i = a_{i0}(U/V)^k + a_{i1}(U/V)^{k-1} + \dots + a_{ik}$, откуда

$$P_i = a_{i0}(U)^k + a_{i1}(U)^{k-1}V + \dots + a_{ik}V^k. \quad (1.19)$$

Обратно: если многочлены P_i имеют вид (1.19), то уравнение (1.18) разрешается относительно $\varphi = U/V$, причем $U/V = \tilde{\alpha}(\tilde{u}_1) \equiv u_1$. Доказана

Теорема 1.7. *Алгебраическое уравнение (1.18) линеаризуемо по переменной \tilde{u}_1 подстановкой $\tilde{u}_1 = \alpha(u_1)$ тогда и только тогда, когда многочлены P_i имеют вид (1.19).*

В пространстве переменных \tilde{u}_2 и \tilde{u}_3 ткань \tilde{W} , определяемая уравнением (1.18) при условиях (1.19), состоит из декартовой сети $\tilde{u}_2 = \text{const}$, $\tilde{u}_3 = \text{const}$ и семейства алгебраических кривых, определяемых уравнением (1.18), где \tilde{u}_1 — параметр. Базисные кривые семейства определяются уравнениями $P_i = 0$. Правая часть равенства (1.19) раскладывается (над полем \mathbb{R}) в произведение линейных сомножителей вида $aU + bV$ и квадратичных вида $aU^2 + bUV + cV^2$, так что каждая из базисных кривых есть объединение алгебраических кривых вида $aU + bV = 0$, принадлежащих одному пучку с базисом $U = 0$ и $V = 0$.

Следствие. Если P_i — многочлены второй степени, то возможны 2 варианта линеаризации уравнения (1.18).

А) *Первое условие линеаризации:* многочлены U и V второй степени, тогда многочлены P_i являются их линейными комбинациями, то есть принадлежат пучку с базисом U, V . В этом случае уравнение (1.18) линеаризуемо по переменной u_1 .

Б) *Второе условие линеаризации:* многочлены U и V первой степени, тогда каждая из кривых второго порядка $P_i = 0$ распадается на пару прямых, принадлежащих одному пучку. В этом случае уравнение (1.18) приводится к виду $U/V = \tilde{u}_1$. Это уравнение полилинейное относительно переменных \tilde{u}_1, u_2, u_3 . Следовательно, ткань определяется полилинейной функцией, то есть является регулярной.

Теоремы о границах

Следующие утверждения дают еще один эффективный признак регулярности три-ткани.

Теорема 1.8. *Любой гладкий кусок граничной кривой Γ_i непараболического типа регулярной три-ткани W есть либо общая часть двух линий этой ткани из семейств λ_i и λ_j (граница второго рода), либо часть линии семейства λ_i , в точках которой касаются линии из семейств λ_j и λ_k (граница первого рода).*

□ Пусть ткань W является регулярной, тогда в некоторых локальных координатах она задается уравнением (1.11) или (1.12). Линии третьего семейства определяются уравнением $\alpha(u_1) + \beta(u_2) = c = \text{const}$, а граничные кривые Γ_1 и Γ_2 — уравнениями $\alpha'(u_1) = 0$ и $\beta'(u_2) = 0$ соответственно.

Допустим, уравнение $\alpha'(u_1) = 0$ имеет вещественное решение $u_1 = x_0$. Поставив это решение в уравнение ткани, получим соотношение $f(\alpha(x_0) + \beta(u_2)) = c = \text{const}$ (обозначим его (R)), связывающее координату u_2 точки граничной кривой и параметр c линии третьего семейства.

Если в соотношении (R) переменная u_2 отсутствует, то оно удовлетворяется при некоторых значениях c и при любом u_2 . Это означает, что линия $u_1 = x_0$ первого семейства ткани является компонентой тех линий третьего семейства ткани, которые соответствуют найденным значениям параметра c .

Если в соотношении (R) присутствуют обе переменные, то в окрестности каждого решения (u_2, c) , где $\beta'(u_2) \neq 0$, существует гладкий кусок граничной кривой, текущая точка которого имеет координаты $x_0, u_2(c)$. Но это часть координатной линии $u_1 = x_0$, то есть линии первого семейства ткани. С другой стороны, поскольку в рассматриваемых точках $\alpha'(u_1) = 0$, в них касаются линии второго и третьего семейств ткани.

Аналогичным образом доказывается, что всякий гладкий кусок граничной кривой, определяемой уравнением $\beta'(u_2) = 0$, есть либо линия второго семейства, являющаяся одновременно и линией третье-

го семейства, либо часть линии второго семейства $u_2 = y_0$, в точках которой касаются линии первого и третьего семейства.

Если уравнение (1.11) разрешить относительно переменной u_1 или u_2 , то получится уравнение такого же вида. Следовательно, сделанный вывод будет верен и для граничной кривой первых двух семейств регулярной ткани. ■

Верно и обратное утверждение:

Теорема 1.9. Пусть в некоторой области U линии первых двух семейств ткани W трансверсальны, граница Γ_1 распадается на компоненты, принадлежащие линиям первого и третьего семейств, граница Γ_2 распадается на компоненты, принадлежащие линиям второго и третьего семейств. Тогда ткань W является регулярной.

□ Пусть ткань W задана уравнением (1.8). Из условия теоремы в силу теоремы 1.2 получаем $f_{u_1} = a(u_1)p(u_3)$, $f_{u_2} = b(u_2)q(u_3)$. Дифференцируя первое равенство по u_2 , второе по u_1 , получим $a(u_1)p'(u_3)f_{u_2} = b(u_2)q'(u_3)f_{u_1}$ или, с учетом предыдущих уравнений, $p(u_3)q'(u_3) = q(u_3)p'(u_3)$. Отсюда находим, что $p = kq$, $k = \text{const}$, поэтому $df = q(u_3)(ka(u_1)du_1 + b(u_2)du_2) = q(u_3)d(\alpha(u_1) + \beta(u_2))$. Следовательно, $f = f(\alpha(u_1) + \beta(u_2))$, то есть мы получили уравнение рассматриваемой ткани в виде (1.12). ■

Таким образом, указанное свойство границ является необходимым и достаточным условием регулярности ткани. Последние два утверждения будем называть *теоремой о непараболических границах регулярной три-ткани*.

Замечание 6. Теорема о непараболических границах регулярной три-ткани при всей ее простоте, имеет принципиальное значение: оказывается, что хотя теория три-тканей существенно локальна, условие регулярности связано со строением границ области определения, что уже является предметом глобальной теории.

§ 1.4. Координатные квазигруппы и лупы три-ткани

Напомним некоторые факты из алгебры (см. [Б-1]).

Определение 3. Группоид Q с бинарной операцией

$$q(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x \cdot y \equiv xy$$

называется *квазигруппой*, если при любых a, b, c из Q однозначно разрешимы уравнения

$$ay = c, \quad xb = c. \quad (1.20)$$

Квазигруппа обозначается $Q(\cdot)$ или q .

Квазигруппа с единицей называется *лупой*. В лупе, вообще говоря, не выполняется ассоциативность $x(yz) = (xy)z$. Ассоциативная лупа является *группой*.

Известный пример неассоциативной лупы — множество ненулевых октав относительно операции умножения (см., например, [По-1], с. 307). Другие конечномерные алгебры с делением — поля действительных и комплексных чисел, тело кватернионов — будут (относительно умножения) ассоциативными лупами, т.е. группами. Множество точек на прямой с операцией $x \cdot y = z$, где y — середина отрезка xz , будет квазигруппой, но не лупой.

Понятие квазигруппы можно расширить, считая области изменения переменных $x, y, z = x \cdot y$ различными, то есть $q: X \times Y \rightarrow Z$, $x \in X, y \in Y, z \in Z$. Если при этом будут однозначно разрешимы уравнения (1.20), то мы получим определение *трехбазисной квазигруппы*. Трехбазисная квазигруппа обозначается $(X, Y, Z, (\cdot))$ или просто q , если это не приводит к путанице.

Заметим, что понятие единицы имеет смысл только в однобазисной квазигруппе.

Отношением эквивалентности в теории квазигрупп является *изотопия*, обобщающая понятие изоморфизма групп.

Определение 4. Две квазигруппы $(X, Y, Z, (\cdot))$ и $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}, (\circ))$ называются *изотопными*, если существует тройка $J = (J_1, J_2, J_3)$ биекций $J_1: X \rightarrow \tilde{X}, J_2: Y \rightarrow \tilde{Y}, J_3: Z \rightarrow \tilde{Z}$ таких, что для любых x и $y, x \in X, y \in Y$, выполняется соотношение:

$$J_3(x \cdot y) = J_1(x) \circ J_2(y) \quad (1.21)$$

(«образ произведения равен произведению образов»). Тройка $J = (J_1, J_2, J_3)$ называется *изотопическим отображением* или *изотопией* квазигруппы q на квазигруппу \tilde{q} . Это определение сохраняет свой смысл и в случае, когда одна из квазигрупп или обе вместе будут однобазисными.

Изотопия $J = (J_1, J_2, J_3)$ называется *регулярной*, если одно из отображений J_i является тождественным. В частности, изотопия вида (J_1, J_2, id) называется *главной изотопией*. Если $J_1 = J_2 = J_3$, то изотопия является изоморфизмом.

Естественным образом определяется композиция изотопий:

$$J \bullet \tilde{J} = (J_1 \bullet \tilde{J}_1, J_2 \bullet \tilde{J}_2, J_3 \bullet \tilde{J}_3).$$

Изотопии образуют наиболее широкий класс отображений, переводящих квазигруппу снова в квазигруппу. Это вытекает из следующего утверждения: *любой группоид, изотопный квазигруппе, сам является квазигруппой*. Действительно, пусть $(X, Y, Z, (\cdot))$ — трехбазисная квазигруппа, Q — некоторое множество, $J_1: X \rightarrow Q, J_2: Y \rightarrow Q, J_3: Z \rightarrow Q$ — биекции. Определим на Q операцию (\circ) равенством (1.15). Тогда группоид $Q(\circ)$ будет квазигруппой, изотопной исходной квазигруппе q . В частности, если $J_3 = id$, то $X_3 = Q$ и квазигруппа $X_3(\circ)$ будет *главным изотопом* квазигруппы q .

Предложение 1.10. Пусть $q = (X, Y, Z, (\cdot))$ — трехбазисная квазигруппа. Всякая пара элементов a и b , $a \in X$, $b \in Y$, определяет на множестве Z лупу $Z(\circ)$, главноизотопную q .

□ Рассмотрим биекции $R_b: X \rightarrow Z$ и $L_a: Y \rightarrow Z$, определяемые соответственно равенствами: $R_b(x) = x \cdot b$ (правый сдвиг) и $L_a(y) = a \cdot y$ (левый сдвиг). Обозначим $u = R_b(x)$, $v = L_a(y)$, $u, v \in Z$. На множестве Z определим новую операцию (\circ) , положив

$$u \circ v = x \cdot y = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v). \quad (1.22)$$

Как видно из (1.22), квазигруппа $Z(\circ)$ является главным изотопом квазигруппы q , причем изотопия $q(\cdot) \rightarrow Z(\circ)$ имеет вид (R_b, L_a, id) .

Покажем, что $Z(\circ)$ — лупа с единицей $e = a \cdot b$. Имеем:

$$\begin{aligned} u \circ e &= R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(e) = x \cdot b = u, \\ e \circ v &= R_b^{-1}(e) \cdot L_a^{-1}(v) = a \cdot y = v. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Лупа $Z(\circ)$ называется *LP-изотопом квазигруппы q* и обозначается $\ell(a, b)$. Значение LP-изотопов выясняется в следующем утверждении.

Предложение 1.11. Любой главный изотоп квазигруппы $q = (X, Y, Z, (\cdot))$, являющийся лупой, будет ее LP-изотопом.

□ Пусть главная изотопия $q \rightarrow Q(\circ)$ имеет вид (J_1, J_2, id) , так что $Q \equiv Z$, и для любых x, y , $x \in X$, $y \in Y$ выполняется соотношение

$$J_1(x) \circ J_2(y) = x \cdot y. \quad (1.23)$$

Пусть e — единица лупы $Q(\circ)$. Обозначим $J_1^{-1}(e) = a$, $J_2^{-1}(e) = b$. Из равенств $J_1(a) \circ J_2(y) = a \cdot y$ и $J_1(a) = e$ вытекает, что $J_2(y) = a \cdot y$, т.е. $J_2 = L_a$. Аналогично находим, что $J_1 = R_b$. ■

Изотопическое отображение квазигруппы q на себя называется *автотопией*. Если $A = (A_1, A_2, A_3)$ — автотопия, то для любой пары (x, y) из $X \times Y$ выполняется соотношение

$$A_1(x) \cdot A_2(y) = A_3(x \cdot y). \quad (1.24)$$

Расширим понятие трехбазисной квазигруппы следующим образом.

Определение 5. Пусть X, Y, Z — три гладких многообразия одинаковой размерности r (в частности, они могут совпадать). Гладкое отображение $q: X \times Y \rightarrow Z$, $z = q(x, y)$, называется *локальной гладкой r -мерной квазигруппой* (короче, локальной квазигруппой), если оно является локальным диффеоморфизмом а) при фиксированном x и б) при фиксированном y . Согласно этому определению уравнение $z = q(x, y)$ локально однозначно разрешимо как относительно переменной x , так и относительно переменной y .

Определение 6. *Локальной гладкой r -мерной лупой* называется r -мерное гладкое многообразие Q с фиксированной точкой e , ее окрестностью U и функцией $q: U \times U \rightarrow Q$, такой что а) q является локальной гладкой квазигруппой и б) $q(x, e) = q(e, x) = x$ для любого x из U . Элемент e называется единицей.

Отображение q называется *умножением* и обозначается точкой и другими знаками, как это принято в алгебраической теории: $z = q(x, y) \equiv x \cdot y$, сама локальная гладкая лупа обозначается $Q(\cdot)$.

На локальные гладкие квазигруппы и лупы переносятся понятия изотопии, LP -изотопа и многие другие понятия алгебраической теории квазигрупп и луп; только всему сказанному следует придавать локальный смысл. Так, изотопией локальной квазигруппы q на локальную квазигруппу \tilde{q} называется тройка локальных диффеоморфизмов, удовлетворяющих условию (1.21).

Рассмотрим теперь криволинейную три-ткань W . С ней связано 6 гладких локальных одномерных квазигрупп q_{ij} , причем операция умножения в q_{ij} получается так: надо из уравнения ткани (1.2) выразить переменную u_k через переменные u_i и u_j (именно в таком порядке). Например, уравнение квазигруппы q_{12} имеет вид (1.8). Геометрический смысл бинарной операции в квазигруппе q_{12} заключается в следующем. Паре линий — одна с параметром u_1 из первого семейства, другая — с параметром u_2 из второго семейства ставится в соответствие линия из третьего семейства, проходящая через точку пересечения этой пары линий. Аналогичный смысл имеют операции и в других пяти координатных квазигруппах.

Локальные квазигруппы q_{ij} называются *локальными координатными квазигруппами три-ткани W* .

Локальная квазигруппа не является, вообще говоря, квазигруппой, поскольку умножение в ней определено только для достаточно близких элементов. Поэтому координатная квазигруппа три-ткани также не является, вообще говоря, квазигруппой. Но для некоторых тканей она может оказаться квазигруппой. Такие ткани называются *полными*. Например, параллельная ткань Π является полной, поскольку уравнение ее координатной квазигруппы имеет вид (1.10).

Так как все функции q_{ij} получаются из одного уравнения (1.2), то они связаны между собой. Их все можно получить из одной (например, из q_{12}) путем перенумерации слоений. Такие преобразования в теории квазигрупп называются *парастрофиями*. Поэтому можно сказать, что все локальные координатные квазигруппы три-ткани являются парастрофами локальной координатной квазигруппы q_{12} .

Парастроф определяется, по существу, выбором упорядоченной пары семейств. Например, выбрав первое и второе семейство, мы записали уравнение ткани W в виде (1.8), то есть перешли к эквивалентной ткани \tilde{W} в плоскости параметров u_1, u_2 . Поэтому выбор парастрофа называется *координатизацией* три-ткани.

Будем считать в дальнейшем, что ткань W координатизирована с помощью локальной координатной квазигруппы q_{12} , т.е. область определения ткани W локально диффеоморфна прямому произведению $U_1 \times U_2$, где U_1 и U_2 — области изменения параметров u_1 и u_2 соответственно. Эту квазигруппу будем обозначать q и в дальнейшем

слово «локальная» будем опускать и говорить короче: «координатная квазигруппа три-ткани». Уравнение ткани (1.8) будем записывать в виде $z = f(x, y)$.

Построенный выше LP -изотоп $\ell(a, b)$, операция в котором определяется формулой (1.22), можно определить и для координатной квазигруппы q три-ткани W .

Определение 7. LP -изотоп координатной квазигруппы q три-ткани называется *локальной координатной лупой три-ткани*, или просто *координатной лупой три-ткани*.

Операция в координатной лупе три-ткани имеет определенный геометрический смысл, см. рис. 1. Выбор линий $u_1 = a, u_2 = b$ означает выбор точки их пересечения, обозначим ее p .

Поэтому координатную лупу $\ell(a, b)$ ткани обозначают также ℓ_p . Операция в лупе ℓ_p определена на третьем семействе линий ткани W , причем в окрестности точки p , то есть для линий, достаточно близких к точке p .

Поскольку каждая координатная лупа ткани главноизотопна координатной квазигруппе этой ткани, то все координатные лупы три-ткани главноизотопны между собой.

Из проведенных рассуждений видно, что алгебраическим аналогом три-ткани является ее координатная квазигруппа или семейство координатных луп этой три-ткани. При этом допустимые преобразования α, β, γ параметров в уравнении ткани (см. (1.5)) образуют, с другой стороны, изотопическое преобразование координатной квазигруппы q этой ткани. Мы будем использовать как геометрическую терминологию (допустимые преобразования), так и алгебраическую (изотопия).

В дальнейшем большую роль будут играть квазигруппы и лупы с тождествами.

Множество всех луп, в которых выполняется некоторое тождество S , называется многообразием луп и обозначается $V(S)$. Например, группы — это лупы с тождеством ассоциативности, коммутативные группы — лупы с двумя тождествами, коммутативности и ассоциативности. Многообразия луп, которые пригодятся нам в дальнейшем, приведены в таблице 1.

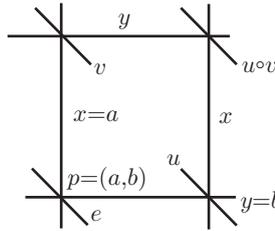


Рис. 1.

§ 1.5. Конфигурации на три-тканях

Пусть W — некоторая криволинейная три-ткань, и p — произвольная точка в области определения этой ткани. Через нее проходят три линии ткани W , по одной из каждого семейства (см. рис. 2; на нем и на следующих рисунках линии первого, второго и третьего семейств изображаются соответственно вертикальными, горизонтальными и наклонными прямыми). Возьмем на одной из них точку a достаточно

близко к точке p и построим последовательно точки b, c, d, e, f , как и указано на рис. 2. Линия третьего семейства, проходящая через точку f , не проходит, вообще говоря, через a . Полученная конфигурация из семи точек и девяти линий называется шестиугольной конфигурацией или, короче, фигурой H . Если же точки a и f лежат на одной линии третьего семейства, то говорят, что фигура $H (abcdef)$ замыкается.

Таблица 1

Многообразие луп	Тождество в лупе
Коммутативные лупы	$x \cdot y = y \cdot x$
Ассоциативные лупы (группы)	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
Моноассоциативные лупы	$x^2 \cdot x = x \cdot x^2$
Правоальтернативные лупы	$x \cdot y^2 = (x \cdot y) \cdot y$
Леоальтернативные лупы	$x^2 \cdot y = x \cdot (x \cdot y)$
Альтернативные лупы	$x^2 \cdot y = x \cdot (x \cdot y), x \cdot y^2 = (x \cdot y) \cdot y$
Эластичные лупы	$(x \cdot y) \cdot x = x \cdot (y \cdot x)$
Левые лупы Бола	$(x \cdot (y \cdot x)) \cdot z = x \cdot (y \cdot (x \cdot z))$
Правые лупы Бола	$x \cdot ((y \cdot z) \cdot y) = ((x \cdot y) \cdot z) \cdot y$
Лупы Муфанг	$(x \cdot y) \cdot (z \cdot x) = x \cdot ((y \cdot z) \cdot x)$

Запишем условие замыкания фигуры H с помощью операции умножения в координатной квазигруппе q три-ткани. Обозначим линии первых двух семейств, образующих фигуру H , через x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3 , как указано на рис. 2. Напомним геометрический смысл операции в координатной квазигруппе q : равенство $z = q(x, y) \equiv xy$ в q означает, что линия z третьего семейства проходит через точку пересечения линий x и y первого и второго семейств. Поэтому замкнутой фигуре H , изображенной на рис. 2, отвечают равенства

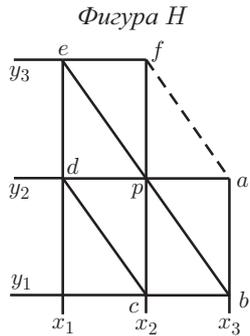


Рис. 2.

$$\begin{aligned}
 x_1 y_2 &= x_2 y_1, \\
 x_1 y_3 &= x_2 y_2 = x_3 y_1, \\
 x_2 y_3 &= x_3 y_2,
 \end{aligned}
 \tag{1.25}$$

выполняемые в координатной квазигруппе q . Условия (1.25) записываются иногда в виде импликации

$$\left. \begin{aligned}
 x_1 y_2 &= x_2 y_1 \\
 x_1 y_3 &= x_2 y_2 = x_3 y_1
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_2 y_3 = x_3 y_2,$$

которая называется также *условным тождеством* [Б-1].

Замечание 7. Точки и линии ткани, образующие фигуру H , берутся достаточно близко друг к другу, иначе фигура может не поместиться в области определения. На полной ткани такого ограничения нет.

На следующих рисунках 3–8 изображены другие фигуры, рядом с которыми записаны соответствующие условия замыкания.

Фигура Томсена T :

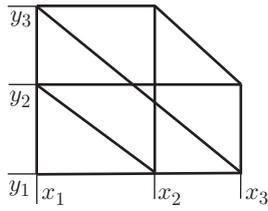


Рис. 3.

$$\begin{aligned} x_2y_1 &= x_1y_2, \\ x_3y_1 &= x_1y_3, \\ x_2y_3 &= x_3y_2. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Фигура Рейдемейстера R :

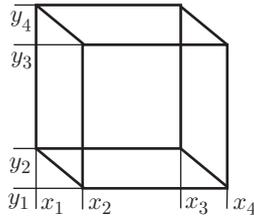


Рис. 4.

$$\begin{aligned} x_2y_1 &= x_1y_2, \\ x_4y_1 &= x_3y_2, \\ x_1y_4 &= x_2y_3, \\ x_3y_4 &= x_4y_3. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Левая фигура Бола B_l :

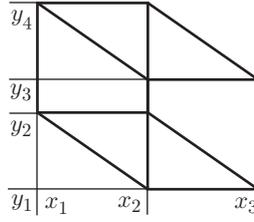


Рис. 5.

$$\begin{aligned} x_1y_2 &= x_2y_1, \\ x_1y_4 &= x_2y_3, \\ x_2y_2 &= x_3y_1, \\ x_2y_4 &= x_3y_3. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Правая фигура Бола B_r :

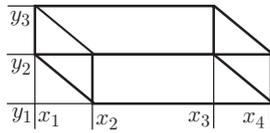


Рис. 6.

$$\begin{aligned} x_1y_2 &= x_2y_1, \\ x_1y_3 &= x_2y_2, \\ x_3y_2 &= x_4y_1, \\ x_3y_3 &= x_4y_2. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Средняя фигура Бола B_m :

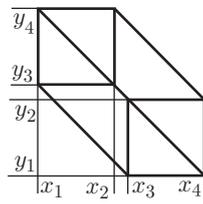


Рис. 7.

$$\begin{aligned} x_1y_3 &= x_3y_1, \\ x_1y_4 &= x_2y_3 = \\ &= x_3y_2 = x_4y_1, \\ x_2y_4 &= x_4y_2. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Фигура E :

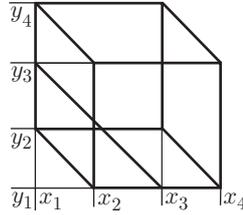


Рис. 8.

$$\begin{aligned} x_1y_2 &= x_2y_1, \\ x_1y_3 &= x_3y_1, \\ x_3y_2 &= x_4y_1, \\ x_2y_3 &= x_1y_4, \\ x_4y_3 &= x_3y_4. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Ткани, на которых замыкаются все достаточно малые фигуры одного из указанных выше типов, называют, соответственно, тканями $H, T, R, B_\ell, B_r, B_m, E$.

Непосредственно доказывается следующее

Предложение 1.12. *На параллельной ткани замыкаются все перечисленные конфигурации: $H, T, R, B_\ell, B_r, B_m, E$.*

Следствие. *Конфигурации $H, T, R, B_\ell, B_r, B_m, E$ замыкаются на всякой регулярной ткани. Действительно, регулярная ткань по определению эквивалентна параллельной, а локальный диффеоморфизм, переводящий одну из этих тканей в другую, сохраняет свойство достаточно малых фигур быть замкнутыми. Таким образом, все перечисленные фигуры замыкаются на тканях, рассмотренных в примерах 1, 2, 5, 6, 7. На рис. 9 изображена шестиугольная фигура на ткани,*

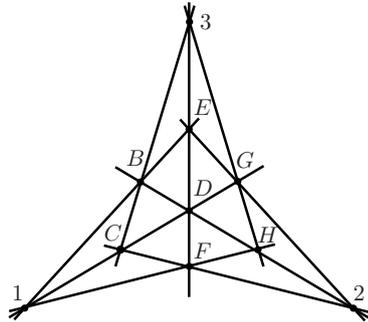


Рис. 9.

образованной тремя пучками прямых (пример 1).

Как мы сейчас покажем, ткани, на которых замыкаются конфигурации различных типов, связаны между собой. Во-первых, сравнивая рисунки 2 и 8, мы заметим, что конфигурации H являются частным случаем конфигураций T : первые получаются из последних, если три внутренние линии проходят через одну точку. Отсюда вытекает следующий факт: *если на ткани замыкаются все фигуры T , то на ней замыкаются все фигуры H .* Будем записы-

вать это так: $T \rightarrow H$.

Далее, сравнивая рисунки 5, 6, 7 с рисунком 4, мы видим, что фигуры Бола являются частным случаем фигуры Рейдемейстера: они получаются из последней, если в ней две внутренние линии (вертикальные, горизонтальные или наклонные) совпадают. Фигура E (рис. 8) также является частным случаем фигуры R : она получается из последней при условии, что две точки, связанные с фигурой R , лежат на одной линии третьего семейства ткани. Более того, фигура H также является частным случаем фигуры R : она получается из последней при условии, что три внутренние линии проходят через одну точку. Отсюда следует, что *если на ткани W замыкаются все фигуры R , то на ней замыкаются и все фигуры B_ℓ, B_r, B_m, E и H :* $R \rightarrow B_\ell, R \rightarrow B_r, R \rightarrow B_m, R \rightarrow E, R \rightarrow H$. Аналогично получаем импликации $B_\ell \rightarrow H, B_r \rightarrow H, B_m \rightarrow H, E \rightarrow H$.

Следующие утверждения менее очевидны.

Теорема 1.13. *Всякая три-ткань T является тканью R .*

□ Действительно, пусть на три-ткани W замыкаются все достаточно малые фигуры T . Докажем, что на ней замыкаются

и фигуры R . Рассмотрим на ткани W произвольную фигуру $R = (abcdefgh)$ (рис. 10) и докажем, что она замыкается, т. е. точки f и g лежат на одной линии третьего семейства (это условие мы договоримся записывать в виде $f3g$).

Построим точки n, k, ℓ, m так, как показано на рис. 10, и рассмотрим две фигуры T : $T_1 = (kehoan)$ и $T_2 = (mdobcl)$. Поскольку они должны замыкаться, то выполняются условия $n1k$ и $\ell 2m$. Рассмотрим теперь фигуру $T_3 = (glmnkf)$. Так как она обязана замыкаться, то выполняется условие $f3g$. Следовательно, замыкается и фигура $R = (abcdefgh)$. ■

Еще один важный класс три-тканей образуют так называемые *ткани M* или *ткани Муфанг*, на которых замыкаются фигуры Бола всех трех типов: B_ℓ, B_r и B_m . Следующая теорема «минимизирует» это определение.

Теорема 1.14. *Если на три-ткани W замыкаются фигуры Бола каких-либо двух типов, то замыкаются фигуры и третьего типа.*

□ Покажем, например, что $B_\ell \& B_r \Rightarrow B_m$. Предположим, что на три-ткани W замыкаются все фигуры B_ℓ и B_r . Рассмотрим произвольную фигуру $B_m = (abcdefgh)$ (рис. 11) и докажем, что она тоже замыкается, т. е. выполняется условие $b3f$. Построим последовательно точки n, k, m, ℓ, o, p . Точки $d, k, \ell, m, a, n, o, g$ образуют фигуру B_r , поэтому $n3o$. Пусть s — точка пересечения линий ef и op . Точки $h, e, g, m, p, s, o, \ell$ образуют фигуру B_r , а так как она должна замыкаться, то $p1s$. Далее, точки b, n, s, f, c, k, p, g образуют фигуру B_ℓ , поэтому $b3f$. Следовательно, замыкается фигура $B_m = (abcdefgh)$. ■

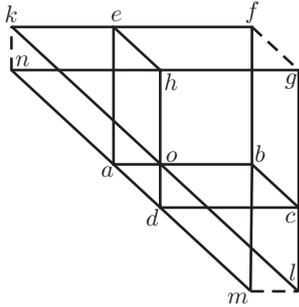


Рис. 10.

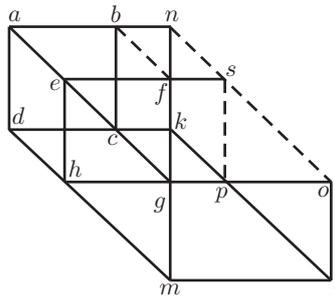


Рис. 11.

Из предыдущих рассуждений вытекает, что рассмотренные условия замыкания связаны следующими импликациями:

$$\begin{array}{c}
 \nearrow B_\ell \searrow \\
 T \longrightarrow R \longrightarrow M \longrightarrow B_m \longrightarrow H \quad R \longrightarrow E \longrightarrow H \\
 \searrow B_r \nearrow
 \end{array}$$

В заключение заметим, что фигуры Бола B_ℓ , B_r и B_m представляют собой одну и ту же конфигурацию, но по разному расположенную относительно семейств, образующих три-ткань.

§ 1.6. Конфигурации на три-тканях и тождества в координатных лупах

Оказывается, что замыкание конфигураций на три-ткани W очень просто описывается в терминах ее координатных луп. Напомним, что произведение $u \circ v$ в координатной лупе $\ell(a, b)$ ткани дается формулой (1.22) и имеет геометрический смысл, указанный на рис. 1.

Построим в координатной лупе $\ell(a, b)$ произведения $u \circ v$ и $v \circ u$, см. рис. 12. Как видно на рис. 12, линии $x = a$, $y = b$ и наклонные линии u и v определяют некоторую фигуру Томсена (сравни с рис. 3). Она замыкается тогда и только тогда, когда $u \circ v = v \circ u$, то есть когда элементы u и v лупы $\ell(a, b)$ коммутируют. Отсюда следует, что *лупа $\ell(a, b)$ коммутативна тогда и только тогда, когда на ткани замыкаются все (достаточно малые) фигуры Томсена, у которых две стороны лежат на линиях $x = a$ и $y = b$* . Множество таких фигур зависит от двух переменных u и v , мы будем называть их (фигуры) *координатными фигурами T , связанными с координатной лупой $\ell(a, b)$* .

Меняя, помимо u и v , еще a и b , мы получим множество всех фигур T на ткани W .

Отсюда следует, что *ткань W является тканью T тогда и только тогда, когда все ее координатные лупы коммутативны*.

Возьмем теперь в лупе $\ell(a, b)$ три произвольных элемента u , v , и w и построим произведения $(u \circ v) \circ w$ и $u \circ (v \circ w)$ (рис. 13). Равенство $(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w)$, как видно из сравнения рисунков 4 и 13, ведет к замыканию некоторой координатной фигуры R , связанной с координатной лупой $\ell(a, b)$. Отсюда следует, что *координатная лупа $\ell(a, b)$ ассоциативна тогда и только тогда, когда на ткани замыкаются всевозможные координатные фигуры R , связанные с этой лупой*.

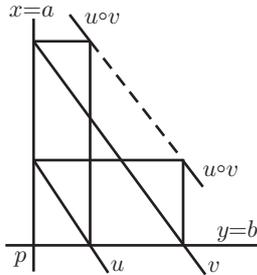


Рис. 12.

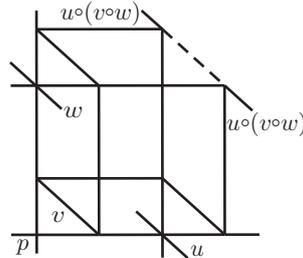


Рис. 13.

Меняя a и b , приходим к заключению, что *три-ткань* W является тканью R тогда и только тогда, когда все ее координатные лупы являются ассоциативными лупами, т. е. группами.

Предыдущий результат можно усилить. В силу теоремы 1.10 ткань T является тканью R . Следовательно, в ее координатных лупах выполняется, кроме тождества коммутативности, еще и тождество ассоциативности. Таким образом, *ткань* W является тканью T тогда и только тогда, когда все ее координатные лупы коммутативны и ассоциативны, то есть являются коммутативными группами.

Сравнивая рисунки 5, 6, 7, 2 с рисунком 13, находим, что фигуры B_ℓ , B_r , E и H получаются из фигуры R соответственно при $u = v$, $v = w$, $u = w$ и $u = v = w$. Поэтому фигурам B_ℓ , B_r , E и H отвечают тождества, которые получаются из тождества ассоциативности при указанных ограничениях: $u^2 \circ w = u \circ (u \circ w)$, $u \circ v^2 = (u \circ v) \circ v$, $(u \circ v) \circ u = u \circ (v \circ u)$ и $u^2 \circ u = u \circ u^2$ соответственно.

Чтобы найти тождество, соответствующее фигуре B_m , введем переменные u , v , w z так, как указано на рис. 14. С помощью рис. 1 получим следующие равенства:

$$u \circ w = v, \quad z \circ u = v, \quad v \circ w = z \circ v.$$

Согласно определению квазигруппы (лупы) первые два равенства можно разрешить относительно переменных w и z соответственно. Результат записывается в виде $w = u \setminus v$, $z = v / u$, где символы \setminus и $/$ называются левой и правой обратной операциями относительно операции \circ . Подставляя в последнее равенство, получим искомое тождество:

$$v \circ (u \setminus v) = (v / u) \circ v. \tag{1.32}$$

Сопоставляя полученные результаты с таблицей 1 из § 1.4, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1.15. *Три-ткань* W является тканью R , T , B_ℓ , B_r , M , E , H или B_m тогда и только тогда, когда все ее координатные лупы будут соответственно группами, абелевыми группами, левоальтернативными, правоальтернативными, альтернативными, эластичными, моноассоциативными лупами, или лупами с тождеством (1.32).

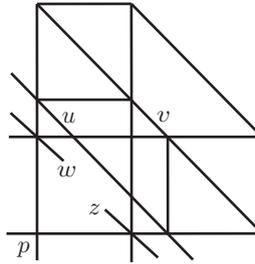


Рис. 14.

§ 1.7. Основная теорема о шестиугольных три-тканях

Нам понадобится

Лемма 1.1 (о вписанных треугольниках). *В достаточно малый треугольник, образованный линиями ткани, можно вписать*

единственным образом другой треугольник, образованный линиями этой ткани.

□ Пусть W — произвольная криволинейная три-ткань, D — ее область определения. Рассмотрим в некоторой связной части области D треугольник PQR , образованный линиями ткани, причем выберем

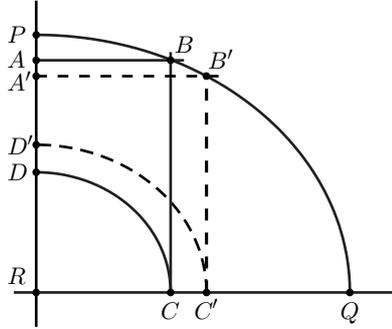


Рис. 15.

его настолько малым, чтобы составляющие его (гладкие) кривые были выпуклыми (или вогнутыми) в одну сторону (рис. 15), и все линии ткани внутри этого треугольника обладали тем же свойством. Возьмем на одной из сторон треугольника PQR точку A и впишем в него ломаную $ABCD$ из линий ткани, как показано на рис. 15. Точка D , полученная в результате описанной процедуры, не совпадет, вообще говоря, с исходной точкой A . Но если точку A двигать к точке D (на рис. 15 она передвинута в положение A'), то точка D будет двигаться ей навстречу. В силу непрерывности функции $D(A)$ у точки A найдется такое положение, при котором $D \equiv A$. ■

нута в положение A'), то точка D будет двигаться ей навстречу. В силу непрерывности функции $D(A)$ у точки A найдется такое положение, при котором $D \equiv A$. ■

Теорема 1.16 (основная теорема о шестиугольных три-тканях). *Всякая шестиугольная криволинейная три-ткань является регулярной (параллелизуемой).*

□ Пусть в области D задана шестиугольная три-ткань W . Возьмем в D треугольник OA_1B_1 из линий ткани W , удовлетворяющий условию леммы. Он изображен на рис. 16, причем, как и ранее, линии первого, второго и третьего семейств ткани изображаются соответственно вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями.

Далее будем координатизировать область D , то есть присваивать — по определению — каждой точке этой области две координаты, которые будем, как обычно, обозначать x и y и записывать в скобках. Пусть $O(0, 0)$, $A_1(1, 0)$, $B_1(0, 1)$. Проведем через точку $A_1(1, 0)$ вертикальную, а через точку $B_1(0, 1)$ — горизонтальную линии ткани W . Будем считать, что исходный треугольник выбран настолько малым, что эти линии пересекутся в некоторой точке, находящейся в той же связной компоненте области D , что и исходный треугольник (в противном случае исходный треугольник уменьшим). Припишем точке пересечения координаты $(1, 1)$.

Проведем через точку $(1, 1)$ наклонную линию ткани, она пересечет стороны OA_1 и OB_1 соответственно в точках $A_2(2, 0)$ и $B_2(0, 2)$. Далее строим точки $(2, 1)$ (пересечение вертикали через $A_2(2, 0)$ и горизонтали через $B_1(0, 1)$) и $(1, 2)$ (пересечение вертикали через $A_1(1, 0)$ и горизонтали через $B_2(0, 2)$). А теперь заметим, что полу-

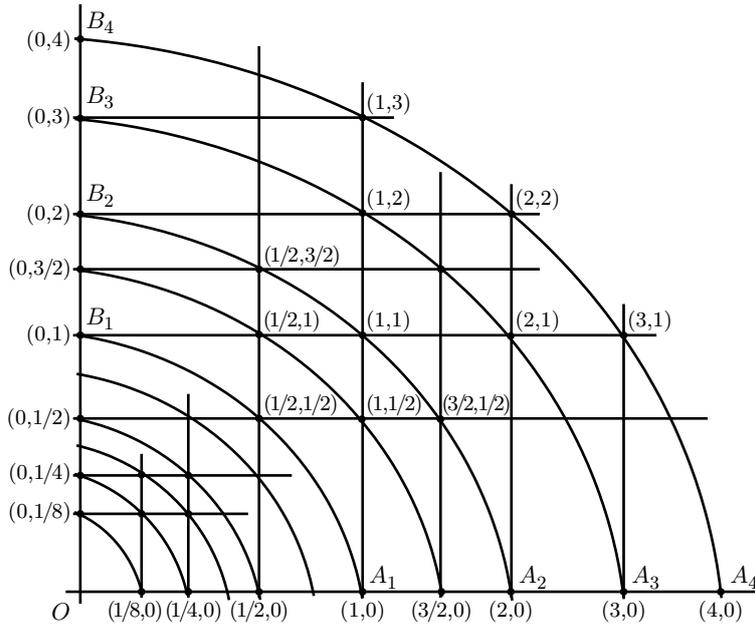


Рис. 16.

чилась шестиугольная фигура $\{A_1, A_2, (2, 1), (1, 2), B_2, B_1\}$. Так как рассматриваемая ткань W является шестиугольной, то эта фигура замыкается, то есть точки $(2, 1)$ и $(1, 2)$ лежат на одной линии третьего семейства. Пусть эта линия пересекает OA_1 и OB_1 в точках $A_3(3, 0)$ и $B_3(0, 3)$ соответственно.

Далее строим точки $(1, 3)$ (пересечение вертикали через A_1 и горизонтали через B_3); $(2, 2)$ (пересечение вертикали через A_2 и горизонтали через B_2); $(3, 1)$ (пересечение вертикали через A_3 и горизонтали через B_1). Из замыкания шестиугольных фигур следует, что эти 3 точки лежат на одной и той же наклонной линии ткани. Обозначим точки ее пересечения с OA_1 и OB_1 через $A_4(4, 0)$ и $B_4(0, 4)$ соответственно, и т.д.

В результате мы разобьем линиями ткани область D на треугольники; эта процедура называется *триангуляцией*. Построенные точки будут иметь целочисленные координаты (в том числе и отрицательные, если построение продолжить вниз и влево).

Отметим, что координаты построенных точек обладают следующим свойством, которое далее будем называть свойством A :

- а) все точки, лежащие на одной вертикали, имеют одинаковую координату x ;
- б) все точки, лежащие на одной горизонтали, имеют одинаковую координату y ;

в) все точки, лежащие на одной наклонной линии, имеют одинаковую сумму координат: $x + y = \text{const}$.

Теперь будем дробить треугольники на более мелкие. Пользуясь леммой 1.1, впишем в треугольник OA_1B_1 новый треугольник $(1/2, 0)$, $(0, 1/2)$, $(1/2, 1/2)$ (см. рис. 16). Продолжая его стороны, получим две новые точки $(1/2, 1)$ (пересечение вертикали через $(1/2, 0)$ и горизонтали через B_1) и $(1, 1/2)$ (пересечение вертикали через A_1 и горизонтали через $(0, 1/2)$). В силу шестиугольности эти точки лежат на одной наклонной линии, которая пересекает OA_1 и OB_1 в точках $(3/2, 0)$ и $(0, 3/2)$ соответственно. Затем строим точку $(1/2, 3/2)$ как пересечение вертикали через $(1/2, 0)$ и горизонтали через $(0, 3/2)$, и замечаем, что в силу шестиугольности она лежит на наклонной линии A_2B_2 . На этой же наклонной оказываются и точка $(3/2, 1/2)$.

Продолжая построение, мы впишем новые, более мелкие треугольники во все уже имеющиеся. При этом будут появляться новые точки, новые вертикальные, горизонтальные и наклонные линии, причем между каждыми двумя соседними линиями одного семейства появится одна новая линия этого семейства; между каждыми двумя соседними точками, лежащими на одной линии, появится одна новая точка на этой же линии. Если старые точки имели целочисленные координаты, то новые точки будут иметь дробные координаты. В общем виде координаты любой из построенных точек (как новых, так и старых) имеют вид $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2})$, где a и b — целые числа. При этом для всех точек, новых и старых, будет выполняться свойство \mathcal{A} .

Следующий этап очевиден: пользуясь леммой, впишем в треугольник OA_1B_1 новый треугольник, и, продолжая его стороны, впишем более мелкие треугольники во все уже имеющиеся. В результате точки полученного множества будут иметь координаты вида $(\frac{a}{2^2}, \frac{b}{2^2})$, и для них будет выполняться свойство \mathcal{A} .

На $(n + 1)$ -ом этапе мы получим точки с координатами $(\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n})$, и свойство \mathcal{A} также будет выполняться.

В пределе, при $n \rightarrow \infty$, мы получим в каждом семействе λ_i линий ткани всюду плотное (относительно естественной топологии на \mathcal{R}) подмножество линий, содержащих построенные точки. Обозначим это подмножество Λ_i . Пусть, например, u_1 — произвольная прямая из λ_1 , не принадлежащая, вообще говоря, Λ_1 . В Λ_1 можно выбрать две последовательности линий, сходящиеся справа и слева к u_1 . В каждой из этих последовательностей линия отмечена некоторым числом — первой координатой x лежащих на ней точек. Получаем две числовые последовательности, сходящиеся к общему пределу, обозначим его $x(u_1)$. Действительное число $x(u_1)$ возьмем в качестве первой координаты точек на прямой u_1 . Таким образом, все семейство λ_1

окажется параметризованным, причем линии из Λ_1 сохранят свои параметры вида $\frac{a}{2^n}$.

Точно так же параметризуем семейство λ_2 . В результате каждая точка p области D получит координаты (x, y) , где x и y — параметры вертикальной и горизонтальной линий ткани, проходящей через p .

Наконец, рассмотрим в области D непрерывную функцию $\sigma(x, y) = x + y$. Обозначим через $\Sigma(u_3)$ множество точек вида $(\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n})$, построенных выше с помощью триангуляции и лежащих на наклонной линии u_3 . Множество $\Sigma(u_3)$ будет всюду плотным на u_3 . В силу п. в) свойства \mathcal{A} функция $\sigma(x, y) = x + y$ будет постоянна на $\Sigma(u_3)$, а значит, в силу непрерывности, будет постоянной и на всех точках из u_3 .

Итак, мы ввели в области D такие координаты x и y , в которых линии ткани W определяются уравнениями $x = c_1 = \text{const}$, $y = c_2 = \text{const}$ и $x + y = c_3 = \text{const}$. Следовательно, уравнение ткани W имеет вид $c_3 = c_1 + c_2$, как и уравнение параллельной ткани. ■

Следствие 1. В силу следствия к предложению 1.9 получаем $\Pi \leftrightarrow H$, то есть условия регулярности и шестиугольности эквивалентны. По другому можно сказать, что класс тканей H совпадает с классом регулярных тканей.

Следствие 2. Добавляя этот факт к импликациям в конце § 1.5, получаем, что на криволинейной три-ткани все условия замыкания эквивалентны. Иными словами, все криволинейные ткани делятся на 2 класса: регулярные и нерегулярные. На первых выполняются все условия замыкания, на вторых — ни одно из них не выполняется.

§ 1.8. Прямолинейные три-ткани

Прямолинейными называются три-ткани, образованные тремя семействами прямых:

$$\lambda_i: \quad a_i(u_i)x + b_i(u_i)y + c_i(u_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.33)$$

Исключив x и y , получим уравнение прямолинейной ткани в виде:

$$\begin{vmatrix} a_1(u_1) & b_1(u_1) & c_1(u_1) \\ a_2(u_2) & b_2(u_2) & c_2(u_2) \\ a_3(u_3) & b_3(u_3) & c_3(u_3) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.34)$$

К прямолинейным тканям относятся параллельные ткани и регулярные ткани, рассмотренные в примерах 1 и 5. Но произвольная прямолинейная ткань не является, вообще говоря, регулярной. С прямолинейными тканями, как мы увидим далее, связано много проблем в теории тканей. Прежде всего найдем условие их регулярности.

Напомним, что некоторая кривая называется кривой класса n , если через произвольную точку плоскости проходит n касательных к этой кривой. Кривая первого класса — это точка. Произвольная

кривая второго порядка является кривой второго класса, и других кривых второго класса нет. Порядок и класс кривой, вообще говоря, не совпадают. Например, трехконечная гипоциклоида (ее описывает точка окружности, катящейся внутри другой окружности втрое большего радиуса) является кривой четвертого порядка, но третьего класса.

Кривые класса n удобно задавать с помощью тангенциальных координат. Пусть уравнение прямой записано в виде $p_1x + p_2y + p_3 = 0$, тогда тройка чисел (p_1, p_2, p_3) называется тангенциальными координатами этой прямой. Ясно, что тангенциальные координаты определены с точностью до множителя, то есть являются однородными.

Согласно определению, через каждую точку плоскости проходит в точности n касательных к кривой класса n . Следовательно, коэффициенты (p_1, p_2, p_3) — тангенциальные координаты произвольной касательной — связаны однородным уравнением порядка n . Поэтому часто такие семейства прямых и называют кривыми класса n .

Рассмотрим кривые третьего класса. Уравнение кривой третьего класса в однородных тангенциальных координатах (p_1, p_2, p_3) имеет вид $a_{ijk}p^i p^j p^k = 0$ или

$$a_{111}(p^1)^3 + a_{222}(p^2)^3 + a_{333}(p^3)^3 + 3a_{112}(p^1)^2 p^2 + \dots + 6a_{123}p^1 p^2 p^3 = 0. \tag{1.35}$$

В нем 10 однородных, или 9 неоднородных коэффициентов. Следовательно, кривая однозначно определяется заданием 9-ти прямых

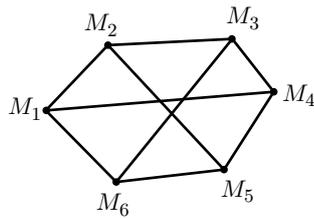


Рис. 17.

общего положения. Термин «общего положения» имеет следующий смысл: если координаты (p_1, p_2, p_3) этих прямых подставить в уравнение (1.35), то получатся 9 независимых уравнений на коэффициенты a_{ijk} .

Однако этого может не быть при специальном расположении прямых. Рассмотрим известную нам конфигурацию Томсена T , которая состоит из девяти прямых и шести точек их пересечения

$M(x_\xi, y_\eta)$, $\xi, \eta = 1, 2, \dots, 6$, см. рис. 17.

Лемма 1.2. *Существует пучок кривых третьего класса, содержащих все прямые конфигурации T .*

□ Уравнение

$$(p_1x_1 + p_2y_1 + p_3)(p_1x_2 + p_2y_2 + p_3)(p_1x_3 + p_2y_3 + p_3) + \varkappa(p_1x_4 + p_2y_4 + p_3)(p_1x_5 + p_2y_5 + p_3)(p_1x_6 + p_2y_6 + p_3) = 0, \tag{1.36}$$

где \varkappa — произвольная постоянная (параметр пучка), определяет кривую третьего класса, содержащую все прямые фигуры. Например, уравнение удовлетворяется, если положить $p_1x_1 + p_2y_1 + p_3 = 0$, $p_1x_4 + p_2y_4 + p_3 = 0$. Но решением этой системы будут тангенци-

альные координаты (p_1, p_2, p_3) прямой, проходящей через точки (x_1, y_1) и (x_4, y_4) , и т.д. Поскольку \varkappa — произвольная постоянная, то уравнение (1.36) задает пучок кривых третьего класса. Обозначим его $K(\varkappa)$. ■

Теорема 1.17 (Шаля). *Если кривая третьего класса содержит 8 прямых конфигурации T , то она содержит и девятую.*

□ Пусть кривая K , заданная уравнением (1.35), содержит 8 прямых конфигурации T . Это дает 8 линейных соотношений на 10 однородных коэффициентов a_{ijk} уравнения (1.35). Покажем, что эти соотношения линейно независимы.

Предположим, что независимых соотношений только 7, а условие принадлежности кривой восьмой прямой (пусть M_3M_5) является следствием этих семи соотношений. Потребуем, чтобы кривая (1.35) содержала еще одну прямую s , проходящую через точку M_2 . Это даст восьмое соотношение на коэффициенты a_{ijk} , следовательно, имеется пучок кривых третьего класса, содержащих выбранные 7 прямых и прямую s (обозначим этот пучок опять $K(\varkappa)$).

С другой стороны, получается, что через точку M_2 проходит не 3, а 4 прямые, принадлежащие кривой $K(\varkappa)$. Это означает, что кривая $K(\varkappa)$ содержит все прямые пучка с вершиной M_2 , то есть кривая третьего класса $K(\varkappa)$ распадается на линейное семейство — пучок прямых и некоторую кривую второго класса, обозначим ее Q . При этом кривая второго класса Q должна содержать следующие 5 прямых, принадлежащих кривой $K(\varkappa)$ — это 8 прямых конфигурации T кроме трех, проходящих через точку M_2 . Но, как известно из проективной геометрии, существует единственная кривая второго класса, содержащая 5 прямых плоскости. Итак, получено противоречие: с одной стороны, кривых третьего класса должен быть пучок, а с другой — получилась единственная кривая, распавшаяся на пучок прямых с вершиной M_2 и кривую второго класса Q . Следовательно, предположение о том, что из восьми соотношений только 7 независимых, неверно. Точно так же мы приходим к противоречию, если предположим, что независимых соотношений не 7, а 6, 5, и т.д.

Итак, все 8 соотношений независимы. Это означает, что существует однопараметрическое семейство кривых третьего класса, содержащих 8 выбранных прямых. В силу предыдущей леммы это будет именно пучок $K(\varkappa)$, поскольку его кривые содержат эти 8 прямых! Но эти же кривые содержат (по лемме) и девятую прямую. ■

Следствие. С произвольной кривой третьего класса связано ∞^4 конфигураций T , образованных прямыми этой кривой. Действительно, конфигурация T однозначно определяется выбором четырех прямых. Согласно определению, через каждую точку плоскости проходит 3 прямые, принадлежащие кривой третьего класса K . Но в некоторых точках эти прямые могут совпадать. Если такие точки исключить, то в оставшейся области D прямые кривой K образуют три-ткань, будем обозначать ее $W(K)$.

Теорема 1.18 (Графа–Зауэра). *Прямолинейная три-ткань W является регулярной тогда и только тогда, когда она образована прямыми некоторой кривой третьего класса.*

□ *Достаточность.* Из теоремы Шаля следует, что все конфигурации Томсена на три-ткани $W(K)$ замыкаются. Следовательно (§1.7, следствие 2 к теореме 1.16), ткань $W(K)$ является регулярной.

Необходимость. Пусть прямолинейная три-ткань W является регулярной, тогда на ней замыкаются все шестиугольные фигуры. Рассмотрим фигуры D_3, D_4, D_5, \dots , составленные из линий этой ткани. Они изображены на рис. 18 сплошными линиями. Фигура D_3 представляет собой шестиугольную фигуру (частный случай конфигурации T), и по теореме Шаля существует пучок $K(\mathcal{K})$ кривых третьего класса, содержащих все прямые этой фигуры. Выберем в этом пучке одну кривую K , которая содержит прямую AB , и рассмотрим шестиугольную фигуру $\{CDEFGH\}$. Восемь из девяти прямых этой фигуры (кроме CH) принадлежат K , следовательно, по теореме Шаля ей принадлежит и девятая — CH . Точно так же доказывается, что прямая RP также принадлежит K , поэтому K содержит все линии фигуры D_4 . Далее, рассматривая шестиугольную фигуру $\{THQFPS\}$, выводим, что прямая TS , а затем — и все остальные прямые фигуры D_5 принадлежат K . По индукции получаем, что и последняя фигура D_n , входящая в область определения D ткани W , также принадлежат K .

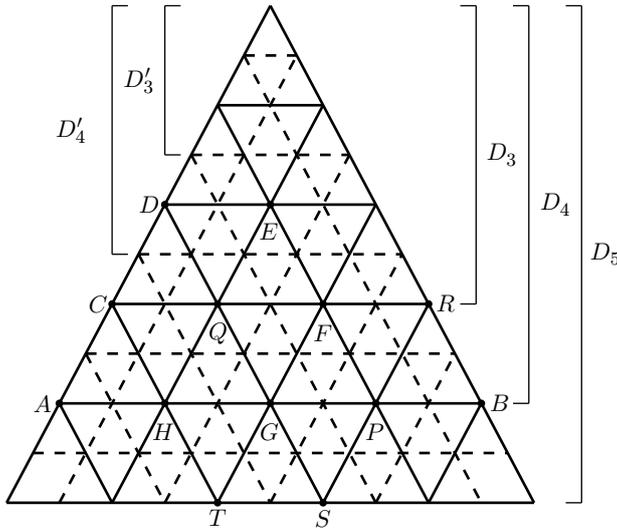


Рис. 18.

Как и при доказательстве теоремы 1.13, с помощью леммы о вписанных треугольниках разобьем фигуру D_n на более мелкие треугольники линиями ткани W (на рис. 18 это разбиение показано пунктирными линиями). Рассмотрим фигуры D'_3, D'_4, D'_5, \dots , которые образованы сплошными и пунктирными линиями. Аналогично докажем, что существует кривая третьего класса K' , которая содержит все эти линии. Но поскольку она содержит и все сплошные линии, то $K \equiv K'$ (напомним, что кривая третьего класса однозначно определяется девятью прямыми). Продолжая разбиение на все более мелкие треугольники, придем к выводу, что K содержит всюду плотное множество линий ткани W . Следовательно, все линии ткани W принадлежат K . ■

§ 1.9. Грассмановы три-ткани и «проблема анаморфозы»

Множество k -мерных плоскостей проективного пространства \mathbb{P}^n называют грассмановым многообразием и обозначают $G(k, n)$. Обозначим грассманово многообразие $G(1, 2)$ всех прямых проективной плоскости через G .

На многообразии G можно определить три-ткань следующим образом. «Точкой» будем называть прямую — элемент многообразия G , «линией M » — пучок прямых с вершиной в точке M , «семейством линий» — множество пучков прямых, вершины которой принадлежат некоторой гладкой кривой. Пусть $L_i, i = 1, 2, 3$, — три гладкие кривые на плоскости, λ_i — определяемые ими три «семейства линий» — пучков прямых с вершинами на L_i (рис. 19). Пусть m — произвольная прямая, пересекающая кривые L_i в трех различных точках $M_i, M_i \in L_i$. Тогда m принадлежит трем пучкам прямых с вершинами в точках M_i . Поэтому можно сказать, что «линии $M_i, M_i \in \lambda_i$, пересекаются в точке m ». Следовательно, в соответствии с определением 1, в некоторой окрестности «точки» m семейства «линий» λ_i образуют три-ткань на G . Эта ткань обозначается GW и называется *грассмановой*.

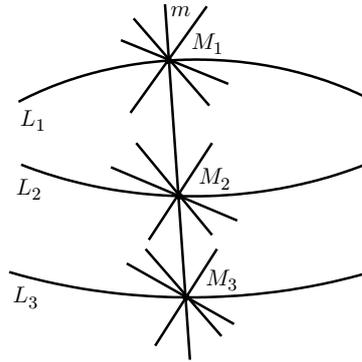


Рис. 19.

Параметром «линии» M_i является параметр точки M_i на кривой L_i , обозначим его, как обычно, u_i .

Тогда уравнение ткани GW имеет вид (1.2), а уравнение координатной квазигруппы $q = q_{12}$ — вид (1.8).

Выясним, какой вид имеет конфигурация T на ткани GW . Так как «точки» ткани GW — это прямые, «линии» — пучки прямых, «семейства линий» — пучки прямых с вершинами на кривых L_i , то

построение конфигурации T , изображенной на рис. 20а, приведет нас на ткани GW к конфигурации из шести прямых и девяти точек, изображенной на рис. 20б; назовем ее *конфигурацией Паскаля* или P . Отметим, что множество таких конфигураций зависит от четырех параметров.

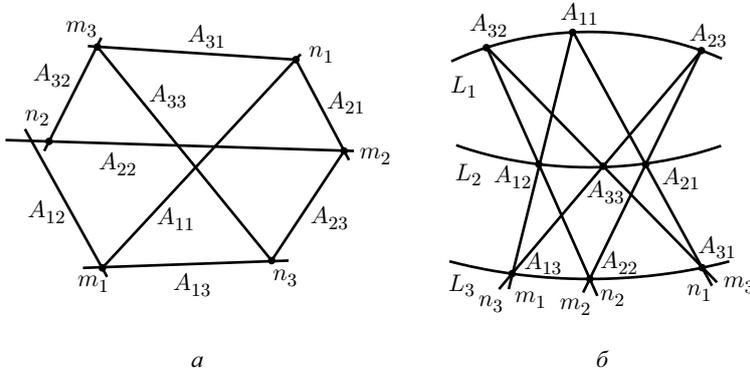


Рис. 20.

В частности, шестиугольной фигуре (она получается из фигуры T в случае, если три внутренние линии проходят через одну точку, см. рис. 20а) будет соответствовать такая фигура P (обозначим ее \tilde{P}), у которой точки A_{11} , A_{22} и A_{33} лежат на одной прямой. Множество таких конфигураций зависит уже не от четырех, а от трех параметров.

Замкнутой фигуре T (на рис. 20а прямые A_{12} , A_{22} и A_{32} проходят через одну точку) отвечает замкнутая фигура P (на рис. 20б точки A_{12} , A_{22} и A_{32} лежат на одной прямой).

Напомним, что грассманову ткань мы рассматриваем на проективной плоскости, где каждая точка определяется тройкой однородных координат (x^1, x^2, x^3) .¹⁾ Пусть $M_i(x_i^1(u_i), x_i^2(u_i), x_i^3(u_i))$, тогда условие принадлежности точек M_i одной прямой m имеет вид

$$\begin{vmatrix} x_1^1(u_1) & x_1^2(u_1) & x_1^3(u_1) \\ x_2^1(u_2) & x_2^2(u_2) & x_2^3(u_2) \\ x_3^1(u_3) & x_3^2(u_3) & x_3^3(u_3) \end{vmatrix} = 0. \quad (1.37)$$

Как видно, уравнения (1.34) и (1.37) похожи; более точно: уравнение (1.34) перейдет в уравнение (1.37) при взаимно-однозначном преобразовании, которое каждой точке (x^1, x^2, x^3) проективной плоскости ставит в соответствие некоторую прямую (p^1, p^2, p^3) , а каждой

¹⁾ На аффинной плоскости (проективная плоскость без прямой $x^3 = 0$) аффинные координаты x, y выражаются через однородные так: $x = x^1/x^3$, $y = x^2/x^3$.

прямой — некоторую точку, и при этом сохраняется принадлежность точки прямой. Такие преобразования называются *корреляциями*. В однородных координатах их можно задать уравнениями $p_i = a_{ij}x^j$, где $\det(a_{ij}) \neq 0$ и по индексу j производится суммирование. При корреляции а) точки прямой t переходят в пучок прямых с вершиной M , где M — образ прямой t , и обратно: пучок прямых с вершиной M перейдет в множество точек прямой t ; б) семейство прямых λ перейдет в семейство точек, то есть в некоторую кривую L , а огибающая семейства λ перейдет в некоторое семейство прямых, которое огибает L — это следует из свойства корреляции сохранять принадлежность точки прямой. Поэтому при корреляции прямолинейная три-ткань W переходит в грассманову три-ткань GW и обратно.

Лемма 1.3. При корреляции

а) кривая третьего порядка переходит в кривую третьего класса и обратно;

б) конфигурации T , связанные с кривой третьего класса, переходят в конфигурации P , связанные с соответствующей кривой третьего порядка;

в) прямолинейная три-ткань $W(K)$, образованная прямыми кривой третьего класса K , переходит в такую грассманову ткань, у которой все три порождающие ее кривые L_i принадлежат одной и той же кубической кривой, — той самой, в которую переходит при корреляции кривая K . Обозначим эту кривую \tilde{K} , а соответствующую три-ткань $GW(\tilde{K})$.

□ Пункт а) следует из того факта, что корреляция есть линейное преобразование.

Пункт б) проверяется непосредственным построением.

Пункт в) следует из определения корреляции. ■

Следствие: с произвольной кривой третьего порядка связано ∞^4 конфигураций P .

Непосредственно из леммы вытекает условие регулярности грассмановой ткани GW .

Теорема 1.19 (двойственный аналог теоремы Графа–Зауэра). Грассманова три-ткань GW является регулярной тогда и только тогда, когда определяющие ее кривые L_i принадлежат одной кривой третьего порядка.

Для кубических кривых справедливы следующие утверждения, аналогичные полученным в предыдущем параграфе для кривых третьего класса:

а) существует пучок кубических кривых, проходящих через все точки конфигурации P ;

б) если кубическая кривая проходит через 8 точек конфигурации P , то она проходит и через девятую.

Свойство кубической кривой допускать конфигурации P можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1.20 [П-1] (обобщенная теорема Паскаля для кривых третьего порядка). Пусть вершины шестиугольника и две точки пересечения его противоположных сторон лежат на кубике K . Тогда и точка пересечения третьей пары противоположных сторон этого шестиугольника также лежит на K .

Классическая теорема Паскаля получается в случае, если кубика распадается на прямую и конику, а теорема Паскаля–Паппа получается в случае, если кубика распадается на 3 прямые. Именно поэтому конфигурацию P , изображенную на рис. 20а, было уместно назвать конфигурацией Паскаля.

Как видно, теория тканей тесно связана с проективной геометрией. Однако есть и другие применения полученных результатов.

А. В разных разделах математики важное значение имеют условия алгебраизуемости системы поверхностей. Говорят, что система n поверхностей алгебраизуема, если все поверхности системы являются кусками одной и той же алгебраической поверхности порядка n . Из предыдущих результатов получается следующий признак алгебраизуемости тройки кривых.

Теорема 1.21. Тройка кривых L_i алгебраизуема, если замыкаются все конфигурации Паскаля, связанные с этими кривыми.

Б. Одно из исторически первых приложений криволинейных тканей — номография. Первоначальный интерес к прямолинейным и грасмановым тканям появился именно в связи с задачами номографии. Номография — прикладной раздел математики, где изучаются способы графического решения уравнений с помощью так называемых номограмм. Простейшая номограмма — «декартов абак» — для функции $z = f(x, y)$ состоит из конечного числа линий $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и линий уровня функции $f: z = f(x, y) = \text{const}$. С помощью номограммы можно приближенно решать уравнения вида $c = f(x, b)$, $c = f(a, y)$. Сейчас эти уравнения легко решить с помощью ЭВМ, а для простейших функций достаточно калькулятора. Но, раньше, когда этих средств не было, номограммы широко использовались в разных областях, прежде всего, инженерами.

Особенно удобны так называемые номограммы из выравненных точек. Подобная номограмма для функции $z = f(x, y)$ состоит из трех кривых, на которых нанесены значения переменных x , y и z таким образом, что точки x , y и $z = f(x, y)$ оказываются на одной прямой. Следовательно, чтобы найти по заданным значениям двух из этих переменных третье, например, по x и y найти z , надо просто приложить линейку к точкам x и y (рис. 19).

Но, как оказалось, не всякую функцию можно представить номограммой из выравненных точек. Как видно, такой номограмме соответствует грасманова три-ткань. Поэтому функцию $z = f(x, y)$ можно тогда и только тогда представить номограммой из выравненных точек, когда три-ткань, определяемая уравнением $z = f(x, y)$, эквивалентна грасмановой ткани, или эквивалентна соответствующей ей в

корреляции прямолинейной ткани. В связи с этим в теории тканей возникла следующая задача (проблема спрямляемости ткани), имевшая в то время (конец 19 — начало 20 века) важное прикладное значение: как выяснить, будет ли заданная ткань эквивалентна прямолинейной ткани? Ткани, эквивалентные грасмановой ткани, называются грасманизуемыми, а эквивалентные прямолинейной ткани, называются линейризуемыми. Поэтому говорят также о проблеме линейризуемости или грасманизуемости тканей. Эта проблема оказалась настолько сложной, что решить ее полностью удалось совсем недавно, в 2005 году.

С прямолинейными тканями связана еще одна проблема, сформулированная Гронвеллом в 1912 году: верно ли, что всякий локальный диффеоморфизм, переводящий грасманову три-ткань в грасманову, является проективным преобразованием? Эта проблема была решена только в 2012 году одним из авторов этой книги.

Подробно эти задачи рассматриваются во второй главе. Еще одно приложение обсуждается в следующем параграфе.

§ 1.10. Три-ткани и универсальные тождества

В этом параграфе будет показано, как с помощью три-тканей находить универсальные тождества в лупах. Эта чисто алгебраическая проблема, казавшаяся весьма трудной в рамках алгебраической теории, достаточно просто решается, если привлечь геометрические средства, а именно, теорию тканей.

Напомним (см. определение в конце § 1.4), что множество всех луп, в которых выполняется некоторое тождество S , называется многообразием луп и обозначается $V(S)$.

Многообразия луп инвариантны относительно изоморфизма, но не инвариантны, вообще говоря, относительно изотопии. Это означает, что если в некоторой лупе Q выполняется тождество S , то оно не выполняется, вообще говоря, в изотопах лупы Q . Например, многообразие коммутативных луп не инвариантно относительно изотопии. С другой стороны, справедлива **теорема Алберта**: *если некоторая квазигруппа изотопна группе, то она ей изоморфна, и, следовательно, сама является группой.*³⁾ Из теоремы Алберта вытекает, что многообразие групп инвариантно относительно изотопии. Оказывается, что существуют и другие многообразия луп, обладающие этим свойством. Определяющие их тождества называются *универсальными*. Основная задача, связанная с универсальными тождествами, формулируется так: выяснить, является ли данное тождество S универсальным, а если нет, то указать максимальное инвариантное относительно изотопии подмногообразие многообразия $V(S)$ и определяющее его

³⁾ Доказательство этой теоремы см. в книге [Б-1], с. 17.

универсальное тождество. Как мы увидим дальше, каждому универсальному тождеству отвечает некоторый класс три-тканей. Это дает возможность, в частности, доказать универсальность тождеств Муфанг и Бола.

Прежде всего дадим аксиоматическое определение полной три-ткани.

Рассмотрим множество X , элементы которого назовем точками, и три множества (или семейства) λ_i , $i = 1, 2, 3$, их элементы будем называть линиями или слоями.

Определение. Множества X , λ_i образуют *полную три-ткань* $W = (X, \lambda_i)$, если их элементы связаны *отношением инцидентности (принадлежности)*, которое удовлетворяет следующим аксиомам.

A1. *Каждая точка множества X инцидентна в точности трем линиям, принадлежащим различным семействам λ_i .*

A2. *Две линии, взятые из разных семейств, инцидентны одной и только одной точке из X .*

Отсюда следует справедливость следующего утверждения.

A3. *Две линии, принадлежащие одному семейству λ_i , не имеют общих точек.*

Элементы множеств X и λ_i обозначают, как правило, малыми латинскими буквами. Если точка p инцидентна линии x , то говорят, что p лежит на x или x проходит через p .

На криволинейной три-ткани, образованной гладкими кривыми (такие ткани мы будем называть геометрическими) всегда выполняется аксиома A1, но аксиома A2 может и не выполняться. Например, она выполняется для параллельной три-ткани П, но не выполняется для ткани из примера 2 § 1.1.

Для полной три-ткани, как и для геометрической, вводится понятие координатных квазигрупп q_{ij} . Пусть, как и в § 1.4, $q_{12} \equiv xy$.

Непосредственно из определения полной три-ткани вытекает, что множества точек, принадлежащие двум различным линиям этой ткани, равноможны; более того, с помощью линий ткани между ними устанавливается биективное соответствие. Поскольку каждая точка множества X является пересечением двух линий, например, линий x_1 и x_2 , где $x_1 \in \lambda_1$, $x_2 \in \lambda_2$, то множество X биективно прямому произведению $\lambda_1 \times \lambda_2$, $X \sim \lambda_1 \times \lambda_2$. При этом линии первого семейства соответствует множество пар вида (a, y) , где a — фиксированный элемент из λ_1 , а y пробегает все множество λ_2 . Линии второго семейства соответствует множество пар вида (x, b) , линии третьего семейства — множество пар (x, y) таких, что $xy = \text{const}$. Обратно, всякая трехбазисная квазигруппа $q: X_1 \times X_2 \rightarrow X_3$ однозначно определяет некоторую полную три-ткань W на прямом произведении $X = X_1 \times X_2$. Линиями первого семейства этой ткани будут подмножества точек вида (a, y) из X , где a — фиксированный элемент из X_1 , линиями второго семейства — подмножества точек вида (x, b) , где b — фиксированный элемент множества X_2 , а линиями третьего семейства —

пары вида (x, y) , для которых выполнено условие $q(x, y) = c, c \in X_3$. Так как в квазигруппе q однозначно разрешимы уравнения $q(a, y) = c, q(x, b) = c$, то для построенной три-ткани выполняются аксиомы A1 и A2. Исходная квазигруппа q будет координатной квазигруппой q_{12} этой ткани.

Рассмотрим, например, квазигруппу q , состоящую из трех элементов, таблица умножения которой приведена на рис. 21а. Соответствующая три-ткань изображена на рис. 21б. Ее линии содержат по три точки.

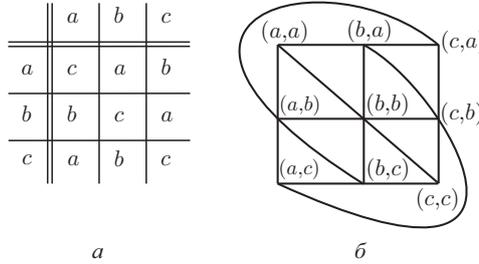


Рис. 21.

Отношение эквивалентности вводится для полных тканей так же, как и для геометрических: две полные ткани W и \tilde{W} называются эквивалентными, если существует биективное отображение φ , которое линии одной ткани переводит в линии другой. Отображение φ индуцирует тройку отображений J_i на соответствующих множествах линий ткани. Тройка отображений (J_1, J_2, J_3) является изотопическим отображением координатной ткани W на три-ткань \tilde{W} . Далее для полных тканей, как и для геометрических, вводятся понятия главной изотопии и координатных луп $\ell(a, b)$.

Напомним, что для геометрических три-тканей отображения φ и J_i являлись локальными диффеоморфизмами, но не обязательно биекциями в целом. Для полных тканей эти отображения являются биекциями, но не будут, вообще говоря, дифференцируемыми, и даже непрерывными.

На полных тканях имеет смысл и понятие конфигурации. Фигуры H, T, R и т.д. можно определить с помощью импликаций (1.25), (1.26), (1.27) и т.д., но их нельзя нарисовать на полной ткани, поскольку на ней «линия» — это набор точек! Отсутствие геометрической наглядности — существенный недостаток алгебраической теории квазигрупп, в рамках которой изучаются полные ткани (как некий аналог квазигруппы). Чтобы ликвидировать этот недостаток и вместе с тем упростить предстоящие доказательства, поступим следующим образом: будем рассматривать геометрическую три-ткань как модель полной три-ткани, то есть будем изображать конфигурации на полной три-ткани такими же конфигурациями на некоторой геометрической ткани. К противоречию это соглашение не приведет, поскольку, как мы только что видели, полные ткани и геометрические ткани в малом обладают одними и теми же свойствами инцидентности. Правда, при этом надо помнить, что линии геометрической ткани — это модели

линий полной ткани, поэтому нельзя пользоваться такими свойствами линий геометрической ткани, как непрерывность и дифференцируемость. Иными словами, мы можем пользоваться только свойствами инцидентности.

Например, при доказательстве теорем 1.13 и 1.14 мы пользовались только свойствами инцидентности, поэтому указанные теоремы верны для любой полной ткани. Так же, как и утверждения $R \rightarrow B_\ell$, $R \rightarrow B_r$, $R \rightarrow B_m$, $R \rightarrow E$, $R \rightarrow H$, $B_\ell \rightarrow H$, $B_r \rightarrow H$, $B_m \rightarrow H$, $E \rightarrow H$ (§ 1.5).

Но на полных три-тканях не будет выполняться лемма о вписанных треугольниках, при доказательстве которой существенно используется непрерывность функции ткани. Поэтому для полной три-ткани не будут выполняться и следствия 1 и 2 из теоремы 1.16, то есть на ней все перечисленные выше условия замыкания не будут, вообще говоря, эквивалентными.

Для полных тканей будет справедлива теорема 1.15 о соответствии между условиями замыкания и тождествами в координатных лупах.

Теорема 1.22. *Тождество ассоциативности*

$$(u \circ v) \circ w = u \circ (v \circ w) \tag{1.38}$$

является универсальным.

□ Пусть в лупе Q выполняется тождество (1.38). Обозначим буквой W полную три-ткань, для которой эта лупа будет одной из координатных луп ℓ_p . Так как она ассоциативна, то в соответствии с п. 1 на ткани W замыкаются все связанные с лупой ℓ_p координатные фигуры R .

Рассмотрим теперь на ткани W произвольную фигуру

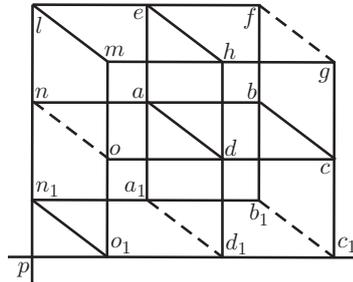


Рис. 22.

$R = (abcdefgh)$ (рис. 22). Докажем, что она также замыкается, то есть ее точки f и g лежат на одной линии третьего семейства. Построим последовательно точки $l, m, o, n, o_1, n_1, a_1, d_1, b_1, c_1$, как показано на рис. 22. Так как координатные фигуры R замыкаются, то замыкается и фигура $R_1 = (elmha_1n_1o_1d_1)$, т. е. выполняется условие $a_1 \exists d_1$. Рассмотрим далее координатную фигуру $R_2 = (anoda_1n_1o_1d_1)$. Так как она тоже замыкается, то $n \exists o$. Из замыкания еще одной координатной фигуры $R_3 = (bnocb_1n_1o_1c_1)$ следует условие $b_1 \exists c_1$. Наконец, из замыкания координатной фигуры $R_4 = (flmgb_1n_1o_1c_1)$ получаем условие $f \exists g$. Следовательно, замыкается и фигура $R = (abcdefgh)$.

Итак, на рассматриваемой ткани W замыкаются все фигуры R . Следовательно, все ее координатные лупы будут группами. В силу

предложения 1.11 отсюда следует, что все главные изотопы лупы Q будут группами. Как известно из теории квазигрупп, всякая изотопия может быть представлена в виде композиции главной изотопии и изоморфизма. В силу предложения 1.11 это означает, что любой изотоп лупы Q с точностью до изоморфизма есть одна из координатных луп ткани. Иными словами, с точностью до изоморфизма координатными лупами ткани исчерпываются все возможные изотопы лупы Q . Следовательно, мы доказали, что любой изотоп ассоциативной лупы также является ассоциативной лупой. Но это и означает, что тождество ассоциативности универсально. ■

Теорема 1.23. *Лупы, в которых выполняется тождество T*

$$T: \quad u \circ (v \circ w) = v \circ (u \circ w), \quad (1.39)$$

и только такие лупы являются коммутативными группами. Тождество (1.39) универсально.

□ С одной стороны, тождество (1.39) вытекает из тождеств коммутативности и ассоциативности. Обратно, если в (1.39) положить $w = e$, где e — единица лупы, то получится тождество коммутативности, в силу которого из (1.39) следует ассоциативность. Первая часть теоремы доказана.

Предположим теперь, что в координатной лупе ℓ_p некоторой три-ткани W выполняется тождество (1.39). Ему отвечает полукоординатная фигура T (изображенная на рис. 23), у которой, в отличие от рассмотренных выше координатных фигур T , только одна сторона лежит на координатной прямой ($x = a$).

Рассмотрим теперь произвольную фигуру Томсена $T = (abcdef)$, образованную линиями ткани W (рис. 24), и докажем, что она замыкается, т. е. точки b и e лежат на одной линии третьего семейства.

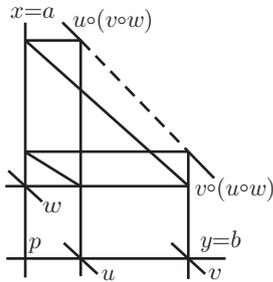


Рис. 23.

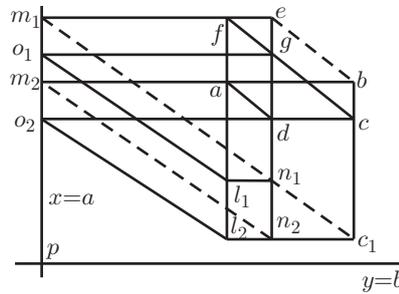


Рис. 24.

Построим последовательно точки m_1, o_1, ℓ_1, n_1 , как показано на рис. 24, и рассмотрим фигуру $T_1 = (o_1 g n_1 \ell_1 f m_1)$. Так как она полукоординатная, то выполняется условие $m_1 \Im n_1$.

Далее построим точки m_2 , o_2 , ℓ_2 , n_2 и рассмотрим полукоординатную фигуру $T_2 = (o_2dn_2\ell_2am_2)$. Из ее замыкания следует, что выполняется условие $m_2\Im n_2$. Построив точку c_1 , мы получим еще одну полукоординатную фигуру — $T_3 = (o_2cc_1\ell_2fm_1)$, откуда следует, что $m_1\Im c_1$.

Рассмотрим, наконец, полукоординатную фигуру $T_4 = (m_2bc_1\ell_2fm_1)$. Из ее замыкания выводим, что $b\Im f$. Следовательно, фигура $T = (abcdef)$ замыкается, а поскольку она была взята произвольно, то получается что на рассматриваемой ткани замыкаются все фигуры T . Поэтому все координатные луны рассматриваемой три-ткани являются абелевыми группами, и в них выполняется тождество (1.39). Но это и означает, что оно универсально. ■

Теорема 1.24. *Три-ткань W является тканью B_ℓ тогда и только тогда, когда в ее координатных лунах выполняется левое тождество Бола*

$$B_\ell: (u \circ (w \circ u)) \circ v = u \circ (w \circ (u \circ v)). \quad (1.40)$$

Левое тождество Бола универсально.

□ Предположим, что в координатной луне ℓ_p ткани W выполняется тождество (1.40). Соответствующая этому тождеству координатная фигура $b_\ell = (bcdfghb_1c_1d_1f_1g_1h_1)$ изображена на рис. 25 (без пунктирной линии aa_1). Частными случаями этой фигуры являются левые координатные фигуры Бола B'_ℓ и B_ℓ , изображенные на рисунках 26 и 27. Фигура B'_ℓ получается, если положить $w \circ u = e$, B_ℓ — при $w = e$, где e — единица луны ℓ_p .

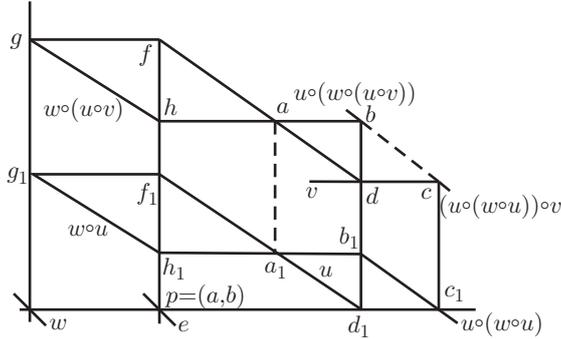


Рис. 25.

Докажем сначала, что из замыкания координатных фигур B'_ℓ , вид которых изображен на рис. 26, следует замыкание полукоординатных фигур $B'_\ell = (abcd a' b' c' d')$, вид которых изображен на рис. 28. Действительно, построим точки a_1, b_1, c_1 , как показано на рис. 28. Получим координатную фигуру $B'_\ell = (abcd a_1 b_1 c_1 p)$, из замыкания которой следует $c_1 c_1$.

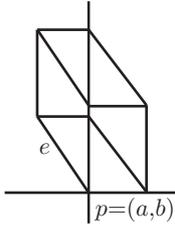


Рис. 26.

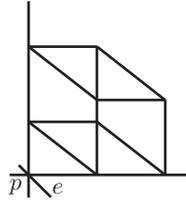


Рис. 27.

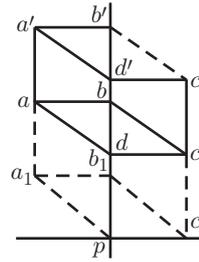


Рис. 28.

Возникает координатная фигура $B'_\ell = (a'b'c'd'a_1b_1c_1p)$, замыкание которой дает $b'3c'$, что и требовалось.

Теперь докажем, что на ткани W замыкается произвольная фигура $B_\ell = (abcd a_1 b_1 c_1 d_1)$ (рис. 29). Построим последовательно точки f, g, h и f_1, g_1, h_1 (рис. 29).

Согласно предыдущему абзацу фигура $B'_\ell = (gfahg_1f_1a_1h_1)$ замыкается, что дает g_13h_1 . Далее строим точки $c_2, d_2, b_2, h_2, f_2, g_2$. Получилась координатная фигура $b_\ell = (b_1c_1d_1f_1g_1h_1b_2c_2d_2f_2g_2h_2)$. Так как по условию теоремы она обязана замыкаться, то g_23h_2 . Теперь рассмотрим координатную фигуру $b_\ell = (bcd fgh b_2 c_2 d_2 f_2 g_2 h_2)$. Из ее замыкания следует $b3c$, то есть рассматриваемая фигура Бола $B_\ell = (abcd a_1 b_1 c_1 d_1)$ замыкается. Итак, на рассматриваемой ткани W замыкаются все левые фигуры Бола, то есть это левая ткань Бола.

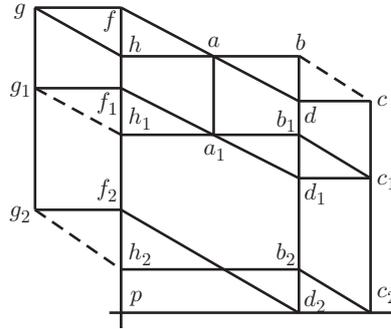


Рис. 29.

Обратно, предположим, что ткань W является левой тканью Бола, то есть на ней замыкаются все фигуры B_ℓ . Докажем, что на ней замыкаются и все фигуры вида $b_\ell = (bcd fgh b_1 c_1 d_1 f_1 g_1 h_1)$ (рис. 25, без пунктирной линии aa_1). Действительно, фигура $b_\ell = (bcd fgh b_1 c_1 d_1 f_1 g_1 h_1)$ «склеена» из двух левых фигур Бола: $(abcd a_1 b_1 c_1 d_1)$ и $(afgh a_1 f_1 g_1 h_1)$. Так как на ткани W все левые фигуры Бола замыкаются, то $a1a_1$ и $b3c$. Таким образом, все фигуры вида b_ℓ (не только координатные!) замыкаются. ■

Аналогично доказывается

Теорема 1.25. В координатных лунках тканей B_r и только таких тканей выполняется правое тождество Бола

$$B_r: u \circ ((v \circ w) \circ v) = ((u \circ v) \circ w) \circ v. \quad (1.41)$$

Правое тождество Бола универсально.

Напомним, что тканью Муфанг мы назвали в §1.5 ткань, на которой замыкаются фигуры Бола всех трех типов. Из последних двух теорем, теоремы 1.14 и задач 1.19, 1.20 вытекает

Теорема 1.26. *В координатных лупах тканей Муфанг и только таких тканей выполняется тождество Муфанг*

$$M: (u \circ v) \circ (w \circ u) = u \circ ((v \circ w) \circ u). \quad (1.42)$$

Тождество Муфанг универсально.

Теорема 1.27. *В координатных лупах тканей B_m и только в них выполняется тождество*

$$B_m: w \circ ((u \circ v) \setminus w) = (w/v) \circ (u \setminus w). \quad (1.43)$$

Это тождество универсально.

□ На три-ткани B_m замыкаются все фигуры B_m , в частности, связанные с лупой ℓ_p полукоординатные фигуры B_m , изображенные на рис. 30. Им соответствует тождество (1.43), которое при $u = e$ совпадает с тождеством (1.32). Это доказывает первую часть теоремы.

Предположим теперь, что на три-ткани W замыкаются только полукоординатные фигуры B_m , связанные с координатной лупой ℓ_p , и докажем, что на этой ткани замыкаются все такие фигуры. Рассмотрим произвольную фигуру $B_m = (abcd a_1 b_1 c_1 d_1)$, изображенную на рис. 31. Построив точки d_2, c_2, a_2, b_2 , как показано на этом рисунке, получим полукоординатную фигуру $B_m^1 = (a_1 b_1 c_1 d_1 a_2 b_2 c_2 d_2)$, которая по условию теоремы замыкается, так что $b_1 \Im b_2$. Из замыкания другой полукоординатной фигуры $B_m^2 = (abcd a_2 b_2 c_2 d_2)$ следует $b \Im b_2$. Пользуясь определением три-ткани, находим, что точки b, b_1, b_2 лежат на одной линии третьего семейства, т. е. фигура $B_m = (abcd a_1 b_1 c_1 d_1)$ замыкается. Таким образом, из замыкания полукоординатных фигур B_m следует замыкание всех фигур B_m . Следовательно, тождество (1.43), соответствующее полукоординатной фигуре B_m , является универсальным. ■

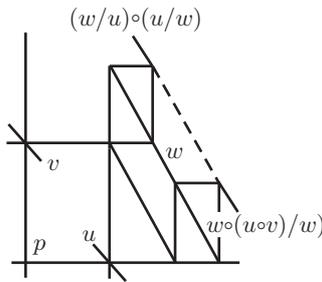


Рис. 30.

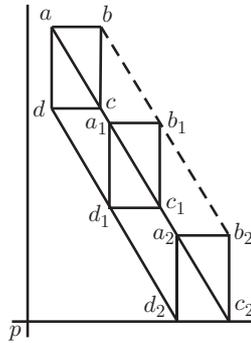


Рис. 31.

Лупы, в которых выполняется тождество B_m , называются *средними лупами Бола*.

Мы рассмотрели три-ткани, во всех координатных лупах которых выполняется некоторое тождество S . Обозначим $W(S)$ класс тканей, координатные лупы которых принадлежат многообразию $V(S)$.

Допустим, что тождество S универсально. Поскольку все координатные лупы три-ткани изотопны друг другу, то получаем, что ткань W принадлежит классу $W(S)$, если хотя бы в одной координатной лупе выполняется тождество S .

Это свойство не имеет места, если тождество S не является универсальным. Однако в таком случае, поскольку все координатные лупы ткани W изотопны, должно существовать универсальное тождество \tilde{S} , характеризующее многообразие луп ткани W . Оно находится следующим образом. Так как ткань W принадлежит классу $W(S)$, то на ней замыкаются все фигуры S , определенным образом связанные с координатными лупами (мы назвали их в п. 1 координатными фигурами). Рассмотрим произвольную фигуру S , не являющуюся координатной для лупы $\ell(a, b)$. Ей отвечает в лупе $\ell(a, b)$ некоторое новое тождество \tilde{S} , которое уже будет универсальным. Действительно, если тождество \tilde{S} выполняется хотя бы в одной лупе $\ell(a, b)$, то на ткани W будут замыкаться всевозможные фигуры S , и поэтому тождество \tilde{S} выполняется во всех координатных лупах ткани.

Таким образом, получается следующий алгоритм для нахождения универсального тождества \tilde{S} , соответствующего заданному тождеству S . На рис. 32 через S обозначена некоторая координатная фигура, связанная с координатной лупой $\ell_p(\circ)$, через \tilde{S} — такая же фигура, но расположенная произвольно относительно точки p . Фигура \tilde{S} будет координатной для некоторой другой координатной лупы $\ell_{\tilde{p}}(\tilde{\circ})$. Из определения LP -изотопа (см. (1.22)) имеем следующее равенство (рис. 32):

$$\tilde{u} \tilde{\circ} \tilde{v} = x \cdot y = u \circ v.$$

Полагая $\tilde{u} = u \circ t$, $\tilde{v} = s \circ v$, перепишем это равенство в виде

$$\tilde{u} \tilde{\circ} \tilde{v} = (\tilde{u}/t) \circ (s \setminus \tilde{v}), \tag{1.44}$$

где, как и выше, символами $/$ и \setminus обозначены обратные операции к операции \circ . Фигуре \tilde{S} отвечает в лупе $\ell_{\tilde{p}}(\tilde{\circ})$ тождество S . Чтобы получить соответствующее тождество в лупе $\ell_p(\circ)$, следует каждое произведение $\tilde{u} \tilde{\circ} \tilde{v}$, входящее в тождество S , преобразовать с помощью равенства (1.44). Полученное таким образом тождество называется

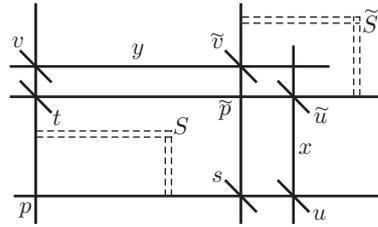


Рис. 32.

производным от тождества S и содержит, помимо переменных, входящих в исходное тождество S , еще две переменные: s и t .

Например, тождеству моноассоциативности $u^2 \circ u = u \circ u^2$ отвечает производное тождество

$$(u/t \circ s \setminus u)/t \circ s \setminus u = u/t \circ s \setminus (u/t \circ s \setminus u) \quad (1.45)$$

с тремя переменными u , s и t .

Кроме производного тождества \tilde{S} на многообразии луп $V(S)$ могут существовать и другие универсальные тождества, эквивалентные тождеству \tilde{S} , не содержащие обратных операций и зависящие от меньшего числа переменных, чем производное тождество. Такие универсальные тождества связаны уже не с произвольной, а с некоторой полукоординатной фигурой S . Доказательство универсальности основано на том, что из замыкания полукоординатных фигур S , связанных с одной из координатных луп ткани, вытекает замыкание всех фигур S .

Для каждого из классов R , T , B_ℓ , B_r , M , B_m , кроме найденных универсальных тождеств (1.38)–(1.41), существует еще одно — производное. Например, в координатных лупах ткани B_ℓ выполняется универсальное тождество, производное от тождества левой альтернативности $u^2 \circ v = u \circ (u \circ v)$. Но оно содержит уже 4 переменные и обратные операции, поэтому выглядит значительно сложнее, чем тождество Бола B_ℓ (1.40). Для тканей H производное тождество имеет вид (1.45), для тканей E оно получается описанным выше способом из тождества эластичности. Вопрос о том, существуют ли для тканей H и E универсальные тождества более простые, чем указанные производные тождества, остается открытым.

В заключение заметим, что теория квазигрупп конечного порядка и соответственно полных тканей используется в теории кодирования, для планирования экспериментов, в теории конечных проективных плоскостей, см. об этом в [ББл-1], [Б-2].

§ 1.11. Канонические координаты на три-ткани и в ее координатной лупе

На три-ткани и в ее координатной лупе локальные координаты можно выбрать некоторым специальным образом.

Предложение 1.28. Пусть p — произвольная точка области определения ткани W . В некоторой окрестности точки p можно выбрать координаты так, что координатная квазигруппа ткани будет лупой, причем единица лупы будет иметь нулевую координату.

□ Выберем локальные координаты окрестности точки p так, чтобы вертикальная и горизонтальная линии ткани, проходящие через p , задавались уравнениями $x = 0$ и $y = 0$ соответственно. Затем выберем параметры в семействах кривых ткани так, как показано на рис. 33:

параметры линий ткани, пересекающихся в точках координатных линий $x = 0$ и $y = 0$, одинаковы.

Пусть, как и выше, три-ткань W и ее координатная квазигруппа задаются уравнением $z = f(x, y)$. Тогда, в силу выбранной параметризации, $f(x, 0) = x$, $f(0, y) = y$, или $u = R_0(x) = x$, $v = L_0(y) = y$. Из определения (1.22) координатной лупы имеем: $u \circ v = x \cdot y = u \cdot v$. ■

Описанная параметризация называется *стандартной*.

Следствие. При стандартной параметризации функция ткани $f(x, y)$ имеет следующее разложение в ряд в окрестности точки $(0, 0)$:

$$f(x, y) = x + y + \alpha xy + \lambda x^2 y + \mu xy^2 + \dots, \quad (1.46)$$

где в правой части отсутствуют нелинейные слагаемые, содержащие только переменную x или только переменную y . Действительно, такой вид ряда получается в силу условий $f(x, 0) = x$, $f(0, y) = y$.

Определение 8. Локальные координаты в гладкой локальной одномерной лупе $Q(\circ)$, в которых выполняется соотношение

$$u \circ u = 2u, \quad (1.47)$$

называются *каноническими*.

Как видно из этого определения, оно обобщает канонические координаты в одномерной группе Ли — в них, как известно, групповая операция записывается в виде $z = x + y$.

Теорема 1.29. *Канонические координаты в гладкой локальной одномерной лупе существуют.*

□ Пусть $Q(\circ)$ — гладкая локальная одномерная лупа, единица e которой имеет нулевые координаты. Лупа $Q(\circ)$ определяет на прямом произведении $Q \times Q$ в некоторой окрестности точки $p(0, 0)$ три-ткань W , линии которой определяются уравнениями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ и $u \circ v = \text{const}$. Лупа $Q(\circ)$ является координатной квазигруппой и одновременно координатной лупой $\ell(0, 0)$ ткани W . Напомним, что операция в лупе $Q(\circ)$ определена на линиях третьего семейства линий ткани W .

Рассмотрим в этой окрестности треугольник Δ , образованный линиями $u = 0$, $v = 0$ и u (рис. 33), и выберем такую окрестность точки $p(0, 0)$, в которой часть линии u между линиями $x = 0$ и $y = 0$ была всюду выпуклой или всюду вогнутой. Тогда, в соответствии с леммой о вписанном треугольнике из § 1.7, в треугольник Δ можно вписать единственным образом другой треугольник Δ_1 , образованный линиями ткани. Обозначим входящую в него наклонную линию через u' , тогда, согласно определению 7, будем иметь $u' \circ u' = u$, поэтому обо-

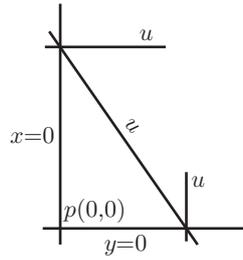


Рис. 33.

значим $u' = u^{1/2}$. Аналогичной процедурой (то есть вписывая новый треугольник в треугольник, образованный линиями $x = 0$, $y = 0$ и $u' = u^{1/2}$, и т.д.), мы получим линии третьего семейства $u^{1/4}, u^{1/8}, \dots$, причем всегда будут выполняться равенства $u^{1/2^k} \circ u^{1/2^k} = u^{1/2^{(k-1)}}$. Точно также получим следующие линии: $u \circ u = u^2$, $u^2 \circ u^2 = u^4$ и т.д. Обозначим эту последовательность линий третьего семейства $\{u\}$. Далее припишем линии u параметр 1, линии $u^{1/2^k}$ — параметр $1/2^k$, линии u^{2^k} — параметр 2^k , $k \in \mathbb{Z}$. Тогда для параметров построенных линий будет выполняться соотношение (1.47): $u \circ u = 2u$.

Теперь вписываем треугольник Δ_2 в треугольник Δ_1 , и входящей в него наклонной линии (пусть v) приписываем параметр $3/4 = 1 - 1/4$. Затем, как и в предыдущей ситуации, строим последовательность $\{v\}$ линий третьего семейства ткани W с параметрами $(3/4)^{1/2^k}$ и $(3/4)^{2^k}$. Для параметров этих линий также будет выполняться соотношение $u \circ u = 2u$. При этом линии второй последовательности будут располагаться между линиями первой последовательности.

Далее вписываем треугольник Δ_3 в треугольник, находящийся между наклонными линиями с параметрами 1 и $3/4$ (он ограничен вертикальной и горизонтальной линиями с параметрами $1/2$), и приписываем этой линии параметр $1 - 1/8$, и т.д.

Продолжая процедуру, получим в некоторой области D всюду плотное множество линий третьего семейства, параметры которых будут удовлетворять соотношению $u \circ u = 2u$. Обозначим это множество линий Σ .

Пусть теперь z — произвольная линия третьего семейства, проходящая в области D , $\{z\}$ — определяемая ею описанным выше образом последовательность линий третьего семейства, и $\{u\}$ и $\{v\}$ — две какие-либо последовательности из Σ . Всегда найдутся две линии u_0 и v_0 , $u_0 \in \{u\}$, $v_0 \in \{v\}$, соответствующие одному и тому же значению k (см. выше), такие, что линия z находится между ними. Тогда каждая линия последовательности $\{z\}$ также будет располагаться между какими-либо двумя линиями из тех же последовательностей $\{u\}$ и $\{v\}$, получающимися при одинаковом значении k .

Поскольку множество Σ всюду плотное, то отсюда вытекает, что и для линий последовательности $\{z\}$ будет выполняться соотношение (1.47): $u \circ u = 2u$. Таким образом, это соотношение будет выполняться для всех линий третьего семейства ткани W . Таким образом, существование канонических координат в лупе $Q(o)$ доказано. Если теперь ввести в окрестности точки p стандартную параметризацию, то получим канонические координаты на три-ткани W . ■

Примечание. Канонические координаты были введены в [А-2] для локальной аналитической лупы произвольной размерности. Их существование было доказано в [АШ-2]. В [Дю-1] было показано, что существование канонических координат в гладкой лупе непосредственно вытекает из результатов работы [Ст-1]. Приведенное выше

«топологическое» доказательство отлично от приведенных в [АШ-2] и [Дю-1].

Разложение (1.46), записанное в канонических координатах, называется также *каноническим*.

Непосредственно из определения (1.47) канонических координат вытекает

Теорема 1.30. *Каноническое разложение уравнений локальной гладкой лупы имеет вид:*

$$f(x, y) = x + y + \lambda_{112}x^2y + \lambda_{122}xy^2 + \lambda_{1112}x^3y + \lambda_{1122}x^2y^2 + \lambda_{1222}xy^3 + \dots, \quad (1.48)$$

причем

$$\lambda_{112} + \lambda_{122} = 0, \quad \lambda_{1112} + \lambda_{1122} + \lambda_{1222} = 0, \dots, \quad (1.49)$$

то есть сумма коэффициентов в членах разложения с одинаковой степенью равна нулю.

Теорема 1.31. *Канонические координаты в лупе определены с точностью до постоянного множителя.*

□ Пусть \tilde{x} — другие канонические координаты в лупе Q , причем $x = \varphi(\tilde{x})$. В новых координатах уравнение $z = f(x, y)$ ткани примет вид $\varphi(\tilde{z}) = f(\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y}))$. Так как координаты канонические, то должно выполняться тождество $\varphi(2\tilde{x}) = 2\varphi(\tilde{x})$. Взяв производную по \tilde{x} , получим $\varphi'(2\tilde{x}) = \varphi'(\tilde{x})$. Этому условию удовлетворяют только постоянные функции. Следовательно, $\varphi(\tilde{x}) = a\tilde{x} + b$. Из условия $\varphi(2\tilde{x}) = 2\varphi(\tilde{x})$ получаем $b = 0$. Следовательно, $x = a\tilde{x}$. ■

При замене канонических координат $x = a\tilde{x}$ коэффициенты канонического разложения (1.48) лупы Q умножаются на соответствующую степень числа a , следовательно, они являются относительными инвариантами лупы.

Как видно из доказательства теоремы 1.28, на три-ткани W задание канонических координат определяется выбором точки p и начальной линии u . Следовательно, на три-ткани W существует всего ∞^3 систем канонических координат. При этом канонические координаты, определенные для разных координатных луп гладкой три-ткани, связаны между собой гладкими преобразованиями (изотопиями). Поэтому совокупность всех канонических координатных систем естественным образом порождает на многообразии три-ткани W каноническую гладкую структуру, обозначим ее $S(W)$.

Теорема 1.32. [Дю-1] *Всякое непрерывное отображение гладкой три-ткани на гладкую три-ткань является гладким.*

□ Пусть локальный гомеоморфизм Φ из области определения гладкой три-ткани W в область определения гладкой три-ткани \tilde{W} переводит линии первой ткани в линии второй. В силу однозначности процедуры вписания треугольников, описанной в теореме 1.28, Φ переводит каждую систему канонических координат также в каноническую. Следовательно, Φ переводит каноническую гладкую структу-

ру $S(W)$ в каноническую гладкую структуру $S(\widetilde{W})$. Отсюда вытекает, что отображение Φ является гладким. ■

Другое доказательство этой теоремы см. в [Дю-1].

Теорема 1.33. Пусть Q — локальная гладкая одномерная лупа, отнесенная к каноническим координатам. Если φ — изоморфизм лупы Q , то φ — линейное преобразование.

□ Пусть, как и выше, операция в Q задана уравнением $z = f(x, y)$. Если φ — изоморфизм лупы Q , то $\varphi(\tilde{z}) = f(\varphi(\tilde{x}), \varphi(\tilde{y}))$. Так как координаты канонические, то при $x = y$ получаем $\varphi(2\tilde{x}) = 2\varphi(\tilde{x})$. Далее рассуждаем, как в теореме 1.31. ■

ЗАДАЧИ

1.1. 1. Найдите границы области определения и уравнение три-ткани, образованной на плоскости:

а) тремя семействами концентрических окружностей с центрами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$;

б) прямыми $y = \text{const}$, пучком прямых, проходящих через начало координат, и параболическим пучком окружностей с вершиной в O , линией центра которого служит ось y ;

в) пучком прямых с вершиной в точке O , семейством концентрических окружностей с центром в точке O , и гиперболическим пучком окружностей с вершинами в точках $(1,0)$ и $(-1, 0)$;

г) декартовой сетью и эллиптическим пучком окружностей с вершинами в точках $(1,1)$ и $(-1, -1)$.

д) тремя пучками окружностей, принадлежащими одной связке;

е) тремя гиперболическими пучками окружностей, содержащими общую мнимую окружность, причем в каждом из пучков есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков;

ж) двумя эллиптическими и одним гиперболическим пучками окружностей, содержащими общую окружность, причем в каждом из пучков есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков;

з) тремя пучками окружностей, два из которых ортогональны, причем в каждом из этих двух пучков есть одна окружность, принадлежащая третьему пучку;

и) двумя ортогональными параболическими пучками окружностей с общей вершиной и гиперболическим пучком окружностей, одна из вершин (окружность нулевого радиуса) которого совпадает с общей вершиной параболических пучков;

к) двумя эллиптическими пучками окружностей с вершинами A , B и B , C , и гиперболическим пучком окружностей с вершинами A и C ;

л) двумя параболическими пучками окружностей и эллиптическим пучком окружностей, вершины которого совпадают с вершинами параболических пучков;

м) эллиптическим пучком окружностей с вершинами A и B , гиперболическим пучком окружностей с вершинами B и C и параболическим пучком окружностей с вершиной A и базисной окружностью S , проходящей через точки A , B и C .

2. Найдите границы области определения и уравнение грассмановой три-ткани, заданной кубической кривой

$$\text{а) } x^3 + y^3 + xy = 0; \text{ б) } y^2 = x^3.$$

В каждом из случаев а)–м) первой задачи найдите границы Γ_α . Докажите, что ткани д)–м) являются регулярными (параллелизуемыми), и приведите их уравнения к виду $z = x + y$ с помощью допустимых преобразований.

1.2. Докажите, что трехарочная гипоциклоида

$$x = a(2 \cos t + \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t),$$

есть кривая третьего класса.

1.3. Найдите класс полукубической параболы $y^2 = x^3$.

1.4. Пользуясь формулой (1.14), докажите, что три-ткань, заданная уравнением (1.16), является регулярной.

1.5. Докажите непосредственно утверждения, сформулированные в § 1.7:

а) существует пучок кубических кривых, проходящих через все точки конфигурации P ;

б) если кубическая кривая проходит через 8 точек конфигурации P , то она проходит и через девятую.

1.6. Докажите, что кривая второго порядка есть кривая второго класса.

1.7. Докажите, что любая прямая пересекает кубическую кривую в трех точках.

У к а з а н и е: уравнение кубической кривой в однородных координатах (x^1, x^2, x^3) имеет вид $a_{ijk}x^i x^j x^k = 0$, или

$$a_{111}(x^1)^3 + a_{222}(x^2)^3 + a_{333}(x^3)^3 + 3a_{112}(x^1)^2 x^2 + \dots + 6a_{123}x^1 x^2 x^3 = 0.$$

1.8. Докажите, что пять заданных касательных определяют кривую второго класса однозначно, если никакие три из них не проходят через одну точку.

1.9. Докажите, что частные случаи теоремы Паскаля (когда шестиугольник, вписанный в конику, вырождается в пятиугольник, четырехугольник или треугольник) не имеют места для обобщенной теоремы Паскаля (теорема 1.20).

1.10. Постройте на три-ткани конфигурации, соответствующие правому тождеству Бола и тождеству Муфанг.

1.11. Если на плоскости существует точка, через которую проходит более трех касательных к кривой третьего класса, то эта кривая распадается.

1.12. Если изотопия $J = (J_\alpha)$ лупы $Q(\cdot)$ с единицей e на лупу $\tilde{Q}(o)$ с единицей \tilde{e} удовлетворяет условию $J_1(e) = J_2(e) = \tilde{e}$, то J — изоморфизм.

1.13. В любой лупе ${}^{-1}(x^{-1}) = ({}^{-1}x)^{-1} = x$ ($xx^{-1} = {}^{-1}xx = e$).

Лупа $Q(\cdot)$ называется обратимой (*IP*-лупой), если в ней выполняются тождества обратимости справа и обратимости слева:

$$(xy)y^{-1} = x, \quad {}^{-1}x(xy) = y. \quad (1.50)$$

1.14. Докажите следующие свойства *IP*-луп:

- 1) решение уравнения $ax = b$ имеет вид $x = {}^{-1}ab$, а уравнения $yb = c$ — вид $y = cb^{-1}$;
- 2) $x^{-1} = {}^{-1}x$, $(x^{-1})^{-1} = {}^{-1}({}^{-1}x) = x$;
- 3) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$;
- 4) $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$, $R_b^{-1} = R_{b^{-1}}$.

Определим в лупе Q отображение $I: Q \rightarrow Q$ равенством $I(x) = x^{-1}$. Тогда для *IP*-луп выполняются еще следующие свойства:

- 5) $IR_aI = L_a^{-1}$, $IL_aI = R_a^{-1}$.

1.15. Левая (правая) лупа Бола: а) альтернативна слева (справа); б) обратима слева (справа).
Указание. Положите в тождестве B_ℓ в случае а) $y = e$, в случае б) $y = {}^{-1}x$.

1.16. Лупа Муфанг: а) эластична; б) обратима справа и слева, т. е. является *IP*-лупой; в) альтернативна справа и слева.

Указание к б). Положите в тождестве Муфанг (см. Таблицу 1 из § 1.5) $y = z^{-1}$, затем $y = {}^{-1}x$ и воспользуйтесь эластичностью.

Указание к в). Положите в тождестве Муфанг $z = x$ или соответственно $y = x$ и воспользуйтесь эластичностью.

1.17. В лупе Муфанг выполняется тождество

$$M_1: x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z.$$

Тождества M и M_1 эквивалентны.

1.18. В лупе Муфанг выполняется тождество

$$M_2: (zx \cdot y)x = z(x \cdot yx).$$

Тождества M и M_2 эквивалентны.

1.19. Лупа Муфанг является правой и левой лупой Бола.

Указание. Левое тождество Бола вытекает из тождества M_1 и эластичности.

1.20. Правоальтернативная левая (левоальтернативная правая) лупа Бола есть лупа Муфанг. Если лупа Q является одновременно и правой и левой лупой Бола, то она лупа Муфанг.

1.21. Конечная квазигруппа задается таблицей умножения (таблицей Кэли), см. рис. 34, 35. Внутренняя часть таблицы (без входной строки и входного столбца) представляет собой латинский квадрат — в каждой строке и в каждом столбце все элементы различны. Почему?

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	3	4	1	6	5
3	3	4	6	5	1	2
4	4	1	5	6	2	3
5	5	6	1	2	3	4
6	6	5	2	3	4	1

Рис. 34.

	6	5	2	3	4	1
3	1	2	3	4	5	6
4	2	3	4	1	6	5
6	3	4	6	5	1	2
5	4	1	5	6	2	3
1	5	6	1	2	3	4
2	6	5	2	3	4	1

Рис. 35.

1.22. Проверьте, что таблица умножения, приведенная на рис. 35, определяет LP -изотоп $\ell(6, 3)(\circ)$ коммутативной лупы $Q(\cdot)$, таблица умножения которой дана на рис. 34. Является ли лупа $Q(\cdot)$ группой?

1.23. Постройте координатную лупу $\ell(a, b)$ грассмановой три-ткани. Убедитесь в том, что она коммутативна тогда и только тогда, когда замыкаются все конфигурации Паскаля, у которых точки a и b являются вершинами.

1.23. Если одно семейство λ_i полной три-ткани $W = (X, \lambda_i)$ содержит n линий, то множество X содержит n^2 точек.

1.24. Если e — единица лупы Q , то e будет левой единицей в правой обратной квазигруппе Q^{-1} и правой единицей в левой обратной квазигруппе ${}^{-1}Q$.

1.25. $B_\ell \& B_m \Rightarrow B_r, B_r \& B_m \Rightarrow B_\ell$.

1.26. Напишите производное тождество от тождества эластичности $(uv)u = u(vu)$ и постройте соответствующую фигуру на три-ткани.

1.27. Изобразите координатные фигуры, соответствующие тождеству ассоциативности и левому тождеству Бола при различных положениях линий u, v, w относительно линии e . Какие тождества отвечают этим фигурам?

1.28. Постройте с помощью рис. 1 элементы $u^{-1}, {}^{-1}u, (u^{-1})^{-1}, {}^{-1}({}^{-1}u), u/v, v \setminus u$. Какие фигуры отвечают тождествам $u^{-1} = {}^{-1}u, (u^{-1})^{-1} = u, {}^{-1}({}^{-1}u) = u$?

1.29. Докажите, что ткани B_m характеризуются также универсальным тождеством $(w/v) \circ (u \setminus w) = (w/(u \circ v)) \circ w$.

1.30. Постройте фигуру, соответствующую тождеству $(y \circ z) \circ x = (y \circ x) \circ z$. Будет ли это тождество универсальным?

1.31. Докажите, что ткани B_ℓ и B_r характеризуются универсальными тождествами $(v \circ (u \setminus v)) \circ w = v \circ (u \setminus (v \circ w))$ и $((u \circ v)/w) \circ v = u \circ ((v/w) \circ v)$ соответственно.

Указание. См. доказательство теоремы 1.24.

1.32. Докажите, что тождества $u^{-1} = {}^{-1}u$, ${}^{-1}({}^{-1}u) = u$ выполняются в координатных лупах тканей H и только в них.

1.33. Постройте фигуры, соответствующие тождествам $(uv)v^{-1} = u$, ${}^{-1}u(uv) = v$. Докажите, что соответствующие условия замыкания характеризуют ткани B_r и B_ℓ соответственно.

1.34. В координатных лупах ткани B_m выполняется тождество $(uv)^{-1} = ({}^{-1}v)({}^{-1}u)$. Обратно: если это тождество выполняется в координатных лупах некоторой три-ткани W , то три-ткань W является тканью B_m .

Указание. Из заданного тождества вытекает тождество $u^{-1} = {}^{-1}u$, то есть рассматриваемая ткань является тканью H (задача 1.32). Обозначим конфигурацию, соответствующую заданному тождеству, через F . Используя условия замыкания F и H , докажите замыкание произвольной фигуры B_m .

1.35. В координатных лупах тканей B_ℓ , B_m и E выполняются соответственно тождества $u^m(u^n v) = u^{m+n} \cdot v$, $uv^m \cdot v^n = u \cdot v^{m+n}$ и $u^m(vu^n) = (u^m v)u^n$. Дайте геометрическое доказательство.

Указание. Примените метод математической индукции.

1.36. Тождество S универсально тогда и только тогда, когда оно эквивалентно своему производному тождеству.

Следующие задачи взяты из [Р. Уокер, Алгебраические кривые. ИЛ, Москва, 1952, 236 с.]

1.37. Если три точки пересечения прямой m и кубики K совпадают, то эта тройная точка является точкой перегиба.

1.38. Точки перегиба кубики K лежат на кривой Гессе — так называется кривая, определяемая уравнением $\det |F_{ij}| = 0$, где F — левая часть уравнения кубики K (см. задачу 1.7), F_i обозначает производную по переменной x^i . Всего на кубике имеется 9 точек перегиба.

1.39. Уравнение неособой кубики может быть приведено к виду $y^2 = g(x)$, где $g(x)$ — многочлен с различными корнями. (Кубика называется неособой, если на ней нет особых точек).

1.40. Неприводимая кубика, имеющая обыкновенную особую точку, имеет 3 точки перегиба, лежащие на одной прямой. Уравнение такой кубики приводится к виду $y^2 = x^2(x+1)$.

1.41. Неприводимая кубическая кривая, имеющая особую точку с совпадающими касательными, имеет одну точку перегиба. Уравнение такой кубики приводится к виду $y^2 = x^3$.

1.42. Прямая, проходящая через 2 точки перегиба кубики, проходит еще через одну ее точку перегиба.

1.42. Уравнение неособой кубики можно записать так, что ее точки перегиба будут иметь следующие однородные координаты: $(0, 1, -1)$, $(-1, 0, 1)$, $(1, -1, 0)$, $(0, 1, a)$, $(a, 0, 1)$, $(1, a, 0)$, $(0, 1, b)$, $(b, 0, 1)$, $(1, b, 0)$, где a и b — корни уравнения $x^2 - x + 1 = 0$.

1.43. Любая кубика, проходящая через 9 точек, указанные в предыдущем упражнении, определяется уравнением

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 3mx^1x^2x^3 = 0.$$

При каких значениях m кривая имеет особую точку?

1.44. Неособая кубика допускает группу коллинеаций из 18-ти элементов, преобразующих эту кубикку в себя.

1.45. На точках кубики K вводится алгебраическая операция следующим образом. Пусть O — точка перегиба на K . Возьмем на K две произвольные точки A и B , и пусть D точка пересечения прямой AB с кубикой K . Положим $A \star B = C$, если C есть третья точка пересечения прямой OD с кубикой K . Докажите, что а) операция \star коммутативна и ассоциативна; б) нейтральным элементом будет точка O ; в) точки C и D являются обратными элементами, то есть $D = -C$. Найдите связь между операцией \star и операциями в координатной квазигруппе и координатной лупе $\ell(a, b)$ грассмановой ткани GW , определяемой кубикой K .

1.46. Пусть в лупе Q , заданной уравнением (7) из Приложения 1, выполняется одно из следующих тождеств (тождества порядка 3 с одной переменной, см. [Ш-5]):

$$u^2(u^2u) = u((u^2u)u), \quad (u^2u)u^2 = (u(u^2u))u,$$

или одно из следующих (тождества порядка 4, там же):

$$\begin{aligned} u(u^2(u^2(u(u(uu^2)))))) &= u^2(u(u(u^2(u^2u))))), \\ u(u^2(u((u^2)(u(uu^2)))))) &= u^2(u(u(u^2((u(uu^2))u))))), \\ u(u((u^2(u(uu^2)))(uu^2))) &= u^2((u^2(u((u(uu^2))u)))u). \end{aligned}$$

Докажите, что в каждом из первых двух тождеств правая и левая части совпадают до членов третьего порядка включительно, а в трех последних тождествах — до членов четвертого порядка. Сравните коэффициенты при членах четвертого и соответственно пятого порядка в правой и левой части и найдите (для каждого из тождеств) соответствующие соотношения на коэффициенты разложения (7).

1.47. Докажите, что допустимыми преобразованиями параметров уравнение прямолинейной три-ткани (1.34) можно привести к виду

$$\alpha(u_1)(u_2 - u_3) + \beta(u_2)(u_3 - u_1) + \gamma(u_3)(u_1 - u_2) = 0. \quad (1.34')$$

1.48. Докажите, что три-ткань, образованная семейством синусоид

$$y = \frac{1}{10} \sin x + c,$$

где c — параметр семейства, и еще двумя семействами, которые получаются из этого вращением на углы $1/3\pi$ и $2/3\pi$, является полной и нерегулярной.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ

§ 2.1. Структурные уравнения криволинейной три-ткани

Пусть W — произвольная криволинейная три-ткань. В соответствии с теоремой 1.2 будем считать, что она образована в некоторой области D линиями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $f(x, y) = \text{const}$, а уравнение этой ткани имеет вид

$$z = f(x, y). \quad (2.1)$$

Напомним, что в силу условия б) определения 1 в области D выполняются неравенства $f_x \neq 0$, $f_y \neq 0$ (линии третьего семейства трансверсальны к линиям первого и второго семейств).

Продифференцируем уравнение (2.1) и положим

$$\omega_1 = f_x dx, \quad \omega_2 = f_y dy, \quad (2.2)$$

тогда слоения ткани будут определяться уравнениями

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_1 + \omega_2 = 0. \quad (2.3)$$

Продифференцировав формы ω_1 и ω_2 внешним образом, получим:

$$d\omega_1 = f_{xy} dy \wedge dx = \Gamma \omega_1 \wedge \omega_2, \quad d\omega_2 = f_{xy} dx \wedge dy = \Gamma \omega_2 \wedge \omega_1,$$

где обозначено

$$\Gamma = -\frac{f_{xy}}{f_x f_y}. \quad (2.4)$$

Положив

$$\omega = \Gamma(\omega_1 + \omega_2), \quad (2.5)$$

перепишем предыдущие равенства в виде

$$d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \omega. \quad (2.6)$$

Так как $\omega_1 + \omega_2 = df$, то дифференцирование уравнения (2.5) дает:

$$d\omega = d\Gamma \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \left(\frac{\Gamma_x}{f_x} - \frac{\Gamma_y}{f_y} \right) \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Обозначим

$$b = \frac{\Gamma_x}{f_x} - \frac{\Gamma_y}{f_y} \quad (2.7)$$

и перепишем предыдущее равенство в виде

$$d\omega = b\omega_1 \wedge \omega_2. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.6) и (2.8) называются структурными уравнениями три-ткани W , функция b называется *кривизной ткани*.

С другой стороны, уравнения (2.6) и (2.8) являются уравнениями некоторой аффинной связности без кручения, причем формы связности имеют вид

$$(\omega_1, \omega_2), \quad \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

Эта связность называется *связностью Черна* или канонической связностью три-ткани и обозначается Γ .¹⁾ Форму ω называют формой связности три-ткани W или просто связностью ткани, см. [Бл-1].

Преобразовав правую часть равенства (2.7), выразим кривизну через частные производные функции f :

$$b = -\frac{1}{f_x f_y} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \ln \frac{f_x}{f_y}. \quad (2.9)$$

Сравнивая с условием Сен-Робера (CR) (§ 1.3), получаем, что верна

Теорема 2.1. *Три-ткань W будет регулярной тогда и только тогда, когда ее кривизна равна нулю.*

Внешнее дифференцирование уравнения (2.8) приводит к соотношению

$$(db - 2b\omega) \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

Так как формы ω_1 и ω_2 независимы, отсюда получаем

$$db - 2b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2. \quad (2.10)$$

Функции b_1 и b_2 называются ковариантными производными кривизны b ткани.

Внешнее дифференцирование уравнения (2.10) и применение леммы Картана приводит к уравнениям

$$db_1 - 3b_1\omega = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad db_2 - 3b_2\omega = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2, \quad (2.11)$$

и соотношению

$$b_{12} - b_{21} = 2b^2. \quad (2.12)$$

¹⁾ Более подробно об этом см. в § 2.8.

Дифференцируя (2.11), мы получим уравнения

$$\begin{aligned} db_{11} - 4b_{11}\omega &= b_{111}\omega_1 + b_{112}\omega_2, \\ db_{12} - 4b_{12}\omega &= b_{121}\omega_1 + b_{122}\omega_2, \\ db_{21} - 4b_{21}\omega &= b_{211}\omega_1 + b_{212}\omega_2, \\ db_{22} - 4b_{22}\omega &= b_{221}\omega_1 + b_{222}\omega_2, \end{aligned} \quad (2.13)$$

и т.д. Непосредственным вычислением доказывается

Предложение 2.1. *Величины b_{111} и т.д., входящие в уравнения (2.13) и дальнейшие, связаны соотношениями вида*

$$b_{\alpha 12\beta} - b_{\alpha 21\beta} = (\text{mod } \alpha + 2)bb_{\alpha}, \quad (2.12')$$

где α, β — мультииндексы из чисел 1 и 2, $\text{mod } \alpha$ — длина мультииндекса α . (Формула (2.12) получается при $\text{mod } \alpha = \text{mod } \beta = 0$.)

Теорема 2.2. *Функции*

$$b, \quad b_1, b_2, \quad b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}, \dots$$

являются относительными дифференциальными инвариантами веса 2, 3, 4, ... соответственно относительно допустимых преобразований, сохраняющих вид структурных уравнений (2.6) и (2.8).

□ Пусть уравнение ткани записано в виде (2.1), тогда допустимые преобразования имеют вид (1.5):

$$\tilde{x} = \alpha(x), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z). \quad (2.14)$$

Запишем уравнение ткани в новых переменных в виде $\tilde{z} = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y})$, тогда в силу последнего равенства (2.14) получаем

$$\gamma(f(x, y)) = \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Дифференцируя, находим $d\gamma \circ df = d\tilde{f}$, откуда в силу обозначений (2.2) следует

$$A\omega_1 = \tilde{\omega}_1 \quad A\omega_2 = \tilde{\omega}_2, \quad (2.15)$$

где обозначено $A = \gamma'$. Таким образом, при допустимой замене переменных в уравнении ткани базисные формы ω_1 и ω_2 преобразуются по формулам (2.15). Заметим, что при этих преобразованиях сумма базисных форм преобразуется в сумму соответствующих базисных форм с тильдой, поэтому в новых переменных третье семейство линий ткани будет задаваться уравнением $\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2 = 0$, аналогичным третьему уравнению (2.3). Отсюда следует, что и в новых переменных структурные уравнения ткани (2.6) и (2.8) сохраняют свой вид.

Если теперь с учетом этого замечания продифференцировать уравнения (2.15) внешним образом и воспользоваться структурными уравнениями, то придем к равенствам

$$(dA - A\omega + A\tilde{\omega}) \wedge \omega_1 = 0, \quad (dA - A\omega + A\tilde{\omega}) \wedge \omega_2 = 0.$$

Отсюда, в силу независимости базисных форм, получаем

$$dA - A\omega + A\tilde{\omega} = 0. \quad (2.16)$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$\tilde{\omega} = \omega - d \ln A. \quad (2.16')$$

Внешнее дифференцирование уравнения (2.16') приведет (с учетом этого же уравнения) к равенству

$$b\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{b}\tilde{\omega}_1 \wedge \tilde{\omega}_2,$$

откуда в силу (2.15) имеем

$$\tilde{b} = A^{-2}b. \quad (2.17)$$

Равенство (2.17) означает, что кривизна ткани b есть относительный инвариант веса 2.

Этот результат можно получить и другим способом. Фиксируем текущую точку p в области определения ткани, тогда, как видно из (2.2), базисные формы ω_1 и ω_2 обращаются в нуль и уравнение (2.10) примет вид $\delta b = 2b\pi$. Здесь через π обозначено значение формы ω при фиксированных главных параметрах; через δ обозначен символ дифференцирования по единственному вторичному параметру, от которого зависит положение корепера (ω_1, ω_2) в фиксированной точке p . Полученное уравнение представляет собой частный случай так называемой основной теоремы тензорного анализа и означает, что b есть относительный инвариант веса 2.

Если далее продифференцировать уравнение (2.17) и воспользоваться уравнениями (2.10), (2.16) и им аналогичными с тильдой, то придем к соотношениям

$$\tilde{b}_1 = A^{-3}b_1, \tilde{b}_2 = A^{-3}b_2, \quad (2.18)$$

которые означают, что ковариантные производные кривизны являются относительными инвариантами веса 3.

Дифференцируя (2.18), получим аналогичные равенства для ковариантных производных следующих порядков. ■

Согласно формуле (2.9) кривизна выражается через производные третьего порядка от функции ткани, то есть является дифференциальным инвариантом третьего порядка. Величины b_1 и b_2 являются дифференциальными инвариантами четвертого порядка и т.д.

Функции b_1 и b_2 независимы, но уже следующие производные связаны соотношением (2.12). Если продифференцировать уравнения (2.11) и (2.12), то найдем, что вторые ковариантные производные кривизны b связаны двумя независимыми соотношениями. Дальнейшее дифференцирование покажет, что верно

Предложение 2.2. *В дифференциальной окрестности порядка n три-ткани имеется всего $n - 2$ независимых относительных дифференциальных инварианта порядка n .*

В случае, если ткань не является регулярной ($b \neq 0$), из относительных инвариантов можно построить следующие абсолютные инварианты:

$$\begin{aligned} c_1 &= b_1 b^{-3/2}, & c_2 &= b_2 b^{-3/2}, \\ c_{11} &= b_{11} b^{-2}, & c_{12} &= b_{12} b^{-2}, & c_{21} &= b_{21} b^{-2}, & c_{22} &= b_{22} b^{-2}, & \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

Заметим, что абсолютные инварианты c_1 и c_2 одновременно не могут быть постоянными. В самом деле, дифференцируя внешним образом равенство $db - 2b\omega = b^{3/2}(c_1\omega_1 + c_2\omega_2)$ при условии, что c_1 и c_2 постоянные, и учитывая (2.6), (2.8) и (2.10), приходим к равенству $b^2\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Отсюда $b = 0$, что невозможно, так как ткань с самого начала предполагалась нерегулярной. Ткани, у которых только один из абсолютных инвариантов c_1 или c_2 является постоянным, рассмотрены в задаче 2.17.

Функции γ можно придать иной смысл. Будем считать, что соотношение $\tilde{z} = \gamma(z)$ (см. (2.14)) задает замену параметра в третьем семействе линий ткани. Соответственно этому уравнения (2.15) будут означать замену корепера (ω_1, ω_2) в области D три-ткани на корепер $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$, в котором уравнения ткани имеют тот же вид (2.6). Такие кореперы будем называть натуральными адаптированными кореперами три-ткани.

Семейство натуральных адаптированных кореперов ткани можно расширить, считая функцию A в уравнениях (2.15) произвольной (гладкой) функцией двух переменных. В дальнейшем будем рассматривать именно такое семейство адаптированных кореперов ткани, обозначим его \mathcal{R} .

С другой стороны, семейство адаптированных кореперов \mathcal{R} можно сузить, например, условием $b = \text{const}$. Такие кореперы будем называть каноническими. Как видно из формулы (2.17), переход от одного канонического корепера к другому определяется постоянной A . В каноническом корепере все относительные инварианты становятся абсолютными, а в каноническом корепере, определенном условием $b = 1$, все относительные инварианты совпадут с абсолютными.

В заключение укажем дифференциальное условие эквивалентности двух тканей.

Теорема 2.3. [АШ-4] *Если ткани W и \tilde{W} эквивалентны, то локальные координаты можно выбрать так, что их кривизны в соответствующих точках будут равны. Обратное: если между двумя тканями и их адаптированными реперами можно установить соответствие так, что в соответствующих точках кривизны будут равны, то такие ткани эквивалентны.*

(В [АШ-4] эта теорема доказана для многомерных три-тканей).

§ 2.2. Криволинейные три-ткани, у которых одна из ковариантных производных кривизны равна нулю

Естественно классифицировать криволинейные три-ткани с помощью различных соотношений на инварианты. Прежде всего необходимо рассмотреть ткани, для которых один из относительных инвариантов равен нулю. Если $b = 0$, то ткань, как уже знаем, является регулярной. Легко проверяется, что если оба инварианта b_1 и b_2 равны нулю, то ткань также будет регулярной. В самом деле, в этом случае из (2.10) получаем $db - 2b\omega = 0$, откуда $\omega = db/2b$ и $d\omega = 0$. Но тогда из (2.8) следует $b = 0$ и по теореме 2.1 ткань является регулярной.

Тот же результат получится, если предположить, что какая-либо ковариантная производная кривизны отлична от нуля, а обе ее ковариантные производные равны нулю (докажите!). Поэтому представляют интерес ткани, у которых только одна из ковариантных производных кривизны равна нулю.

Обозначим через $B_{\langle\alpha\rangle\beta}$ класс тканей, для которых $b_{\langle\alpha\rangle\beta} = 0$, но $b_{\langle\alpha\rangle} \neq 0$, где далее в этом параграфе $\alpha, \beta = 1, 2$, а через $\langle\alpha\rangle, \langle\beta\rangle$ обозначены мультииндексы, состоящие из цифр 1 и 2. Будем называть такие классы тканей основными.

Рассмотрим, например, основной класс $B_{\langle 1 \rangle}$, заданный соотношением $b_{11\dots 1} = 0$, или, короче,

$$b_{\langle 1 \rangle; s+1} = 0, \quad (2.20)$$

где $s + 1$ указывает число цифр в мультииндексе $\langle 1 \rangle$. Напомним, что число $s + 1$ есть порядок соответствующей ковариантной производной кривизны b .

Рассмотрим относительный инвариант $b_{\langle 1 \rangle; s}$. Ввиду (2.20) его ковариантный дифференциал запишется в виде

$$db_{\langle 1 \rangle; s} - (s + 2)b_{\langle 1 \rangle; s}\omega = b_{\langle 1 \rangle; s, 2}\omega_2. \quad (2.21)$$

Так как $b_{\langle 1 \rangle; s}$ есть относительный инвариант и $b_{\langle 1 \rangle; s} \neq 0$, то семейство адаптированных кореперов, связанных с рассматриваемой три-тканью, можно сузить, положив

$$b_{\langle 1 \rangle; s} = 1. \quad (2.22)$$

Тогда из (2.21) получим

$$-(s + 2)b_{\langle 1 \rangle; s}\omega = b_{\langle 1 \rangle; s, 2}\omega_2, \quad (2.23)$$

и второе уравнение системы (2.6) даст $d\omega_2 = 0$. По теореме Пуанкаре получаем

$$\omega_2 = dv. \quad (2.24)$$

В результате уравнение (2.23) можно записать следующим образом:

$$\omega = \gamma dv. \quad (2.25)$$

Рассмотрим теперь инвариант $b_{\langle 1 \rangle; s-1}$. В силу (2.22) и (2.24) он удовлетворяет уравнению

$$db_{\langle 1 \rangle; s-1} - (s+1)b_{\langle 1 \rangle; s-1}\omega = \omega_1 + b_{\langle 1 \rangle; s-1, 2}dv,$$

которое можно переписать в следующем виде (см. (2.25)):

$$db_{\langle 1 \rangle; s-1} = \omega_1 + (\dots)dv. \quad (2.26)$$

Рассмотрим аналогичное уравнение для предыдущей ковариантной производной:

$$db_{\langle 1 \rangle; s-2} - sb_{\langle 1 \rangle; s-2}\omega = b_{\langle 1 \rangle; s-1}\omega_1 + b_{\langle 1 \rangle; s-2, 2}dv.$$

Ввиду (2.25) и (2.26) имеем:

$$db_{\langle 1 \rangle; s-2} = b_{\langle 1 \rangle; s-1}db_{\langle 1 \rangle; s-1} + K_{s-2}dv = \frac{1}{2}d(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^2 + K_{s-2}dv. \quad (2.27)$$

Отсюда видно, что функция K_{s-2} зависит только от одной переменной v . Интегрируя (2.27), находим:

$$b_{\langle 1 \rangle; s-2} = \frac{1}{2}(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^2 + T_{s-2}(v). \quad (2.28)$$

Аналогично, для ковариантной производной $b_{\langle 1 \rangle; s-3}$ порядка $(s-3)$ имеем:

$$\begin{aligned} db_{\langle 1 \rangle; s-3} &= (s-1)b_{\langle 1 \rangle; s-3}\omega + b_{\langle 1 \rangle; s-2}\omega_1 + b_{\langle 1 \rangle; s-3, 2}dv = \\ &= (1/2(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^2 + T_{s-2}(v))(b_{\langle 1 \rangle; s-1} - (\dots)dv) + (\dots)dv = \\ &= 1/3!d(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^3 + d(T_{s-2}(v)b_{\langle 1 \rangle; s-1}) + K_{s-3}dv. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что функция K_{s-3} зависит только от одной переменной v . Следовательно, при интегрировании получится уравнение

$$b_{\langle 1 \rangle; s-3} = 1/3!(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^3 + T_{s-2}(v)b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T_{s-3}(v). \quad (2.29)$$

Рассуждая далее по индукции, мы придем к уравнению

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{s!}(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^s + \frac{1}{(s-2)!}T_{s-2}(v)(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s-2} + \\ &+ \frac{1}{(s-3)!}T_{s-3}(v)(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s-3} + \dots + T_1(v)b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T_0(v). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Теперь можно найти форму ω из уравнения (2.8), которое с помощью (2.24)–(2.26) и (2.20) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} d\omega &= b\omega_1 \wedge dv = bdb_{\langle 1 \rangle; s-1} \wedge dv = \\ &= \left(\frac{1}{s!}(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^s + \frac{1}{(s-2)!}T_{s-2}(v)(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s-2} + \right. \\ &\quad \left. + \dots + T_1(v)b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T_0(v) \right) db_{\langle 1 \rangle; s-1} \wedge dv = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{(s+1)!} d(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s+1} + \frac{1}{(s-1)!} T_{s-2}(v) d(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s-1} + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + T_0(v) db_{\langle 1 \rangle; s-1} \right) \wedge dv = \\
 &= \left(\frac{1}{(s+1)!} d(b_{\langle 1 \rangle; s-1})^{s+1} + \frac{1}{(s-1)!} d(T_{s-2}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s-1}) + \right. \\
 &\quad \left. + \dots + d(T_0(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}) \right) \wedge dv.
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \omega &= \left(\frac{1}{(s+1)!} b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s+1} + \frac{1}{(s-1)!} T_{s-2}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s-1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(s-2)!} T_{s-3}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s-2} + \dots + T_0(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T(v) \right) dv. \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

В силу уравнений (2.26) и (2.31) первое из уравнений (2.6) примет вид

$$\begin{aligned}
 d\omega_1 = \omega_1 \wedge \omega &= db_{\langle 1 \rangle; s-1} \wedge \left(\frac{1}{(s+1)!} b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s+1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(s-1)!} T_{s-2}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s-1} + \dots + T_0(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T(v) \right) dv.
 \end{aligned}$$

Интегрируя, находим форму ω_1 :

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \left(\frac{1}{(s+2)!} b_{\langle 1 \rangle; s-1}^{s+2} + \frac{1}{s!} T_{s-2}(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^s + \right. \\
 &\quad \left. \dots + \frac{1}{2} T_0(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1}^2 + T(v) b_{\langle 1 \rangle; s-1} + T^1(v) \right) dv + dt, \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

где t — некоторая новая переменная.

Сравнивая уравнения (2.32) и (2.26), получаем

$$db_{\langle 1 \rangle; s-1} = dt + K dv.$$

Но из этого уравнения вытекает, что функция K зависит только от переменной v . Следовательно,

$$b_{\langle 1 \rangle; s-1} = t + p(v). \quad (2.33)$$

Найденное соотношение показывает, что переменные v и $b_{\langle 1 \rangle; s-1} \stackrel{\text{def}}{=} u$ можно считать независимыми в некоторой области определения рассматриваемой ткани. Тогда уравнение $\omega_1 = 0$ первого семейства ткани W (см. (2.3)) эквивалентно следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{(s+2)!} u^{s+2} - \frac{1}{s!} T_{s-2}(v) u^s - \dots - T_0(v) u^2 - T(v) u - q(v). \quad (2.34)$$

Второе слоение ткани W определяется уравнением $\omega_2 = 0$ или $v = \text{const}$, третье — уравнением $\omega_1 + \omega_2 = 0$ или, ввиду (2.34), уравнением

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{(s+2)!}u^{s+2} - \frac{1}{s!}T_{s-2}(v)u^s - \dots - T_0(v)u^2 - T(v)u - q(v) - 1. \quad (2.35)$$

В случае $s = 0$ уравнения (2.34) и (2.35) являются уравнениями Риккати специального вида:

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{2}u^2 - q(v) \quad (2.36)$$

и

$$\frac{du}{dv} = -\frac{1}{2}u^2 - q(v) - 1. \quad (2.37)$$

При $s = 1$ получаются так называемые уравнения Абеля. Если s произвольно, то уравнения вида (2.34) и (2.35) называются обобщенными уравнениями Абеля.

Аналогичный результат получится, если приравнять нулю ковариантную производную с мультииндексом, состоящим только из цифры 2. Итак, доказана следующая

Теорема 2.4. Пусть одна из ковариантных производных кривизны b ткани W равна нулю, $b_{\alpha\alpha\dots\alpha} = 0$. Тогда ткань W эквивалентна ткани, образованной линиями $v = \text{const}$ и интегральными кривыми двух обобщенных уравнений Абеля вида (2.34) и (2.35).

Рассмотрим более подробно ткани типа B_1 , слоения которых задаются уравнениями (2.36), $v = 0$ и (2.37).

Случай I: $q(v) = 0$. Тогда слоения ткани задаются уравнениями

$$u = \frac{2}{v+x}, \quad v = y, \quad \arctan \frac{u}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(v+z),$$

где x, y, z — постоянные интегрирования. Чтобы найти уравнение ткани, следует из этих уравнений исключить локальные координаты u и v . После преобразований приходим к уравнению

$$x + y = -\cot(y+z).$$

Случай II: $q(v) = \frac{1}{2}a^2$. Тогда уравнения (2.36) и (2.37) примут вид:

$$\frac{du}{u^2+a^2} = -\frac{1}{2}dv, \quad \frac{du}{u^2+b^2} = -\frac{1}{2}dv,$$

где $b^2 = a^2 + 2$. Они имеют решения

$$\frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} = -\frac{1}{2}(v+x), \quad \frac{1}{b} \arctan \frac{u}{b} = -\frac{1}{2}(v+z).$$

Присоединим уравнение второго слоения $v = y$ и исключим переменные u и v . После изоморфизма $\frac{a}{2}x \rightarrow x$, $\frac{a}{2}y \rightarrow y$, $\frac{a}{2}z \rightarrow z$ придем к уравнению рассматриваемой три-ткани:

$$\tan(x + y) = c \tan c(y + z),$$

где $c = b/a$.

Случай III: $q(v) = -\frac{1}{2}a^2$. Тогда уравнение (2.36) первого слоения принимает вид

$$\frac{du}{u^2 - a^2} = -\frac{1}{2}dv,$$

откуда

$$u = a \coth \frac{a(v + x)}{2}. \quad (2.38)$$

Уравнение (2.37) третьего слоения примет вид

$$\frac{du}{u^2 - a^2 + 2} = -\frac{1}{2}dv. \quad (2.39)$$

Получаем 3 подслучая.

Подслучай IIIa: $a = \sqrt{2}$. Тогда уравнение (2.39) имеет решение

$$u = \frac{2}{v + z}. \quad (2.40)$$

После исключения переменных u и v из (2.38) и (2.40) (с учетом уравнения второго слоения $v = y$), мы получим уравнение соответствующей три-ткани:

$$y + z = \operatorname{th}(x + y).$$

Подслучай IIIб: $a^2 > 2$. Положим $a^2 = 2 + b^2$. Тогда уравнение (2.39) примет вид

$$\frac{du}{u^2 - b^2} = -\frac{1}{2}dv,$$

откуда

$$u = b \coth \frac{b(v + z)}{2}. \quad (2.41)$$

Из (2.38), (2.41) и $v = y$ получаем следующее уравнение ткани:

$$\operatorname{cth}(y + z) = \operatorname{th}c(x + y), \quad c = a/b.$$

Подслучай IIIв: $a^2 < 2$. Положим $a^2 = 2 - b^2$. Тогда уравнение (2.39)

$$\frac{du}{u^2 + b^2} = -\frac{1}{2}dv$$

имеет решение

$$\frac{1}{b} \arctan \frac{u}{b} = -\frac{1}{2}(v + z).$$

Соответствующее уравнение ткани будет

$$\operatorname{coth}(x + y) = -c \tan c(y + z), \quad c = b/a.$$

В заключение заметим, что три-ткани, соответствующие различным функциям $q(v)$, являются неэквивалентными.

§ 2.3. Три-ткани, определяемые линейным дифференциальным уравнением

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = F(x, y) \quad (2.42)$$

определяет три-ткань W , состоящую из семейств линий λ_α :

$$\lambda_1: x = \text{const}, \quad \lambda_2: y = \text{const}, \quad \lambda_3: f(x, y) = \text{const},$$

причем последнее семейство состоит из интегральных кривых уравнения (2.42). Обратно, каждая криволинейная три-ткань W эквивалентна некоторой три-ткани \tilde{W} , состоящей из трех вышеуказанных семейств λ_α , причем слои третьего слоения ткани \tilde{W} являются интегральными кривыми некоторого обыкновенного дифференциального уравнения $f_x dx + f_y dy = 0$. Параметром третьего слоения является постоянная интегрирования.

Уравнение (2.42) определено не однозначно, а с точностью до замен вида

$$x = \alpha(\tilde{x}), \quad y = \beta(\tilde{y}), \quad (2.43)$$

переводящих декартову сеть $x = \text{const}, \quad y = \text{const}$ снова в декартову сеть. Иными словами, дифференциально-топологическая теория тканей, в рамках которой мы проводим наши рассуждения, улавливает те свойства дифференциальных уравнений, которые сохраняются при изотопических преобразованиях вида (2.43). Такой подход дает возможность классифицировать обыкновенные дифференциальные уравнения с точностью до указанной изотопии при помощи дифференциально-геометрических инвариантов соответствующей три-ткани.

С другой стороны, мы получаем возможность перенести свойства решений дифференциального уравнения на свойства соответствующей три-ткани. Рассмотрим наиболее простой случай, когда три-ткань W определяется линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$y' + yf(x) = g(x), \quad (2.44)$$

и найдем инвариантную характеристику соответствующего класса тканей. Пусть, как и выше, три-ткань W задается структурными уравнениями (2.6)–(2.8), (2.10), (2.11) и последующими, а слоения ткани — уравнениями (1.3).

Рассмотрим уравнение (2.44). С помощью изотопического преобразования

$$f(x)dx = d\tilde{x}$$

оно приводится к виду

$$dy + (y + \tilde{g}(\tilde{x}))d\tilde{x} = 0. \quad (2.45)$$

Опустив волну, обозначим

$$\omega_1 = (y + g(x))dx, \quad \omega_2 = dy. \quad (2.46)$$

Тогда уравнение (2.45), определяющее третье слоение ткани W , принимает вид $\omega_1 + \omega_2 = 0$, а это означает, что структурные уравнения рассматриваемой три-ткани W должны иметь вид (2.6), (2.8). Так как $d\omega_2 = 0$, то из (2.6) следует, что

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda dy. \quad (2.47)$$

Имеем:

$$d\omega_1 = dy \wedge dx = \omega_1 \wedge \frac{-\omega_2}{y + g(x)}, \quad d\omega_2 = \omega_2 \wedge \frac{-\omega_2}{y + g(x)}.$$

Сравнивая с (2.6), находим, что

$$\omega = \frac{-\omega_2}{y + g(x)} = \frac{-dy}{y + g(x)}. \quad (2.48)$$

Далее,

$$d\omega = -d\frac{1}{y + g(x)} \wedge dy = \frac{g'dx}{(y + g)^2} \wedge dy = \frac{g'}{(y + g)^3} \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Сравнивая с (2.8), находим кривизну:

$$b = \frac{g'}{(y + g)^3}. \quad (2.49)$$

Используя формулы (2.46)–(2.49), получаем:

$$\begin{aligned} db - 2b\omega &= \left(\frac{g''}{(y + g)^3} - \frac{3(g')^2}{(y + g)^4} \right) dx - \frac{3g'dy}{(y + g)^4} - \frac{2g'}{(y + g)^3} \frac{-\omega_2}{y + g} = \\ &= \left(\frac{g''}{(y + g)^4} - \frac{3(g')^2}{(y + g)^5} \right) \omega_1 - \frac{g'}{(y + g)^4} \omega_2. \end{aligned}$$

Сравнивая с (2.11), находим ковариантные производные кривизны:

$$b_1 = \frac{g''}{(y + g)^4} - \frac{3(g')^2}{(y + g)^5}, \quad b_2 = -\frac{g'}{(y + g)^4}. \quad (2.50)$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} db_2 - 3b_2\omega &= \left(-\frac{g''}{(y + g)^4} + \frac{4(g')^2}{(y + g)^5} \right) dx + \frac{4g'dy}{(y + g)^5} + \frac{3g'}{(y + g)^4} \frac{-dy}{y + g} = \\ &= \left(\frac{-g''}{(y + g)^5} + \frac{4g'^2}{(y + g)^6} \right) \omega_1 + \frac{g'}{(y + g)^5} \omega_2. \end{aligned}$$

Сравнивая теперь с уравнениями (2.13), получаем:

$$b_{21} = \frac{-g''}{(y+g)^5} + \frac{4g'^2}{(y+g)^6}, \quad b_{22} = \frac{g'}{(y+g)^5}. \quad (2.51)$$

Исключая из уравнений (2.49)–(2.51) переменные g', g'' и т.д., придем к соотношениям, связывающим относительные инварианты рассматриваемой ткани:

$$bb_{22} - (b_2)^2 = 0, \quad bb_{21} - b_1b_2 - b^3 = 0. \quad (2.52)$$

Итак, доказано следующее утверждение: *инварианты три-ткани W , определяемой линейным дифференциальным уравнением (2.44), удовлетворяют соотношениям (2.52).*

Обратно, рассмотрим три-ткань W , для которой выполняются соотношения (2.52), и докажем, что ей отвечает линейное дифференциальное уравнение первого порядка.

Пусть структурные уравнения три-ткани W записаны в виде (2.6), (2.8). Заметим сначала (докажите!), что на любой три-ткани можно выбрать кобазис так, чтобы форма ω_2 , например, была полным дифференциалом:

$$\omega_2 = dy. \quad (2.53)$$

Тогда $d\omega_2 = 0$ и из (2.6) получаем

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda dy. \quad (2.54)$$

Соотношения (2.52) разрешим, введя параметр k :

$$b_2 = kb, \quad b_{22} = k^2b, \quad b_{21} = kb_1 + b^2, \quad b_{12} = kb_1 + 3b^2 \quad (2.55)$$

(последнее вытекает из (2.12)). В результате уравнения (2.10), (2.11) для рассматриваемой ткани примут следующий вид:

$$\begin{aligned} db - 2b\omega &= b_1\omega_1 + kb\omega_2, \\ db_1 - 3b_1\omega &= b_{11}\omega_1 + (kb_1 + 3b^2)\omega_2, \\ db_2 - 3b_2\omega &= (kb_1 + b^2)\omega_1 + k^2b\omega_2. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Дифференцируя с помощью (2.56) равенство $b_2 = kb$, придем к уравнению

$$dk - k\omega = b\omega_1. \quad (2.57)$$

Из (2.57) и (2.6) имеем:

$$dk \wedge \omega_1 = k\omega \wedge \omega_1 = -k\omega_1 \wedge \omega = -kd\omega_1,$$

или

$$d\omega_1 = -\frac{dk}{k} \wedge \omega_1.$$

Отсюда следует, что

$$\omega_1 = -\frac{1}{k}dx, \quad (2.58)$$

где x — некоторая новая переменная. Дифференцируя внешним образом уравнения (2.54) с учетом равенства (2.58), получим:

$$d\omega = d\lambda \wedge dy = \lambda_x dx \wedge dy = -\lambda_x k \omega_1 \wedge \omega_2.$$

Сравнивая далее с (2.8), находим, что

$$b = -k\lambda_x. \quad (2.59)$$

В результате уравнение (2.57) примет вид

$$dk = k\lambda dy + \lambda_x dx.$$

Отсюда

$$k_x = \lambda_x, \quad k_y = k\lambda.$$

Исключая λ , находим, что

$$k_y = k^2 + k\varphi(y), \quad (2.60)$$

а равенство (2.59) запишется следующим образом:

$$b = -kk_x.$$

Положим

$$\mu = k^{-1}. \quad (2.61)$$

С помощью (2.60) находим, что μ удовлетворяет уравнению

$$\mu_y = -1 - \mu\varphi(y). \quad (2.62)$$

Введем функцию $\vartheta(y)$ равенством

$$\varphi(y) = -\frac{\vartheta_y(y)}{\vartheta(y)}.$$

Тогда однородное уравнение

$$\mu_y = -\mu\varphi$$

имеет решение

$$\mu = c(x)\vartheta(y),$$

а общее решение уравнения (2.62) имеет вид

$$\mu = \left(-\mathbf{R} \frac{dy}{\vartheta} - g(x) \right) \vartheta.$$

В результате в силу (2.53), (2.58) и (2.61) уравнение третьего слоения $\omega_1 + \omega_2 = 0$ принимает вид $-\mu dx + dy = 0$ или, в силу последнего уравнения,

$$\frac{dy}{\vartheta} + \left(\mathbf{R} \frac{dy}{\vartheta} + g(x) \right) dx = 0. \quad (2.63)$$

Теперь сделаем изотопическое преобразование

$$\mathbf{R} \frac{dy}{\vartheta(y)} = \tilde{y}.$$

В результате уравнение (2.63) примет вид

$$d\tilde{y} + (\tilde{y} + g(x))dx = 0,$$

то есть совпадет с уравнением (2.45).

Итак, доказана

Теорема 2.5. *Относительные инварианты криволинейных три-тканей, определяемых линейным дифференциальным уравнением (2.44), и только таких тканей при подходящем выборе корепера удовлетворяют соотношениям (2.52) (см. зад. 2.20.)*

§ 2.4. Три-ткани, определяемые уравнением Риккати

Найдем соотношение на дифференциальные инварианты ткани W , определяемой произвольным уравнением Риккати

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x). \quad (2.64)$$

Теорема 2.6. *Относительные инварианты криволинейных три-тканей, определяемых дифференциальным уравнением Риккати, и только таких тканей при подходящем выборе корепера удовлетворяют соотношению*

$$b_{222}b - b_{22}b_2 = 0. \quad (2.65)$$

□ Пусть, как и выше, слоения ткани задаются уравнениями (2.3) и для нее выполняются все уравнения из § 2.1. Напомним, что уравнение три-ткани допускает преобразования вида (2.15). Следовательно, в уравнение (2.64) допустимы замены $x \rightarrow \alpha(x)$, $y \rightarrow \beta(y)$ и, кроме того, аналогичное преобразование можно делать и с постоянной интегрирования — параметром третьего слоения ткани.

С помощью допустимого преобразования отличную от нуля функцию $f(x)$ в уравнении (2.64) можно сделать равной -1 , тогда оно примет вид

$$dy + (y^2 + g(x)y + h(x))dx = 0. \quad (2.66)$$

Положим

$$\omega_1 = (y^2 + g(x)y + h(x))dx, \quad \omega_2 = dy, \quad (2.67)$$

в результате уравнение (2.66), определяющее третье слоение ткани, примет вид $\omega_1 + \omega_2 = 0$, а это означает, что структурные уравнения рассматриваемой три-ткани W должны иметь вид (2.6), (2.8). При этом будут выполняться и все последующие соотношения: (2.10), (2.11) и т.д.

Так как $d\omega_2 = 0$, то из (2.6) следует, что

$$\omega = \lambda\omega_2 = \lambda dy. \quad (2.68)$$

Дифференцируя форму ω_1 , заданную первым уравнением (2.67), и пользуясь структурными уравнениями (2.6), найдем, что

$$\omega = -\frac{2y + g}{y^2 + g(x)y + h(x)} \omega_2. \quad (2.69)$$

Далее, дифференцируя последнее уравнение и сравнивая результат со структурным уравнением (2.8), найдем кривизну рассматриваемой ткани:

$$b = \frac{g'y^2 + 2h'y + h'g - hg'}{(y^2 + g(x)y + h(x))^3}. \quad (2.70)$$

Если теперь продифференцировать это уравнение и воспользоваться уравнением (2.10), то найдем инвариант b_2 :

$$b_2 = -\frac{(-2h' + gg')y^2 + 2(2g'h - gh')y + 2hh' - g^2h' + gg'h}{(y^2 + g(x)y + h(x))^4}. \quad (2.71)$$

Дифференцируя это уравнение и пользуясь уравнениями (2.11), найдем инвариант b_{22} :

$$b_{22} = \frac{g^2 - 4h}{(y^2 + g(x)y + h(x))^2} b. \quad (2.72)$$

Наконец, аналогичным образом найдем инвариант b_{222} :

$$b_{222} = \frac{[(gg' - 2h')y^2 + 2(2g'h - gh')y + 2hh' - g^2h' + gg'h](g^2 - 4h)}{(y^2 + g(x)y + h(x))^6}. \quad (2.73)$$

Исключая из уравнений (2.70)–(2.73) функции g, h и т.д., придем к соотношению (2.65). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Обратно, рассмотрим три-ткань W , для которой выполняется соотношение (2.65), и докажем, что ей отвечает уравнение Риккати. Заметим сначала, что дифференциальное уравнение любой криволинейной три-ткани можно записать в виде $\omega_1 + \omega_2 = 0$, причем форма ω_1 пропорциональна dx , а форма ω_2 является полным дифференциалом: $\omega_2 = dy$. Тогда $d\omega_2 = 0$, откуда $\omega = \lambda\omega_2 = \lambda dy$. Продифференцировав это уравнение внешним образом и воспользовавшись структурными уравнениями (2.8), придем к уравнению $(d\lambda - b\omega_1) \wedge dy = 0$. Отсюда находим, что

$$d\lambda = b\omega_1 + pdy.$$

Соотношение (2.65) разрешим, введя параметр k :

$$b_{22} = kb, \quad b_{222} = kb_2. \quad (2.74)$$

В результате уравнения (2.10), (2.11) и последующие дадут:

$$\begin{aligned} db &= b_1\omega_1 + (b_2 + 2b\lambda)dy, \\ db_2 &= b_{21}\omega_1 + (kb + 3b_2\lambda)dy, \\ db_{22} &= b_{221}\omega_1 + (kb_2 + 4kb\lambda)dy, \\ db_{222} &= b_{2221}\omega_1 + (k^2b + 5kb_2\lambda)dy. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Продифференцировав первое из равенств (2.74) и воспользовавшись третьим уравнением (2.75), получим дифференциальное уравнение на k :

$$dk = (\dots)\omega_1 + 2k\lambda dy. \quad (2.76)$$

Отсюда видно, во-первых, что $k_y = 2k\lambda$. Положив $k = e^{2\varphi}$, получим

$$\lambda = \varphi_y.$$

Во-вторых, умножив уравнение (2.76) внешним образом на форму ω_1 , получим уравнение

$$dk \wedge \omega_1 = 2k\lambda dy \wedge \omega_1 = -2kd\omega_1,$$

или

$$d\omega_1 = -(2k)^{-1}dk \wedge \omega_1 = \omega_1 \wedge d\varphi.$$

Решением этого уравнения будет форма

$$\omega_1 = e^{-\varphi} dx, \quad (2.77)$$

где x — некоторая новая переменная. Подставляя найденные значения λ и ω_1 в (2.8), найдем выражение для кривизны:

$$b = e^\varphi \varphi_{xy}.$$

Из первого уравнения (2.75) следует $b_y = b_2 + 2b\lambda$. Подставляя сюда найденные уже b и λ , получим:

$$b_2 = e^\varphi (\varphi_{xyy} - \varphi_{xy}\varphi_y).$$

Из второго уравнения (2.75) имеем $b_{2y} = kb + 3b_2\lambda$. Подставляя сюда b , b_2 и λ , придем к дифференциальному уравнению на функцию φ :

$$\varphi_{xyyy} - \varphi_{xy}\varphi_{yy} + 2\varphi_{xy}\varphi_y^2 - e^{2\varphi}\varphi_{xy} - 3\varphi_y\varphi_{xyy} = 0. \quad (2.78)$$

Непосредственным вычислением доказываются следующие утверждения.

Лемма 2.1. Уравнение (2.78) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} (e^{-2\varphi})_{xyyy} + 2\varphi_{xy} + 3(\varphi_y(e^{-2\varphi})_{xy})_y + \\ + 2(\varphi_x(e^{-2\varphi})_{yy})_y + 6((\varphi_y)^2(e^{-2\varphi})_x)_y = 0. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Лемма 2.2. Уравнение (2.79) эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{u_{yy}}{u} + u^{-1} - \frac{3}{4}\left(\frac{u_y}{u}\right)^2\right)_x = \frac{\gamma(x)}{u}, \quad (2.80)$$

где

$$u = e^{-2\varphi}. \quad (2.81)$$

Лемма 2.3. Уравнение (2.80) эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{1}{(t^2)_y} \left(-\frac{1}{t^2} + 4(t_y)^2\right)_y\right)_x = \frac{\gamma(x)}{t^4}, \quad (2.82)$$

где

$$u = t^4. \quad (2.83)$$

Лемма 2.4. Уравнение (2.82) эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{1}{z_y} \left(-\frac{1}{z} + \frac{(z_y)^2}{z}\right)_y\right)_x = \frac{\gamma(x)}{z^2}, \quad (2.84)$$

где

$$z = t^2. \quad (2.85)$$

Обозначим через $y = y(x, z)$ функцию, правую обратную для $z = z(x, y)$. Тогда $z_y = (y_z)^{-1}$ и уравнение (2.84) преобразуется к виду

$$\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z(y_z)^2}\right)_{zx} = \frac{\gamma(x)}{z^2}. \quad (2.86)$$

Выражение, стоящее в левой части в скобках, зависит от переменных y и z . Введя вместо z переменную $v = z^{-1}$, мы получим:

$$\gamma(x)v^2 = \left(-v + \frac{v}{(y_z)^2}\right)_{xv} \frac{dv}{dz}.$$

Но $\frac{dv}{dz} = -v^2$, поэтому последнее уравнение принимает вид

$$\left(-v + \frac{v}{(y_z)^2}\right)_{xv} = -\gamma(x),$$

или

$$\left(\frac{v}{(y_z)^2}\right)_{xv} = -\gamma(x). \quad (2.87)$$

Обозначим правую часть через $\alpha'(x)$. Тогда, проинтегрировав (2.87) последовательно по x и v , найдем:

$$\left(\frac{v}{(y_z)^2}\right)_v = \alpha(x),$$

и

$$\frac{v}{(y_z)^2} = \alpha(x)v + \beta(x).$$

Разделив на v , получаем

$$\frac{1}{(y_z)^2} = \alpha(x) + \beta(x)z$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{\alpha(x) + \beta(x)z}.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{\alpha(x) + \beta(x)z}) = \frac{1}{2}\beta(x).$$

Отсюда легко получаем, что

$$z = a(x)y^2 + b(x)y + c(x), \quad (2.88)$$

где $a(x)$, $b(x)$ и $c(x)$ — произвольные гладкие функции.

Осталось найти уравнение третьего слоя рассматриваемой ткани. Как уже отмечалось, оно имеет вид $\omega_1 + \omega_2 = 0$, или, с учетом (2.77), $e^{-\varphi}dx + dy = 0$. Из обозначений (2.81), (2.83) и (2.85) вытекает, что $e^{-\varphi} = z$, следовательно, уравнение рассматриваемой ткани есть уравнение Риккати общего вида. ■

§ 2.5. Автоморфизмы криволинейной три-ткани

Рассмотрим три-ткань W , заданную в области D .

Определение. Локальный диффеоморфизм $\varphi: D \rightarrow D$ называется автоморфизмом три-ткани W , если он переводит линии этой ткани в линии этой же ткани, причем не обязательно в линии из того же семейства.

Очевидно, φ можно представить в виде композиции некоторого диффеоморфизма, сохраняющего порядок слоев ткани, и некоторой подстановки из трех элементов. Поэтому в дальнейшем будем считать, для простоты, что φ переводит линии ткани W в линии из того же семейства.

Пусть ткань W задана уравнением (2.1), и пусть в соответствии с § 1.2 автоморфизм φ порождает на семействах ткани тройку (A_1, A_2, A_3) локальных диффеоморфизмов. Тогда в силу определения автоморфизма получаем равенство

$$A_3(f(x, y)) = f(A_1(x), A_2(y)) \quad (2.89)$$

(«образ произведения равен произведению образов»). Очевидно, существование тройки локальных диффеоморфизмов (A_1, A_2, A_3) , удовлетворяющих условию (2.89), необходимо и достаточно для того, чтобы ткань W допускала автоморфизм.

Вспомним, что уравнение (2.1) задает операцию в координатной квазигруппе ткани W , а соотношение (2.89) задает автотопию этой квазигруппы (сравни с (1.18)). Поэтому тройку локальных диффеоморфизмов (A_1, A_2, A_3) , удовлетворяющих условию (2.89), называют автотопией три-ткани W , заданной уравнением (2.1).

Укажем некоторые свойства автоморфизмов (автотопий) три-ткани. Следующие два утверждения читатель без труда докажет самостоятельно.

Теорема 2.7. Пусть (A_1, A_2, A_3) — автотопия три-ткани W , и пусть три-ткань \widetilde{W} изотопна W , причем изотопия $W \rightarrow \widetilde{W}$ имеет вид (α, β, γ) . Тогда на три-ткани \widetilde{W} возникает автотопия

$$(\alpha^{-1} \circ A_1 \circ \alpha, \beta^{-1} \circ A_2 \circ \beta, \gamma^{-1} \circ A_3 \circ \gamma).$$

Теорема 2.8. Все автотопии три-ткани W образуют группу. Не столь очевидна

Теорема 2.9. Всякий автоморфизм φ три-ткани W индуцирует изоморфизм координатной лупы ℓ_p этой ткани на координатную лупу $\ell_{\varphi(p)}$.

□ Пусть $A = (A_i)$ — автотопия три-ткани W , φ — соответствующий автоморфизм, и пусть $p' = \varphi(p)$, где $p = (a, b)$ и $p' = (a', b')$. Рассмотрим координатные лупы ℓ_p и $\ell_{p'}$. Операция \circ в ℓ_p задается равенством (1.16):

$$u \circ v = x \cdot y = R_b^{-1}(u) \cdot L_a^{-1}(v),$$

а операция \bullet в $\ell_{p'}$ — аналогичным равенством

$$u' \bullet v' = x' \cdot y' = R_{b'}^{-1}(u') \cdot L_{a'}^{-1}(v')$$

(здесь, как и в гл. 1, точкой обозначена операция в координатной квазигруппе q три-ткани). Согласно определениям, имеем:

$$\begin{aligned} A_3(u \circ v) &= A_1(x) \cdot A_2(y) = x' \cdot y', \\ A_3(u) &= A_3(x \cdot b) = A_1(x) \cdot A_2(b) = x' \cdot b' = u', \\ A_3(v) &= A_3(a \cdot y) = A_1(a) \cdot A_2(y) = a' \cdot y' = v', \\ x' \cdot y' &= u' \bullet v' = A_3(u) \bullet A_3(v). \end{aligned} \quad (2.90)$$

Отсюда вытекает равенство

$$A_3(u \circ v) = A_3(u) \bullet A_3(v),$$

которое означает, что A_3 — изоморфизм координатной лупы ℓ_p на лупу $\ell_{p'}$. ■

Следствие: все координатные лупы три-ткани W изоморфны между собой, если эта ткань допускает транзитивную группу автоморфизмов. Нетрудно показать, что справедливо и обратное утверждение: если все координатные лупы некоторой три-ткани W изоморфны, то она допускает транзитивную группу автоморфизмов.

Доказательство следующего утверждения можно найти в [АШ-4].

Теорема 2.10. Локальные автоморфизмы три-ткани W являются также автоморфизмами соответствующей связности Черна. Обратно, пусть φ — автоморфизм связности Черна некоторой три-ткани W , заданной в области D , и существует точка p в D такая, что дифференциал $d\varphi|_p$ переводит касательные к линиям ткани W , проходящим через точку p , в касательные к соответству-

ющим линиям, проходящим через точку $\varphi(p)$. Тогда φ — автоморфизм три-ткани W .

(Напомним, что автоморфизмом аффинной связности Γ , заданной на многообразии X , называется такой диффеоморфизм этого многообразия, который сохраняет закон параллельного перенесения, т. е. сохраняет ковариантный дифференциал относительно этой связности.)

Перейдем к примерам. Прежде всего отметим, что произвольная криволинейная три-ткань не допускает, вообще говоря, автоморфизмов.

Пример 1. Параллельная три-ткань Π допускает трехпараметрическую группу автоморфизмов. Действительно, пусть ткань Π задана уравнением $z = x + y$. Тогда автоморфизмы имеют вид $x = a\tilde{x} + b_1$, $y = a\tilde{y} + b_2$, а соответствующая автотопия (A_1, A_2, A_3) будет $x = a\tilde{x} + b_1$, $y = a\tilde{y} + b_2$, $z = a\tilde{z} + b_1 + b_2$.

Следствие: в соответствии с теоремой 2.7 на регулярной ткани W , заданной уравнением $\alpha(x) + \beta(y) = \gamma(z)$, возникает семейство автоморфизмов

$$x = \alpha^{-1}(a\alpha(\tilde{x}) + b_1), \quad y = \beta^{-1}(a\beta(\tilde{y}) + b_2), \quad z = \gamma^{-1}(a\gamma(\tilde{z}) + b_1 + b_2). \quad (2.91)$$

Пример 2. Пусть W — грасманова три-ткань, порожденная коникой Q и прямой m . Проективные преобразования (коллинеации), преобразующие Q и m в себя, переводят в себя и ткань W , то есть являются автоморфизмами этой ткани. Чтобы описать эту группу автоморфизмов, будем считать прямую m бесконечно удаленной, тогда коллинеации, оставляющие m на месте, образуют аффинную группу. Подгруппа аффинной группы, оставляющая на месте конику Q на месте, порождается вращениями этой коники и ее осевыми симметриями.

Предложение 2.11. Пусть автоморфизм φ три-ткани W переводит точку p в p' . Тогда соответствующие инварианты ткани W в точках p и p' будут одинаковыми.

□ В силу теоремы 2.9 координатные лупы ℓ_p и $\ell_{p'}$ будут изоморфны. Напомним, что операции в них определены на линиях третьего семейства. Введем в окрестности точек p и p' стандартную параметризацию (см. § 1.10), причем соответствующие линии третьего семейства отметим одинаковыми параметрами. Тогда, в силу определения стандартной параметризации, соответствующие линии первого и второго семейств также будут отмечены одинаковыми значениями параметров. Следовательно, соответствующие семейства линий ткани W в окрестности точек p и p' будут задаваться одинаковыми уравнениями, а $\varphi \equiv id$. Отсюда следует, что соответствующие инварианты ткани в точках ℓ_p и $\ell_{p'}$ будут одинаковыми.

Если теперь перейти к произвольным координатам, то значения инвариантов не изменятся. ■

Теорема 2.12. *Если криволинейная три-ткань допускает двухпараметрическое семейство автоморфизмов, то она является регулярной.*

► Предположим, криволинейная три-ткань W допускает двухпараметрическое семейство автоморфизмов. Тогда группа автоморфизмов действует в области определения ткани транзитивно, то есть для каждой точки p' существует автоморфизм, переводящий фиксированную точку p в p' . Поэтому, в силу предыдущего предложения получаем, что все абсолютные дифференциальные инварианты ткани (см. § 2.1) будут постоянными в области D .

Предположим, что $b \neq 0$ (ткань не является регулярной) и нормируем корепер условием $b = -1/2$, тогда

$$\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \quad (2.92)$$

и величины b_1, b_2 и т.д. станут абсолютными инвариантами (см. § 2.1). Так как в рассматриваемом случае они постоянны, то из формул (2.10) и (2.11) получаем:

$$-2b\omega = b_1\omega_1 + b_2\omega_2, \quad -3b_1\omega = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad -3b_2\omega = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2. \quad (2.93)$$

Исключая отсюда форму ω , придем к равенствам:

$$-3b_1(b_1\omega_1 + b_2\omega_2) = b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2, \quad -3b_2(b_1\omega_1 + b_2\omega_2) = b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2.$$

В силу независимости базисных форм отсюда получим, в частности, $b_{12} = b_{21} = -3b_1b_2$, что противоречит (2.12).

Таким образом, предположение $b \neq 0$ привело к противоречию. Следовательно, кривизна рассматриваемой ткани равна нулю, то есть ткань является регулярной. ◀

Теорема 2.13. *Уравнение всякой криволинейной три-ткани, допускающей однопараметрическое семейство автоморфизмов, может быть приведено в некоторых локальных координатах к виду*

$$z = x + y + f(x - y). \quad (2.94)$$

□ Пусть три-ткань W не является регулярной, $b \neq 0$. Как и выше, выберем подсемейство кореперов, в которых выполняется равенство (2.92). Тогда из (2.11) следует

$$\begin{aligned} db_1 &= (b_{11} + 3b_1^2)\omega_1 + (b_{12} + 3b_1b_2)\omega_2, \\ db_2 &= (b_{21}b_2 + 3b_1b_2)\omega_1 + (b_{22} + 3b_1^2)\omega_2, \end{aligned} \quad (2.95)$$

и так далее. Аналогичные уравнения получатся для инвариантов b_{11}, b_{12}, \dots

Пусть рассматриваемая три-ткань W допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов. Тогда в силу предложения 2.11 все инварианты: b_1, b_2 и т.д. станут постоянными вдоль траекторий этого семейства. Следовательно, на траекториях семейства правые части

уравнений (2.95) и им аналогичных обращаются в нуль. А значит, на всем многообразии ткани указанные правые части пропорциональны. Поэтому, приравнявая их нулю, мы получим дифференциальное уравнение однопараметрического семейства автоморфизмов ткани.

Далее, пропорциональность правых частей означает, что дифференциалы всех функций $b_2, b_{11}, b_{12}, \dots$ пропорциональны, например, форме db_1 . Следовательно, можно считать, что на многообразии ткани все эти функции зависят от одной переменной b_1 :

$$b_2 = b_2(b_1), \quad b_{11} = b_{11}(b_1), \quad b_{12} = b_{12}(b_1),$$

и т.д. Но тогда в силу (2.92) и первого из уравнений (2.95) первое из уравнений (2.6) преобразуется следующим образом:

$$d\omega_1 = b_2(b_1)\omega_2 \wedge \omega_1 = -b_2(b_1)\omega_1 \wedge \frac{db_1}{b_{12}(b_1) + 3b_1b_2(b_1)} = \omega_1 \wedge d\vartheta_1(b_1),$$

где $\vartheta_1(b_1)$ — некоторая функция. Интегрируя последнее уравнение, найдем форму ω_1 :

$$\omega_1 = e^{-\vartheta_1(b_1)} du. \quad (2.96)$$

Здесь u — некоторая новая переменная. Аналогично находим форму ω_2 :

$$\omega_2 = e^{-\vartheta_2(b_1)} dv. \quad (2.97)$$

Подставив найденные значения базисных форм в первое уравнение (2.11), найдем, что

$$db_1 = \alpha(b_1)\omega_1 + \beta(b_1)\omega_2.$$

Отсюда следует, что частные производные от функции $b_1(u, v)$ также являются функциями от b_1 .

Обозначим через $u = \bar{\varphi}(b_1, v)$ и $v = \tilde{\varphi}(u, b_1)$ левую и правую обратные функции для функции $b_1(u, v)$. Тогда из очевидных равенств

$$\frac{\partial b_1}{\partial u} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial b_1} = 1, \quad \frac{\partial b_1}{\partial v} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial b_1} = 1$$

вытекает, что производные $\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial b_1}$ и $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial b_1}$ также зависят только от b_1 . Отсюда, в свою очередь, следует, что

$$u = \bar{\varphi}(b_1, v) = p(b_1) + q(v), \quad v = \tilde{\varphi}(u, b_1) = r(u) + s(b_1).$$

Решение этой системы можно записать в виде $b_1 = b_1(u + av)$, где a — некоторая постоянная. Тогда все функции от переменной b_1 станут функциями от переменной $u + av$, в частности, базисные формы (см. (2.96) и (2.97)) запишутся в виде

$$\omega_1 = e^{-\vartheta_1(u+av)} du, \quad \omega_2 = e^{-\vartheta_2(u+av)} dv,$$

где ϑ_1 и ϑ_2 — уже некоторые новые функции.

Теперь найдем уравнения слоений рассматриваемой три-ткани. В соответствии с (2.3) первое слоение задается уравнением $u = x$, второе — уравнением $v = y$, третье — дифференциальным уравнением

$$e^{\vartheta_2 - \vartheta_1} du + dv = 0.$$

Обозначим $u + av = p$, $u - av = q$. Так как функции ϑ_1 и ϑ_2 зависят от переменной $u + av$, то последнее уравнение переписывается в виде

$$e^{\delta(p)}(dp + dq) + \frac{1}{a}(dp - dq) = 0.$$

В этом уравнении переменные разделяются, и после интегрирования мы получаем

$$u - av + f(u + av) = z.$$

Постоянная интегрирования z — параметр третьего слоения ткани. Исключая из уравнений слоений локальные координаты u и v , в соответствии с теорией приходим к искомому уравнению рассматриваемой три-ткани:

$$z = x - ay + f(x + ay).$$

После допустимого преобразования $ay \rightarrow -y$ уравнение ткани примет вид (2.94). ■

В частности, все ткани типа B_1 , приведенные в качестве примеров в § 2.2, допускают однопараметрическое семейство автоморфизмов.

Легко указать автоморфизмы ткани, заданной уравнением (2.94): $x \rightarrow x + a$, $y \rightarrow y + a$, $z \rightarrow z + 2a$. Траектории автоморфизмов есть линии $x - y = \text{const}$.

§ 2.6. Структурные уравнения грасмановой три-ткани

Найдем дифференциальные уравнения грасмановой три-ткани GW , заданной кривыми L_i (§ 1.9). Предварительно напомним, что проективный репер на проективной плоскости образуют 4 точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Обозначим первые 3 точки A_0 , A_1 , A_2 и договоримся, что четвертая точка (она называется единичной) всегда имеет вид $A_0 + A_1 + A_2$. Тогда можно говорить, что репер образуют 3 точки — A_0 , A_1 и A_2 . Подвижным репером проективной плоскости называют многообразие (семейство) всех проективных реперов этой плоскости. Метод подвижного репера состоит в том, что с заданным геометрическим объектом (кривая, сеть, три-ткань и т.д.) связывают некоторое подсемейство адаптированных реперов, которое также называется подвижным репером. Такое сужение семейства реперов может быть сделано неоднократно. Адаптированные реперы и их семейства (подвижной репер) обычно обозначают одним и тем же символом. Для краткости (если позволяет контекст) пишут «репер» вместо «подвижной репер».

Рассмотрим на проективной плоскости \mathbb{P}^2 подвижной репер $\{A_u\}$ ($u, v, w, z, \dots = 0, 1, 2$), уравнения инфинитезимальных перемещений которого запишем в виде ¹⁾

$$dA_u = \Theta_u^v A_v. \quad (2.98)$$

Дифференциальные формы Θ_u^v удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства:

$$d\Theta_u^v = \Theta_u^w \wedge \Theta_w^v \quad (2.99)$$

которые получаются при внешнем дифференцировании уравнений (2.98) (см., например, [Кр-1], [Кр-2]).

Сузим семейство реперов, поместив точки A_0 и A_2 в текущие точки M_1 и M_2 кривых L_1 и L_2 соответственно, а точку A_1 — на пересечение касательных к L_1 и L_2 в точках A_0 и A_2 . Тогда дифференциальные уравнения кривых L_1 и L_2 запишутся соответственно в виде

$$\Theta_0^2 = 0, \quad \Theta_2^0 = 0, \quad (2.100)$$

а формы $\Theta_0^1, \Theta_{r+1}^1$ станут базисными формами грассманова многообразия G прямых плоскости \mathbb{P}^2 .

Найдем уравнение кривой L_3 , описываемой точкой M_3 . Так как эта точка лежит на прямой A_0A_2 и не совпадает ни с одной из точек A_0, A_2 , то репер можно нормировать условием $M_3 \equiv A_0 + A_2$. Дифференцируя это соотношение с помощью (2.98), придем к равенству:

$$dM_3 = \Theta_0^0 A_0 + \Theta_2^2 A_2 + (\Theta_0^1 + \Theta_2^1) A_1.$$

Исключив отсюда точку A_2 , получим:

$$dM_3 = \Theta_2^2 M_3 + (\Theta_0^0 - \Theta_2^2) A_0 + (\Theta_0^1 + \Theta_2^1) A_1.$$

Так как точка M_3 описывает кривую, то форма $\Theta_0^0 - \Theta_2^2$ должна выражаться через форму $\Theta_0^1 + \Theta_2^1$:

$$\Theta_0^0 - \Theta_2^2 = a(\Theta_0^1 + \Theta_2^1). \quad (2.101)$$

Это и есть уравнение кривой L_3 в рассматриваемом подвижном репере.

Пучки прямых, образующих три-ткань GW на грассмановом многообразии G , в построенном репере выделяются уравнениями (сравни с (2.3)):

$$\Theta_0^1 = 0, \quad \Theta_2^1 = 0, \quad \Theta_0^1 + \Theta_2^1 = 0.$$

Поэтому формы $\Theta_0^1 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1, \Theta_2^1 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_2$ будут базисными формами грассмановой три-ткани GW .

¹⁾ Уравнения (2.98) называются также уравнениями движения репера или деривационными уравнениями.

Найдем структурные уравнения три-ткани GW . Из уравнений (2.99) находим:

$$d\Theta_0^1 = \Theta_0^0 \wedge \Theta_0^1 + \Theta_0^1 \wedge \Theta_1^1, \quad d\Theta_2^1 = \Theta_2^2 \wedge \Theta_2^1 + \Theta_2^1 \wedge \Theta_1^1. \quad (2.102)$$

Как видно из уравнения (2.101), формы Θ_0^0 и Θ_2^2 могут быть представлены в виде:

$$\Theta_0^0 = \Theta + a\Theta_0^1, \quad \Theta_2^2 = \Theta - a\Theta_2^1, \quad (2.103)$$

где Θ — некоторая форма Пфаффа. Внося эти выражения в (2.102), получим уравнения

$$d\Theta_0^1 = \Theta_0^1 \wedge \omega, \quad d\Theta_2^1 = \Theta_2^1 \wedge \omega, \quad (2.104)$$

где обозначено

$$\omega = \Theta_1^1 - \Theta. \quad (2.105)$$

Сравнивая уравнения (2.104) со структурными уравнениями (2.6), (2.8) произвольной три-ткани, мы видим, что форма ω есть форма связности Γ ткани GW .

Дифференцируя внешним образом уравнения (2.100) и применяя лемму Картана, выразим формы Θ_1^2 и Θ_1^0 через базисные формы Θ_0^1 , Θ_2^1 :

$$\Theta_1^2 = b^1\Theta_0^1, \quad \Theta_1^0 = -b^2\Theta_2^1. \quad (2.106)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (2.101), придем к квадратичному уравнению

$$(\nabla a + \Theta_1^0 - \Theta_1^2) \wedge (\Theta_0^1 + \Theta_2^1) = 0,$$

где $\nabla a = da - a\omega$. Отсюда следует, что

$$\nabla a + \Theta_1^0 - \Theta_1^2 = -b^3(\Theta_0^1 + \Theta_2^1). \quad (2.107)$$

С учетом (2.106) последнее равенство запишется так:

$$\nabla a = (b^1 - b^3)\Theta_0^1 + (b^2 - b^3)\Theta_2^1. \quad (2.108)$$

Дифференцируя какое-либо из равенств (2.103), придем к уравнению

$$d\Theta = -b^3\Theta_0^1 \wedge \Theta_2^1,$$

а дифференцируя форму ω , определенную равенством (2.105), получим

$$d\omega = \Theta_1^0 \wedge \Theta_0^1 + \Theta_1^2 \wedge \Theta_2^1 - d\Theta.$$

В силу (2.105) и (2.106)

$$d\omega = (b^1 + b^2 + b^3)\Theta_0^1 \wedge \Theta_2^1.$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (2.8), находим кривизну b грасмановой ткани GW :

$$b = b^1 + b^2 + b^3. \quad (2.109)$$

В силу теоремы 2.1 получаем условие регулярности грассмановой ткани: $b^1 + b^2 + b^3 = 0$. Согласно теореме 1.17 это есть также условие алгебраизуемости тройки кривых L_i , определяющих грассманову три-ткань GW .

Для дальнейшего нам понадобится дифференциальное продолжение полученных уравнений. Дифференцируя внешним образом уравнения (2.106) и (2.107), получим квадратичные уравнения

$$\begin{aligned}(db^1 - 2b^1\omega - ab^1\Theta_2^1) \wedge \Theta_0^1 &= 0, \\(db^2 - 2b^2\omega + ab^2\Theta_0^1) \wedge \Theta_2^1 &= 0, \\(db^3 - 2b^3\omega - ab^3\Theta_0^1) \wedge (\Theta_0^1 + \Theta_2^1) &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}db^1 - 2b^1\omega &= c^1\Theta_0^1 + ab^1\Theta_2^1, \\db^2 - 2b^2\omega &= -ab^2\Theta_0^1 + c^2\Theta_2^1, \\db^3 - 2b^3\omega &= ab^3\Theta_0^1 + c^3(\Theta_0^1 + \Theta_2^1),\end{aligned}\tag{2.110}$$

где c^1, c^2, c^3 — некоторые новые функции. Продолжая подобным образом уравнения (2.110), придем к уравнениям

$$\begin{aligned}dc^1 - 3c^1\omega &= c^{11}\Theta_0^1 + (ac^1 + 3(b^1)^2 + 2b^1b^2 + b^1b^3)\Theta_2^1, \\dc^2 - 3c^2\omega &= -(ac^2 + 2b^1b^2 + 3(b^2)^2 + b^2b^3)\Theta_0^1 + c^{22}\Theta_2^1, \\dc^3 - 3c^3\omega &= (ac^3 - 2b^1b^3 - b^2b^3 - 3(b^3)^2)\Theta_0^1 + c^{32}(\Theta_0^1 + \Theta_2^1).\end{aligned}\tag{2.111}$$

Продолжая уравнения (2.111), получим уравнения

$$\begin{aligned}dc^{11} - 4c^{11}\omega &= c^{111}\Theta_0^1 + (ac^{11} + ab^1b^3 - \\&\quad - 2ab^1b^2 + 10b^1c^1 + 5b^2c^1 + 3b^3c^1 + b^1c^3)\Theta_2^1, \\dc^{22} - 4c^{22}\omega &= -(ac^{22} + 2ab^1b^2 + 5b^1c^2 + \\&\quad + 10b^2c^2 + 3b^3c^2 + b^2c^3)\Theta_0^1 + c^{222}\Theta_2^1, \\dc^{32} - 4c^{32}\omega &= (ac^{32} - 2ab^1b^3 - 5b^1c^3 - \\&\quad - 3b^2c^3 - 10b^3c^3 - b^3c^2)\Theta_0^1 + c^{322}(\Theta_0^1 + \Theta_2^1).\end{aligned}\tag{2.112}$$

Итак, грассманова три-ткань задается тройкой кривых, с которой связаны относительные проективные инварианты $a, b^1, b^2, b^3, c^1, c^2, c^3, c^{11}, \dots$. Как видно из предыдущего, система дифференциальных уравнений, определяющих грассманову ткань, правильно продолжаема — в каждой дифференциальной окрестности при продолжении возникают 3 новых инварианта. С другой стороны, с грассмановой три-тканью связаны инварианты ткани: кривизна b и ее ковариантные производные всех порядков, см. § 2.1. Таким образом, у нас имеется 2 геометрических объекта: относительные инварианты ткани и относительные инварианты тройки кривых. При этом первые можно выразить через вторые (один объект охватывает другой, по терминологии Г.Ф. Лаптева, см. [Ла-1]).

Чтобы получить уравнения охвата, надо продифференцировать уравнение (2.109) и заменить полученные дифференциалы с помощью (2.108) и (2.111). Сравнивая в полученных соотношениях коэффициенты при независимых базисных формах, получим равенства:

$$b_1 = c^1 + c^3 - ab^2 + ab^3, \quad b_2 = c^2 + c^3 + ab^1. \quad (2.113)$$

Дифференцируя далее (2.113) и пользуясь уравнениями (2.109) и (2.11), придем к соотношениям

$$\begin{aligned} b_{11} &= c^{11} + c^{32} + 2ac^3 + (a)^2(b^2 + b^3) - b^1(b^2 + b^3) - 4(b^3)^2, \\ b_{12} &= c^{32} + ac^1 - ac^2 + ac^3 + 3(b^1)^2 - (b^2)^2 - (b^3)^2 + \\ &\quad + 2b^1b^2 + b^1b^3 + 2b^2b^3, \\ b_{21} &= c^{32} + ac^1 - ac^2 + ac^3 + (b^1)^2 - 3(b^2)^2 - 3(b^3)^2 - \\ &\quad - 2b^1b^2 - 3b^1b^3 - 2b^2b^3, \\ b_{22} &= c^{22} + c^{32} + (a)^2b^1 + b^1(b^2 - b^3). \end{aligned} \quad (2.114)$$

Продифференцировав первое и последнее уравнения (2.114), с помощью уравнений (2.110) и (2.113) получим, в частности:

$$\begin{aligned} b_{112} &= c^{322} + ac^{11} + 2ac^{32} + (a)^2(c^2 + c^3) + c^1(10b^1 + 5b^2 + 3b^3) - \\ &\quad - b^1c^2 + c^3(2b^2 - 10b^3) + a(-3b^1b^2 + 2(b^2)^2 - 2(b^3)^2), \\ b_{221} &= c^{322} - ac^{22} + ac^{32} + (a)^2c^1 + c^1(b^2 - b^3) - c^2(5b^1 + 10b^2 + 4b^3) - \\ &\quad - c^3(6b^1 + 4b^2 + 10b^3) + a(2(b^1)^2 - 3b^1b^2 - 5b^1b^3). \end{aligned} \quad (2.115)$$

Вычитая второе уравнение из первого, с учетом (2.114) и (2.113) находим:

$$b_{112} - b_{221} = a(b_{11} + b_{22} - b_{21}) - (a)^3b - 8bc^3 - ab(5b - 8b^2).$$

Перепишем это уравнение в виде

$$8bc^3 = -b_{112} + b_{221} + a(b_{11} + b_{22} - b_{21}) - (a)^3b - ab(5b - 8b^2). \quad (2.116)$$

§ 2.7. Эквивалентность грассмановых тканей и проблема Гронвола

Наша цель — доказать следующее утверждение.

Теорема 2.14. Пусть GW — криволинейная нерегулярная грассманова три-ткань. Тогда эквивалентная ей грассманова три-ткань $\widetilde{G\bar{W}}$ вместе с соответствующим локальным диффеоморфизмом φ , переводящим ткань GW в ткань $\widetilde{G\bar{W}}$, существует с произволом 8 постоянных.

□ Пусть GW — грассманова три-ткань, структурные уравнения которой имеют вид (2.100)–(2.116), и $\widetilde{G\bar{W}}$ — еще одна грассманова три-ткань, заданная на проективной плоскости \mathbb{P}^2 кривыми \tilde{L}_i ,

$i = 1, 2, 3$. Соответствующие ей формы и функции обозначим теми же символами, что для ткани GW , но с тильдой. Тогда для этих форм будут выполняться те же соотношения (2.100)–(2.116).

Лемма 2.5. Пусть три-ткани GW и $G\widetilde{W}$ эквивалентны. Тогда соответствие между реперами можно установить так, что в выбранных реперах кривизны этих тканей и соответствующие ковариантные производные кривизн совпадут.

□ Предположим, ткани GW и $G\widetilde{W}$ эквивалентны, тогда существует локальный диффеоморфизм φ , который слоения ткани GW переводит в соответствующие слоения ткани $G\widetilde{W}$. Так как слоения ткани GW задаются уравнениями (2.3), а слоения ткани $G\widetilde{W}$ — аналогичными уравнениями с тильдой, то дифференциальные уравнения отображения φ должны иметь следующий вид:

$$\widetilde{\Theta}_0^1 = p\Theta_0^1, \quad \widetilde{\Theta}_2^1 = p\Theta_2^1. \quad (2.117)$$

С другой стороны, эти уравнения определяют некоторое отображение грассманова многообразия прямых G плоскости P^2 на грассманово многообразии прямых \widetilde{G} плоскости \widetilde{P}^2 .

Напомним (см. (2.15)), что базисные формы допускают замены вида

$$\widehat{\Theta}_0^1 = A\Theta_0^1, \quad \widehat{\Theta}_2^1 = A\Theta_2^1.$$

Полагая $A = p$, приведем уравнения (2.117) к виду

$$\widetilde{\Theta}_0^1 = \Theta_0^1, \quad \widetilde{\Theta}_2^1 = \Theta_2^1 \quad (2.118)$$

(«шапочку» над новыми формами $\widehat{\Theta}_0^1$ и $\widehat{\Theta}_2^1$ опускаем).

Дифференцируя уравнения (2.118) внешним образом, пользуясь структурными уравнениями (2.99) и аналогичными с тильдой, придем к равенствам:

$$\begin{aligned} \Theta_0^0 - \Theta_1^1 - \widetilde{\Theta}_0^0 + \widetilde{\Theta}_1^1 &= p_1\Theta_0^1, \\ \Theta_2^2 - \Theta_1^1 - \widetilde{\Theta}_2^2 + \widetilde{\Theta}_1^1 &= p_2\Theta_2^1. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Вычитая из первого уравнения второе и пользуясь соотношениями (2.101) и аналогичными с тильдой, получим

$$(a - \widetilde{a})(\Theta_0^1 + \Theta_2^1) = p_1\Theta_0^1 - p_2\Theta_2^1.$$

Отсюда находим $p_1 = -p_2 = pa - p^2\widetilde{a}$, в результате из двух уравнений (2.119) остается одно независимое, которое можно переписать в виде:

$$\Theta_0^0 - \Theta_1^1 - \widetilde{\Theta}_0^0 + \widetilde{\Theta}_1^1 = (a - \widetilde{a})\Theta_0^1. \quad (2.120)$$

Рассмотрим теперь уравнения (2.104) и им аналогичные для ткани $G\widetilde{W}$. В силу (2.118) из них получаем $\Theta_0^1 \wedge (\omega - \widetilde{\omega}) = 0$, $\Theta_2^1 \wedge (\omega - \widetilde{\omega}) = 0$, откуда

$$\omega = \widetilde{\omega}. \quad (2.121)$$

Дифференцируя это равенство, в силу (2.8) и аналогичных уравнений для ткани \widetilde{GW} получим

$$b = \widetilde{b}. \quad (2.122)$$

Дифференцирование последнего равенства с учетом (2.11), (2.13), им аналогичных с тильдой, (2.118) и (2.121) приведет к равенству ковариантных производных всех порядков от кривизн:

$$b_1 = \widetilde{b}_1, b_2 = \widetilde{b}_2, \quad (2.123)$$

и т.д. ■

Замечание. Доказанная лемма не является непосредственным следствием аналогичной теоремы 2.3, сформулированной для произвольной три-ткани. Дело в том, что в теореме 2.3 репер адаптирован к произвольной три-ткани, а в лемме 2.5 рассматриваются грасмановы ткани, у которых репер адаптирован к тройке кривых.

Непосредственным вычислением с использованием структурных уравнений тканей W, \widetilde{GW} доказывается следующая

Лемма 2.6. *Внешнее дифференцирование уравнения (2.120) приводит к тождеству.*

Продолжим доказательство теоремы 2.14. Будем считать, что три-ткань W задана, а эквивалентную ей три-ткань \widetilde{W} вместе с соответствующим диффеоморфизмом требуется найти. Тогда формы Θ_u^v , кривизну b ткани W , ее ковариантные производные, функции a, b^1, b^2, b^3 и т.д. надо считать известными. В силу предложения 6 кривизна ткани \widetilde{W} и ее ковариантные производные также будут известными величинами, а формы $\widetilde{\Theta}_u^v$ и функции $\widetilde{a}, \widetilde{b}^1, \widetilde{b}^2, \widetilde{b}^3$ и т.д., входящие в уравнения ткани \widetilde{W} , аналогичные уравнениям (2.107), (2.110), (2.111) и т.д., подлежат определению.

Формы $\widetilde{\Theta}_u^v$ удовлетворяют уравнениям (2.118) и уравнениям, аналогичным уравнениям (2.100), (2.101), и т.д.:

$$\widetilde{\Theta}_0^2 = 0, \quad \widetilde{\Theta}_2^0 = 0, \quad (2.100')$$

$$\widetilde{\Theta}_0^0 - \widetilde{\Theta}_2^2 = \widetilde{a}(\Theta_0^1 + \Theta_2^1), \quad (2.101')$$

$$\widetilde{\Theta}_1^2 = \widetilde{b}^1 \Theta_0^1, \quad \widetilde{\Theta}_1^0 = -\widetilde{b}^2 \Theta_2^1, \quad (2.106')$$

$$\nabla \widetilde{a} = (\widetilde{b}^1 - \widetilde{b}^3) \Theta_0^1 + (\widetilde{b}^2 - \widetilde{b}^3) \Theta_2^1, \quad (2.108')$$

а также уравнению (2.120).

Для ткани \widetilde{GW} будут иметь место уравнения, аналогичные уравнениям (2.110), которые в силу (2.118), (2.121) и (2.122) имеют вид:

$$\begin{aligned} d\widetilde{b}^1 - 2\widetilde{b}^1\omega &= \widetilde{c}^1\Theta_0^1 + \widetilde{a}\widetilde{b}^1\Theta_2^1, \\ d\widetilde{b}^2 - 2\widetilde{b}^2\omega &= -\widetilde{a}\widetilde{b}^2\Theta_0^1 + \widetilde{c}^2\Theta_2^1, \\ d\widetilde{b}^3 - 2\widetilde{b}^3\omega &= \widetilde{a}\widetilde{b}^3\Theta_0^1 + \widetilde{c}^3(\Theta_0^1 + \Theta_2^1). \end{aligned} \quad (2.110')$$

Функции \tilde{b}^1 , \tilde{b}^2 и \tilde{b}^3 связаны соотношением

$$\tilde{b}^1 + \tilde{b}^2 + \tilde{b}^3 = b, \quad (2.124)$$

которое получается из условия (2.122). Если отсюда выразить \tilde{b}^3 и подставить в третье уравнение (2.110'), то оно удовлетворится тождественно. Таким образом, в системе (2.110') остается два независимых уравнения.

Далее заметим, что функции \tilde{c}^1 , \tilde{c}^2 и \tilde{c}^3 связаны соотношениями, аналогичными соотношениям (2.113). В силу (2.123) они запишутся так:

$$b_1 = \tilde{c}^1 + \tilde{c}^3 - \tilde{a}\tilde{b}^2 + \tilde{a}\tilde{b}^3, \quad b_2 = \tilde{c}^2 + \tilde{c}^3 + \tilde{a}\tilde{b}^1. \quad (2.113')$$

Выразим отсюда \tilde{c}^1 и \tilde{c}^2 через \tilde{c}^3 , подставим в первые два уравнения (2.110') и продифференцируем их внешним образом. Разрешив полученные квадратичные уравнения по лемме Картана, после некоторых преобразований придем к уравнению:

$$\begin{aligned} d\tilde{c}^3 - 3\tilde{c}^3\omega = & [b_{21} + (\tilde{a})^2(b - 2\tilde{b}^1 - 2\tilde{b}^2) + b(\tilde{b}^1 + \tilde{b}^2) + \tilde{a}(\tilde{b}^2 - \tilde{b}^1) - \\ & - 2(\tilde{b}^1)^2 + 2(\tilde{b}^2)^2]\Theta_0^1 + [b_{12} - \tilde{a}\tilde{c}^3 + (b)^2 + (\tilde{a})^2(b - 2\tilde{b}^1 - 2\tilde{b}^2) - \\ & - b(3\tilde{b}^1 + 4\tilde{b}^2) + \tilde{a}(\tilde{b}^2 - \tilde{b}^1) - (\tilde{b}^1)^2 + 3\tilde{b}^1\tilde{b}^2]\Theta_2^1. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Непосредственным вычислением доказывается

Лемма 2.7. При внешнем дифференцировании уравнения (2.125) получается тождество.

Доказательство использует само уравнение (2.128), уравнения (2.111), (2.11), (2.13), (2.12), (2.12'), (2.116), (2.107'), (2.108'), (2.124), (2.113').

Таким образом, для определения неизвестных форм и функций мы получили систему (обозначим ее Σ) из 12-ти пфаффовых уравнений ((2.118), (2.100'), (2.101'), (2.106'), (2.108'), (2.120), первые 2 уравнения (2.110') и уравнение (2.125)), замкнутую относительно операции внешнего дифференцирования. Следовательно, в силу теоремы Фробениуса (см. [По-1], стр. 54; [Кр-2], стр. 52) эта система вполне интегрируема, и решение существует с произволом не более 12-ти постоянных.

Найдем точное число постоянных. Рассмотрим уравнение, аналогичное (2.116), для ткани \tilde{W} :

$$8b\tilde{c}_3 = -b_{112} + b_{221} + \tilde{a}(b_{11} + b_{22} - b_{21}) - (\tilde{a})^3b - \tilde{a}b(5b - 8\tilde{b}^2). \quad (2.116')$$

Так как ткань W по условию не является регулярной, то $b \neq 0$, и функция \tilde{c}_3 в уравнении (2.116') присутствует. Продифференцируем (2.116') и заменим $d\tilde{c}_3$ по формуле (2.125). Приравнявая в полученном равенстве коэффициенты при базисных формах, получим следующие 2 соотношения:

$$\begin{aligned} 8b_1\tilde{c}_3 + 8b[b_{21} + \tilde{a}^2(b - 2\tilde{b}^1 - 2\tilde{b}^2) + b(\tilde{b}^1 + \tilde{b}^2) + \tilde{a}(b_2 - b_1) - \\ - 2(\tilde{b}^1)^2 + 2(\tilde{b}^2)^2] = -b_{1121} + b_{2211} + (\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3)(b_{11} + b_{22} - b_{21}) + \\ + \tilde{a}(b_{111} + b_{221} - b_{211}) - 3\tilde{a}^2b(\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3) - \tilde{a}^3b_1 - 5(b)^2(\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3) - \end{aligned}$$

$$-10\tilde{a}bb_1 + 8(\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3)b\tilde{b}^2 + 8\tilde{a}b_1\tilde{b}^2 - 8\tilde{a}^2b\tilde{b}^2, \quad (2.126)$$

$$\begin{aligned} & 8b_2\tilde{c}_3 + 8b[b_{12} - \tilde{a}\tilde{c}_3 + (b)^2 + \tilde{a}^2(b - 2\tilde{b}^1 - 2\tilde{b}^2) - b(3\tilde{b}^1 + 4\tilde{b}^2) + \\ & \quad + \tilde{a}(b_2 - b_1) - (\tilde{b}^1)^2 + 3\tilde{b}^1\tilde{b}^2 + 4(\tilde{b}^2)^2] = -b_{1122} + b_{2212} + \\ & \quad + (\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3)(b_{11} + b_{22} - b_{21}) + \tilde{a}(b_{112} + b_{222} - b_{212}) - 3\tilde{a}^2b(\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3) - \\ & \quad - \tilde{a}^3b_2 - 5(b)^2(\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3) - 10\tilde{a}bb_2 + 8(\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3)b\tilde{b}^2 + 8\tilde{a}b_2\tilde{b}^2 + 8\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}_2. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Умножим эти уравнения на b и заменим $8b\tilde{c}_3$ с помощью (2.116'). Кроме того, в уравнении (2.127) сумму $\tilde{c}_2 + \tilde{c}_3$ заменим с помощью (2.113'). После некоторых простых преобразований, использующих формулу (2.124), придем к соотношениям:

$$\begin{aligned} & 8(b)^2[-2(\tilde{b}^1)^2 - 2\tilde{b}^1\tilde{b}^2 + (\tilde{b}^2)^2] + 3(b)^3(6\tilde{b}^1 + 7\tilde{b}^2) - \\ & \quad - (5\tilde{a}^2(b)^2 + \delta)(\tilde{b}^1 - \tilde{b}^3) + \tilde{a}\gamma_1 + \Phi_1 = 0, \\ & 8(b)^2[-(\tilde{b}^1)^2 + 2\tilde{b}^1\tilde{b}^2 + 2(\tilde{b}^2)^2] - (b)^3(19\tilde{b}^1 + 14\tilde{b}^2) - \\ & \quad - (5\tilde{a}^2(b)^2 + \delta)(\tilde{b}^2 - \tilde{b}^3) + \tilde{a}\gamma_2 + \Phi_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.128)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \delta &= b(b_{11} + b_{22} - b_{21}), \\ \gamma_1 &= b_1(b_{11} + b_{22} - b_{21}) + (b)^2(8b_2 - 3b_1) - b(b_{111} + b_{221} - b_{211}), \\ \gamma_2 &= b_2(b_{11} + b_{22} - b_{21}) + (b)^2(-8b_1 + 5b_2) - b(b_{112} + b_{222} - b_{212}), \\ \Phi_1 &= b_1(-b_{112} + b_{221}) + 8(b)^2b_{21} + b(b_{1121} - b_{2211}) - 5(b)^4, \\ \Phi_2 &= b_2(-b_{112} + b_{221}) + 8(b)^2b_{12} + b(b_{1122} - b_{2212}) + 3(b)^4. \end{aligned}$$

В соотношения (2.128) входят неизвестные функции \tilde{b}^1 , \tilde{b}^2 и \tilde{a} . Из них выразим \tilde{b}^1 и \tilde{b}^2 через \tilde{a} и, подставив найденные значения в (2.116') и (2.113'), выразим через \tilde{a} функции \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 и \tilde{c}_3 .

Далее продифференцируем соотношения (2.128), и заменим в полученных равенствах дифференциалы $d\tilde{b}^1$ и $d\tilde{b}^2$ с помощью (2.110'), а затем заменим величины \tilde{b}^1 , \tilde{b}^2 , \tilde{c}_1 , \tilde{c}_2 и \tilde{c}_3 с помощью полученных соотношений. В результате получим уравнения, содержащие только одну неизвестную функцию \tilde{a} . Так как решение исследуемой системы существует, то из этих соотношений найдется \tilde{a} .

В результате мы разрешили 4 уравнения из системы Σ , и в ней осталось 8 уравнений: (2.118), (2.100'), (2.101'), (2.106') и (2.120). Следовательно, произвол существования решения — 8 постоянных, см. [Кр-2]. ■

Следствие из теоремы 2.14. Напомним, что проективным преобразованием или коллинеацией называется такое преобразование, которое переводит прямые в прямые. Поэтому всякое проективное преобразование переводит грассманову ткань в грассманову. Известно, что группа проективных преобразований плоскости зависит от

восьми параметров. Следовательно, в силу единственности решения системы Σ , других преобразований, удовлетворяющих решению задачи, кроме проективных, не существует. То есть, *всякий локальный диффеоморфизм φ , переводящий грассманову ткань в грассманову, является проективным преобразованием.*

Отсюда вытекает следующее утверждение: *если ткань W грассманизуема, то локальные диффеоморфизмы, переводящие ее в грассманову ткань, отличаются не более чем на проективное преобразование.* Действительно, пусть локальные диффеоморфизмы ϑ и $\tilde{\vartheta}$ переводят грассманизуемую ткань W в грассмановы ткани GW и \tilde{GW} соответственно. Тогда композиция $\tilde{\vartheta} \circ \vartheta^{-1}$ переводит грассманову ткань GW в грассманову ткань \tilde{GW} . Согласно следствию, эта композиция должна быть некоторым проективным преобразованием φ , так что $\tilde{\vartheta} \circ \vartheta^{-1} = \varphi$ или $\tilde{\vartheta} = \varphi \circ \vartheta$, что и доказывает утверждение.

Поскольку между грассмановыми и прямолинейными тканями существует коррелятивное соответствие (см. § 1.9), то для прямолинейных тканей и эквивалентных им спрямляемых тканей будут верны утверждения, аналогичные теореме 14 и следствию из нее. Тогда аналог последнего утверждения есть в точности положительное решение проблемы, сформулированной в виде гипотезы в 1912 году Гронваллом (Gronwall), см. [Бл-1], стр. 62.

Замечание 1. Соотношения (2.128) и последующие, из которых находятся \tilde{b}^1 , \tilde{b}^2 и \tilde{a} , являются нелинейными, поэтому проективное преобразование φ , существование которого доказано в теореме, не является единственным. Этот факт хорошо известен в теории тканей, и имеются оценки максимально возможного числа решений, см., например, [Гол-2], [Пи-1].

Замечание 2. Уравнения (2.128) содержат ковариантные производные четвертого порядка от кривизны ткани, следовательно, они выражаются через производные седьмого порядка от функции ткани. При дифференцировании этих уравнений (что необходимо для нахождения величины a) получаются уравнения с производными восьмого порядка от функции ткани.

§ 2.8. Инвариантная характеристика спрямляемых три-тканей

Напомним, что прямолинейная три-ткань образована на плоскости тремя семействами прямых (не обязательно параллельных!). Геометрически прямолинейные ткани устроены весьма просто — каждое семейство прямых можно задать его огибающей. Ткань, эквивалентная прямолинейной ткани, называется спрямляемой. Основная проблема, на которую указал Бляшке еще в [Бл-1], состоит в том, чтобы охарактеризовать класс спрямляемых тканей с помощью дифференциально-топологических инвариантов ткани, к которым относится кривизна

ткани и ее ковариантные производные. С самого начала было ясно, что задача является весьма сложной, и в [Бл-1] Бляшке даже утверждал, что, по-видимому, это дело безнадежное, поскольку решение лежит в дифференциальной окрестности не ниже восьмого порядка. Тем не менее, в 1988 году В.В. Гольдбергу в определенном смысле удалось решить задачу: в работе [Го-1] он предъявил алгоритм, сводящий проблему к анализу системы из одного алгебраического уравнения и вполне интегрируемой системы из шести уравнений Пфаффа с шестью функциями от двух независимых переменных. В [ГоЛ-1] проблема сведена к пяти алгебраическим уравнениям высокой степени.

В этом параграфе дается краткое изложение решения проблемы спрямляемости, приведенное в [Го-1].

Основная идея работы состоит в том, что в области определения D три-ткани W рассматривается множество всех аффинных связностей, в которых линии этой ткани являются геодезическими. Ткань W является линеаризуемой тогда и только тогда, когда среди этих связностей существует плоская связность (то есть такая, форма кривизны которой равна нулю). В этом случае геодезические линии будут прямыми. Зародыш этой идеи можно увидеть в книге Бляшке и Бола [ББ-1], но отчетливо идея была высказана в 1973 году М.А. Акивисом на семинаре по классической дифференциальной геометрии в МГУ. Используя этот подход, А.В. Чакмазян в [Ча-1] провел часть вычислений, но ввиду их значительной сложности не сумел довести работу до конца.

Будем считать, как и выше, что три-ткань W в некоторой области D задана уравнениями (2.3), и ее структурные уравнения имеют вид (2.6), (2.8). Прежде всего напомним, что уравнения (2.6) и (2.8) можно рассматривать как уравнения некоторой аффинной связности Γ , которая теперь называется связностью Черна (§ 2.1). Действительно, структурные уравнения произвольной аффинной связности на двумерном многообразии имеют вид [Кр-1]:

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + R_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (2.129)$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \quad j, k, l, m = 1, 2, \quad (2.130)$$

где ω_j^i , R_{jk}^i и R_{jkl}^i соответственно формы связности, ее тензор кручения и тензор кривизны. Эти уравнения примут вид (2.6) и (2.8), если положить $\omega^i = \omega_i$ и $\omega_j^i = \delta_j^i \omega$, где δ_j^i — символ Кронекера. Тензор кручения связности Γ , определяемой уравнениями (2.6) и (2.8), равен нулю, а тензор кривизны имеет вид $R_{jkl}^i = -\frac{1}{2} b \varepsilon_{kl} \delta_j^i$, где b — кривизна ткани, $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$.

Наряду с кобазисом форм ω_1, ω_2 в касательном пространстве T_p точки p области D введем векторный базис так, чтобы вектор e_1 касался линии первого семейства, вектор e_2 касался линии второго

семейства ткани W . Так как семейства линий ткани выделяются уравнениями (2.3), то будут выполняться соотношения

$$\omega_1(e_1) = 0, \quad \omega_2(e_2) = 0. \quad (2.131)$$

Наложим на базисные векторы еще следующие условия:

$$\omega_1(e_2) = -\omega_2(e_1) = 1. \quad (2.132)$$

Тогда будет выполняться равенство

$$(\omega_1 + \omega_2)(e_1 + e_2) = 0,$$

то есть вектор $e_1 + e_2$ будет касаться линии третьего семейства ткани.

Векторные базисы, удовлетворяющие условиям сопряженности (2.131) и (2.132), называются адаптированными три-тканей W .

В адаптированных базисах произвольный вектор ξ из T_p записывается в одной из следующих форм:

$$\xi = \omega_1(\xi)e_2 - \omega_2(\xi)e_1 = \omega_2(\xi)e_3 - \omega_3(\xi)e_2 = \omega_2(\xi)e_1 - \omega_1(\xi)e_3. \quad (2.133)$$

Напомним, что линия $\gamma(t)$ называется *геодезической в связности* Γ , если на $\gamma(t)$ существует параллельное (относительно связности Γ) векторное поле, касательное к $\gamma(t)$. Координаты касательного вектора $\xi(t)$ геодезической линии удовлетворяют уравнениям

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^i = \Theta \xi^i, \quad (2.134)$$

где Θ — некоторая форма Пфаффа. В случае связности Черна в силу специального строения форм ω_j^i эти уравнения принимают вид:

$$d\xi^1 + \xi^1 \omega = \Theta \xi^1, \quad d\xi^2 + \xi^2 \omega = \Theta \xi^2. \quad (2.135)$$

Сложив их, получим

$$d(\xi^1 + \xi^2) + (\xi^1 + \xi^2)\omega = \Theta(\xi^1 + \xi^2).$$

Из этих уравнений видно, что линии ткани W являются геодезическими относительно связности Черна Γ .

Рассмотрим в области D определения ткани W пучок $\Gamma(T)$ аффинных связностей, определяемых формами $\{\omega^i, \omega_j^{*i}\}$, где

$$\omega_j^{*i} = \omega_j^i + T_{jk}^i \omega^k, \quad (2.136)$$

а $T_{jk}^i = T_{kj}^i$ — так называемый тензор аффинной деформации. Все связности в этом пучке, как легко убедиться, не имеют кручения.

Верны следующие утверждения.

Лемма 2.8. *Линии ткани W будут геодезическими для всех связностей пучка $\Gamma(T)$ тогда и только тогда, когда*

$$T_{11}^2 = 0, \quad T_{22}^1 = 0, \quad T_{11}^1 + T_{22}^2 - 2(T_{12}^1 + T_{12}^2) = 0. \quad (2.137)$$

□ Уравнение геодезических (2.134) для связности $\Gamma(T)$ примет вид:

$$d\xi^i + \xi^j \omega_j^* = \Theta \xi^i,$$

или

$$d\xi^i + T_{jk}^i \xi^j \omega^k = (\Theta - \omega) \xi^i. \quad (2.138)$$

Так как линии ткани должны быть геодезическими относительно этой связности, то уравнение (2.138) должно удовлетворяться в случаях а) $\xi^1 = 0$, ξ^2 любое; б) $\xi^2 = 0$, ξ^1 любое; в) $\xi^1 = -\xi^2$. Например, в первом случае в силу (2.133) уравнения (2.138) дают:

$$T_{2k}^1 \xi^2 \omega^k(e_1) = 0.$$

В силу условий сопряженности (2.131) и (2.132) отсюда следует $T_{22}^1 = 0$. Остальные соотношения получаются аналогично. ■

Формы

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i - \omega_j^k \wedge \omega_k^i \quad (2.139)$$

называются, как известно, формами кривизны аффинной связности [Кр-1].

Непосредственным вычислением доказывается

Лемма 2.9. *Формы кривизны связностей пучка $\Gamma(T)$ вычисляются по формуле*

$$\overset{*}{\Omega}_j^i = \Omega_j^i + \nabla T_{jk}^i \wedge \omega^k - T_{mk}^i T_{jl}^m \omega^l \wedge \omega^k, \quad (2.140)$$

где

$$\nabla T_{jk}^i = dT_{jk}^i - T_{mk}^i \omega_j^m - T_{jm}^i \omega_k^m + T_{jk}^m \omega_m^i. \quad (2.141)$$

Теорема 2.15. *Три-ткань W линеаризуема тогда и только тогда, когда в пучке связностей $\Gamma(T)$ существует связность, для которой все линии ткани являются геодезическими и форма кривизна которой равна нулю:*

$$\overset{*}{\Omega}_j^i = 0. \quad (2.142)$$

□ Действительно, если ткань линеаризуема, то она эквивалентна прямолинейной ткани на плоскости, которая представляет собой многообразие с плоской аффинной связностью. Обратно, если связность плоская, то слои ткани есть прямые линии как геодезические линии этой плоской связности, и, следовательно, эта ткань линеаризуема. ■

Для удобства перепишем соотношения (2.137) в иной форме:

$$T_{11}^2 = 0, \quad T_{22}^1 = 0, \quad T_{12}^2 = \lambda_1, \quad T_{12}^1 = \lambda_2, \quad T_{11}^1 = 2\lambda_1 + \mu, \quad T_{22}^2 = 2\lambda_2 - \mu. \quad (2.143)$$

Кроме того, уравнения (2.11), (2.13) и последующие, им аналогичные, перепишем, учитывая соотношения (2.12) и ему подобные, следующим образом:

$$\nabla b_1 = b_{11} \omega^1 + (b_{12} - b^2) \omega^2, \quad \nabla b_2 = (b_{12} + b^2) \omega^1 + b_{22} \omega^2, \quad (2.144)$$

$$\begin{aligned}\nabla b_{11} &= b_{111}\omega^1 + b_{112}\omega^2, & \nabla b_{12} &= (b_{112} + 5b_1b)\omega^1 + (b_{122} - 5b_2b)\omega^2, \\ \nabla b_{22} &= b_{122}\omega^1 + b_{222}\omega^2.\end{aligned}\tag{2.145}$$

Доказательство следующей теоремы мы не приводим, оно имеется в [Г0-1].

Теорема 2.16 (основная). *Необходимое и достаточное условие линеаризуемости состоит в том, что кривизна ткани b и ее ковариантные производные b_i, b_{ij}, b_{ijk} связаны линейным соотношением:*

$$\begin{aligned}b_{112} - b_{122} - \mu(b_{11} + b_{22}) + b_{12}(-\mu - 4\lambda_1 + 4\lambda_2) + \\ + b_1[-4\lambda_{12} + 2\lambda_{21} - \mu(4\lambda_1 + 2\lambda_2) - 2\lambda_2(\lambda_1 - 2\lambda_2) - 2b] + \\ + b_2[-2\lambda_{12} + 4\lambda_{21} - \mu(2\lambda_1 + 4\lambda_2) - 2\lambda_1(2\lambda_1 - \lambda_2) - 2b] + \\ + b\{-\mu^3 + 4\mu^2(\lambda_2 - \lambda_1) - 4\mu[(\lambda_1)^2 + (\lambda_2)^2 - \lambda_1\lambda_2] + \\ + 18\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_{12}(26\lambda_2 - 7\mu) - \lambda_{21}(26\lambda_1 + 7\mu)\} = 0.\end{aligned}\tag{2.146}$$

Здесь величины λ_{12} и λ_{21} суть ковариантные производные величин λ_1 и λ_2 , точнее, имеют место уравнения

$$\begin{aligned}\nabla \lambda_1 &= \lambda_1(\lambda_1 + \mu)\omega^1 + \lambda_{12}\omega^2, \\ \nabla \lambda_2 &= \lambda_2(\lambda_2 - \mu)\omega^2 + \lambda_{21}\omega^1, \\ \nabla \mu &= (2\lambda_{21} - \lambda_{12} - b - \lambda_1\lambda_2)\omega^1 + (-2\lambda_{12} + \lambda_{21} - b + \lambda_1\lambda_2)\omega^2,\end{aligned}\tag{2.147}$$

где

$$\nabla \lambda_i = d\lambda_i - \lambda_i\omega, \quad \nabla \mu = d\mu - \mu\omega, \quad \nabla \lambda_{ij} = d\lambda_{ij} - 2\lambda_{ij}\omega.$$

К этим уравнениям следует присоединить еще условия их интегрируемости:

$$\begin{aligned}\nabla \lambda_{12} &= [\mu\lambda_{12} + \lambda_1(-2b + \lambda_{21} + \lambda_1\lambda_2)]\omega^1 + \\ &+ [\lambda_{122} + 2\mu\lambda_{12} + \lambda_1(\lambda_{21} - 4b + \lambda_1\lambda_2) + b_1 + \frac{1}{2}b\mu]\omega^2,\end{aligned}\tag{2.148}$$

$$\begin{aligned}\nabla \lambda_{21} &= [-\lambda_{122} - 2\mu\lambda_{21} + \lambda_2(\lambda_{12} + 4b + \lambda_1\lambda_2) - \\ &- b_2 + \frac{1}{2}b\mu]\omega^1 + [-\mu\lambda_{21} + \lambda_2(2b + \lambda_{12} + \lambda_1\lambda_2)]\omega^2, \\ \nabla \lambda_{122} &= A_i\omega^i,\end{aligned}\tag{2.149}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}A_1 &= \lambda_{122}(\mu + \lambda_1) + \lambda_{12}(5\lambda_1\lambda_2 + \frac{3}{2}b) - \lambda_{21}[2(\lambda_1)^2 + 2\lambda_{12} + \lambda_1\mu + b] + \\ &+ (\lambda_1)^2\lambda_2(\lambda_2 - 4\mu - 2\lambda_1) + b[\frac{1}{2}\mu^2 + 4(\lambda_1)^2 - \frac{3}{2}\lambda_1\lambda_2 + \frac{7}{2}\lambda_1\mu + \frac{1}{2}b] - \\ &- b_{11} + b_1(\frac{1}{2}\mu + 4\lambda_1) - \lambda_1b_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 = & \lambda_{122}(-\mu + \lambda_2) - \lambda_{212}(5\lambda_1\lambda_2 - \frac{3}{2}b) + \lambda_{12}[2(\lambda_2)^2 + 2\lambda_{21} - \lambda_2\mu - b] - \\
& - \lambda_1(\lambda_2)^2(\lambda_1 + 4\mu - 2\lambda_2) + b[\frac{1}{2}\mu^2 + 4(\lambda_2)^2 - \frac{3}{2}\lambda_1\lambda_2 - \frac{7}{2}\lambda_2\mu - \frac{1}{2}b] - \\
& - b_{22} + b_2(-\frac{1}{2}\mu + 4\lambda_2) - \lambda_2 b_1. \quad (2.150)
\end{aligned}$$

Найденное условие линейаризуемости не является в определенном смысле конструктивным, поскольку содержит кроме относительных инвариантов b, b_i, b_{ij}, b_{ijk} ткани еще и величины $\mu, \lambda_i, \lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$, которые удовлетворяют вполне интегрируемой системе дифференциальных уравнений (2.147), (2.148), (2.149). Существует два способа выяснить, используя найденные соотношения, является ли заданная ткань W линейаризуемой.

Первый способ: найти относительные инварианты заданной ткани, подставить их в уравнения (2.147), (2.148) и (2.149), проинтегрировать полученную систему, затем подставить найденные функции $\mu, \lambda_i, \lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$ в соотношение (2.146). Если оно выполняется тождественно, ткань линейаризуема.

Второй способ позволяет исключить функции $\mu, \lambda_i, \lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$, не производя интегрирования. Продифференцируем соотношение (2.146) и в полученном уравнении приравняем нулю коэффициенты при формах ω^1 и ω^2 . Это даст два новых соотношения на указанные 6 величин и на относительные инварианты ткани, но кроме того, в них появятся инварианты b_{ijkl} следующей дифференциальной окрестности (седьмого порядка).

Далее аналогичным образом дифференцируем два найденных уравнения и получаем еще 4 уравнения, содержащие те же величины и еще инварианты ткани из дифференциальной окрестности восьмого порядка — b_{ijklm} . Таким образом, вместе с исходным уравнением (2.146) получится всего 7 уравнений, содержащих 6 величин $\mu, \lambda_i, \lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$. Если ткань является линейаризуемой, то после их исключения должно получиться тождество.

Заметим, что полученные описанным образом уравнения являются алгебраическими степени не выше 5 относительно переменных $\mu, \lambda_i, \lambda_{ij}, \lambda_{ijk}$, поэтому исключение переменных из них (даже если они найдены!) представляет собой сложную алгебраическую задачу. Эта задача была решена в [Гол-1], где авторы не дважды, а трижды продолжили уравнение (2.146). После исключения «лишних» переменных они получили пять алгебраических уравнений, коэффициенты которых выражаются через 1040 инвариантов ткани, принадлежащих дифференциальной окрестности девятого порядка, причем среди них только 18 инвариантов восьмого порядка. Тождественное обращение инвариантов в нуль дает необходимое и достаточное условие линейаризуемости.

В заключение параграфа заметим, что столь же интересной нам представляется задача выразить кривизну прямолинейной ткани через проективные инварианты огибающих семейств прямых, составляющих эту ткань.

§ 2.9. Инвариантные формы нерегулярной три-ткани

Из формул (2.16) и (2.18) получаются следующие равенства, связывающие формы эквивалентных нерегулярных тканей W и \tilde{W} :

$$\sqrt{b}\omega_1 = \sqrt{\tilde{b}}\tilde{\omega}_1, \quad \sqrt{b}\omega_2 = \sqrt{\tilde{b}}\tilde{\omega}_2. \quad (2.151)$$

Это обстоятельство дает повод назвать формы

$$\Omega_1 = \sqrt{b}\omega_1, \quad \Omega_2 = \sqrt{b}\omega_2 \quad (2.152)$$

инвариантными формами три-ткани (см. [Бл-1], стр. 37). Тогда из (2.151) получается такое утверждение: *нерегулярные три-ткани W и \tilde{W} эквивалентны тогда и только тогда, когда их соответствующие инвариантные формы равны.*

Продифференцируем равенства (2.152) и воспользуемся уравнениями (2.10), (2.6) и обозначениями (2.19). После преобразований придем к уравнениям:

$$d\Omega_1 = -\frac{1}{2}c_2\Omega_1 \wedge \Omega_2, \quad d\Omega_2 = -\frac{1}{2}c_1\Omega_2 \wedge \Omega_1. \quad (2.153)$$

В эти уравнения, в отличие от аналогичных структурных уравнений (2.6), входят инвариантные формы и абсолютные инварианты ткани. Продолжая уравнения (2.153) (то есть дифференцируя их внешним образом и пользуясь леммой Картана), получим уравнения

$$dc_1 = C_{11}\Omega_1 + C_{12}\Omega_2, \quad dc_2 = C_{21}\Omega_1 + C_{22}\Omega_2. \quad (2.154)$$

Назовем величины C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} *инвариантными производными* величин c_1 и c_2 .

Предложение 2.17. *Инвариантные производные C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} являются абсолютными инвариантами ткани W .*

□ Согласно обозначениям (2.19), $c_1 = b_1 b^{-3/2}$, $c_2 = b_2 b^{-3/2}$. Продифференцируем эти равенства внешним образом с помощью уравнений (2.11). Используя обозначения (2.19), после преобразований придем к уравнениям (2.154), где

$$\begin{aligned} C_{11} &= c_{11} - \frac{3}{2}(c_1)^2, & C_{12} &= c_{12} - \frac{3}{2}c_1c_2, \\ C_{21} &= c_{21} - \frac{3}{2}c_1c_2, & C_{22} &= c_{22} - \frac{3}{2}(c_2)^2. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Как видно, величины C_{11} , C_{12} , C_{21} , C_{22} выражаются только через абсолютные инварианты ткани. ■

С помощью (2.12) устанавливаем, что абсолютные инварианты C_{12} и C_{21} связаны соотношением

$$C_{12} - C_{21} = 2. \quad (2.156)$$

Заметим, что уравнения (2.153) и (2.154) получаются из структурных уравнений (2.6) и (2.11), если в последних положить $b = 1$. Это вытекает из того обстоятельства, что в каноническом корепере ($b = 1$) относительные инварианты становятся абсолютными (см. § 2.1).

Используя инвариантные формы три-ткани, найдем инвариантную характеристику тканей, допускающих однопараметрическое семейство автоморфизмов (§ 2.5), а заодно получим еще одно доказательство теоремы 2.13.

Напомним, что ткани с однопараметрическим семейством автоморфизмов характеризуются тем, что абсолютные инварианты ткани являются постоянными вдоль траекторий семейства автоморфизмов. Это означает, что все инварианты являются функциями от некоторой функции двух переменных, обозначим ее $\tau(x, y)$, причем траектории семейства автоморфизмов имеют вид $\tau(x, y) = \text{const}$. Отсюда, в свою очередь, вытекает, что дифференциалы всех инвариантов пропорциональны $d\tau(x, y)$, то есть пропорциональны между собой, что можно записать в виде

$$dc_1 \wedge dc_2 = 0, \quad dc_1 \wedge dC_{11} = 0, \quad dc_1 \wedge dC_{12} = 0, \quad dc_1 \wedge dC_{22} = 0, \dots \quad (2.157)$$

Итак, если ткань допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов, то на ней выполняются соотношения (2.157).

Обратно, верно

Предложение 2.18. *Если на некоторой ткани выполняются первые 3 соотношения (2.157), то выполняются и остальные. Такая ткань допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов.*

□ Из первых трех равенств (2.157) следует пропорциональность дифференциалов dc_1 , dc_2 , dC_{11} , dC_{12} . Из соотношения (2.156) получаем $dC_{12} = dC_{21}$. Далее, подставляя в первое равенство (2.157) значения dc_1 и dc_2 из (2.154), получим соотношение на величины $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$, обозначим его R . Продифференцировав его, получим пропорциональность дифференциалов dC_{22} и dC_{11} . Таким образом, дифференциалы инвариантов $c_1, c_2, C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ будут пропорциональны друг другу.

Но пропорциональность дифференциалов двух функций означает, что эти функции выражаются одна через другую, или, что более общо, они обе выражаются через некоторую третью функцию. Таким образом, полученный результат означает, что перечисленные инварианты являются функциями некоторой одной функции, обозначим ее $\tau(x, y)$.

Теперь вспомним, что в дифференциальной окрестности следующего, шестого порядка имеется 4 независимых инварианта. Второе и третье равенства (2.157) дают на эти 4 инварианта 2 соотношения. Если продифференцировать равенство R , получим еще два. Итак, на 4 инварианта получим 4 соотношения (независимых, вообще говоря), причем первые 2 из них содержат инварианты предыдущей окрестности, выражающиеся через $\tau(x, y)$. Отсюда следует, что все инварианты шестой дифференциальной окрестности также являются функциями переменной $\tau(x, y)$. По индукции получаем, что инварианты всех следующих дифференциальных окрестностей рассматриваемой ткани также являются функциями $\tau(x, y)$.

Рассмотрим каноническое разложение координатной лупы этой ткани. Оно имеет вид (1.48), (1.49). Так как коэффициенты канонического разложения (начиная с членов третьего порядка) определены с точностью до общего числового множителя, то они могут быть выражены через инварианты ткани, то есть, в конечном счете, через функцию $\tau(x, y)$. Поэтому та часть канонического разложения, которая начинается с членов третьего порядка, есть функция от $\tau(x, y)$, то есть разложение (1.48) имеет вид $z = x + y + g(\tau)$. Это и будет уравнение ткани, допускающей однопараметрическое семейство автоморфизмов, причем траектории автоморфизма определяются уравнениями $\tau = \text{const}$. Если выбрать локальные координаты так, чтобы траектории автоморфизмов определялись уравнениями $x - y = \text{const}$, то уравнение ткани примет вид (2.94). ■

Следствие. Первые три соотношения (2.157) дают необходимое и достаточное условие того, что ткань допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов. Это условие является инвариантным, поскольку записано в инвариантной форме. Как видно, найденное условие лежит в окрестности шестого порядка. Заметим, что вместо второго и третьего соотношений (2.157) можно взять два других аналогичных, например, $dc_1 \wedge dC_{21} = 0$, $dc_1 \wedge dC_{22} = 0$.

ЗАДАЧИ

- 2.1. Докажите теорему 2.3.
- 2.2. Найдите число независимых абсолютных инвариантов в дифференциальной окрестности порядка n три-ткани.
- 2.3. Выведите соотношение (2.12).
- 2.4. Если некоторая ковариантная производная кривизны равна нулю, то равны нулю и все ковариантные производные от этой производной.
- 2.5. У регулярной три-ткани форма ω есть полный дифференциал.
- 2.6. Выведите формулу (1.14).

Указание: обозначьте $\omega_1 = F_1 du_1$, $\omega_2 = F_2 du_2$, $\omega_3 = F_3 du_3$, где $F_1 = \frac{\partial F}{\partial u_1}$ и т.д., и запишите уравнения (2.6), где

$$\omega = \frac{F_{23}}{F_2 F_3} F_1 du_1 + \frac{F_{13}}{F_1 F_3} F_2 du_2 + \frac{F_{12}}{F_1 F_2} F_3 du_3.$$

Затем продифференцируйте внешним образом форму ω .

2.7. Пользуясь формулой (1.14), найдите кривизну прямолинейной три-ткани, заданной уравнением (1.34) или (1.34'), см. задачу 1.47.

2.8. Проверьте следующую гипотезу: если две какие-либо ковариантные производные (вообще говоря, разных порядков) от кривизны ткани равны нулю, то и кривизна равна нулю.

Указание: сначала рассмотрите случай, когда равны нулю ковариантные производные одного порядка.

2.9. Множество преобразований вида (2.91) при фиксированных α , β и γ замкнуто относительно композиции.

2.10. Опишите более детально автоморфизмы три-ткани из примера 2, § 2.5, в случае, если t касается Q .

2.11. Ткань, заданная уравнением (2.94), является регулярной тогда и только тогда, когда f удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$f'''(f')^2 - f''' - 2f'(f'')^2 = 0. \quad (2.139)$$

Указание: воспользуйтесь условием Сен-Робера. Покажите, что решения уравнения (2.139) имеют вид:

$$z = x + y + \frac{1}{a} \ln \cosh(a(x - y) + b) + c,$$

где a, b, c — постоянные. Приведите последнее уравнение подходящим допустимым преобразованием к виду $z = x + y$.

2.12. Докажите, что произвольный пучок прямых с вершиной на прямой $A_0 A_2$ на грассмановой ткани GW задается уравнениями

$$\Theta_{r+1}^i + \lambda \Theta_0^i = 0, \quad d\lambda + \lambda(\Theta_0^0 - \Theta_{r+1}^{r+1}) = 0.$$

Указание: условие неподвижности точки $A_2 + \lambda A_0$ имеет вид:

$$d(A_2 + \lambda A_0) = \Theta_2^2(A_2 + \lambda A_0).$$

2.13. Выведите уравнения (2.111).

2.14. Если $A = (A_\alpha)$ — автотопия в обратимой лупе Q (см. зад. 1.14), то автотопиями будут и $(IA_1 I, A_3, A_2)$, $(A_3, IA_2 I, A_1)$, $(A_2, IA_3 I, IA_1 I)$, $(IA_3, A_1, IA_2 I)$, $(IA_2 I, IA_1 I, IA_3 I)$.

Докажем, например, что $(IA_1 I, A_3, A_2)$ — автотопия. Из определения автотопии (1.18) имеем $A_1(x^{-1}) \cdot A_2(xy) = A_3(y)$, откуда $(A_1(x^{-1}))^{-1} = A_2(xy) \cdot A_3^{-1}(y)$. С другой стороны, используя определение обратимой лупы и свойство 3) из задачи 1.14, находим:

$$(IA_1 I)(x)A_3(y) = (A_1(x^{-1}))^{-1}A_3(y) = (A_2(xy) \cdot A_3^{-1}(y))A_3(y) = A_2(xy),$$

что и требовалось доказать.

2.15. Докажите, что в лупе Муфанг имеются автотопии вида:

а) $(L_y, R_y, L_y R_y)$;

б) $(L_y, I L_y^{-1} I, L_y R_y)$, $(I R_y^{-1}, R_y, L_y R_y)$,

в) $(L_y R_y, L_y^{-1}, L_y)$, $(R_y^{-1}, L_y R_y, R_y)$, где, как и выше, $I(x) = x^{-1}$.

У к а з а н и я . а) следует непосредственно из тождества Муфанг; б) следует из задач 1.16; в) следует из задачи 2.15.

2.16. Пользуясь формулами (8) из Приложения 1, найдите условия на ковариантные производные кривизны ткани, в координатных лупах которой выполняется одно из тождеств, указанных в задаче 1.46.

У к а з а н и е : Примените формулы (8) к соотношениям на коэффициенты разложения (7) из Приложения 1, найденным в задаче 1.46.

2.17. Рассмотрим ткань W , у которой только один из инвариантов c_1 и c_2 является постоянным, пусть $c_1 = \text{const}$. Тогда из (2.154) получаем $C_{11} = C_{12} = 0$, и из (2.156) следует $C_{21} = -2$. Из второго равенства (2.154) находим

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2}(dc_2 - C_{22}\Omega_2). \quad (2.158)$$

С учетом этого равенства второе уравнение (2.153) принимает вид

$$d\Omega_2 = -\frac{1}{2}c_1\Omega_2 \wedge (-\frac{1}{2}dc_2) = \Omega_2 \wedge d(-\frac{1}{4}c_1 c_2).$$

Отсюда находим Ω_2 :

$$\Omega_2 = e^{-\frac{1}{4}c_1 c_2} dv. \quad (2.159)$$

С помощью полученных соотношений преобразуем теперь первое уравнение (2.153):

$$\begin{aligned} d\Omega_1 &= -\frac{1}{2}c_2\Omega_1 \wedge \Omega_2 = -\frac{1}{2}c_2(-\frac{1}{2}(dc_2 - C_{22}\Omega_2)) \wedge \Omega_2 = \\ &= -\frac{1}{4}c_2 e^{-\frac{1}{4}c_1 c_2} dc_2 \wedge dv = d\Theta \wedge dv, \end{aligned}$$

где обозначено

$$\Theta = -\left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{4}{c_1^2}\right) e^{-\frac{1}{4}c_1 c_2}. \quad (2.160)$$

Интегрируя, находим:

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2}(\Theta dv - v d\Theta). \quad (2.161)$$

Уравнения семейств кривых, образующих рассматриваемую ткань, имеют вид (2.3) или, в соответствии с обозначениями (2.152),

$$\Omega_1 = 0, \quad \Omega_2 = 0, \quad \Omega_1 + \Omega_2 = 0.$$

Из (2.161) находим уравнение первого семейства: $\Theta = xv$, или (см. (2.160)),

$$xv = -\left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{4}{c_1^2}\right) e^{-\frac{1}{4}c_1 c_2}, \quad (2.162)$$

где постоянная x — параметр первого семейства. Из (2.159) находим уравнения линий второго семейства:

$$v = y^{-1}, \quad (2.163)$$

где постоянная y — параметр второго семейства.

Дифференциальное уравнение третьего семейства имеет вид $\Omega_1 + \Omega_2 = 0$, или, с учетом обозначений (2.159), (2.161) и (2.160),

$$2e^{-\frac{1}{4}c_1 c_2} dv - \left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{4}{c_1^2}\right) e^{-\frac{1}{4}c_1 c_2} - v\left(\frac{1}{4}c_2 e^{-\frac{1}{4}c_1 c_2} dc_2\right) = 0.$$

Проинтегрировав, получим уравнение

$$zv = c_1^{2c_1^2-4} \frac{e^{-\frac{1}{4}c_1 c_2}}{(c_1 c_2 + 4 - 2c_1^2)^{2c_1^2-4}}, \quad (2.164)$$

здесь z — параметр третьего семейства линий ткани W .

Исключив из полученных уравнений семейств локальные координаты v и c_2 , получим уравнение ткани в виде $\frac{z}{y} = f\left(\frac{x}{y}\right)$. Доказано

Предложение 2.19. *Ткани, на которых один из абсолютных инвариантов c_1 или c_2 является постоянным, существуют. Такая ткань эквивалентна ткани, высекаемой координатными плоскостями на некоторой конической поверхности, и допускает однопараметрическое семейство автоморфизмов вида $x \rightarrow ax, y \rightarrow ay, z \rightarrow az$. В некоторых локальных координатах уравнения семейств этой ткани имеют вид (2.162)–(2.164).*

2.18. Разверните равенства (2.157) с помощью уравнений (2.154) и им аналогичных, и найдите соотношения на инварианты следующих дифференциальных окрестностей.

2.19. Найдите формулу для кривизны ткани, заданной уравнениями (1.3).

2.20. Запишите соотношения (2.52) и (2.65) с помощью абсолютных инвариантов ткани (см. (2.19)).

2.21. С помощью (2.19) из соотношений (2.70) и (2.73) найдите абсолютные инварианты рассматриваемой ткани и попробуйте выяснить их геометрический смысл.

2.22. Из теорем 1.32 и 2.14 вытекает следующее предложение: всякий гомеоморфизм плоскости, переводящий прямолинейную трикань в прямолинейную, есть проективное преобразование.

КРУГОВЫЕ ТРИ-ТКАНИ

Три-ткань, образованную тремя пучками окружностей мы называем *круговой тканью*, или, короче, *C-тканью*. Круговая ткань, не является, вообще говоря, регулярной. В 1953 году на одной из своих лекций в Стамбуле Бляшке привел пример регулярной круговой ткани (пример 6 из § 1.2 — три эллиптических пучка с попарно совпадающими вершинами) и предложил найти все классы регулярных тканей, образованных пучками окружностей. По существу, пишет он в своей книге [Бл-1], задача сводится к некоторому алгебраическому уравнению. Но алгебраическое уравнение, о котором говорил Бляшке, оказалось слишком большой степени и слишком сложным для анализа, поэтому указанный им способ решения не позволил решить задачу полностью. В этой главе мы приводим ее полное решение, основанное на теореме о границах регулярной три-ткани (§ 1.3).

§ 3.1. Уравнение круговой три-ткани. Границы. Интерпретация Дарбу

Уравнения пучков окружностей, образующих *C-ткань* (обозначим их λ_i , $i = 1, 2, 3$), запишем в виде

$$S_{11} + u_1 S_{12} = 0, \quad S_{21} + u_2 S_{22} = 0, \quad S_{31} + u_3 S_{32} = 0, \quad (3.1)$$

где S_{i1} и S_{i2} — базисные окружности пучка λ_i , u_i — параметр этого пучка. Например, уравнение базисной окружности S_{i1} записывается в виде:

$$S_{i1} \equiv a_{i1}(x^2 + y^2) + b_{i1}x + c_{i1}y + d_{i1} = 0.$$

Исключая из уравнений (3.1) координаты x и y , найдем уравнение круговой ткани:

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_i &= d_{i1} + u_i d_{i2}, & a_i &= a_{i1} + u_i a_{i2}, & b_i &= b_{i1} + u_i b_{i2}, \\ c_i &= c_{i1} + u_i c_{i2}, & & & i &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Как видно, это уравнение шестой степени, квадратичное по каждому аргументу.

Пучок окружностей образует слоение на всей плоскости, за исключением вершин эллиптических и параболических пучков. Поэтому область определения D круговой ткани есть плоскость без вершин пучков и граничных кривых Γ_i , в которых касаются окружности разных семейств.

Граничные кривые Γ_i определяются уравнениями (1.4), где, согласно (3.1), $u_i = -S_{i1}/S_{i2}$. Подсчитав определители в (1.4), можно установить (предлагаем читателю сделать самостоятельно), что каждая из граничных кривых является кривой четвертого порядка специального вида:

$$\begin{aligned} A(x^2 + y^2)^2 + Bx(x^2 + y^2) + Cy(x^2 + y^2) + \\ + Dx^2 + Ey^2 + Fxy + Gx + Hy + L = 0. \end{aligned}$$

Круговые ткани удобно описывать с помощью отображения Дарбу. Окружности, заданной уравнением

$$S \equiv a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0, \quad (3.3)$$

ставится в соответствие точка с однородными координатами (a, b, c, d) в проективном пространстве \mathbb{P}^3 . Поскольку радиус окружности (3.3) вычисляется по формуле

$$R^2 = \frac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2},$$

то точки — окружности нулевого радиуса — изображаются в \mathbb{P}^3 точками овальной квадрики $b^2 + c^2 - 4ad = 0$, которая называется квадрикой Дарбу и обозначается Q . При этом окружности вещественного и чисто мнимого радиуса изображаются соответственно точками внешней и внутренней по отношению к квадрике Дарбу области пространства \mathbb{P}^3 ; пучки окружностей — прямыми в \mathbb{P}^3 , связки окружностей — плоскостями. Гиперболические и эллиптические пучки изображаются, соответственно, прямыми, пересекающимися и не пересекающимися квадрику Дарбу; параболические пучки — прямыми, касающимися

квадрики Дарбу; параболические связки окружностей — плоскостями, касающимися квадрики Дарбу; ортогональные окружности — точками, сопряженными относительно квадрики Дарбу. Точки, принадлежащие окружности C , изображаются точками квадрики Дарбу, лежащими на пересечении этой квадрики с плоскостью, полярно сопряженной образу точки C относительно Q , и т.д.

Три пучка окружностей, образующих круговую три-ткань, изображаются тремя прямыми (обозначим их ℓ_i , $i = 1, 2, 3$), а три окружности ткани из разных пучков, проходящие через точку p , изображаются тремя точками прямых ℓ_i , лежащими в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу в образе точки p .

Замечание. При отображении Дарбу прямые ($a = 0$) отображаются в точки плоскости $a = 0$, которая касается квадрики Дарбу в точке $S_\infty(0, 0, 0, d)$. У этой точки нет прообраза на плоскости, поэтому образ плоскости при отображении Дарбу есть Q/S_∞ . Если дополнить плоскость новой точкой, в которой, по определению, пересекаются все прямые, то ее образом и будет точка S_∞ . Дополненная плоскость будет уже компактным многообразием, гомеоморфным овальной квадрике Дарбу. Она называется конформной плоскостью. Геометрию окружностей обычно рассматривают на конформной плоскости.

Вернемся к граничным кривым Γ_i .

Теорема 3.1. *Граничная кривая двух пучков является вещественной кривой.*

□ Пусть оба пучка эллиптические, обозначим вершины одного A и B , второго C и D . Проведем в первом пучке окружность S через точки A , B и C . Если точка D находится на окружности S , то тогда S принадлежит обоим пучкам и является частью граничной кривой. Пусть теперь точка D не лежит на S . Тогда через нее проходит окружность S_1 , которая касается окружности S в точке C (это доказывается простым построением). Следовательно, точка C принадлежит граничной кривой. Рассмотрим в первом пучке окружность S' , близкую к S , и такую чтобы обе точки C и D лежали либо вне, либо внутри S' . Тогда во втором пучке найдется окружность, которая касается S' . Аналогичные рассуждения можно провести и для любой из точек A , B и D . Отсюда вытекает, во-первых, что все 4 точки принадлежат граничной кривой, а во-вторых, что в их окрестности есть и другие граничные точки, то есть граничная кривая вещественна.

Предположим, один из пучков эллиптический, второй гиперболический. Обозначим через ℓ_1 и ℓ_2 прямые проективного пространства, соответствующие этим пучкам в отображении Дарбу. Пусть M — произвольная точка прямой ℓ_1 , проведем через нее пучок касательных к квадрике Дарбу Q . Так как прямая ℓ_2 пересекает Q , то она пересекает и конус касательных в некоторых точках A и B . Тогда прямые AM и BM касаются Q , и точки касания есть образы граничных точек, в которых касаются окружности пучков — прообразы точек A и M , B

и M . Если двигать точку M по прямой ℓ_1 , то точки касания будут описывать образ граничной кривой.

Ясно, что последние рассуждения годятся и для всех остальных случаев: обе прямые пересекают квадрику Дарбу (оба пучка гиперболические), одна пересекает квадрику, вторая ее касается, обе касаются квадрики и т.д. ■

§ 3.2. Регулярные круговые три-ткани

Разными авторами в разное время были найдены различные классы регулярных круговых тканей см. библиографию в [Л-10] и [ЛШ-9]. Перечислим их, следуя работе В. Б. Лазаревой [Л-10], где эти классы описаны также и в терминах интерпретации Дарбу.

Классификация регулярных круговых три-тканей

Напомним, что пучки окружностей изображаются в пространстве \mathbb{P}^3 прямыми ℓ_i .

Класс 0. Три пучка окружностей принадлежат одной связке. (Прямые ℓ_i принадлежат одной плоскости).

Класс 1.1. Три гиперболических пучка с общей мнимой окружностью. В каждом пучке есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков. (Прямые ℓ_i проходят через одну точку внутри квадрики Q и являются ребрами тетраэдра, автополярного относительно Q).

Класс 1.2. Два эллиптических пучка и один гиперболический с общей вещественной окружностью. В каждом пучке есть окружность, ортогональная всем окружностям двух других пучков. (Прямые ℓ_i , две из которых не пересекают квадрику Q , а одна пересекает, проходят через одну точку вне квадрики Q и являются ребрами тетраэдра, автополярного относительно Q).

Класс 2. Два пучка ортогональны, в каждом из них есть окружность, принадлежащая третьему пучку. (Прямые ℓ_1 и ℓ_2 сопряжены относительно квадрики Дарбу, а прямая ℓ_3 их пересекает).

Класс 3. Два ортогональных параболических пучка, а третий — гиперболический, причем одна из его вершин совпадает с общей вершиной параболических пучков. (Прямые ℓ_1 и ℓ_2 сопряжены и касаются квадрики Дарбу в точке A , через которую проходит третья прямая).

Класс 4 (пример Бляшке). Все пучки эллиптические и определяются парами вершин (A, B) , (B, C) , (C, A) . (Прямые ℓ_i проходят через одну точку, а плоскости, содержащие пары этих прямых, касаются квадрики Дарбу).

Класс 5. Два эллиптических пучка определяются точками A, B и B, C , нулевые окружности третьего — гиперболического — пучка есть точки A и C . (Прямые ℓ_1, ℓ_2 и прямая ℓ_3 , сопряженная прямой ℓ_3 относительно квадрики Дарбу, пересекаются в одной точке. Плоско-

сти, определяемые парами прямых ℓ_1 и ℓ_2 , ℓ_1 и $\tilde{\ell}_3$, ℓ_2 и $\tilde{\ell}_3$, касаются квадрики Дарбу).

Класс 6.1. Два параболических пучка, не принадлежащих одной связке, третий пучок эллиптический, причем его вершины совпадают с вершинами параболических пучков. (Две непересекающиеся прямые касаются квадрики Дарбу, а третья сопряжена прямой, соединяющей точки касания).

Класс 6.2. Два параболических пучка, принадлежащие одной связке, третий пучок эллиптический, причем его вершины совпадают с вершинами параболических пучков. (Две пересекающиеся прямые касаются квадрики Дарбу, а третья сопряжена прямой, соединяющей точки касания).

Класс 7. Эллиптический пучок имеет вершины A и B , точки B и C служат нулевыми окружностями гиперболического пучка, а третий — параболический — пучок имеет вершину в точке A . При этом общая окружность параболического и гиперболического пучков ортогональна окружности, проходящей через точки A , B и C . (Прямая ℓ_1 лежит в касательной плоскости к квадрике Дарбу, проведенной в точке пересечения последней с прямой ℓ_2 . Прямая ℓ_3 касается квадрики Дарбу и пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2).

Основным результатом наших рассуждений будет

Теорема 3.2. *Иных классов регулярных круговых три-тканей, кроме перечисленных выше, не существует.*

Из теоремы 1.8 о границах (§ 1.3) вытекает

Теорема 3.3. *Граничными кривыми непараболического типа регулярной круговой три-ткани могут быть только окружности — вещественные, мнимые или нулевого радиуса (точки). При этом, если граничная окружность Γ_i не является точкой или общей окружностью двух пучков, то она принадлежит пучку λ_i и в ее точках касаются окружности двух других пучков.*

□ Действительно, если круговая ткань W является регулярной, то по теореме 1.8 непараболическая граница Γ_i должна быть линией ткани, то есть окружностью, принадлежащей одному из семейств ткани W . Так как граничная кривая Γ_i есть кривая четвертого порядка, то это означает, что в случае регулярности она должна распадаться на две окружности — вещественные, мнимые или нулевого радиуса. В соответствии с теоремой 1.8 эти окружности могут быть либо общими окружностями двух пучков ткани, либо они принадлежат одному из семейств ткани и вдоль них касаются окружности двух других семейств ткани. ■

В связи с этим классификация регулярных круговых три-тканей непараболического типа сводится к следующей задаче: описать все такие пары пучков окружностей, для которых граничная кривая Γ ,

образованная точками касания окружностей этих пучков, распадается на две окружности.¹⁾

Сначала опишем такие пары пучков окружностей, у которых по крайней мере одна из компонент граничной кривой Γ вырождается в точку.

Как и выше, образы пучков окружностей в проективном пространстве \mathbb{P}^3 обозначим ℓ_1 и ℓ_2 . Напомним, что две окружности пучков касаются друг друга тогда и только тогда, когда соответствующие им точки M_1 и M_2 прямых ℓ_1 и ℓ_2 лежат на прямой, касающейся квадрики Дарбу Q . Очевидно, что при общем расположении прямых ℓ_1 и ℓ_2 для каждой точки M_1 прямой ℓ_1 , не пересекающей Q , можно найти две соответствующие ей точки M_2 и M'_2 на ℓ_2 : надо пересечь квадрику Q плоскостью $[M_1\ell_2]$ и к полученной в пересечении конике провести касательные из точки M_1 . При движении точки M_1 по прямой ℓ_1 точки касания прямых M_1M_2 и $M_1M'_2$ с квадрикой Q будут описывать две части кривой γ , которая является образом граничной кривой Γ при отображении Дарбу. Обозначим эти части γ' и γ'' , а их прообразы — Γ' и Γ'' . Эти части не изолированы, они имеют общие точки там, где прямые M_1M_2 и $M_1M'_2$ совпадают — это будут точки касания квадрики Q и плоскостей, проходящих через прямую ℓ_2 .

Рассмотрим частный случай, который будет встречаться неоднократно: оба пучка окружностей принадлежат одной связке окружностей.

Лемма 3.1. *Если два пучка окружностей принадлежат одной связке (имеют общую окружность), то их граничная кривая распадается на две ортогональные окружности: общую окружность пучков и окружность, ортогональную всем окружностям связки.*

□ Пусть прямые ℓ_1 и ℓ_2 лежат в плоскости π , которая является образом связки в проективном пространстве. Полюс Π плоскости π относительно квадрики Дарбу есть образ окружности (обозначим ее также Π), которая ортогональна всем окружностям связки, а следовательно, и окружностям обоих пучков. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в некоторой точке S_0 , которая является образом общей окружности S_0 двух пучков.

Теперь заметим, что через точку S_0 проходит пучок касательных к квадрике Дарбу, пересекающих обе прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Следовательно, окружность S_0 входит в граничную кривую.

¹⁾Заметим, что граничные кривые круговой ткани (не используя сам термин «граничные кривые») рассматривала еще В. Лазарева в своей диссертации «Три-ткани на поверхностях в триаксиальном пространстве» (1984 год). В частности, она отметила, что граничная кривая двух пучков, принадлежащих одной связке, распадается на две окружности. Однако, ввиду отсутствия теоремы 1.8, она не использовала указанное свойство граничных кривых для классификации регулярных круговых тканей.

Далее, плоскость π пересекает квадрику Дарбу по конике, все касательные к которой также пересекают обе прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Но точки этой коники изображают в проективном пространстве точки окружности Π . Следовательно, и она принадлежит граничной кривой пучков. ■

Вернемся теперь к общей ситуации (пучки окружностей не принадлежат одной связке) и допустим, что одна из компонент граничной кривой Γ , например, Γ' , вырождается в точку. Тогда ее образ γ' в проективном пространстве есть точка, лежащая на квадрике Дарбу Q , причем, согласно определению граничной кривой, все касательные к квадрике Q в точке γ' должны пересекать прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Очевидно, возможны только 3 случая расположения этих прямых: обе прямые лежат в касательной плоскости $T_{\gamma'}$ к Q ; одна из них, например, ℓ_1 , лежит в $T_{\gamma'}$, а ℓ_2 проходит через γ' , но не лежит, вообще говоря, в плоскости $T_{\gamma'}$; обе прямые пересекают Q в точке γ' , но не лежат, вообще говоря, в плоскости $T_{\gamma'}$.

В первом и третьем случаях прямые лежат в одной плоскости и можно применить лемму 3.1. В первом случае граничная кривая распадается на общую окружность пучков и лежащую на ней точку — прообраз Γ' точки касания γ' . В этом случае оба пучка окружностей принадлежат одной параболической связке окружностей с вершиной Γ' .

В третьем случае (обе прямые пересекают квадрику Дарбу в точке γ') граничная кривая распадается на окружность Π — прообраз полюса Π плоскости π , в которой лежат прямые, и лежащую на ней точку Γ' — общую нулевую окружность пучков.

Во втором случае, когда прямая ℓ_2 не касается квадрики Q в точке γ' , возможны 2 варианта:

(а) прямая ℓ_1 лежит в касательной плоскости T_g к квадрике Q , где g — вторая точка пересечения прямой ℓ_2 и квадрики Q ;

(б) прямая ℓ_1 не лежит в касательной плоскости T_g .

В случае (а) прямые ℓ_1 и ℓ_2 являются полярно сопряженными относительно квадрики Дарбу Q , а граничная кривая вырождается в пару точек — прообразы точек γ'' и g .

Исследуем кривую γ'' в случае (б). Обозначим $\gamma' = A_3$, $g = A_4$, тогда $\ell_2 = A_3A_4$. Касательная плоскость к квадрике Q в точке g пересекает прямую ℓ_1 в некоторой точке, обозначим ее A_1 . По определению точка A_1 полярно сопряжена точкам A_3 и A_4 относительно Q . Обозначим далее через A_2 точку прямой ℓ_1 , полярно сопряженную точке A_1 , и найдем в репере A_i , $i = 1, 2, 3, 4$, уравнение, определяющее кривую γ'' .

Пусть квадрика Дарбу задается в выбранном репере уравнением

$$g_{ij}x^i x^j = 0. \quad (3.4)$$

Соответствующую билинейную симметричную форму $g_{ij}x^i y^j$ обозначим, как обычно, (AB) , где $A(x^i)$, $B(y^j)$. Тогда $g_{ij} = (A_i A_j)$ и в силу

выбора репера

$$g_{33} = g_{44} = 0, \quad g_{12} = 0, \quad g_{13} = g_{14} = 0, \quad g_{23} = 0, \quad (3.5)$$

так что уравнение квадрики Q имеет вид

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + 2g_{24}x^2x^4 + 2g_{34}x^3x^4 = 0. \quad (3.6)$$

Пусть $M_1 = A_1 + uA_2$ — произвольная точка прямой ℓ_1 и $M_2 = A_3 + vA_4$ — произвольная точка прямой ℓ_2 , отличная от точки A_3 ($v \neq 0$). Предположим, что прямая M_1M_2 касается квадрики Q в точке $M = M_1 + tM_2 = A_1 + uA_2 + t(A_3 + vA_4)$. Тогда точка M полярно сопряжена точкам M_1 и M_2 , что дает соотношения

$$g_{11} + g_{22}u^2 + g_{24}tuv = 0, \quad g_{24}uv + 2g_{34}tv = 0. \quad (3.7)$$

Исключая t , получим соотношение

$$g_{24}^2u^2v - 2g_{34}(g_{11} + g_{22}u^2) = 0. \quad (3.8)$$

Уравнение (3.8) определяет соответствие между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , обозначим его через Φ . Прямые, соединяющие соответствующие точки $M_1 = A_1 + uA_2$ и $M_2 = A_3 + vA_4$, касаются квадрики Дарбу вдоль кривой γ'' , которая и является образом кривой Γ'' . Текущая точка кривой γ'' имеет вид $M = A_1 + uA_2 + t(A_3 + vA_4)$, причем параметр t находим из второго уравнения (3.7):

$$t = -\frac{g_{24}u}{2g_{34}}. \quad (3.9)$$

Проверим, что кривая Γ'' является окружностью. Поскольку при отображении Дарбу образом окружности является точка, то достаточно показать, что в \mathbb{P}^3 существует точка (обозначим ее также Γ''), полярно сопряженная всем точкам кривой γ'' относительно квадрики Дарбу. Обозначим координаты точки Γ'' через x^i , тогда условие сопряженности $(\Gamma'', M) = 0$ с учетом (3.9) имеет вид

$$2g_{34}(g_{11}x^1 + g_{22}ux^2 + g_{24}ux^4) - g_{24}u(g_{24}vx^2 + g_{34}x^4 + g_{34}vx^3) = 0. \quad (3.10)$$

Это соотношение должно выполняться для всех точек кривой, то есть при любых u и v . С другой стороны, (а) $g_{34} \neq 0$, так как прямая ℓ_2 пересекает квадрику Дарбу и точки A_3 и A_4 различны; (б) $g_{11} \neq 0$, так как точка A_1 сопряжена точкам A_3 и A_4 и поэтому не может лежать на квадрике; (в) $g_{24} \neq 0$, иначе прямые ℓ_1 и ℓ_2 сопряжены, этот случай рассмотрен выше. С учетом сделанных замечаний из (3.10) получаем соотношение

$$x^1 = 0, \quad 2g_{22}x^2 + g_{24}x^4 = 0, \quad g_{24}x^2 + g_{34}x^3 = 0,$$

из которых находим искомую точку Γ'' :

$$\Gamma'' = g_{24}g_{34}A_2 - g_{24}^2A_3 - 2g_{22}g_{34}A_4. \quad (3.11)$$

Непосредственно проверяется, что $(\Gamma'', A_1) = 0$, $(\Gamma'', A_4) = 0$, то есть точка Γ'' полярно сопряжена точкам A_1 и A_4 . Однако эти два свойства еще не вполне определяют положение точки Γ'' . Покажем, что прямая $A_2\Gamma''$ касается квадрики Дарбу. Произвольная точка P этой прямой записывается в виде $P = tA_2 + g_{24}^2 A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4$. Если P принадлежит Q , то ее координаты удовлетворяют уравнению (3.6), что дает соотношение

$$g_{22}t^2 + 4g_{24}g_{34}g_{22}t + 4g_{24}^2g_{34}^2g_{22} = 0.$$

Это уравнение имеет двойной корень $t = -2g_{24}g_{34}$, следовательно, прямая $A_2\Gamma''$ касается квадрики Дарбу в точке $P = -2g_{24}g_{34}A_2 + g_{24}^2 A_3 + 2g_{22}g_{34}A_4$. Иными словами, Γ'' есть точка пересечения двух касательных к квадрике Дарбу, лежащих в плоскости $[A_2A_3A_4]$: одна касательная проведена в точке A_4 , другая проведена из точки A_2 (рис. 36).

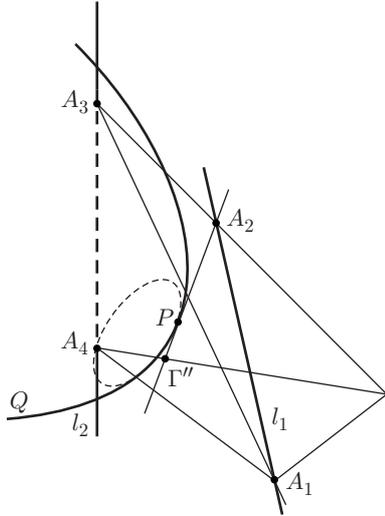


Рис. 36.

По-другому можно сказать, что точка Γ'' принадлежит трем плоскостям: касательной плоскости к квадрике Дарбу, проходящей через прямую ℓ_1 ; плоскости $[A_2A_3A_4]$, сопряженной точке A_1 — единственной точке, лежащей на прямой ℓ_1 и сопряженной прямой ℓ_2 ; одной из двух касательных плоскостей к квадрике Дарбу, проведенных в точках ее пересечения с прямой ℓ_2 , а именно той, которая не содержит

точки A_1 . Заметим также, что точка P есть точка касания квадрики Дарбу с плоскостью, проходящей через прямую ℓ_1 . Резюмирует вышесказанное

Лемма 3.2. *Граничная кривая Γ двух пучков окружностей*

(а) вырождается в окружность и лежащую на ней точку в случае, когда оба пучка либо принадлежат одной параболической связке окружностей, либо принадлежат одной гиперболической связке и имеют общую нулевую окружность (прямые ℓ_1 и ℓ_2 , изображающие пучки, лежат либо в одной и той же касательной плоскости к квадрике Дарбу, либо пересекаются на квадрике Дарбу);

(б) вырождается в две точки — вершины эллиптического пучка тогда и только тогда, когда пучки окружностей ортогональны (прямые ℓ_1 и ℓ_2 , изображающие пучки, сопряжены относительно квадрики Дарбу);

(в) вырождается в точку Γ' и не проходящую через нее окружность Γ'' тогда и только тогда, когда один пучок эллиптический, другой гиперболический, и точка Γ' является вершиной первого пучка и нулевой окружностью второго (прямая ℓ_2 , изображающая гиперболический пучок, пересекает квадрику Дарбу Q в двух точках, одна из которых есть образ Γ' , а прямая ℓ_1 , изображающая другой пучок, лежит в касательной плоскости к Q в точке γ'). При этом окружность Γ''

1) проходит через другую нулевую окружность гиперболического пучка, отличную от Γ' ;

2) ортогональна всем окружностям эллиптического пучка, которая ортогональна всем окружностям гиперболического пучка;

3) проходит через вторую вершину эллиптического пучка, отличную от Γ' .

§ 3.3. Пары пучков окружностей, для которых граничная кривая Γ распадается

В этом параграфе мы найдем все такие пары пучков окружностей, не принадлежащих одной связке, для которых граничная кривая Γ распадается.

Два пучка, не принадлежащие одной связке, изображаются в проективном пространстве скрещивающимися прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , вообще говоря, не сопряженными относительно квадрики Дарбу (в случае сопряженности получаем случай (б) леммы 3.2).

Пусть одна из компонент кривой Γ , например Γ'' , является окружностью. Тогда в \mathbb{P}^3 она изображается точкой (обозначим ее также Γ''), а ее точки изображаются линией пересечения квадрики Дарбу с плоскостью, сопряженной точке Γ'' (эту конику обозначим γ'' , как и выше).

Покажем, что если точка Γ'' лежит на какой-либо из прямых ℓ_1 и ℓ_2 , то получается либо расположение прямых, описанное в пп. (а) и (в) леммы 3.2, либо прямые ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке Γ'' .

Действительно, пусть точка Γ'' лежит, например, на ℓ_1 . Тогда легко указать все прямые, касающиеся квадрики Дарбу Q в точках граничной кривой γ'' и пересекающие прямую ℓ_1 . Это, во-первых, касательные к квадрике, проведенные из точки Γ'' , а во-вторых, пучки касательных к Q в точках A и B , в которых квадрики Q касаются плоскости, содержащие прямую ℓ_1 . Прямая ℓ_2 может пересекать континуум этих касательных в том и только в том случае, если она либо проходит через точку Γ'' , либо лежит в одной из указанных касательных плоскостей (случай (а) леммы 3.2), либо проходит по крайней мере через одну из точек A и B (случай (в) леммы 3.2).

Итак, будем считать, что точка Γ'' не лежит ни на одной из прямых ℓ_1 и ℓ_2 . Тогда через нее проходит единственная прямая, пересекающая прямые ℓ_1 и ℓ_2 . Поместим в точки пересечения вершины репера A_1 и A_3 соответственно. Далее, точку A_2 поместим

на ℓ_1 и выберем ее полярно сопряженной точке A_1 относительно Q . Аналогично, точку A_4 поместим на ℓ_2 и выберем ее полярно сопряженной точке A_3 . Кроме того, нормируем репер так, чтобы $\Gamma'' = A_1 + A_3$. В выбранном репере $\ell_1 = A_1A_2$, $\ell_2 = A_3A_4$, а уравнение квадрики Дарбу имеет вид

$$g_{11}(x^1)^2 + g_{22}(x^2)^2 + g_{33}(x^3)^2 + g_{44}(x^4)^2 + 2g_{13}x^1x^3 + 2g_{14}x^1x^4 + 2g_{23}x^2x^3 + 2g_{24}x^2x^4 = 0. \quad (3.12)$$

В дальнейшем нам понадобится определитель Δ матрицы (g_{ij}) :

$$\begin{aligned} \Delta &= g_{44}(g_{11}g_{22}g_{33} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{13}^2) - \\ &\quad - g_{33}(g_{11}g_{24}^2 + g_{22}g_{14}^2) + (g_{13}g_{24} - g_{14}g_{23})^2 = \\ &= g_{44}(g_{11}g_{22}g_{33} - g_{11}g_{23}^2 - g_{22}g_{13}^2) + g_{13}^2(g_{24}^2 - g_{22}g_{44}) + \\ &\quad + g_{14}^2(g_{23}^2 - g_{22}g_{33}) - 2g_{13}g_{14}g_{23}g_{24}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Так как квадратика Дарбу овальная, то $\Delta \neq 0$.

Найдем уравнение соответствия Φ в выбранном репере (напомним, что это точечное соответствие между прямыми ℓ_1 и ℓ_2 , которое устанавливается касательными к квадрике Дарбу). Пусть, как и выше, $M_1 = A_1 + uA_2$ — произвольная точка прямой ℓ_1 и $M_2 = A_3 + vA_4$ — произвольная точка прямой ℓ_2 . Предположим, прямая M_1M_2 касается квадрики Q в точке $M = M_1 + tM_2 = A_1 + uA_2 + t(A_3 + vA_4)$. Тогда точка M полярно сопряжена точкам M_1 и M_2 относительно квадрики Q :

$$(MM_1) = 0, \quad (MM_2) = 0. \quad (3.14)$$

Развертывая эти равенства и исключая из них t , получим уравнение соответствия Φ :

$$(g_{11} + g_{22}u^2)(g_{33} + g_{44}v^2) - (g_{13} + g_{14}v + g_{23}u + g_{24}uv)^2 = 0. \quad (3.15)$$

Из (3.14) находим параметр точки касания:

$$t = -\frac{g_{13} + g_{14}v + g_{23}u + g_{24}uv}{g_{33} + g_{44}v^2}. \quad (3.16)$$

С другой стороны, если точка M лежит на компоненте γ'' , то она полярно сопряжена точке Γ'' , что с учетом (3.16) дает соотношение

$$(g_{11} + g_{13} + g_{23}u)(g_{33} + g_{44}v^2) - (g_{13} + g_{33} + g_{14}v)(g_{13} + g_{14}v + g_{23}u + g_{24}uv) = 0. \quad (3.17)$$

Мы рассматриваем случай, когда кривая Γ распадается. Это означает, что система уравнений (3.15), (3.17) имеет ∞^1 решений. Поэтому левая часть уравнения (3.15) должна распадаться на две компоненты, причем хотя бы для одной из них соотношение (3.17) должно обращаться в тождество. Это означает, что уравнение (3.17) также распадается, причем содержит ту же компоненту, что и уравнение (3.15). Возможны следующие варианты: уравнение (3.17) удовлетворяется

тождественно; уравнения (3.15) и (3.17) распадаются и имеют общую компоненту. Рассмотрим все варианты последовательно.

I. Все коэффициенты уравнения (3.17) равны нулю:

$$\begin{aligned} (1) \quad g_{13}g_{23} &= 0, & (2) \quad g_{11}g_{33} - g_{13}^2 &= 0, \\ (3) \quad g_{14}(2g_{13} + g_{33}) &= 0, & (4) \quad g_{13}g_{24} + g_{14}g_{23} + g_{24}g_{33} &= 0, \\ (5) \quad g_{11}g_{44} - g_{14}^2 + g_{44}g_{13} &= 0, & (6) \quad g_{23}g_{44} - g_{14}g_{24} &= 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Случай 0: $g_{13} = 0$ и $g_{23} = 0$. Из второго, третьего и четвертого уравнений (3.18) находим, что либо $g_{33} = 0$, либо $g_{11} = g_{14} = g_{24} = 0$. Как видно из (3.13), в обоих случаях $\Delta = 0$, что невозможно.

Случай 1: $g_{13} = 0$, $g_{23} \neq 0$. Из второго уравнения (3.18) получаем $g_{11}g_{33} = 0$. Рассмотрим два подслучая.

Подслучай 1а: $g_{33} = 0$. Так как $g_{23} \neq 0$, из четвертого соотношения (3.18) получаем $g_{14} = 0$. Но тогда из пятого равенства (3.18) в силу того же неравенства $g_{23} \neq 0$ находим, что $g_{44} = 0$. Три равенства $g_{33} = 0$, $g_{34} = 0$, $g_{44} = 0$ вместе означают, что любая точка прямой A_3A_4 лежит на квадрике Q . Но это невозможно, так как квадрика Дарбу является овальной.

Подслучай 1б: $g_{11} = 0$. Из пятого равенства (3.18) находим, что $g_{14} = 0$, то есть все коэффициенты g_{1i} равны нулю и, следовательно, $\Delta = 0$.

Случай 2: $g_{23} = 0$, $g_{13} \neq 0$. Из шестого равенства (3.18) находим, что $g_{14}g_{24} = 0$.

Подслучай 2а: $g_{14} = 0$. В этом случае соотношения (3.18) сведутся к следующим: $g_{11}g_{33} - g_{13}^2 = 0$, $g_{24}(g_{13} + g_{33}) = 0$, $g_{44}(g_{11} + g_{13}) = 0$.

Если $g_{24} = g_{44} = 0$, то все коэффициенты g_{4i} равны нулю и, следовательно, $\Delta = 0$.

Если хотя бы один из коэффициентов g_{24} , g_{44} не равен нулю, то получаем решение $g_{13} + g_{33} = 0$, $g_{11} + g_{13} = 0$. В этом случае координаты точки $\Gamma''(1, 0, 1, 0)$ будут удовлетворять уравнению квадрики Дарбу. Следовательно, ей соответствует окружность нулевого радиуса (точка), и мы приходим к ситуации, рассмотренной в предыдущем параграфе, когда одна из компонент граничной кривой вырождается в точку.

Подслучай 2б: $g_{24} = 0$, $g_{14} \neq 0$. В этом случае соотношения (3.18) сведутся к следующим:

$$g_{33} = 4g_{11}, \quad g_{13} = -2g_{11}, \quad g_{14} = ag_{11}, \quad g_{44} = -a^2g_{11}, \tag{3.19}$$

где a — ненулевая постоянная. В этом случае $\Delta \neq 0$, и мы получаем нетривиальное решение системы (3.18).

Покажем, что в случае (3.19) получается расположение прямых, описанное в п. в) леммы 3.2. Найдем точки пересечения прямой $\ell_2 = A_3A_4$ с квадрикой Дарбу. В силу соотношений (3.19) уравнение последней примет вид

$$g_{22}(x^2)^2 + g_{11}((x^1)^2 + 4(x^3)^2 - a^2(x^4)^2 - 4x^1x^3 + 2ax^1x^4) = 0. \tag{3.20}$$

Подставляя сюда $x^1 = x^2 = 0$ (уравнения прямой $\ell_2 = A_3A_4$), найдем координаты точек пересечения: $K_1(0, 0, a, 2)$ и $K_2(0, 0, a, -2)$.

Теперь найдем уравнения касательных плоскостей к квадрике Дарбу в этих точках (обозначим их T_1 и T_2 соответственно). Пусть $M(x^i)$ — текущая точка касательной плоскости T_1 , тогда она сопряжена точке $K_1(0, 0, a, 2)$ относительно квадрики Дарбу и выполняется равенство $(K_1, M) = 0$. В силу (3.20) это уравнение имеет вид $2x^3 - ax^4 = 0$. Аналогично находим уравнение касательной плоскости T_2 : $2x^1 - 2x^3 - ax^4 = 0$.

Как видно, касательная плоскость T_1 содержит прямую $\ell_1 = A_1A_2$, а касательная плоскость T_2 пересекает прямую A_1A_3 в точке $\Gamma'' = A_1 + A_3$, то есть в той самой точке, которая является полюсом граничной окружности.

Итак, с точностью до обозначений и выбора репера геометрическое расположение прямых ℓ_1 и ℓ_2 оказалось таким же самым, как и случае (в) леммы 3.2.

II. Уравнения (3.15) и (3.17) распадаются и имеют общую компоненту.

IIa. Пусть уравнение (3.15) распадается на две компоненты вида $auv + ux + cv + d = 0$. Как известно, дробно-линейное соответствие между прямыми является проективным, а прямые, соединяющие соответствующие точки двух прямых ℓ_1 и ℓ_2 , находящихся в проективном соответствии, образуют демиквадрику — одно из семейств линейчатой поверхности второго порядка (обозначим последнюю через K). При этом сами прямые ℓ_1 и ℓ_2 входят во второе семейство образующих квадрики K .

Напомним, что по условию задачи образующие квадрики K касаются квадрики Дарбу Q . Отсюда следует, во-первых, что сама квадрика K касается Q , а во-вторых, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются квадрики Q . Но если две квадрики касаются друг друга, то линия касания является кривой второго порядка.

Перечисленные свойства еще не полностью характеризуют рассматриваемое решение. Дадим его полное описание. Рассмотрим евклидову модель проективного пространства, в которой квадрика Дарбу Q является сферой. Тогда квадрика K является однополостным гиперboloидом вращения и касается сферы Q вдоль некоторой окружности. Но в силу симметрии все прямолинейные образующие гиперboloида вращения из одного семейства образуют одинаковый угол с плоскостью этой окружности. Поэтому рассматриваемое решение строится следующим образом. Проводим через точки касания прямых ℓ_1 и ℓ_2 со сферой плоскость, которая образует с этими прямыми одинаковый угол. Таких плоскостей две, причем они ортогональны. Каждая из них пересекает сферу по окружности, обозначим последние γ' и γ'' . Эти кривые и будут образами коник Γ' и Γ'' , на которые распадается граничная кривая Γ .

Чтобы построить квадрику K , нужно взять на одной из указанных окружностей произвольную точку и провести через нее еще одну касательную прямую к сфере под тем же углом к плоскости окружности γ' (или γ''). Совокупность трансверсалей к трем полученным прямым и образует квадрику K . Если эту конструкцию подвергнуть произвольному проективному преобразованию, то получится решение наиболее общего вида.

В рассматриваемом случае прямые ℓ_1 и ℓ_2 , поскольку они касаются квадрики Дарбу, изображают параболические пучки окружностей. При этом, в силу вышесказанного, все окружности обоих пучков образуют один и тот же угол с окружностями γ' и γ'' . Покажем, как найти эти окружности, если пучки заданы.

Пусть один параболический пучок задается базисной окружностью B_1 и точкой A_1 на ней — вершиной пучка, в которой касаются друг друга все окружности пучка; другой — окружностью B_2 и вершиной A_2 . Проведем касательные к базисным окружностям в вершинах пучка и построим биссектрисы угла, образованного этими касательными. Точка пересечения биссектрис со срединным перпендикуляром к отрезку A_1A_2 и даст центры искомым окружностей.

В рассматриваемом случае уравнение (3.17), естественно, выполняется тождественно.

Пб. Допустим, левая часть уравнения (3.15) распадается на линейную компоненту и левую часть уравнения (3.17). Выпишем коэффициенты этих уравнений. Для уравнения (3.15):

$$\begin{aligned} a_{22} &= g_{22}g_{44} - g_{24}^2, & a_{21} &= -2g_{23}g_{34}, & a_{12} &= -2g_{14}g_{24}, \\ a_{11} &= -2g_{14}g_{23} - 2g_{13}g_{24}, & a_{20} &= g_{22}g_{33} - g_{23}^2, & a_{02} &= g_{11}g_{44} - g_{14}^2, \\ a_{10} &= -2g_{13}g_{23}, & a_{01} &= -2g_{13}g_{14}, & a &= g_{11}g_{33} - g_{13}^2. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Для уравнения (3.17):

$$\begin{aligned} b_{12} &= g_{23}g_{44} - g_{14}g_{24}, & b_{11} &= -g_{13}g_{24} - g_{33}g_{24} - g_{14}g_{23}, \\ b_{02} &= g_{11}g_{44} + g_{13}g_{44} - g_{14}^2, & b_{10} &= -g_{13}g_{23}, \\ b_{01} &= -2g_{13}g_{14} - g_{33}g_{14}, & b &= g_{11}g_{33} - g_{13}^2. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Поскольку уравнение (3.15) степени 2, а уравнение (3.17) — степени 1 относительно u , то искомым линейный множитель имеет вид $cu + d$. Умножив на него левую часть уравнения (3.15), мы должны получить левую часть уравнения (3.17). Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем, прежде всего (так как $a = b$), что $d = 1$. Остальные равенства примут следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{02} &= b_{02}, & a_{01} &= b_{01}, & a_{22} &= b_{12}c, & a_{21} &= b_{11}c, \\ a_{20} &= b_{10}c, & a_{12} &= b_{02}c + b_{12}, & a_{11} &= b_{01}c + b_{11}, & a_{10} &= bc + b_{01}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Из первых двух уравнений системы (3.23) в силу обозначений (3.21) и (3.22) находим: $g_{13}g_{44} = 0$, $g_{14}g_{33} = 0$.

Случай $g_{33} = g_{44} = 0$, как было сказано выше, невозможен (поскольку еще выполняется равенство $g_{34} = 0$, то получается, что квадрика Дарбу имеет прямолинейную образующую A_3A_4).

Если $g_{13} = g_{33} = 0$, то из уравнений (3.21) находим, что $b_{10} = 0$, тогда из (3.23) получаем $a_{20} = 0$ и $g_{23} = 0$. Таким образом, все $g_{3i} = 0$, что невозможно.

Если $g_{13} = g_{14} = 0$, то из уравнений (3.21) и (3.22) находим, что $a_{11} = 0$, $b_{10} = 0$, $b_{01} = 0$. Тогда из (3.23) следует $a_{20} = g_{22}g_{33} - g_{23}^2 = 0$ и $b_{11} = -g_{24}g_{33} = 0$. Если $g_{24} = 0$, то $\Delta = 0$. Если $g_{33} = 0$, то из предыдущего равенства получаем $g_{23} = 0$. Но тогда все $g_{3i} = 0$, то есть опять $\Delta = 0$.

Если $g_{14} = g_{44} = 0$, то из уравнений (3.22), (3.21) и (3.23) последовательно находим $b_{12} = 0$, $a_{22} = 0$, $g_{24} = 0$. Итак, все $g_{4i} = 0$ и $\Delta = 0$.

Пв. Допустим, что оба уравнения (3.15) и (3.17) имеют одинаковую линейную компоненту. Вид левой части уравнения (3.17) показывает, что эта линейная компонента не может содержать обе переменные u и v . Пусть, например, она содержит только u , а ее корень обозначим u_0 . Таким образом, уравнение (3.15) удовлетворяется при $u = u_0$ и при любом v . Геометрически это означает, что любая прямая, проходящая через точку $M_0 = A_1 + u_0A_2$ прямой ℓ_1 и произвольную точку прямой ℓ_2 , касается квадрики Дарбу. Это может быть, как уже отмечалось, только в случае, когда точка M_0 лежит на квадрике Дарбу, а прямая ℓ_2 лежит в касательной плоскости T к этой квадрике в точке M_0 . В этом случае одна из компонент кривой γ вырождается в точку M_0 , и мы приходим к ситуации, описанной в предыдущем параграфе.

Ясно, что то же самое мы получим, если левая часть уравнения (3.15) содержит линейную компоненту, зависящую только от v или разлагается на два квадратичных множителя, каждый из которых зависит только от одной из переменных.

Результаты этого и предыдущего параграфов объединяет следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Если граничная кривая двух пучков окружностей Γ распадается, то только на точки и окружности (в том числе, и мнимые), причем возможны только следующие варианты.*

(1) *Оба пучка принадлежат одной эллиптической связке (соответствующие им прямые в \mathbb{P}^3 лежат в одной плоскости π , не пересекающей квадрику Дарбу). В этом случае кривая Γ распадается на две ортогональные окружности: общую окружность пучков, и мнимую окружность, изображаемую полюсом плоскости π .*

(2) *Оба пучка принадлежат одной параболической связке (соответствующие прямые в \mathbb{P}^3 лежат в одной плоскости π , касающейся квадрики Дарбу в точке Π). В этом случае граничная кривая Γ распадается на точку Π — вершину параболической связки и проходящую через нее общую окружность пучков.*

(3) Оба пучка принадлежат одной гиперболической связке (соответствующие прямые в \mathbb{P}^3 лежат в одной плоскости π , пересекающей квадрику Дарбу). В этом случае граничная кривая Γ распадается на две ортогональные окружности, одна из которых (вещественная) соответствует полюсу Π плоскости π , а другая (она может быть вещественной, мнимой или нулевого радиуса) есть общая окружность пучков.

(4) Пучки, один из которых эллиптический, а второй — гиперболический, ортогональны (соответствующие прямые в \mathbb{P}^3 полярно сопряжены относительно квадрики Дарбу). В этом случае граничная кривая вырождается в две точки — вершины эллиптического пучка.

(5) Один из пучков гиперболический, одна из его нулевых окружностей является вершиной другого — эллиптического — пучка (в \mathbb{P}^3 одна из прямых лежит в касательной плоскости к квадрике Дарбу в точке γ' пересечения ее с другой прямой). В этом случае граничная кривая распадается на точку γ' и окружность, которая а) проходит через другую вершину гиперболического пучка; б) ортогональна той окружности эллиптического пучка, которая ортогональна всем окружностям гиперболического пучка; в) проходит через вторую вершину эллиптического пучка.

(6) Оба пучка параболические (в \mathbb{P}^3 обе прямые касаются квадрики Дарбу). В этом случае граничная кривая распадается на две ортогональные окружности, каждая из которых проходит через вершины пучков и пересекает окружности обоих пучков под одним и тем же углом.

Заметим, что возможны только три случая расположения пучков, при которых изображающие их прямые в проективном пространстве не пересекаются, — это случаи (4), (5) и (6). В дальнейшем для краткости будем говорить «прямые находятся в положении (4)» и т. п.

§ 3.4. Классификация регулярных круговых три-тканей параболического типа

Круговые три-ткани с границей параболического типа будем называть тканями параболического типа. Согласно определению границы, ткани параболического типа характеризуются тем, что граничные кривые, соответствующие трем парам семейств кривых, образующих ткань, имеют общую гладкую компоненту Γ' . В случае круговой ткани каждой точке этой компоненты отвечает в проективном пространстве общая трансверсаль прямых ℓ_i , $i = 1, 2, 3$, касающаяся квадрики Дарбу. При этом точки прямых ℓ_i , лежащие на одной трансверсали, есть образы трех окружностей, касающихся друг друга в одной точке. Всей компоненте Γ' соответствует, таким образом, семейство общих трансверсалей прямых ℓ_i .

Из геометрических соображений понятно, что при произвольном расположении прямых l_i относительно квадрики Q , то есть в случае круговой ткани общего вида, существуют конечное число трансверсалий этих прямых, которые касаются квадрики Q , (по-видимому, не более двух). У тканей параболического типа таких трансверсалий должен быть континуум.

Возможны следующие случаи.

(а) Прямые l_i лежат в одной плоскости π (пучки окружностей принадлежат одной связке). В этом случае каждая касательная к квадрике Дарбу Q , лежащая в плоскости π , пересекает все прямые l_i . Следовательно, общая компонента граничных кривых Γ_i есть окружность, которая изображается в проективном пространстве линией пересечения плоскости π с квадратикой Дарбу Q . Она будет мнимой, если плоскость π не пересекает Q , и точкой, если плоскость π касается Q . Другие компоненты граничных кривых есть общие окружности пучков, они изображаются в проективном пространстве точками пересечения прямых l_i (или соответствующими сечениями квадрики Дарбу плоскостями, полярно сопряженными этим точкам).

(б) Прямые l_1 и l_3 лежат в плоскости π , касающейся квадрики Дарбу в некоторой точке γ' , а l_2 проходит через эту точку, но не лежит в плоскости π . В этом случае множество трансверсалий состоит из пучка касательных к квадрике Дарбу в точке γ' и еще одной прямой, проходящей через точку пересечения прямых l_1 и l_3 . Таким образом, общая компонента граничных кривых есть окружность нулевого радиуса — точка γ' . Другие компоненты граничных кривых (точнее, их образы в проективном пространстве): для прямых l_1 и l_3 — точка их пересечения, для каждой из пар прямых l_1 и l_2 , l_3 и l_2 — точка Γ'' (рис. 36).

Заметим, что в случае, когда две из трех прямых l_i лежат в плоскости π , не касающейся квадрики Дарбу, а третья не лежит в плоскости π , прямые l_i имеют не более двух общих трансверсалий.

(в) Прямые l_i находятся в общем положении, то есть попарно скрещиваются. В этом случае множество трансверсалий представляет собой демиквадрику — семейство прямолинейных образующих некоторой линейчатой поверхности второго порядка, обозначим ее, как и выше, через K . Квадрики K и Q касаются вдоль некоторой коники S_0 , прямые l_i входят во второе семейство образующих квадрики K и также касаются квадрики Дарбу Q в некоторых точках (обозначим их соответственно A , B и C), лежащих на конике S_0 . При этом граничная кривая, например, первых двух пучков есть пара окружностей: S_0 и ортогональная ей окружность S_3 , проходящая через точки A и B ; аналогично, для других пар пучков граничными кривыми будут пары окружностей S_0 и S_1 , S_0 и S_2 . Таким образом, окружность S_0 есть общая компонента граничных кривых.

(г) Прямые l_i имеют общую точку S_0 . Тогда через S_0 проходит конус касательных к квадрике Q , пересекающих прямые l_i (мнимый,

если точка S_0 находится внутри Q , и пучок, если S_0 лежит на Q). Поэтому общая компонента граничных кривых есть окружность — прообраз точки S_0 . Другие компоненты граничных кривых соответствуют линиям пересечения квадрики Q с плоскостями, содержащими пары прямых ℓ_i .

Теперь в каждом из перечисленных классов мы должны указать подкласс регулярных тканей.

В случае (а) ткань всегда является регулярной (класс 0 по классификации Лазаревой, см. выше).

Покажем, что в случае (в) ткань регулярной быть не может. Согласно теореме о границах, граничная окружность S_3 должна принадлежать третьему пучку, изображаемому прямой ℓ_3 . Следовательно, полюс P_3 окружности S_3 относительно квадрики Дарбу должен лежать на прямой ℓ_3 , а поскольку прямая ℓ_3 целиком лежит на линейчатой квадратике K , то и $P_3 \in K$. С другой стороны, поскольку окружность S_3 проходит через точки A и B , полюс P_3 лежит на прямой, полярно сопряженной прямой AB , то есть на пересечении касательных плоскостей T_A и T_B к квадратике Дарбу Q в точках A и B . Но, так как квадрики K и Q касаются вдоль коники S_0 , на которой лежат точки A и B , то касательные плоскости T_A и T_B к квадратике Дарбу являются также и касательными плоскостями к линейчатой квадратике K . А касательная плоскость к линейчатой квадратике, содержит образующие через точку касания. Таким образом, плоскость T_A содержит прямую ℓ_1 , проходящую через точку A , и некоторую другую образующую (обозначим ее m_1), проходящую через эту точку. Аналогично, плоскость T_B содержит прямые ℓ_2 и m_2 , проходящие через точку B . Отсюда вытекает, что касательные плоскости T_A и T_B содержат две общие точки, лежащие на квадратике K : точку пересечения образующих ℓ_1 и m_2 , и точку пересечения образующих ℓ_2 и m_1 . Из этого следует, что полюс P_3 должен быть одной из этих точек. Но тогда получается, что через P_3 проходит три различных образующих квадрики K — ℓ_3 и, например, ℓ_1 и m_2 , что невозможно.

Рассмотрим случай (б). Пусть, например, прямая ℓ_1 не проходит через точку γ' , в которой прямая ℓ_2 пересекает квадратик Дарбу. Тогда прямые ℓ_1 и ℓ_2 находятся в положении (5), см. лемму 3.2 и рис. 36. Пусть, как и на рис. 36, Γ'' есть точка, соответствующая невырожденной компоненте граничной кривой первых двух пучков. Поскольку она не является общей компонентой граничных кривых других пар пучков окружностей, то по теореме о границах в случае регулярности ткани эта точка должна лежать на прямой ℓ_3 . Но, как видно из построения точки Γ'' (см. рис. 36), это невозможно. Следовательно, в этом случае ткань регулярной быть не может. Исключение составляет такой подслучай случая (б), когда обе прямые ℓ_1 и ℓ_3 проходят через точку γ' . Тогда паре прямых ℓ_1 и ℓ_2 отвечает граничная кривая γ_1 , являющаяся линией пересечения плоскости этих прямых с квадратиком Q ,

а паре прямых l_2 и l_3 — аналогичная кривая γ_3 . Согласно теореме о границах для регулярности необходимо, чтобы полюс коники γ_1 лежал на прямой l_3 , а полюс коники γ_3 — на прямой l_1 . Но это означает, что прямые l_1 и l_3 должны быть полярно сопряжены, и мы получаем класс 3 по классификации Лазаревой.

Рассмотрим случай (г) — прямые l_i проходят через точку S_0 . Плоскости, в которых лежат пары прямых l_1 и l_2 , l_2 и l_3 , l_3 и l_1 , обозначим соответственно π_3 , π_1 и π_2 .

Подслучай 1. Точка S_0 находится внутри квадрики Дарбу Q . Тогда все плоскости π_i пересекают Q , и линии пересечения являются образами граничных кривых, не являющихся общими окружностями каких-либо двух пучков. Поэтому, по теореме о границах, в случае регулярности ткани полюс каждой из этих линий пересечения — а это одновременно и полюс соответствующей плоскости π_i — должен лежать на прямой l_i . В этом случае прямые l_i являются ребрами автополярного (относительно Q) тетраэдра, и мы получаем регулярную три-ткань — класс 1.1 по классификации Лазаревой.

Подслучай 2. Точка S_0 находится вне квадрики Дарбу Q .

2а. Если хотя бы одна из прямых l_i , например, l_1 , пересекает Q , то по теореме о границах в случае регулярности проходящие через l_1 плоскости π_2 и π_3 должны быть сопряжены относительно Q (каждая должна содержать полюс другой), а полюс плоскости π_1 должен лежать на l_1 . В результате опять приходим к классу 1.

2б. Пусть ни одна из прямых l_i не имеет общих точек с Q . Рассмотрим различные случаи расположения плоскостей π_i .

Если все плоскости π_i не касаются Q , то их полюсы находятся внутри Q и не могут лежать на соответствующих прямых l_α . Следовательно, условие теоремы о границах не может быть выполнено, и ткань не может быть регулярной.

Если все плоскости π_i касаются Q , то мы получаем класс 4 по классификации Лазаревой.

Предположим, две плоскости, пусть π_1 и π_2 , касаются Q , а третья — π_3 не касается Q . По теореме о границах полюс P_3 плоскости π_3 должен лежать на l_3 . Получается, что прямые l_1 и l_2 , с одной стороны, лежат в плоскости π_3 , а с другой — в касательных плоскостях к Q , проходящих через полюс P_3 . Отсюда вытекает, что прямые l_1 и l_2 должны касаться квадрики Q , что в рассматриваемом случае исключено.

Предположим, только одна из плоскостей, пусть π_1 , касается Q . Тогда полюсы плоскостей π_2 и π_3 , проходящих через l_1 , находятся внутри Q , и не могут лежать соответственно на прямых l_2 и l_3 . Таким образом, условие теоремы о границах не может быть выполнено, и ткань не может быть регулярной.

2в. Пусть одна из прямых l_i , например, l_1 , касается Q в точке T_1 , а плоскость π_1 не касается Q . По теореме о границах полюс плоскости π_1 должен лежать на l_1 , следовательно, эта плоскость должна

проходить через точку T_1 . Но тогда получается, что точка T_1 есть общая точка прямых ℓ_i , что невозможно, так как в рассматриваемом случае точка S_0 пересечения лежит вне квадрики Дарбу Q .

Допустим, прямая ℓ_1 касается Q , плоскость π_1 касается Q , но лежащие в ней прямые ℓ_2 и ℓ_3 не касаются Q . Тогда по теореме о границах полюс плоскости π_2 должен лежать на ℓ_2 , а полюс плоскости π_3 — на ℓ_3 , то есть плоскости π_2 и π_3 должны быть сопряжены относительно Q . Но это невозможно, поскольку они пересекаются по прямой ℓ_1 , касающейся квадрики Q .

2г. Предположим далее, две прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются Q в точках T_1 и T_2 соответственно. Тогда по теореме о границах полюс плоскости π_3 , в которой лежат эти прямые, должен принадлежать прямой ℓ_3 . Следовательно, ℓ_3 лежит на пересечении касательных плоскостей к Q , проведенных в точках T_1 и T_2 , и мы приходим к классу 6.2.

2д. В случае, если все три прямые касаются квадрики Дарбу, ткань не может быть регулярной. Действительно, полюсы плоскостей π_i в этом случае не могут лежать на соответствующих прямых ℓ_i .

Подслучай 3. Точка S_0 пересечения прямых ℓ_i находится на квадрике Дарбу Q . В этом случае прямые ℓ_i либо касаются квадрики Q , либо ее пересекают.

Если все они касаются Q , то получаем класс 0.

Если все прямые ℓ_i пересекают Q , то, как и в случае 2д, полюсы плоскостей π_i не могут лежать на соответствующих прямых ℓ_i . Поэтому ткань не может быть регулярной.

3а. Пусть одна из прямых, например, ℓ_1 касается Q в точке S_0 , а две другие пересекают Q . Тогда по теореме о границах полюс плоскости π_2 должен лежать на ℓ_2 , а полюс плоскости π_3 — на ℓ_3 , то есть плоскости π_2 и π_3 должны быть сопряжены относительно Q . Но это невозможно, поскольку они пересекаются по прямой ℓ_1 , касающейся квадрики Q .

3б. Если две прямые (ℓ_1 и ℓ_2) касаются Q в точке S_0 , а третья (ℓ_3) пересекает Q , то плоскости π_1 и π_2 , проходящие через ℓ_3 , должны быть сопряжены относительно Q . Отсюда вытекает, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 являются полярно сопряженными, и мы приходим к классу 3 по классификации Лазаревой.

Результаты объединяет

Теорема 3.5. *Существует всего 5 типов регулярных тканей параболического типа — классы 0, 1, 3, 4 и 6.2 по классификации Лазаревой.*

§ 3.5. Классификация регулярных круговых три-тканей, у которых по крайней мере два пучка не принадлежат одной связке

Два пучка, не принадлежащие одной связке, изображаются в проективном пространстве скрещивающимися прямыми. Последние могут находиться в одном из трех положений, описанных в пп. 4–6 леммы 3.2. Ткань в этом случае не является тканью параболического типа.

Случай 1. Пусть прямые l_1 и l_2 находятся в положении (5), то есть расположены как на рис. 36. Тогда, согласно теореме о границах, третья прямая должна проходить через полюс Γ'' .

1а. Прямая l_3 пересекает прямые l_1 и l_2 . Поскольку через точку Γ'' может проходить только одна прямая, пересекающая l_1 и l_2 , то $l_3 = A_2P$ (см. рис. 36). При этом граничная кривая для прямых l_1 и l_3 вырождается в точку P , а граничная кривая для прямых l_2 и l_3 есть коника, изображенная на рис. 36, — линия пересечения плоскости, содержащей эти прямые, с квадрикой Дарбу. Полюс этой коники есть точка A_1 . Поскольку точка A_1 лежит на прямой l_1 , то получается, что условие теоремы о границах выполнено для каждой пары из прямых l_i . Ткань в рассматриваемом случае является регулярной, и, как легко увидеть из описанной геометрической конструкции, в точности совпадает со случаем 7 из классификации Лазаревой.

1б. Пусть теперь прямая l_3 не пересекает прямую l_1 , тогда эти прямые должны находиться в положении (5), как и прямые l_1 и l_2 . Это означает, что прямая l_3 тоже, как и прямая l_2 , пересекает квадрику Дарбу в точке, касательная плоскость в которой (к квадрике Дарбу) содержит прямую l_1 . Таких точек две: A_3 и P . Если l_3 проходит через P , то $l_3 = P\Gamma''$ и l_3 пересекает l_1 , что исключено. Следовательно, $l_3 = A_3\Gamma''$.

Найдем полюс граничной окружности для пары прямых l_1 и l_3 (обозначим его $\tilde{\Gamma}''$). Для этого, согласно теореме 3.4, нужно для этой пары прямых найти точки, аналогичные точкам A_1, A_2, P , затем

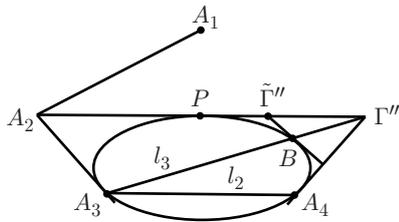


Рис. 37.

найти $\tilde{\Gamma}''$ как показано на рис. 36. Чтобы найти аналог точки A_1 , нужно найти вторую точку пересечения прямой $l_3 = A_3\Gamma''$ с квадрикой Дарбу (обозначим эту точку B) и найти точку пересечения касательной плоскости T_B к квадрике Дарбу с прямой l_1 . Но поскольку прямая $l_3 = A_3\Gamma''$ лежит в плоскости, полярно сопряженной точке A_1 (см. рис. 36), то после

всех указанных операций мы получим снова точку A_1 . Следовательно, и точки A_2, P также «останутся на месте» после всех необходи-

мых построений. А значит, точка $\tilde{\Gamma}''$ находится на касательной A_2P (см. рис. 36, а также рис. 37, на котором изображены соответствующие построения в плоскости, полярно сопряженной точке A_1).

Согласно теореме о границах, если ткань регулярная, то точка $\tilde{\Gamma}''$ должна лежать на прямой l_2 , а это, как видно из рис. 37, невозможно. Следовательно, в этом случае ткань не может быть регулярной.

1в. Прямая l_3 пересекает прямую l_1 , но не пересекает l_2 . Тогда, согласно теореме 3.4, пара прямых l_3, l_2 должна находиться в положении (5), то есть прямая l_3 должна лежать в одной из двух касательных плоскостей к квадрике Дарбу: либо в точке A_3 , либо в точке A_4 (см. рис. 36). Но так как l_3 должна проходить через $\tilde{\Gamma}''$ и пересекать l_1 , то получаем, что $l_3 = A_1\tilde{\Gamma}''$. В результате получается симметричная картина, изображенная на рис. 38. На нем точка A_1 является полюсом плоскости $A_2A_3A_4$, и через нее проходит прямая, полярно сопряженная прямой l_2 (поскольку она получается пересечением касательных плоскостей к квадрике Дарбу в точках A_3 и A_4). Условие теоремы о границах в данном случае выполнено, а ткань является регулярной и совпадает со случаем 5 из классификации Лазаревой.

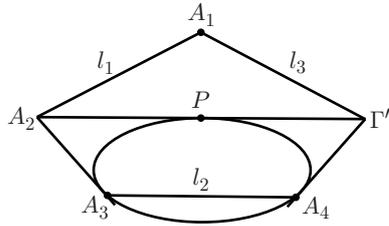


Рис. 38.

Случай 2. Допустим, прямые l_1 и l_2 находятся в положении (4), то есть полярно сопряжены относительно квадрики Дарбу, причем l_1 не пересекает квадрику Дарбу.

2а. Допустим, прямая l_3 не пересекает прямую l_1 . Тогда, в силу теоремы 3.4, прямые l_1 и l_3 должны находиться в положении (5), то есть прямая l_1 должна лежать в касательной плоскости к квадрике Дарбу в одной из точек, в которых прямая l_3 пересекает эту квадрику. В силу полярной сопряженности прямых l_1 и l_2 , через эту точку проходит и прямая l_2 , обозначим ее (то есть точку) через A_3 . Вторую точку пересечения прямой l_3 с квадрикой Дарбу обозначим A_4 , а другую точку пересечения прямой l_2 с Q — через P . Тогда рассматриваемое расположение прямых (с точностью до замены l_2 на l_3) будет соответствовать рис. 36. Согласно лемме 3.2, точка $\tilde{\Gamma}''$, являющаяся полюсом граничной кривой пучков — прообразов прямых l_1 и l_3 , должна лежать на пересечении двух касательных плоскостей к квадрике Дарбу в точках A_4 и P , и поэтому никак не может лежать на прямой l_2 (иначе прямые l_2 и l_3 совпадают). Следовательно, условие регулярности из теоремы о границах не выполняется, и ткань регулярной не является.

2б. Допустим, прямая l_3 пересекает прямую l_1 , но не пересекает прямую l_2 . Тогда, в силу теоремы 3.4, прямые l_2 и l_3 должны находиться в положении (5), то есть прямая l_3 должна лежать в одной из

касательных плоскостей к квадрике Дарбу Q , проведенных в точках ее пересечения с прямой ℓ_2 . Пусть, как и выше, $\ell_2 = A_3A_4$, точки A_3 и A_4 лежат на Q , A_1 — точка пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_3 , и прямая ℓ_3 лежит в касательной плоскости T_{A_3} . Пусть T — точка касания квадрики Дарбу другой плоскости, проходящей через ℓ_3 . Точка Γ'' , являющаяся полюсом граничной кривой прямых ℓ_2 и ℓ_3 (сравни с рис. 36), лежит на пересечении касательных плоскостей к квадрике Дарбу, проведенных в точках T и A_4 и полярно сопряжена точке A_1 . Поэтому точка Γ'' не может находиться на прямой ℓ_1 , и по теореме о границах ткань в рассматриваемом случае не может быть регулярной.

Итак, мы получили, что если прямая ℓ_3 не пересекает хотя бы одну из полярно сопряженных прямых ℓ_1 и ℓ_2 , то ткань не является регулярной. Таким образом, мы получили утверждение, доказанное в [Ба-1]: *если два пучка из трех ортогональны, то круговая ткань будет регулярной тогда и только тогда, когда в каждом из этих пучков есть окружность, принадлежащая третьему пучку*. Все регулярные ткани в этом случае исчерпываются классом 2 из классификации Лазаревой.

Случай 3. Рассмотрим регулярную ткань в случае, когда прямые ℓ_1 и ℓ_2 находятся в положении (6), то есть касаются квадрики Дарбу в точках A_1 и A_2 . Напомним, что граничная кривая в этом случае распадается на две ортогональные окружности, образы которых Γ' и Γ'' лежат на прямой, полярно сопряженной прямой A_1A_2 . Но по теореме о границах точки Γ' и Γ'' в случае регулярности должны лежать на прямой ℓ_3 — образе третьего пучка, и мы получаем класс 6.1 из классификации Лазаревой.

Доказана

Теорема 3.6. *Существует всего 4 класса регулярных круговых тканей, у которых хотя бы два из трех пучков, образующих ткань, не принадлежат одной связке, — это ткани типа 2, 5, 6.1 и 7 по классификации Лазаревой.*

Мы перечислили регулярные круговые ткани, у которых по крайней мере 2 пучка из трех не принадлежат одной связке окружностей. В проективном пространстве такой ткани отвечает тройка прямых, по крайней мере две из которых не лежат в одной плоскости. Альтернативой является случай, когда любая пара из трех прямых лежит в одной плоскости. Здесь две возможности: либо все три прямые лежат в одной плоскости, либо все три проходят через одну точку. Но эти случаи уже рассмотрены. Таким образом, теорема 3.2 доказана.

§ 3.6. Классификация регулярных круговых три-тканей с точностью до круговых преобразований

В этом параграфе мы детализируем классификацию Лазаревой (см. § 3.2) с точностью до круговых преобразований плоскости.

Сначала заметим, что всякому круговому преобразованию плоскости, переводящему круговую ткань в круговую, в проективном пространстве соответствует проективное преобразование, переводящее в себя квадрику Дарбу Q [Р-1]. Множество таких преобразований образует шестипараметрическую группу [Кр-1]. В этом параграфе две круговые ткани W и W' мы называем эквивалентными, если существует круговое преобразование, переводящее одну ткань в другую.

Теорема 3.7. *Существует 48 неэквивалентных (относительно круговых преобразований) типов регулярных круговых три-тканей. Из них 5 типов содержат по ∞^3 неэквивалентных тканей, 11 типов — по ∞^2 неэквивалентных тканей, 12 типов — ∞^1 неэквивалентных тканей; 5 тканей допускают однопараметрическую группу автоморфизмов.*

□ **Класс 0.** Пусть π — плоскость, в которой лежат ℓ_i , изображающие пучки окружностей ткани W . Эта плоскость может пересекать квадрику Q , может касаться ее и может не иметь с ней общих точек. Все эти случаи являются проективно различными.

Случай 0.1: три прямые ℓ_i образуют треугольник и плоскость π не имеет с Q общих точек.

Прямые ℓ_i в плоскости p можно задать точками пересечения (обозначим их A_i). Аналогично, ткань W' задается треугольником A_i' в плоскости p' . Чтобы задать проективное преобразование, переводящее точки A_i в точки A_i' , нужно наложить 9 условий на параметры этого преобразования. Однако в нашем распоряжении только 6 параметров группы круговых преобразований. Следовательно, рассматриваемая круговая ткань W обладает тремя инвариантами. Иными словами, существует ∞^3 неэквивалентных круговых тканей рассматриваемого типа.

В качестве инвариантов, характеризующих класс круговых тканей, в данном случае можно взять углы между общими окружностями пучков (этим окружностям соответствуют точки A_i).

Случай 0.2: три прямые ℓ_i образуют треугольник и плоскость π касается квадрики Q в некоторой точке T .

- 0.2.1 — точка T не лежит ни на одной из прямых ℓ_i . Пусть T' — точка касания плоскости π' с квадрикой Дарбу, причем T' также не лежит ни на одной из прямых ℓ_i' . Пусть P — проективное преобразование, переводящее точки T и A_i в точки T' и A_i' соответственно. Такое преобразование определяется восемью соотношениями на параметры (по 2 соотношения на каждую точку).

В самом деле, так как точки T и T' лежат на квадрике Дарбу, то соотношение $P(T) = T'$ дает 2 соотношения на параметры. А так как точки A_i (соответственно A_i') лежат в касательной плоскости точки T (соответственно T'), то положение каждой из них также определяется двумя координатами. Следовательно, каждое из соотношений $P(A_i) = A_i'$ дает два соотношения на параметры преобразования P . Рассуждая, как в п. 0.1, приходим к выводу, что ткань рассматриваемого типа имеет 2 инварианта, то есть мы имеем в данном случае ∞^2 проективно неэквивалентных типов тканей.

- 0.2.2 — точка T лежит, например, на прямой ℓ_1 . Пусть точки A_2 и A_3 лежат на прямой ℓ_1 . Рассмотрим проективное преобразование P , переводящее точки T и A_i в точки T' и A_i' соответственно. Каждое из преобразований $P(A_1) = A_1'$, $P(A_2) = A_2'$ дает по 2 соотношения на параметры преобразования P . Чтобы перевести точку A_3 в A_3' , необходимо наложить одно условие на параметры, поскольку уже $P(TA_1) = T'A_1'$. Таким образом, получается 7 условий на параметры преобразования P . Отсюда вытекает, что существует ∞^1 проективно неэквивалентных типов рассматриваемых круговых тканей.
- 0.2.3 — $T \equiv A_1$. Аналогичные рассуждения дают, что в рассматриваемом случае получается 6 соотношений на параметры преобразования P . Следовательно, любые две ткани рассматриваемого типа эквивалентны.

С л у ч а й 0.3: три прямые ℓ_i образуют треугольник и плоскость π пересекает квадрику Q по кривой C . Возможны следующие варианты.

- 0.3.1 — кривая C не имеет общих точек с прямыми ℓ_i ;
- 0.3.2 — C не проходит ни через одну из трех точек A_i и пересекает одну из прямых ℓ_i ;
- 0.3.3 — C не проходит ни через одну из трех точек A_i и пересекает две прямые из трех прямых ℓ_i ;
- 0.3.4 — C не проходит ни через одну из трех точек A_i и пересекает все три прямые ℓ_i ;
 - а) точки пересечения прямых ℓ_i находятся вне кривой C ;
 - в) одна из трех точек пересечения прямых ℓ_i находится внутри кривой C ;
 - с) две точки из трех точек пересечения прямых ℓ_i находятся внутри кривой C ;
 - д) все точки пересечения прямых ℓ_i находятся внутри кривой C ;
- 0.3.5 — C касается одной из прямых ℓ_i и не пересекает две другие;
- 0.3.6 — C касается одной из трех прямых ℓ_i и пересекает одну из двух других;

- 0.3.7 — C касается одной из прямых ℓ_i и пересекает две другие;
- 0.3.8 — C касается двух прямых из трех прямых ℓ_i , а третья прямая не пересекает C ;
- 0.3.9 — C касается двух прямых из трех прямых ℓ_i , а третья прямая пересекает C ;
- 0.3.10 — C касается всех трех прямых ℓ_i ;
- 0.3.11 — C проходит через одну из трех точек A_i , например, A_1 , и не пересекает прямую $A_2 A_3$;
- 0.3.12 — C проходит через одну из трех точек A_i , например, A_1 , и пересекает прямую $A_2 A_3$;
- 0.3.13 — C проходит через две из трех точек A_i , например, A_1 и A_2 , и пересекает прямые $A_1 A_3$ и $A_2 A_3$;
- 0.3.14 — C проходит через точки A_i ;
- 0.3.15 — C проходит через одну из трех точек A_i , например, A_1 , и касается прямой $A_2 A_3$;
- 0.3.16 — C проходит через две из трех точек A_i , например, A_1 и A_2 , пересекает прямую $A_1 A_3$ и касается $A_2 A_3$;
- 0.3.17 — C касается двух прямых, например, ℓ_1 и ℓ_2 , причем прямой ℓ_1 в точке A_2 ;
- 0.3.18 — C проходит через две из трех точек A_i , например, A_1 и A_2 , и касается прямых $A_1 A_3$ и $A_2 A_3$.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

В случаях 0.3.1–0.3.4 повторив рассуждения, проведенные в случае 0.1, мы придем к такому же выводу: три-ткани рассматриваемых типов имеют три инварианта, то есть в каждом из случаев 0.3.1–0.3.4 имеется ∞^3 неэквивалентных круговых тканей.

В случае 0.3.5 пусть кривая C касается прямой $\ell_1 = A_2 A_3$ в точке T . Рассмотрим вторую ткань такого же типа и проективное преобразование P , переводящее тройку точек A_i в аналогичную тройку точек A_i' . Чтобы перевести точку T в T' , необходимо наложить 2 условия на параметры. Преобразование $P(A_2) = A_2'$ дает 2 соотношения на параметры преобразования P , т.к. точка A_2 лежит в касательной плоскости точки T , а точка A_2' — в касательной плоскости точки T' . Чтобы перевести точку A_3 в A_3' , необходимо наложить одно условие на параметры, поскольку уже $P(A_2) = A_2'$. Еще с помощью трех условий на параметры переводим точку A_1 в A_1' . Таким образом, получается 8 соотношений на параметры. Отсюда следует, что круговая ткань рассматриваемого типа имеет два инварианта, то есть существует ∞^2 неэквивалентных типов таких тканей.

В случаях 0.3.6 и 0.3.7 рассуждения будут аналогичными.

Пусть в случае 0.3.8 кривая C касается двух прямых ℓ_1 и ℓ_2 в точках T_1 и T_2 соответственно. Преобразование P , переводящее эту конструкцию в аналогичную, переводит точки T_1 и T_2 в точки T_1' и T_2' (4 условия на параметры). При этом линия m пересечения плоскостей, касательных к квадрике Дарбу в точках T_1 и T_2 , перейдет в аналогичную линию пересечения m' . Так как точка A_3 пересечения

прямых ℓ_1 и ℓ_2 лежит на m , то преобразование $P(A_3) = A_3'$ даст только одно условие на параметры преобразования P . Далее, поскольку образы прямых $\ell_1 = T_1 A_3$ и $\ell_2 = T_2 A_3$ уже определены, то условия $P(A_1) = A_1'$ и $P(A_2) = A_2'$ дадут по одному соотношению на параметры. Таким образом, получается всего 7 условий на параметры преобразования P , так что ткань рассматриваемого типа имеет 1 инвариант и существует ∞^1 неэквивалентных типов таких тканей.

В случае 0.3.9 рассуждения и выводы аналогичны.

В случае 0.3.10 кривая C касается трех прямых ℓ_i соответственно в точках T_i , которые полностью определяют положение этих прямых. Чтобы перевести точки T_i в аналогичные, необходимо наложить 6 условий на параметры. Следовательно, существует единственное круговое преобразование, переводящее ткань рассматриваемого типа в аналогичную, и, таким образом, все эти ткани эквивалентны.

В случае 0.3.11 кривая C проходит через одну из трех точек A_i , например, A_1 , и не пересекает прямую $A_2 A_3$. Соотношение $P(A_1) = A_1'$ дает два соотношения на параметры преобразования P , т.к. точка A_1 лежит на квадрике Дарбу. Каждое из преобразований $P(A_2) = A_2'$ и $P(A_3) = A_3'$ дает по 3 соотношения на параметры преобразования P . Таким образом, всего получается 8 соотношений, поэтому существует ∞^2 неэквивалентных тканей рассматриваемого типа.

В случае 0.3.12 получаем аналогичный результат.

В случае 0.3.13 получается $2+2+3=7$ соотношений на параметры, то есть имеется ∞^1 неэквивалентных круговых тканей рассматриваемого типа.

В случае 0.3.14 соотношений на параметры будет $2+2+2=6$, то есть все ткани этого типа будут эквивалентными.

В случае 0.3.15 кривая C проходит через одну из трех точек A_i , например, A_1 , и касается прямой $A_2 A_3$ в точке T_1 . Соотношения $P(A_1) = A_1'$ и $P(T_1) = T_1'$ дадут по два условия на параметры преобразования P . Соотношение $P(A_2) = A_2'$ даст 2 соотношения на параметры преобразования P , т.к. точка A_2 лежит в плоскости, касательной к квадрике Дарбу в точке T_1 . Чтобы перевести точку A_3 в A_3' , необходимо наложить только одно условие на параметры, поскольку уже $P(T_1 A_2) = T_1' A_2'$. Таким образом, проективное преобразование определяется семью условиями на параметры. Отсюда следует, что существует ∞^1 неэквивалентных типов тканей.

В случае 0.3.16 кривая C проходит через точки A_1 и A_2 , пересекает прямую $A_1 A_3$ и касается прямой $A_2 A_3$ в точке A_2 . Каждое из преобразований $P(A_1) = A_1'$, $P(A_2) = A_2'$ дает по 2 соотношения на параметры преобразования P . Точка A_3 лежит в плоскости, касательной к квадрике Дарбу в точке A_2 , поэтому условие $P(A_3) = A_3'$ дает также 2 условия на параметры. Итак, всего получается 6 соотношений на параметры преобразования P . Следовательно, любые две ткани рассматриваемого типа эквивалентны.

В случае 0.3.17 пусть кривая C касается прямых ℓ_1 и ℓ_2 соответственно в точках A_2 и T . Соотношения $P(A_2) = A_2'$ и $P(T) = T'$ дадут по два условия на параметры преобразования P . Точка A_3 , являющаяся точкой пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 , лежит на линии пересечения касательных плоскостей к квадрике Дарбу в точках A_2 и T , поэтому чтобы перевести точку A_3 в A_3' , необходимо наложить одно условие на параметры преобразования P . Чтобы перевести точку A_1 в A_1' , необходимо наложить также одно условие на параметры, поскольку образ прямой $\ell_2 = TA_3$ уже определен. Итак, получается 6 соотношений на параметры преобразования P , т. е. любые две ткани рассматриваемого типа эквивалентны.

В случае 0.3.18 кривая C проходит через две точки A_1 и A_2 и касается в этих точках прямых ℓ_1 и ℓ_2 . Каждое из преобразований $P(A_1) = A_1'$, $P(A_2) = A_2'$ дает по 2 соотношения на параметры преобразования P . Чтобы перевести точку A_3 в A_3' , необходимо наложить еще одно условие на параметры, поскольку A_3 лежит на линии пересечения плоскостей, касательных к квадрике Дарбу в точках A_1 и A_2 . Таким образом, получается всего 5 условий на параметры преобразования P . Так как группа круговых преобразований является шестипараметрической, то получаем, что любые две ткани рассматриваемого типа эквивалентны, и любая такая ткань допускает однопараметрическую группу автоморфизмов.

Случай 0.4: три прямые ℓ_i лежат в одной плоскости π , проходят через одну точку B , и плоскость π не имеет с Q общих точек.

Пусть проективное преобразование P переводит прямые ℓ_i , изображающие пучки окружностей ткани W , в прямые ℓ_i' . Условие $P(B) = B'$ даст 3 соотношения на параметры преобразования P ; условия $P(\ell_1) = \ell_1'$ и $P(\ell_2) = \ell_2'$ дадут $2+2=4$ соотношения на параметры. Этим самым плоскость π' будет определена. Поэтому условие $P(\ell_3) = \ell_3'$ даст только одно соотношение на параметры преобразования P . Итого получаем $3+2+2+1=8$ условий на параметры этого преобразования. Так как в нашем распоряжении только 6 параметров группы круговых преобразований, то рассматриваемая круговая ткань W обладает двумя инвариантами. Иными словами, существует ∞^2 неэквивалентных круговых тканей рассматриваемого типа.

Случай 0.5: три прямые ℓ_i лежат в одной плоскости π , проходят через одну точку B , и плоскость π касается квадрики Q в некоторой точке T .

- 0.5.1 — точка T не лежит ни на одной из прямых ℓ_i . Пусть P — проективное преобразование, переводящее точку T и три прямые ℓ_i в точку T' и три прямые ℓ_i' соответственно. Так как точки T и T' лежат на квадрике Дарбу, то соотношение $P(T) = T'$ дает 2 соотношения на параметры преобразования P . А так как точка B лежит в касательной плоскости точки T , то соотношение $P(B) = B'$ даст также 2 условия на параметры. Поскольку

касательная плоскость к квадрике Q точкой B' уже определена, то каждое из соотношений $P(\ell_i) = \ell_i'$ дает одно соотношение на параметры преобразования P . Всего получаем 7 соотношений, следовательно, ткань рассматриваемого типа имеет 1 инвариант, и в данном случае мы имеем ∞^1 неэквивалентных типов тканей.

- 0.5.2 — точка T лежит на одной из прямых ℓ_i , например, на прямой ℓ_1 . Этот случай отличается от предыдущего тем, что точки T и B однозначно определяют ту прямую из трех прямых ℓ_i , на которой они лежат. Поэтому получается 6 соотношений на параметры преобразования P . Следовательно, любые две ткани рассматриваемого типа эквивалентны.
- 0.5.3 — $T \equiv B$. В этом случае получается 5 соотношений на параметры преобразования P , поэтому все ткани данного типа эквивалентны, и любая из них допускает однопараметрическую группу автоморфизмов.

Случай 0.6: три прямые ℓ_i лежат в одной плоскости π , проходят через одну точку B , и плоскость π пересекает квадрик Q по кривой C . Возможны следующие варианты:

- 0.6.1 — кривая C не имеет общих точек с прямыми ℓ_i ;
- 0.6.2 — C не проходит через точку B и пересекает одну из прямых ℓ_i ;
- 0.6.3 — C не проходит через точку B и пересекает две прямые из трех прямых ℓ_i ;
- 0.6.4 — C не проходит через точку B и пересекает все три прямые ℓ_i ;
 - а) точка B находится вне кривой C ;
 - в) точка B находится внутри кривой C ;
- 0.6.5 — C касается одной из прямых ℓ_i и не пересекает две другие;
- 0.6.6 — C касается одной из трех прямых ℓ_i и пересекает одну из двух других;
- 0.6.7 — C касается одной из прямых ℓ_i и пересекает две другие;
- 0.6.8 — C касается двух из трех прямых ℓ_i , а третья прямая не пересекает C ;
- 0.6.9 — C касается двух из трех прямых ℓ_i , а третья прямая пересекает C ;
- 0.6.10 — C проходит через точку B и пересекает все прямые ℓ_i ;
- 0.6.11 — C проходит через точку B и касается одной из прямых, например, ℓ_1 .

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

В случаях 0.6.1–0.6.4 повторив рассуждения, проведенные в случае 0.4, мы приходим к такому же выводу: три-ткани рассматриваемых типов имеют два инварианта, то есть в каждом из случаев 0.6.1–0.6.4 имеется ∞^2 неэквивалентных круговых тканей.

В случае 0.6.5 обозначим точку касания кривой C и прямой ℓ_1 через T . Рассмотрим вторую ткань такого же типа и проективное преобразование P , переводящее тройку прямых ℓ_i в аналогичную тройку прямых ℓ_i' . Чтобы перевести точку T в T' , необходимо наложить 2 условия на параметры преобразования P . Соотношение $P(\ell_1) = \ell_1'$ даст одно соотношение на параметры преобразования P , т.к. прямая ℓ_1 лежит в касательной плоскости точки T , а прямая ℓ_1' — в касательной плоскости точки T' . Чтобы перевести точку B в B' , необходимо наложить одно условие на параметры, поскольку уже $P(TB) = T'B'$. Еще с помощью трех условий на параметры переводим прямую ℓ_2 в прямую ℓ_2' , а прямую ℓ_3 — в ℓ_3' . Таким образом, получается всего 7 соотношений на параметры. Отсюда следует, что круговая ткань рассматриваемого типа имеет один инвариант, то есть существует ∞^1 неэквивалентных типов таких тканей.

В случаях 0.6.6 и 0.6.7 рассуждения будут аналогичными.

Пусть в случае 0.6.8 кривая C касается прямых ℓ_1 и ℓ_2 в точках T_1 и T_2 соответственно. Преобразование P , переводящее эту конструкцию в аналогичную, переводит точки T_1 и T_2 в точки T_1' и T_2' (4 условия на параметры). При этом линия m пересечения плоскостей, касательных к квадрике Дарбу в точках T_1 и T_2 , перейдет в аналогичную линию пересечения m' . Так как точка B пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 лежит на m , то преобразование $P(A_3) = A_3'$ дает только одно условие на параметры преобразования P . Далее, поскольку образы прямых $\ell_1 = T_1B$ и $\ell_2 = T_2B$ уже определены, то условие $P(\ell_3) = \ell_3'$ даст только одно соотношение на параметры. Таким образом, получается всего 6 условий на параметры преобразования P . Следовательно, существует единственное круговое преобразование, переводящее ткань рассматриваемого типа в аналогичную, и, таким образом, все эти ткани эквивалентны.

В случае 0.6.9 рассуждения и выводы аналогичны.

В случае 0.6.10 соотношение $P(B) = B'$ дает два соотношения на параметры преобразования P , т.к. точка B лежит на квадрике Дарбу. Далее, рассуждая как в п. 0.4, получим $2+2+2+1$ условий на параметры преобразования P . Таким образом, имеем ∞^1 неэквивалентных типов тканей.

В случае 0.6.11 каждое из условий $P(B) = B'$ и $P(\ell_1) = \ell_1'$ даст по 2 соотношения на параметры преобразования P . Еще с помощью трех условий на параметры переводим прямую ℓ_2 в прямую ℓ_2' , а ℓ_3 — в ℓ_3' . Таким образом, получается всего 7 соотношений. Отсюда следует, что существует ∞^1 неэквивалентных типов тканей рассматриваемого вида.

Класс 1. Напоминаем, что в этом классе два подкласса, 1.1 и 1.2, см. § 3.2.

- 1.1 — прямые ℓ_i проходят через одну точку, лежащую внутри квадрики Дарбу, и являются ребрами тетраэдра, автополярного относительно квадрики Дарбу. Обозначим общую точку пря-

мых l_i через A_4 . Плоскость, полярно сопряженная точке A_4 , пересекает прямые l_i в трех точках, которые обозначим соответственно через A_1 , A_2 и A_3 . Полученные 4 точки образуют автополярный тетраэдр. В нем уравнение квадрики Дарбу имеет канонический вид. Вследствие этого любые две ткани рассматриваемого класса эквивалентны, так как существует единственное проективное преобразование, переводящее автополярный тетраэдр в автополярный тетраэдр, и такое преобразование не меняет квадрику, поскольку она в каждом из автополярных реперов имеет один и тот же канонический вид. Поскольку преобразование единственное, то автоморфизмов нет.

- 1.2 — прямые l_i проходят через одну точку, лежащую вне квадрики Дарбу, и являются ребрами тетраэдра, автополярного относительно квадрики Дарбу. Повторив рассуждения предыдущего пункта, получим аналогичный результат.

Класс 2. Прямые l_1 и l_2 сопряжены относительно квадрики Дарбу, а прямая l_3 их пересекает. Имеется 3 варианта:

- 2.1 — прямая l_3 не пересекает квадрику Q ;
- 2.2 — прямая l_3 пересекает квадрику Q ;
- 2.3 — прямая l_3 касается квадрики Q .

В первых двух случаях поместим точки A_1 и A_2 проективного репера в точки пересечения соответственно сопряженных прямых l_1 и l_2 с прямой l_3 . Пусть точка A_3 лежит на прямой l_1 и полярно сопряжена относительно Q точке A_1 , а точка A_4 лежит на прямой l_2 и полярно сопряжена относительно Q точке A_2 . В полученном автополярном репере уравнение квадрики Дарбу имеет канонический вид. Так как существует единственное проективное преобразование, переводящее автополярный репер в автополярный и квадрику Дарбу в себя, то все ткани рассматриваемого типа эквивалентны и автоморфизмов нет.

В третьем случае пусть прямая l_1 не пересекает квадрику Дарбу, прямая l_2 ей полярно сопряжена и пересекает квадрику Дарбу в точках M и N , а прямая l_3 пересекает l_1 в точке B и проходит, например, через точку M . Таким образом, проективная конструкция вполне определяется точками M , N и B . Проективное преобразование P определяется в этом случае пятью соотношениями на параметры, поэтому любые две ткани данного типа эквивалентны, и каждая ткань этого класса допускает однопараметрическую группу автоморфизмов.

Класс 3. Прямые l_1 и l_2 сопряжены и касаются квадрики Дарбу в точке A , через которую проходит третья прямая.

Пусть полярно сопряженные прямые l_1 и l_2 касаются квадрики Q в точке A_3 . Обозначим плоскость, в которой они лежат, через π . Прямая l_3 проходит через точку A_3 , но не лежит в плоскости π (иначе получаем класс 0). Вторую точку пересечения прямой l_3 с квадрикой Q обозначим A_4 . Прямая, полярно сопряженная прямой l_3 , лежит в плоскости π и пересекает прямые l_1 и l_2 соответственно в точках A_1 и A_2 . Рассмотрим вторую ткань такого же типа и проективное преоб-

разование P , переводящее четверку точек A_i в аналогичную четверку точек A_i' . Чтобы перевести пару точек A_3, A_4 в пару точек A_3', A_4' , необходимо наложить 4 условия на параметры. Преобразование $P(A_1) = A_1'$ даст одно соотношение на параметры преобразования P , т.к. точка A_1 лежит на прямой l_3^* , полярно сопряженной прямой $l_3 = A_3A_4$, а точка A_1' — на соответствующей прямой $l_3^{*'}$. Точка A_2' при этом определится однозначно, так как она полярно сопряжена точке A_1' . Таким образом, получается всего 5 соотношений на параметры преобразования P . Отсюда следует, что существует ∞^1 проективных преобразований, оставляющих неподвижной указанную четверку точек. Следовательно, все ткани данного типа эквивалентны, а всякая ткань рассматриваемого типа допускает однопараметрическую группу автоморфизмов.

Класс 4. Прямые l_i проходят через одну точку, а плоскости, содержащие пары этих прямых, касаются квадрики Дарбу.

Обозначим точки касания плоскостей $[l_1, l_2], [l_2, l_3], [l_3, l_1]$ соответственно через A_3, A_1 и A_2 , а точку пересечения трех прямых l_i — через A_4 . Четверка этих точек однозначно определяет прямые l_i . Заметим, что точка A_4 представляет собой полюс плоскости $A_1A_2A_3$. Проективное преобразование P , переводящее точки A_1, A_2 и A_3 в точки, также лежащие на квадрике Дарбу, определяется шестью условиями на параметры. По образам точек A_1, A_2 и A_3 четвертая точка A_4' определится однозначно. Следовательно, проективное преобразование P определяется шестью соотношениями на параметры. Отсюда следует, что все ткани такого типа эквивалентны.

Класс 5. Прямые l_1, l_2 и прямая l_3^* , сопряженная прямой l_3 , пересекаются в одной точке. Плоскости, определяемые парами прямых l_1 и l_2, l_1 и l_3^*, l_2 и l_3^* , касаются квадрики Дарбу.

Как и в предыдущем случае, мы имеем три плоскости $[l_1, l_2], [l_2, l_3], [l_3^*, l_1]$, проходящие через одну точку (обозначим ее A_4) и касающиеся квадрики Дарбу в трех точках, которые обозначим соответственно A_1, A_2 и A_3 . Прямая l_3 полярно сопряжена прямой l_3^* , поэтому, задав прямую l_3^* , мы однозначно определим и прямую l_3 . Итак, задание прямых l_i сводится к заданию четверки точек A_1, A_2, A_3, A_4 . Рассуждая как в предыдущем пункте, докажем, что все ткани этого типа эквивалентны.

Класс 6. В этом классе два подкласса, 6.1 и 6.2, см. § 3.2.

- 6.1 — две непересекающиеся прямые, пусть l_1 и l_2 , касаются квадрики Дарбу, а третья — l_3 сопряжена прямой l_3^* , соединяющей точки касания. Пусть прямые l_1 и l_2 касаются квадрики Дарбу соответственно в точках A_1 и A_2 . Рассматриваемая проективная конструкция вполне определяется точками A_1, A_2 и прямыми l_1 и l_2 . Поэтому проективное преобразование P определяется шестью соотношениями на параметры — по 2 дают соотношения $P(A_1) = A_1'$ и $P(A_2) = A_2'$, и по одному — соотношения $P(l_1) = l_1'$ и $P(l_2) = l_2'$ (поскольку касательные плоско-

сти уже определены). Итак, две любые ткани рассматриваемого типа эквивалентны.

- 6.2 — прямые ℓ_1 и ℓ_2 касаются квадрики Дарбу и пересекаются в точке B , а третья — ℓ_3 сопряжена прямой ℓ_3^* , соединяющей точки касания. Пусть, как и выше, A_1 и A_2 — точки касания. В этом случае получаем 5 условий на параметры преобразования P — по 2 дают соотношения $P(A_1) = A_1'$ и $P(A_2) = A_2'$ и одно — $P(B) = B'$, поскольку точка B' лежит на линии пересечения касательных плоскостей к квадрике в точках A_1' и A_2' . Следовательно, любые две ткани данного типа эквивалентны, и любая три-ткань такого типа допускает однопараметрическую группу автоморфизмов.

Класс 7. Прямая ℓ_2 пересекает квадрику Дарбу в точках B и C . Прямая ℓ_1 лежит в касательной плоскости к квадрике Дарбу в точке B . Прямая ℓ_3 пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_2 и касается квадрики Дарбу в некоторой точке A . Обозначим точку пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_3 через D .

Описанная проективная конструкция вполне определяется точками A , B , C и направлением прямой ℓ_1 в касательной плоскости к квадрике Дарбу к точке B . Следовательно, для проективного преобразования, переводящего такую конструкцию в аналогичную, получим всего $2+2+2+1=7$ соотношений на параметры. Отсюда следует, что существует ∞^1 неэквивалентных типов тканей рассматриваемого вида. ■

ЗАДАЧИ

3.1 Выведите уравнение круговой ткани, приведенное в § 3.1.

3.2 Найдите уравнение граничной кривой двух пучков окружностей, выбрав в каждом пучке базис из прямой (радикальной оси пучка) и окружности наименьшего радиуса.

3.3 Найдите точное число таких трансверсалий трех прямых ℓ_i , которые касаются квадрики Дарбу (см. § 3.4).

3.4 Опишите автоморфизмы каждого из пяти классов круговых тканей, указанных в теореме 3.7.

ТРИ-ТКАНИ БУРАУ

**§ 4.1. Задача о триангуляции плоскости
семействами коник. Три-ткани Бурау.
Классификация пучков коник**

Если три-ткань W , заданная в области D , является регулярной (шестиугольной, параллелизуемой), то линиями этой ткани можно триангулировать область D , то есть разбить ее на криволинейные треугольники сколь угодно малого размера — так, как это было сделано при доказательстве теоремы 1.16. Поэтому можно сказать, что в предыдущей главе мы описали всевозможные способы триангуляции плоскости тремя семействами окружностей (или *C -триангуляции*). А поскольку плоскость можно конформно отобразить на сферу так, что окружности перейдут в окружности (отображение Дарбу или стереографическая проекция), то мы получаем всевозможные гладкие *C -триангуляции* сферы.

В частности, используя результаты гл. 3, мы можем весьма просто описать все гладкие *C -триангуляции* сферы с помощью географической сети, то есть с помощью такой круговой три-ткани, два семейства которой состоят из параллелей и меридиан. Всегда можно считать, что рассматриваемая сфера — это квадрика Дарбу Q , а система координат выбрана стандартно — параллели высекаются плоскостями, перпендикулярными оси Oz , а меридианы — плоскостями, проходящими через ось Oz . Тогда полюсы параллелей относительно Q лежат на оси Oz , а полюсы меридианов — на бесконечно удаленной прямой в плоскости xOy . В соответствии с обозначениями главы 3, это прямые l_1 и l_2 . Эти прямые полярно сопряжены относительно сферы, то есть квадрики Дарбу. Поэтому, в соответствии с теоремой 3.2 ткань W будет регулярной тогда и только тогда, когда прямая l_3 пересекает прямые l_1 и l_2 . Поскольку l_2 в бесконечности, то это означает, что

ℓ_3 — произвольная прямая, перпендикулярна оси Oz и пересекающая ее. Таким образом, третье семейство окружностей состоит из линий тени, при условии, что источник света движется по ℓ_3 . Или по-другому: линии третьего семейства высекаются плоскостями пучка, ось которого сопряжена прямой ℓ_3 относительно Q . Это также прямая, перпендикулярная оси Oz .

Естественно поставить более широкую задачу: описать триангуляции плоскости тремя семействами кривых второго порядка (коник). В этой главе мы рассматриваем частный случай этой задачи: описываем все триангуляции плоскости, полученные с помощью тканей Бурау на кубических поверхностях.

Пусть V — кубическая поверхность (кубика) в трехмерном проективном пространстве. Известно, что на всякой кубической поверхности есть 27 прямых (не обязательно вещественных), будем называть их также прямолинейными образующими. Пусть $\ell_i, i = 1, 2, 3$, — 3 прямые, лежащие на V . Всякая плоскость, проходящая через ℓ_i , пересекает V по кривой второго порядка S , так что в сечении получается (как и должно быть) кривая третьего порядка $\ell_i \cup S$. Обозначим через L_i пучки плоскостей с осями ℓ_i , λ_i — семейства коник, высекаемых плоскостями пучков L_i на V , через W — три-ткань Бурау, образованную семействами λ_i (см. Введение). При проектировании ткани W из некоторой точки P на произвольную плоскость π получается три-ткань \tilde{W} , образованная также семействами коник; эти семейства будем обозначать $\tilde{\lambda}_i$. Будем говорить, что три-ткань \tilde{W} перспективно эквивалентна три-ткани W . Если одна из тканей \tilde{W} или W будет регулярной, то таковой будет и другая. В самом деле, при проектировании замкнутые шестиугольные фигуры переходят в замкнутые.

Указанные 27 прямых на кубике образуют сложную конфигурацию, часть из них пересекаются. Кроме того, существуют кубические поверхности, на которых прямые расположены специальным образом. Например, на кубическом конусе имеется ∞ прямых. Три-ткань Бурау не будет, вообще говоря, регулярной, если прямые ℓ_i находятся в специальном расположении (не являются попарно скрещивающимися). Соответствующие три-ткани будем называть *специальными тканями Бурау*. В этой главе рассматриваются три случая расположения прямых ℓ_i на невырожденной кубической поверхности ¹⁾: две из прямых ℓ_i имеют общую точку; одна из прямых пересекает две остальные; все три прямые лежат в одной плоскости. В каждом из этих случаев выделен подкласс регулярных тканей. Последние разделены на основные классы, для каждого из которых соответствующая кубическая

¹⁾ То есть не распадающейся на плоскости и квадрату или на 3 плоскости.

поверхность охарактеризована соотношениями на коэффициенты и в терминах сингулярностей (теоремы 4.3, 4.5, 4.8).

Поскольку произвольная прямая пересекает кубическую поверхность V , вообще говоря, в трех точках, то каждое из семейств коник λ_i , образующих на V три-ткань Бурау W , проектируется, вообще говоря, в кубическое семейство коник. Таким образом, через каждую точку области определения ткани \widetilde{W} проходит по три линии из каждого семейства $\widetilde{\lambda}_i$.

Просто показывается, что семейства коник $\widetilde{\lambda}_i$ будут (а) квадратичными, если и только если центр проектирования P лежит на V и (б) линейными (то есть пучками), если точка P к тому же является особой точкой кубика V (задача 4.1). Как будет видно из приведенных доказательств, кубика, допускающая специальную регулярную три-ткань Бурау, имеет по крайней мере одну особую точку. Следовательно, каждая специальная регулярная ткань Бурау может быть спроектирована (из особой точки) на плоскость в регулярную три-ткань, образованную пучками коник. Перебирая всевозможные варианты проектирования, мы приходим к основному результату, сформулированному в теореме 4.23: в случае, если кубика не распадается на плоскость и квадрату, существует 38 проективно различных типов тканей, образованных пучками коник, перспективно эквивалентных регулярным специальным тканям Бурау.

Простейший пример ткани Бурау получается следующим образом. Полилинейное уравнение (1.16) определяет в пространстве U параметров u_1, u_2, u_3 кубическую поверхность V , на которой координатные плоскости $u_i = c_i = \text{const}$ высекают ткань W'_0 , эквивалентную ткани W_0 . Найдем проективный аналог ткани W'_0 , для чего перейдем в U к однородным координатам, положив $u_i \rightarrow u_i/u_4$. Тогда уравнение (1.16) примет вид

$$Au_1u_2u_3 + B_1u_2u_3u_4 + B_2u_1u_3u_4 + B_3u_1u_2u_4 + C_1u_1(u_4)^2 + C_2u_2(u_4)^2 + C_3u_3(u_4)^2 + D(u_4)^3 = 0; \quad (4.1)$$

при этом семейства координатных плоскостей $u_i = \text{const}$ станут пучками плоскостей, оси которых (обозначим их ℓ_i) определяются уравнениями $u_i = 0, u_4 = 0$. Как видно из (4.1), прямые ℓ_i лежат на кубике V , а точки их пересечения являются ее особыми точками. Непосредственно проверяется, что последние свойства характеризуют кубическую поверхность V . Таким образом, доказано следующее

Предложение 4.1. *Три-ткань W_0 эквивалентна специальной ткани Бурау W'_0 , высекаемой на кубике V тремя попарно пересекающимися прямыми, лежащими на V , причем точки пересечения этих прямых являются особыми точками кубики V .*

Несколько слов о методе доказательства. В предыдущей главе мы полностью решили проблему классификации регулярных круговых тканей с помощью теоремы о границах регулярной ткани. Три-ткань,

образованная пучками коник, значительно более сложный геометрический объект, нежели круговая ткань. В настоящей главе используются условия линеаризации алгебраических уравнений (см. § 1.3), определяющих тот или иной класс тканей Бурау.

Предварительно дадим классификацию пучков коник. Произвольный пучок определяется двумя базисными кониками, которые пересекаются в четырех точках, общих всем коникам пучка. Они называются *вершинами пучка*. Пучок назовем *эллиптическим* (*E-пучок*), если все его вершины различные (т.е. *простые* или *однократные*) и вещественные; *гиперболическим* (*H-пучок*), если вершины попарно комплексно-сопряженные и различные; *полуэллиптическим* (*EH-пучок* или *HE-пучок*), если две вершины различные и вещественные, а две мнимые. Если две вершины совпадают, то все коники пучка касаются друг друга в двойной вершине. Такой пучок будем называть *параболическим пучком* (*P-пучок*) *эллиптического* или *гиперболического типа* (*PE-пучок* или *PH-пучок*) в зависимости от того, являются ли простые вершины вещественными или мнимыми. Если вершины попарно совпадают, то пучок назовем *дважды параболическим* (*WP-пучок*). Если три вершины пучка совпадают, то все коники пучка будут иметь в тройной (трехкратной) вершине касание второго порядка. Такой пучок назовем *сильнопараболическим* (*SP-пучок*). Наконец, если все 4 вершины совпадают, то все коники пучка будут иметь в этой вершине касание третьего порядка. Такой пучок назовем *сверхпараболическим* (*UP-пучок*).

Непосредственным вычислением доказываются следующие утверждения (задача 4.3).

Предложение 4.2.

1. *PE-пучок* (*PH-пучок*) коник однозначно определяется своими вершинами и общей касательной в двойной вершине; *WP-пучок* коник однозначно определяется своими вершинами и общими касательными коник пучка в этих вершинах.

2. Существует ∞^1 *SP-пучков* (связка) коник, имеющих заданные вершины и общую касательную в тройной вершине.

3. Существует ∞^2 *UP-пучков* (гиперсвязка) коник, имеющих заданную четырехкратную вершину и общую касательную в ней.

4. Произвольный *SP-пучок* имеет вид $Q + \lambda T\ell = 0$, где $Q = 0$ — произвольная коника, $T = 0$ — касательная к Q , $\ell = 0$ — прямая, проходящая через точку касания, λ — параметр пучка. В некоторых проективных координатах уравнение связки из п. 2 имеет вид

$$x^1x^3 + a(x^2)^2 + \lambda x^2x^3 = 0. \quad (4.2)$$

Здесь тройная вершина — A_1 , простая вершина — A_3 , общая касательная — A_1A_2 .

5. Произвольный *UP-пучок* имеет вид $Q + \lambda T^2 = 0$, где обозначения те же. Уравнение гиперсвязки из п. 3 может быть записано в

виде

$$x^1 x^3 + a(x^2)^2 + bx^2 x^3 + \lambda(x^3)^2 = 0, \quad (4.3)$$

причем вершина A_1 — четырехкратная.

§ 4.2. Конструкции на кубической поверхности, связанные с три-тканями Бурау

1. Укажем несколько простых свойств кубических поверхностей в трехмерном проективном пространстве \mathbb{P}^3 . Напомним, что \mathbb{P}^3 есть четырехмерное векторное пространство L^4 с отношением эквивалентности $\mathbf{a} \sim \lambda \mathbf{a}$. Базисным векторам \mathbf{e}_α из L^4 в \mathbb{P}^3 соответствуют точки проективного репера, которые обозначаются A_α , $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Произвольная точка M из \mathbb{P}^3 может быть записана в виде

$$M = x^\alpha A_\alpha, \quad (4.4)$$

причем проективные однородные координаты x^α определены с точностью до ненулевого множителя.

Уравнение произвольной кубики V в некотором проективном базисе A_α будем записывать в виде

$$a_{\alpha\beta\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma = 0, \quad (4.5)$$

где x^α — проективные координаты, $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$. Легко проверяется

Свойство 1. Вершина проективного репера A_α лежит на кубике V тогда и только тогда, когда $a_{\alpha\alpha\alpha} = 0$, и является особой точкой кубики V тогда и только тогда, когда $a_{\alpha\alpha\beta} = 0$, $\beta = 1, 2, 3, 4$.

Свойство 2. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — две скрещивающиеся образующие кубики V . Тогда на V существует 5 образующих, пересекающих ℓ_1 и ℓ_2 .

□ Поместим на ℓ_1 вершины репера A_1 и A_2 , на ℓ_2 — вершины A_3 и A_4 . Если эти прямые лежат на V , то

$$a_{111} = a_{112} = a_{122} = a_{222} = 0, \quad a_{333} = a_{334} = a_{344} = a_{444} = 0. \quad (4.6)$$

Рассмотрим прямую $\ell_3 = A_1 + aA_2, A_3 + bA_4$, пересекающую ℓ_1 и ℓ_2 . Потребуем, чтобы любая точка $M = A_1 + aA_2 + t(A_3 + bA_4)$ этой прямой принадлежала V . Тогда с учетом соотношений (4.6) получим тождество относительно t :

$$a_{113} + a_{114}b + a_{133}t + a_{233}at + a_{223}a^2 + a_{224}a^2b + a_{144}b^2t + \\ + a_{244}ab^2t + 2a_{123}a + 2a_{124}ab + 2a_{134}bt + 2a_{234}abt \equiv 0,$$

откуда следуют соотношения

$$a_{113} + a_{114}b + a_{223}a^2 + a_{224}a^2b + 2a_{123}a + 2a_{124}ab = 0,$$

$$a_{133} + a_{233}a + a_{144}b^2 + a_{244}ab^2 + 2a_{134}b + 2a_{234}ab = 0.$$

Исключив b , получим уравнение пятой степени на a . ■

Следствие: если ℓ_1 и ℓ_2 — две скрещивающиеся образующие кубики V , то на V имеется по крайней мере одна вещественная образующая, пересекающая ℓ_1 и ℓ_2 .

Непосредственно доказываемся

Свойство 3. Если через точку M кубики V проходят 3 некопланарные образующие, то точка M — особая.

Свойство 4. Пусть M — особая точка кубики V , тогда

а) через M проходит 6 (не обязательно вещественных) образующих этой кубики, принадлежащих конусу касательных к кубике V в точке M ;

б) если на V имеется еще одна образующая, не проходящая через M , то она пересекает какие-либо две из указанных шести образующих.

□ Поместим в особую точку M вершину репера A_1 . Тогда, в силу свойства 1, $a_{11\alpha} = 0$, $\alpha = 1, 2, 3, 4$, и уравнение кубики становится линейным относительно координаты x^1 :

$$\Phi_3(A_1) + x^1\Phi_2(A_1) = 0, \quad (4.7)$$

где $\Phi_3(A_1)$ и $\Phi_2(A_1)$ есть соответственно кубическая и квадратичная формы, зависящие от переменных x^2, x^3, x^4 . Уравнения $\Phi_3(A_1) = 0$ и $\Phi_2(A_1) = 0$ определяют конусы соответственно третьего и второго порядка с вершиной A_1 . Указанные конусы пересекаются по шести прямым, каждая из которых, очевидно, лежит на поверхности V .

Непосредственно проверяется, что конус $\Phi_2(A_1) = 0$ (иногда мы будем писать короче: конус $\tilde{\Phi}_2(A_1)$) образован касательными в точке A_1 к кривым, лежащим на V . Если этот конус невырожденный, то особая точка A_1 называется коническим узлом; если он распадается на пару плоскостей, то особая точка A_1 называется бипланарным узлом; если эти плоскости совпадают — унипланарным узлом.

Докажем пункт б). Пусть прямая A_2A_3 лежит на V , тогда

$$a_{222} = a_{223} = a_{233} = a_{333} = 0.$$

В силу этих соотношений $\Phi_3(A_1) = x^4\tilde{\Phi}_2(A_1)$, то есть конус третьего порядка $\Phi_3(A_1)$ распадается на плоскость и конус второго порядка. Уравнение кубики V примет вид

$$x^4\tilde{\Phi}_2(A_1) + x^1\Phi_2(A_1) = 0.$$

Плоскость $x^4 = 0$, содержащая особую точку A_1 и образующую A_2A_3 , пересекает кубикой V по линии $x^4 = 0$, $\Phi_2(A_1) = 0$ или

$$x^4 = 0, \quad a_{122}(x^2)^2 + 2a_{123}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2 = 0.$$

Эта система определяет две прямые (не обязательно вещественные). ■

Заметим, что если дискриминант последнего уравнения нуль, то конусы $\Phi_3(A_1)$ и $\Phi_2(A_1)$ касаются вдоль образующей. В этом случае

через особую точку A_1 проходит всего 5 образующих (одна из них двойная).

Свойство 5. Если A и B — особые точки кубики V , то прямая AB лежит на V и будет двукратной общей образующей конусов касательных $\Phi_2(A)$ и $\Phi_2(B)$. Через каждую из особых точек A и B проходит по пять образующих кубики V , включая общую двойную образующую AB .

□ Пусть A_1 и A_2 — сингулярные точки на V . В силу свойства 1 уравнение кубики имеет вид

$$\begin{aligned} &6a_{123}x^1x^2x^3 + 6a_{124}x^1x^2x^4 + 6a_{134}x^1x^3x^4 + 6a_{234}x^2x^3x^4 + \\ &+ 3a_{133}x^1(x^3)^2 + 3a_{233}x^2(x^3)^2 + 3a_{144}x^1(x^4)^2 + 3a_{244}x^2(x^4)^2 + \\ &+ 3a_{334}x^3(x^3)^2 + 3a_{344}x^3(x^4)^2 + a_{333}(x^3)^3 + a_{444}(x^4)^3 = 0. \end{aligned}$$

Как видно, уравнения $x^3 = x^4 = 0$ прямой A_1A_2 удовлетворяют уравнению кубики.

Далее, записав уравнение кубики V в виде (4.7), найдем, что конусы касательных $\Phi_2(A_1)$ и $\Phi_2(A_2)$ в точках A_1 и A_2 задаются соответственно уравнениями

$$\begin{aligned} &2a_{123}x^2x^3 + 2a_{124}x^2x^4 + 2a_{134}x^3x^4 + a_{133}(x^3)^2 + a_{144}x^4)^2 = 0, \\ &2a_{123}x^1x^3 + 2a_{124}x^1x^4 + 2a_{234}x^3x^4 + a_{233}(x^3)^2 + a_{244}(x^4)^2 = 0. \end{aligned}$$

В произвольной точке общей образующей A_1A_2 градиенты этих конусов пропорциональны направлению $(0, 0, a_{123}, a_{124})$. Следовательно, общая образующая A_1A_2 является двукратной, и, если конусы не распадаются, это означает, что они касаются вдоль A_1A_2 .

Наконец, найдем пересечение кубических конусов $\Phi_3(A_1)$ и $\Phi_3(A_2)$ с общей касательной плоскостью $a_{123}x^3 + a_{124}x^4 = 0$ квадратичных конусов. Решая соответствующие системы, в обоих случаях приходим к кратному решению $x^3 = x^4 = 0$. Это означает, что в обоих случаях прямая A_1A_2 будет двукратным пересечением кубического и квадратичного конусов, то есть среди шести образующих, проходящих через точку A_1 или A_2 , будет одна двойная. ■

Свойство 6. Пусть A_1 и A_2 — особые точки кубики V , и, кроме того, на V лежит прямая A_3A_4 . Тогда 4 образующие V , проходящие через точку A_1 и отличные от A_1A_2 , и 4 аналогичные образующие, проходящие через A_2 , лежат попарно в четырех плоскостях, проходящих через A_1A_2 .

□ Условие $A_3A_4 \in V$ дает соотношения $a_{333} = a_{334} = a_{344} = a_{444} = 0$, в результате чего уравнение кубики, записанное в предыдущем пункте, примет следующий вид:

$$\begin{aligned} &2a_{123}x^1x^2x^3 + 2a_{124}x^1x^2x^4 + 2a_{134}x^1x^3x^4 + 2a_{234}x^2x^3x^4 + \\ &+ a_{133}x^1(x^3)^2 + a_{233}x^2(x^3)^2 + a_{144}x^1(x^4)^2 + a_{244}x^2(x^4)^2 = 0. \end{aligned}$$

В соответствии со свойством 4, образующие, проходящие через точку A_1 , задаются системой

$$\begin{aligned}\Phi_2(A_1) &\equiv 2x^2(a_{123}x^3 + a_{124}x^4) + 2a_{134}x^3x^4 + a_{133}(x^3)^2 + a_{144}(x^4)^2 = 0, \\ \Phi_3(A_1) &\equiv x^2(a_{233}(x^3)^2 + 2a_{234}x^3x^4 + a_{244}(x^4)^2) = 0,\end{aligned}\tag{4.8}$$

а образующие, проходящие через точку A_2 — системой

$$\begin{aligned}\Phi_2(A_2) &\equiv 2x^1(a_{123}x^3 + a_{124}x^4) + 2a_{234}x^3x^4 + a_{233}(x^3)^2 + a_{244}(x^4)^2 = 0, \\ \Phi_3(A_2) &\equiv x^1(a_{133}(x^3)^2 + 2a_{134}x^3x^4 + a_{144}(x^4)^2) = 0.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Рассмотрим две плоскости (обозначим их π_1 и π_2), заданные уравнением

$$a_{233}(x^3)^2 + 2a_{234}x^3x^4 + a_{244}(x^4)^2 = 0.$$

Каждая из этих плоскостей проходит через прямую A_1A_2 ($x^3 = x^4 = 0$). Как видно из уравнений (4.8), плоскости π_1 и π_2 принадлежат конусу $\Phi_3(A_1)$ и каждая из них пересекает конус $\Phi_2(A_1)$ по некоторой прямой; обозначим последние m_1 и m_2 соответственно. Уравнения прямых m_1 и m_2 удовлетворяют системе (4.8), следовательно, это образующие кубики V , проходящие через особую точку A_1 .

С другой стороны, система уравнений

$$x^1 = 0, \quad a_{233}(x^3)^2 + 2a_{234}x^3x^4 + a_{244}(x^4)^2 = 0$$

обращает в тождество уравнения системы (4.9). Следовательно, каждая из плоскостей π_1 и π_2 содержит некоторую образующую, проходящую через особую точку A_2 .

Точно так же показывается, что каждая из плоскостей π_3 и π_4 конуса $\Phi_3(A_2)$, определяемых уравнением

$$a_{133}(x^3)^2 + 2a_{134}x^3x^4 + a_{144}(x^4)^2 = 0,$$

содержит, помимо образующей A_1A_2 , еще две, одна из которых проходит через сингулярную точку A_1 , другая — через A_2 . ■

Свойство 7. Пусть ℓ_1 , ℓ_2 и ℓ_3 — образующие кубики V , причем ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке M , а ℓ_3 не пересекает ℓ_1 и ℓ_2 . Тогда в плоскости прямых ℓ_1 и ℓ_2 имеется еще одна образующая, пересекающая ℓ_3 .

□ Пусть $\ell_1 = A_1A_4$, $\ell_2 = A_2A_4$, $\ell_3 = A_3, A_1 + A_2$, а кубика задана уравнением (4.5). Из условия принадлежности этих прямых кубике получим соотношения

$$\begin{aligned}a_{\alpha\alpha\alpha} &= 0, \quad a_{114} = a_{144} = a_{224} = a_{244} = 0, \quad a_{233} = a_{333} = 0, \\ a_{112} &= a_{122}, \quad a_{133} = a_{233}, \quad a_{113} + a_{223} + 2a_{123} = 0.\end{aligned}$$

В результате уравнение кубики примет вид

$$\begin{aligned}(x^1 - x^2)(a_{112}x^1x^2 + a_{113}x^1x^3 - a_{223}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2) + \\ x^4(2a_{124}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2 + a_{344}x^3x^4) = 0.\end{aligned}$$

Плоскость $x^3 = 0$, содержащая прямые ℓ_1 и ℓ_2 , пересекает кубику по трем прямым, причем третья определяется в плоскости $x^3 = 0$ уравнением $a_{112}(x^1 - x^2) + 2a_{124}x^4 = 0$. Эта образующая (обозначим ее ℓ) проходит через точку $A_1 + A_2$. ■

Напомним, что границей второго рода мы называем общую линию двух семейств ткани.

Свойство 8. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — две скрещивающиеся образующие кубики V , λ_1 и λ_2 — семейства коник, высекаемые на V плоскостями пучков с осями ℓ_1 и ℓ_2 . Существует по крайней мере одна граница второго рода для семейств λ_1 и λ_2 — это вещественная образующая кубики V , пересекающая ℓ_1 и ℓ_2 .

□ В самом деле, в силу следствия из свойства 2 такая образующая существует, обозначим ее m . Эта прямая является общей компонентой двух вырожденных коник: одна принадлежит пучку λ_1 и высекается плоскостью, проходящей через m , другая принадлежит пучку λ_2 и высекается плоскостью, также проходящей через m . Следовательно, m — граница II рода. ■

Свойство 9. Пусть ℓ_1 и ℓ_2 — две пересекающиеся образующие кубики V , λ_1 и λ_2 — семейства коник, высекаемые на V плоскостями пучков с осями ℓ_1 и ℓ_2 . Если существует граница второго рода для семейств λ_1 и λ_2 , не лежащая в плоскости прямых ℓ_1 и ℓ_2 , то точка пересечения этих прямых является особой точкой кубики V .

□ Две плоскости: одна из пучка с осью ℓ_1 , другая — с осью ℓ_2 , не совпадающие с плоскостью образующих ℓ_1 и ℓ_2 (обозначим ее π), пересекаются по некоторой прямой m , проходящей через точку M , $M = \ell_1 \cap \ell_2$. Следовательно, только такая прямая может быть границей второго рода, не лежащей в плоскости π . Но для этого она должна быть образующей кубики V . По свойству 3 получаем, что точка M является особой. ■

Свойство 10. Пусть S — особая точка кубики V , и ℓ — ее образующая, не проходящая через S . Образующие кубики V , проходящие через S , обозначим $m_1, m_2, \dots, m_5, m_6$ (см. свойство 4), причем m_5 и m_6 пусть будут те образующие, которые в силу свойства 4 пересекают образующую ℓ . Тогда коники, высекаемые на V плоскостями пучка с осью ℓ , при проектировании на плоскость из точки S переходят в пучок коник, проходящих через 4 точки $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3, \tilde{m}_4$ — образы прямых m_1, m_2, m_3, m_4 . Этот пучок содержит, в частности, две коники: одна из них определяется конусом касательных $\Phi_2(S)$, другая — конусом $\tilde{\Phi}_2(S)$ (свойство 4).

□ Образующие $m_1, m_2, \dots, m_5, m_6$ пересекают все плоскости пучка с осью ℓ , причем первые четыре из них пересекают все коники, высекаемые этими плоскостями на V . При проектировании из точки S все точки пересечения, лежащие на одной образующей, проектируются в одну и ту же точку. Поэтому образы всех коник будут проходить через точки $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3, \tilde{m}_4$.

В силу свойства 4 кубический конус $\Phi_3(S)$ распадается на плоскость и конус второго порядка $\tilde{\Phi}_2(S)$, который также содержит образующие $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ и \tilde{m}_4 . Поэтому его образ также проходит через эти точки. ■

2. В заключение параграфа вернемся к ткани Бурау W , порожденной тремя попарно скрещивающимися образующими ℓ_i кубики V . Покажем, что ткань W является регулярной.

Поместим на образующую ℓ_1 вершины проективного репера A_1 и A_2 и проведем через них прямые t_1 и t_2 , пересекающие ℓ_2 и ℓ_3 . В точки пересечения прямых t_1 и t_2 с образующей ℓ_2 поместим соответственно вершины репера A_3 и A_4 . Кроме того, репер нормируем так, чтобы точки пересечения прямых t_1 и t_2 с образующей ℓ_3 приняла вид $A_1 + A_3$ и $A_2 + A_4$ соответственно. Требуя принадлежности кубике прямых $\ell_1 = A_1A_2$, $\ell_2 = A_3A_4$, $\ell_3 = A_1 + A_3, A_2 + A_4$, получим уравнение кубики V в виде:

$$\begin{aligned} & a_{113}x^1x^3(x^1 - x^3) + a_{114}(x^1)^2(x^4) + 2a_{123}x^1x^2x^3 + 2a_{124}x^1x^2x^4 + \\ & + 2a_{134}x^1x^3x^4 + a_{144}x^1(x^4)^2 - (a_{144} + 2a_{124} + 2a_{234})(x^2)^2(x^3) + \\ & + a_{224}x^2x^4(x^2 - x^4) - (a_{114} + 2a_{123} + 2a_{134})x^2(x^3)^2 + 2a_{234}x^2x^3x^4 = 0. \end{aligned}$$

Пучки плоскостей L_i с осями ℓ_i зададим уравнениями

$$L_1: x^3 = \lambda x^4, \quad L_2: x^1 = \mu x^2, \quad L_3: x^1 - x^2 = \nu(x^3 - x^4),$$

где λ, μ и ν — параметры пучков. Эти параметры являются также параметрами коник, отсекаемых плоскостями пучков на кубической поверхности. Исключая переменные x^α из уравнения кубики и уравнений пучков, после несложных преобразований получим уравнение рассматриваемой три-ткани Бурау:

$$\begin{aligned} & a_{114}(-\lambda\mu + \nu\mu + \nu\lambda) + 2a_{123}\lambda\nu - 2a_{134}\lambda(\mu - \nu) - 2a_{124}(\lambda - \nu) + \\ & + a_{144}(\nu - \lambda - \nu) - 2a_{234}\lambda - a_{113}\lambda\nu + a_{224} = 0. \end{aligned}$$

Как видно, это уравнение полилинейное относительно всех параметров. Следовательно, рассматриваемая ткань W является регулярной.

В дальнейшем мы будем ссылаться на перечисленные в этом параграфе свойства кубической поверхности без указания параграфа («по свойству 3 имеем» и т.п.)

§ 4.3. Регулярные специальные три-ткани Бурау вида W_1 и перспективно эквивалентные им ткани вида \tilde{W}_1 . Случай 1: две из образующих ℓ_i имеют общую точку

1. Предположим, что образующие ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются в точке A_4 и лежат в плоскости π . Выберем репер, как при доказательстве свойства 7: $\ell_1 = A_1A_4$, $\ell_2 = A_2A_4$, $\ell_3 = A_3, A_1 + A_2$. Заметим, что прямая ℓ_3 пересекает плоскость π в точке $A_1 + A_2$. Специальные тка-

ни Бурау при указанном расположении прямых ℓ_i будем обозначать символом W_1 .

В выбранном репере (см. свойство 7) уравнение кубической поверхности имеет вид:

$$(x^1 - x^2)(a_{112}x^1x^2 + a_{113}x^1x^3 - a_{223}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2) + 2a_{124}x^1x^2x^4 + 2a_{134}x^1x^3x^4 + 2a_{234}x^2x^3x^4 + a_{334}(x^3)^2x^4 + a_{344}x^3(x^4)^2 = 0. \quad (4.10)$$

Пучки плоскостей L_i зададим уравнениями:

$$L_1: x^2 = \lambda x^3, \quad L_2: x^1 = \mu x^3, \quad L_3: x^4 = \nu(x^1 - x^2). \quad (4.11)$$

Исключая переменные x^α из уравнений (4.10) и (4.11), получим уравнение рассматриваемой три-ткани W_1 :

$$a_{344}\nu^2(\mu - \lambda) + 2a_{124}\lambda\mu\nu + a_{112}\lambda\mu + 2a_{134}\mu\nu + 2a_{234}\lambda\nu + a_{113}\mu - a_{223}\lambda + a_{334}\nu + a_{133} = 0. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) линейно относительно параметров λ и μ . Перепишем это уравнение в виде $\nu^2 P_0 + \nu P_1 + P_2 = 0$, где

$$P_0 \equiv a_{344}(\mu - \lambda), \quad P_1 \equiv 2a_{124}\lambda\mu + a_{134}\mu + 2a_{234}\lambda + a_{334}, \\ P_2 \equiv a_{112}\lambda\mu + a_{113}\mu - a_{223}\lambda + a_{133}.$$

Согласно первому условию линеаризации (следствие к теореме 1.7), рассматриваемая три-ткань является регулярной, если многочлены P_0, P_1, P_2 принадлежат одному пучку, то есть

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & a_{344} & -a_{344} & 0 \\ 2a_{124} & 2a_{134} & 2a_{234} & a_{334} \\ a_{112} & a_{114} & -a_{223} & a_{133} \end{pmatrix} = 2.$$

Имеем 2 варианта: либо

$$a_{344} = 0, \quad (4.13)$$

либо

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 2a_{124} & 2a_{134} + 2a_{234} & a_{334} \\ a_{112} & a_{114} - a_{223} & a_{133} \end{pmatrix} = 2. \quad (4.14)$$

Предложение 4.2. *Соотношение (4.13) необходимо и достаточно для того, чтобы точка A_4 пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 была особой точкой кубики V . Условие (4.14) необходимо и достаточно для того, чтобы на прямой ℓ_3 существовали две особые точки.*

□ 1) Первая половина утверждения непосредственно вытекает из свойства 1. Обозначим ткани, определяемые соотношением (4.13), через W_{11} .

2) Особые точки поверхности V определяются системой

$$a_{112}x^2(2x^1 - x^2) + a_{113}x^3(2x^1 - x^2) - a_{223}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2 + 2a_{124}x^2x^4 + 2a_{134}x^3x^4 = 0,$$

$$\begin{aligned}
& a_{112}x^1(x^1 - 2x^2) - a_{113}x^1x^3 + a_{223}x^3(2x^2 - x^1) - \\
& \quad - a_{133}(x^3)^2 + 2a_{124}x^1x^4 + 2a_{234}x^3x^4 = 0, \\
& (x^1 - x^2)(a_{113}x^1 - a_{223}x^2 + 2a_{133}x^3) + 2a_{134}x^1x^4 + \\
& \quad + 2a_{234}x^2x^4 + 2a_{334}x^3x^4 + a_{344}(x^4)^2 = 0, \\
& 2a_{124}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2 + 2a_{344}x^3x^4 = 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Используя уравнения $x^1 = x^2$, $x^4 = 0$ прямой $\ell_3 = A_3, A_1 + A_2$, получим всего два уравнения:

$$\begin{aligned}
& a_{112}(x^1)^2 + (a_{113} - a_{223})x^1x^3 + a_{133}(x^3)^2 = 0, \\
& 2a_{124}(x^1)^2 + 2(a_{134} + a_{234})x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

В силу условия (4.14) эти уравнения совпадают. ■

Рассмотрим второй случай более подробно. Прежде всего заметим, что по крайней мере одна из особых точек, определяемых системой (4.16), не лежит в плоскости π , иначе кубика V распадается на плоскость и квадрику. Поэтому в одну из особых точек можно поместить вершину репера A_3 , тогда (см. свойство 1) будут выполняться соотношения

$$a_{133} = a_{334} = 0. \tag{4.17}$$

Далее рассмотрим отдельно два геометрически различных подслучая. Подслучай 1: образующая ℓ кубики V $a_{112}(x^1 - x^2) + 2a_{124}x^4 = 0$, пересекающая все прямые ℓ_i и лежащая в плоскости π (см. свойство 7), не проходит через точку A_4 . Тогда на нее можно поместить вершины репера A_1 и A_2 , что дает

$$a_{112} = 0. \tag{4.18}$$

Условие регулярности (4.14) в этом случае приводит к соотношению $a_{124}(a_{113} - a_{223}) = 0$. Если $a_{124} = 0$, то кубика V распадается. Поэтому регулярность дает

$$a_{113} - a_{223} = 0. \tag{4.19}$$

Обозначим регулярные ткани, определяемые соотношениями (4.17), (4.18) и (4.19), через W_{12} .

Подслучай 2: образующая $\tilde{\ell}$ проходит через точку A_4 . Тогда

$$a_{124} = 0, \tag{4.20}$$

и уравнение прямой $\tilde{\ell}$ принимает вид $x^1 - x^2 = 0$, то есть это прямая $A_4, A_1 + A_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае через точку A_4 проходит 3 образующие коники V , лежащие в одной плоскости π . Из условия регулярности (4.14) получаем соотношение

$$a_{134} + a_{234} = 0. \tag{4.21}$$

Обозначим ткани, определяемые соотношениями (4.17), (4.20) и (4.21), через W_{13} .

Уравнение (4.12) ткани W_{13} в силу указанных соотношений имеет вид

$$a_{344}\nu^2(\mu - \lambda) + 2\nu a_{134}(\mu - \lambda) + a_{112}\lambda\mu + a_{113}\mu - a_{223}\lambda = 0. \quad (4.22)$$

Упростим это уравнение, выбрав точки A_1 и A_2 (они пока не фиксированы) полярно сопряженными точке A_4 относительно конуса касательных $\Phi_2(A_3)$ к поверхности V в особой точке A_3 . Тогда для тканей W_{13} будет выполняться еще соотношение

$$a_{134} = 0. \quad (4.23)$$

Ткани W_{12} , для которых выполняется также условие (4.13), обозначим через W'_{12} . Таким образом, ткань W'_{12} определяется соотношениями (4.13), (4.17), (4.18) и (4.19). Эти ткани характеризуются тем, что на кубике V имеется всего 3 особые точки: A_4 и две на прямой $\ell_3 - A_3$ и $M(a_{134} + a_{234}, a_{134} + a_{234}, -a_{124}, 0)$. Через W''_{12} обозначим ткани W'_{12} , для которых выполняется еще соотношение (4.21). В этом случае $A_3 \equiv M$ и на прямой ℓ_3 имеется одна двукратная особая точка.

Покажем, что второе условие линеаризации (следствие к теореме 1.7) не приводит к новым классам тканей. В самом деле, пусть кривые $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$ (см. выше) распадаются на пары прямых с общей точкой пересечения. Но они могут распадаться только на прямые вида $\lambda = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$, следовательно, если у них центры совпадают, то и прямые совпадают. Отсюда вытекает, что многочлены P_1 и P_2 пропорциональны, так что все многочлены P_i принадлежат одному пучку, и мы приходим к рассмотренному случаю (4.14).

Рассмотрим второе условие линеаризации, переписав уравнение (4.12) по степеням переменной μ : $\mu R_0 + R_1 = 0$, где

$$\begin{aligned} R_0 &= \mu(a_{344}\nu^2 + 2a_{124}\lambda\nu + 2a_{134}\nu + a_{113}), \\ R_1 &= -a_{344}\lambda\nu^2 + 2a_{234}\lambda\nu - a_{223}\lambda + a_{334}\nu + a_{133} = 0. \end{aligned}$$

Элементарные рассуждения показывают, что эти многочлены могут быть записаны в виде (1.19) только в случае, если $a_{344} = 0$. Пусть далее, в соответствии с условием линеаризации, кривые $R_0 = 0$ и $R_1 = 0$ распадаются. В силу строения многочленов R_0 и R_1 , каждый из них будет иметь тогда компоненту вида $a\lambda + b$. Но поскольку у распавшихся кривых должен быть общий центр, то указанные компоненты будут пропорциональны. Отсюда вытекает, что уравнение ткани (4.12), а, следовательно, и уравнение кубики V разлагается в произведение двух множителей, и кубика V распадается. То же самое мы получим, записав уравнение ткани (4.12) по степеням λ .

Результаты обобщает следующая

Теорема 4.3. Пусть V — кубическая поверхность, заданная уравнением (4.5), не распадается на плоскость и квадрику; ℓ_i — 3 прямые на V , причем ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются, а ℓ_3 не пересекает ℓ_1 и ℓ_2 ; W_1 — специальная три-ткань Бурау, определяемая этими прямыми. Выберем проективный репер так, чтобы $\ell_1 = A_1A_4$,

$\ell_2 = A_2A_4$, $\ell_3 = A_3A_1 + A_2$, тогда уравнение кубики V примет вид (4.10), а уравнение три-ткани W_1 — вид (4.12). Существует 5 классов регулярных три-тканей вида W_1 : W_{11} , W_{12} , W_{13} , W'_{12} и W''_{12} , выделяемых в выбранном репере соответственно соотношениями (4.13); (4.17), (4.18) и (4.19); (4.17), (4.20), (4.21) и (4.23); (4.13), (4.17), (4.18) и (4.19); (4.13), (4.17), (4.18), (4.19) и (4.21).

При этом кубика V , несущая ткань W_{11} , характеризуется тем, что точка A_4 пересечения прямых ℓ_1 и ℓ_2 является особой точкой кубики V ; кубика V , несущая ткань W_{12} или W_{13} , характеризуется тем, что на прямой ℓ_3 существуют две особые точки, причем в случае тканей W_{13} через точку пересечения образующих ℓ_1 и ℓ_2 проходит еще одна образующая кубики V , лежащая в той же плоскости, что и прямые ℓ_1 и ℓ_2 ; кубика V , несущая ткань W'_{12} , характеризуется тем, что на ней имеется всего 3 особые точки: A_4 и две на прямой ℓ_3 ; кубика V , несущая ткань W''_{12} , характеризуется тем, что на ней имеется всего 2 особые точки: двукратная A_3 и A_4 .

Заметим, что если на ткани W_{12} одна из особых точек, лежащих на прямой ℓ_3 , есть точка $A_1 + A_2 = \ell_3 \cap \pi$, то $a_{124} = 0$ и кубика V распадается.

Найденные 5 классов регулярных специальных три-тканей Бурау вида W_1 , а также перспективно эквивалентные им ткани вида \widetilde{W}_1 (см. ниже) будем называть *основными классами* вида W_1 или, соответственно, вида \widetilde{W}_1 . Детальная проективная классификация тканей \widetilde{W}_1 будет дана в § 4.6. Далее в этой главе мы будем придерживаться аналогичных определений и обозначений.

2. Рассмотрим теперь основные классы регулярных три-тканей вида \widetilde{W}_1 , перспективно эквивалентных тканям вида W_1 .

2-1. Ткань \widetilde{W}_{11} получается проектированием ткани W_{11} из особой точки A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$. Плоскости, проходящие через прямые $\ell_1 = A_1A_4$ и $\ell_2 = A_2A_4$, спроектируются в пучки прямых с вершинами A_1 и A_2 (семейства $\widetilde{\lambda}_1$ и $\widetilde{\lambda}_2$ соответственно). Уравнение кубики V в рассматриваемом случае имеет вид $(x^1 - x^2)\Phi_2(A_4) + x^4\Phi_2(A_4) = 0$, или

$$(x^1 - x^2)(a_{112}x^1x^2 + a_{113}x^1x^3 - a_{223}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2) + x^4(2a_{124}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2) = 0. \quad (4.24)$$

Уравнение третьего семейства ткани \widetilde{W}_{11} получим, исключая переменную x^4 из уравнения (4.24) и третьего уравнения (4.11):

$$a_{112}x^1x^2 + a_{113}x^1x^3 - a_{223}x^2x^3 + a_{133}(x^3)^2 + \nu(2a_{124}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2) = 0.$$

Как видно, семейство $\widetilde{\lambda}_3$ ткани \widetilde{W}_{11} есть пучок коник с базисными кониками $\Phi_2(A_4) = 0$ и $\Phi_2(A_4) = 0$, которые пересекаются в точках A_1 , A_2 , \widetilde{m}_3 и \widetilde{m}_4 , соответствующих общим образующим конусов $\Phi_2(A_4)$ и $\Phi_2(A_4)$ (см. свойство 10). Таким образом, ткань \widetilde{W}_{11} образована

пучком коник, имеющих по крайней мере 2 вещественные вершины A_1 и A_2 и двумя пучками прямых с вершинами в этих точках.

2-2. Ткань \widetilde{W}_{12} получим проектированием ткани W_{12} из особой точки A_3 на плоскость $\pi = A_1A_2A_4$. В силу соотношений (4.17), (4.18) и (4.19) уравнение (4.10) кубики V примет вид $x^3\Phi_2(A_3) + \Phi_3(A_3) = 0$ или

$$x^3(a_{113}(x^1 - x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^4 + 2a_{234}x^2x^4 + a_{344}(x^4)^2) + 2a_{124}x^1x^2x^4 = 0. \quad (4.25)$$

Исключая отсюда переменную x^3 с помощью первого или второго уравнений (4.11), найдем уравнения первых двух семейств ткани \widetilde{W}_{12} :

$$\widetilde{\lambda}_1: \Phi_2(A_3) + 2\lambda a_{124}x^2x^4 = 0, \quad \widetilde{\lambda}_2: \Phi_2(A_3) + 2\mu a_{124}x^1x^4 = 0. \quad (4.26)$$

Семейство $\widetilde{\lambda}_3$ получается проектированием пучка плоскостей, проходящих через прямую $A_3, A_1 + A_2$, из точки A_3 на плоскость, содержащую точку $A_1 + A_2$. Следовательно, $\widetilde{\lambda}_3$ есть пучок прямых с вершиной $A_1 + A_2$.

Как видно, первое семейство есть пучок коник с базисом $\Phi_2(A_3) = 0$ и $x^2x^4 = 0$, второе — пучок коник с с базисом $\Phi_2(A_3) = 0$ и $x^1x^4 = 0$. Вершины первого пучка: $A_1 + A_2$ (двукратная) и точки пересечения коники $\Phi_2(A_3) = 0$ с прямой $x^2 = 0$, обозначим их $\widetilde{m}_3, \widetilde{m}_4$. Следовательно, семейство $\widetilde{\lambda}_1$ есть параболический пучок коник (P -пучок) с вершинами $\widetilde{m}_3, \widetilde{m}_4$ и двукратной вершиной $A_1 + A_2$.

Аналогично получаем, что семейство $\widetilde{\lambda}_2$ линий ткани \widetilde{W}_{12} есть также P -пучок коник с двукратной вершиной $A_1 + A_2$ и простыми вершинами $\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2$. Коники обоих пучков имеют в точке $A_1 + A_2$ общую касательную A_1A_2 (рис. 39).

Легко проверяется, что уравнение $\Phi_2(A_3) = 0$ задает произвольную конику плоскости, проходящую через точку $A_1 + A_2$ и касающуюся в этой точке прямой A_1A_2 . Таким образом, описанные выше свойства полностью характеризуют ткань \widetilde{W}_{12} .

Замечание: на прямой ℓ_3 есть еще одна, помимо A_3 , особая точка S , координаты которой с учетом соотношений (4.17)–(4.19) находим из второго уравнения (4.16): $S(a_{134} + a_{234}, a_{134} + a_{234}, -a_{124}, 0)$.

Можно показать, что три-ткань, полученная проектированием ткани W_{12} из особой точки S , будет проективно эквивалентна ткани \widetilde{W}_{12} .

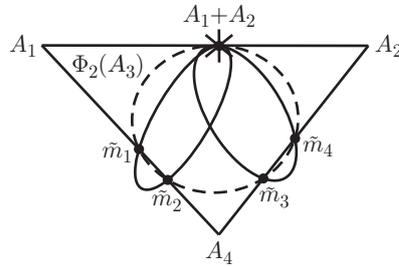


Рис. 39.

2-3. Обозначим \widetilde{W}'_{12} три-ткань, которая получается проектированием ткани W'_{12} из особой точки A_3 на плоскость $A_1A_2A_4$. Семейства линий ткани \widetilde{W}'_{12} будут такие же, как в предыдущем пункте, но с учетом соотношения (4.13). В силу последнего коники обоих пучков $\widetilde{\lambda}_1$ и $\widetilde{\lambda}_2$ проходят через точку A_4 . Это свойство характеризует ткани \widetilde{W}'_{12} .

2-4. При проектировании ткани W'_{12} из особой точки A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$ получится ткань \widetilde{W}_{11} , образованная пучком коник, имеющих по крайней мере 2 вещественные вершины A_1 и A_2 , и двумя пучками прямых с вершинами в этих точках.

2-5. Рассмотрим ткань \widetilde{W} , которая получается проектированием W'_{12} из особой точки $M(a_{134} + a_{234}, a_{134} + a_{234}, -a_{124}, 0)$ на плоскость $A_1A_2A_4$. Перейдем к новому проективному реперу $\{A_1, A_2, \widetilde{A}_3 \equiv M, A_4\}$, тогда координаты преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} x^1 &= \widetilde{x}^1 + (a_{134} + a_{234})\widetilde{x}^3, & x^2 &= \widetilde{x}^2 + (a_{134} + a_{234})\widetilde{x}^3, \\ x^3 &= -a_{124}\widetilde{x}^3, & x^4 &= \widetilde{x}^4. \end{aligned}$$

В новых координатах уравнения первых двух семейств ткани \widetilde{W} имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{113}(\widetilde{x}^1 - \widetilde{x}^2)^2 + 2a_{134}\widetilde{x}^4(\widetilde{x}^1 - \widetilde{x}^2) + 2\lambda a_{124}\widetilde{x}^1\widetilde{x}^4 &= 0, \\ a_{113}(\widetilde{x}^1 - \widetilde{x}^2)^2 + 2a_{234}\widetilde{x}^4(\widetilde{x}^2 - \widetilde{x}^1) + 2\mu a_{124}\widetilde{x}^2\widetilde{x}^4 &= 0. \end{aligned}$$

Семейство λ_3 есть пучок прямых с вершиной $A_1 + A_2$.

Как и в случае 2-4, первые два семейства линий ткани есть параболические пучки коник с общей двукратной вершиной $A_1 + A_2$, и коники обоих пучков проходят через точку A_4 . Следовательно, $\widetilde{W} \equiv \widetilde{W}'_{12}$.

Отметим, что для тканей W''_{12} (добавляется условие (4.21)) получаются те же типы тканей, что и для тканей W'_{12} .

2-6. Ткань \widetilde{W}_{13} получается проектированием ткани W_{13} из особой точки A_3 на плоскость $A_1A_2A_4$. В силу соотношений (4.17), (4.20) и (4.21) уравнение (4.10) кубики V принимает вид

$$x^3\widetilde{\Phi}_2(A_3) + a_{112}x^1x^2(x^1 - x^2) = 0, \quad (4.27)$$

где конус $\widetilde{\Phi}_2(A_3)$ определяется уравнением

$$(x^1 - x^2)(a_{113}x^1 - a_{223}x^2 + 2a_{134}x^4) + a_{344}(x^4)^2 = 0. \quad (4.28)$$

Конус $\widetilde{\Phi}_2(A_3)$ — произвольный конус с вершиной A_3 , который содержит прямую $\ell_3 = A_3, A_1 + A_2$, и касательная плоскость к нему вдоль этой образующей проходит через точку A_4 . Ткань \widetilde{W}_{13} , как и ткань \widetilde{W}_{12} , состоит из двух параболических пучков коник с общей касательной $A_1 + A_2, A_4$ в общей двукратной вершине $A_1 + A_2$ и пучка прямых с вершиной в этой точке. Пучки коник имеют общую базисную конику $\widetilde{\Phi}_2(A_3) = 0$. Отличие от тканей \widetilde{W}_{12} в том, что прямые $\ell_1 = A_1A_4$ и $\ell_2 = A_2A_4$ пересекаются с общей касательной коник пучков в точке A_4 .

Покажите, что если проектировать три-ткань W_{13} из особой точки S , то снова получается ткань \widetilde{W}_{13} .

Итак, всего имеется 4 основных класса регулярных тканей вида \widetilde{W}_1 : это ткани \widetilde{W}_{11} , \widetilde{W}_{12} , \widetilde{W}'_{12} и \widetilde{W}_{13} .

§ 4.4. Регулярные специальные три-ткани Бурау вида W_2 и перспективно эквивалентные им ткани вида \widetilde{W}_2 . Случай 2: образующая ℓ_2 пересекает образующие ℓ_1 и ℓ_3

1. Выберем проективный репер следующим образом: $\ell_1 = A_3A_1$, $\ell_2 = A_1A_2$, $\ell_3 = A_2A_4$. Если эти прямые лежат на кубике V , то ее уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned} a_{114}(x^1)^2x^4 + 2a_{123}x^1x^2x^3 + 2a_{124}x^1x^2x^4 + 2a_{134}x^1x^3x^4 + \\ + a_{144}x^1(x^4)^2 + a_{223}(x^2)^2x^3 + a_{233}x^2(x^3)^2 + 2a_{234}x^2x^3x^4 + \\ + a_{334}(x^3)^2x^4 + a_{344}x^3(x^4)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Пучки плоскостей L_i зададим уравнениями

$$L_1: \quad x^2 = \lambda x^4; \quad L_2: \quad x^3 = \mu x^4; \quad L_3: \quad x^1 = \nu x^3.$$

Исключая переменные x^α из уравнений кубики и пучков плоскостей L_i , найдем уравнение ткани Бурау вида W_2 :

$$\begin{aligned} a_{114}\mu\nu^2 + \nu(2a_{123}\lambda\mu + 2a_{124}\lambda + 2a_{134}\mu + a_{144}) + \\ + a_{223}\lambda^2 + a_{233}\lambda\mu + 2a_{234}\lambda + a_{334}\mu + a_{344} = 0. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Это уравнение линейно относительно μ . Первое условие линейаризации (следствие к теореме 1.7) дает условие линейности по ν :

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a_{223} & a_{233} & 2a_{234} & a_{334} & a_{344} \\ 0 & 2a_{123} & 2a_{124} & 2a_{134} & a_{144} \\ 0 & 0 & 0 & a_{114} & 0 \end{pmatrix} = 2. \quad (4.32)$$

Переписав уравнение (4.31) в виде $\lambda^2P_0 + \lambda P_1 + P_2 = 0$, найдем аналогичное условие линейаризации по λ :

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a_{114} & 2a_{134} & a_{334} & a_{144} & a_{344} \\ 0 & 2a_{123} & a_{233} & 2a_{124} & 2a_{234} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{223} \end{pmatrix} = 2. \quad (4.33)$$

Отсюда, исключая случаи распадаения кубики V , находим условия регулярности.

1) Ткани W_{21} :

$$a_{223} = a_{114} = 0. \quad (4.34)$$

2) Пусть, например,

$$a_{223} = 0, a_{114} \neq 0. \quad (4.35)$$

(В симметричном случае $a_{223} \neq 0, a_{114} = 0$ геометрия аналогична, поэтому он не рассматривается).

В силу (4.35) условие (4.33) выполняется, а условие (4.32) дает следующие варианты:

2.1) ткань W_{22} :

$$\frac{a_{234}}{a_{124}} = \frac{a_{344}}{a_{144}} = \frac{a_{233}}{2a_{123}} \equiv s; \quad (4.36)$$

2.2) ткань W_{25} :

$$a_{124} = a_{144} = a_{123} = 0; \quad (4.37)$$

2.3) ткань W_{26} :

$$a_{124} = a_{234} = 0, \quad \frac{a_{344}}{a_{144}} = \frac{a_{233}}{2a_{123}} \equiv s; \quad (4.38)$$

2.4) ткань W_{27} :

$$a_{124} = a_{234} = 0, a_{144} = a_{123} = 0; \quad (4.39)$$

2.5) ткань W_{28} :

$$a_{144} = a_{344} = 0, \quad \frac{a_{234}}{a_{124}} = \frac{a_{233}}{2a_{123}} \equiv s; \quad (4.40)$$

2.6) ткань W_{29} :

$$a_{144} = a_{344} = 0, a_{123} = a_{124} = 0. \quad (4.41)$$

3) Пусть теперь

$$a_{223} \neq 0, a_{114} \neq 0. \quad (4.42)$$

Тогда условия (4.32) и (4.33) дадут соотношения

$$a_{123} = 0, a_{233} = 0, a_{124} = 0, a_{144} = 0. \quad (4.43)$$

Обозначим соответствующую регулярную ткань W_{23} .

Теперь используем второе условие линеаризации (см. следствие к теореме 1.7) для нахождения классов регулярных тканей. Пусть уравнение ткани записано в виде (4.31). Согласно указанному условию, ткань является регулярной, если уравнения

$$P_0 \equiv a_{114}\mu = 0, \quad P_1 \equiv 2a_{123}\lambda\mu + 2a_{124}\lambda + 2a_{134}\mu + a_{144} = 0, \\ P_2 \equiv a_{223}\lambda^2 + a_{233}\lambda\mu + 2a_{234}\lambda + a_{334}\mu + a_{344} = 0$$

определяют три вырожденные кривые второго порядка с общим центром. Если $a_{114} \neq 0$, то кривая $P_0 = 0$ распадается на прямые $\mu = 0$ и ℓ_∞ . Следовательно, центр кривой лежит на ℓ_∞ и две другие кривые $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$ должны распадаться только на линии вида $\mu = \text{const}$. Это дает $a_{123} = 0, a_{124} = 0, a_{223} = 0, a_{233} = 0, a_{234} = 0$, и тогда кубика (4.30) распадается.

Если $a_{114} = 0$, то каждая из кривых $P_1 = 0$ и $P_2 = 0$ в случае распадаения содержит множитель вида $a\lambda + b = 0$. Но поскольку центры этих кривых должны совпадать, то эти множители должны быть пропорциональны. Отсюда вытекает, что уравнение (4.31), а, следовательно, и уравнение (4.30) распадается в произведение, и кубика V также распадается.

Теперь перепишем уравнение (4.31) по степеням λ :

$$a_{223}\lambda^2 + \lambda(2a_{123}\mu\nu + 2a_{124}\nu + a_{233}\mu + 2a_{234}) + a_{114}\mu\nu^2 + 2a_{134}\mu\nu + a_{144}\nu + a_{334}\mu + a_{344} = 0.$$

и снова применим второе условие линеаризации. Здесь $P_0 = a_{223}$ — многочлен нулевой степени, пусть это U (см. обозначения в § 1.3), а $P_1 = 2a_{123}\mu\nu + 2a_{124}\nu + a_{233}\mu + 2a_{234}$ — многочлен второй степени, пусть это V . Тогда многочлен $P_2 = a_{114}\mu\nu^2 + 2a_{134}\mu\nu + a_{144}\nu + a_{334}\mu + a_{344}$ должен выражаться через U и V по формуле (1.19), что возможно только в случае, если $a_{114} = 0$ и многочлены P_1 и P_2 принадлежат одному пучку. Но тогда мы приходим к первому условию линеаризации и получаем уже исследованный случай.

Наконец, перепишем уравнение (4.31) в виде $\mu Q_1 + Q_2 = 0$, где

$$\begin{aligned} Q_1 &\equiv a_{114}\nu^2 + 2a_{123}\lambda\nu + 2a_{134}\nu + a_{233}\lambda + a_{334}, \\ Q_2 &\equiv a_{223}\lambda^2 + 2a_{124}\lambda\nu + 2a_{234}\lambda + a_{144}\nu + a_{344}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Согласно второму условию линеаризации ткань будет регулярной, если коники $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$ представляют собой пары прямых с общей точкой пересечения. Это приводит к следующим условиям (проверьте!):

$$\begin{aligned} a_{233} &= -2aa_{123}, & a_{144} &= -2ba_{124}, \\ a_{134} &= -aa_{114} - ba_{123}, & a_{234} &= -ba_{223} - aa_{124}, \\ a_{334} &= a^2a_{114} + 2aba_{123}, & a_{344} &= b^2a_{223} + 2aba_{124}, \end{aligned} \quad (4.45)$$

где a и b — некоторые числа. Обозначим W_{24} регулярную ткань, определяемую соотношениями (4.45).

2. Охарактеризуем кубические поверхности, допускающих регулярные ткани вида W_2 , в терминах сингулярностей.

2-1. Кубические поверхности, несущие ткань W_{21} , характеризуются тем, что точки A_1 и A_2 , в которых пересекаются прямые ℓ_i , являются особыми. Проверьте, что эти особые точки являются, вообще говоря, коническими узлами.

2-2. **Предложение 4.4.** *Кубика V , несущая ткань W_{22} , имеет две особые точки на прямой ℓ_3 , одна из которых — точка A_2 является бипланарным узлом. Касательные плоскости π_1 и π_2 , на которые распадается конус касательных в точке A_2 , обладают следующим свойством: одна из них содержит прямую ℓ_2 , другая — прямую ℓ_3 . Указанные свойства в совокупности являются характеристическими.*

□ Точка A_2 является особой в силу соотношения (4.35) и свойства 1. Чтобы найти остальные особые точки кубики V , рассмотрим систему, определяющую особые точки кубики (4.30):

$$\begin{aligned}
2a_{114}x^1x^4 + 2a_{123}x^2x^3 + 2a_{124}x^2x^4 + 2a_{134}x^3x^4 + a_{144}(x^4)^2 &= 0, \\
2a_{123}x^1x^3 + 2a_{124}x^1x^4 + 2a_{223}x^2x^3 + a_{233}(x^3)^2 + 2a_{234}x^3x^4 &= 0, \\
2a_{123}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^4 + a_{223}(x^2)^2 + 2a_{233}x^2x^3 + 2a_{234}x^2x^4 + \\
&+ 2a_{334}x^3x^4 + a_{344}(x^4)^2 = 0, \\
a_{114}(x^1)^2 + 2a_{124}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{144}x^1x^4 + 2a_{234}x^2x^3 + \\
&+ a_{334}(x^3)^2 + 2a_{344}x^3x^4 = 0.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Полагая $x^1 = x^3 = 0$, получим уравнения на координаты особых точек, лежащих на прямой $\ell_3 = A_2A_4$. С учетом (4.35) и (4.36) получим единственное уравнение $2a_{124}x^2x^4 + a_{144}(x^4)^2 = 0$. Если $x^4 = 0$, то получаем точку A_2 ; в случае $2a_{124}x^2 + a_{144}x^4 = 0$ получаем еще одну особую точку. Заметим, что $a_{124} \neq 0$, иначе из (4.36) получается $a_{234} = 0$, и мы приходим к тканям W_{26} . Следовательно, вторая особая точка отлична от A_2 . Поместив в нее вершину A_4 (канонизация репера), в силу свойства 1 получим $a_{144} = a_{344} = 0$, и соотношения (4.36) перейдут в соотношения (4.40), определяющие ткани W_{28} . Таким образом, ткань W_{28} геометрически эквивалентна ткани W_{22} , они различаются аналитически из-за различного положения точки A_3 .

В результате проведенной канонизации уравнение кубики V примет вид $\Phi_3(A_4) + x^2\Phi_2(A_2) = 0$, где

$$\begin{aligned}
\Phi_2(A_2) &= 2(x^1 + sx^3)(a_{123}x^3 + a_{124}x^4), \\
\Phi_3(A_4) &= x^4(a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2).
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Как видно, конус касательных $\Phi_2(A_2)$ распадается на две плоскости, $\pi_1: x^1 + sx^3 = 0$ и $\pi_2: a_{123}x^3 + a_{124}x^4 = 0$. Первая содержит прямую ℓ_3 , вторая — ℓ_2 .

Осталось показать, что других особых точек на кубике V нет. Прежде проведем дальнейшую специализацию репера: поместим вершину репера A_3 в точку пересечения прямой ℓ_1 с плоскостью π_1 . Тогда $s = 0$ и соотношения (4.35) и (4.36), определяющие рассматриваемую ткань W_{22} , принимают следующий простой вид:

$$a_{223} = a_{144} = a_{233} = a_{234} = a_{344} = 0. \tag{4.36'}$$

Теперь легко проверить, что других особых точек, кроме найденных A_2 и A_4 , на кубике V нет.

Обратно, пусть поверхность V задана уравнением (4.30), и на прямой ℓ_3 имеются две вещественные особые точки, причем одна из них — точка A_2 является бипланарным узлом. Поместим во вторую

точку вершину A_4 репера, тогда по свойству 1 получим $a_{223} = a_{144} = a_{344} = 0$. При этих условиях

$$\Phi_2(A_2) = 2a_{123}x^1x^3 + 2a_{124}x^1x^4 + a_{233}(x^3)^2 + 2a_{234}x^3x^4.$$

Пусть особая точка A_2 является бипланарным узлом, тогда конус $\Phi_2(A_2)$ распадается, что дает соотношение

$$a_{124}(a_{124}a_{233} - 2a_{123}a_{234}) = 0.$$

Если $a_{124} = 0$, то конус Φ_2 распадается на две плоскости, одна из которых ($x^3 = 0$) содержит прямую ℓ_2 , а другая не содержит, вообще говоря, прямых ℓ_2 и ℓ_3 .

Если равен нулю второй сомножитель, то получаем соотношение (4.35), а конус $\Phi_2(A_2)$ распадается на две плоскости, одна из которых содержит прямую ℓ_2 , другая — прямую ℓ_3 . ■

2-3. В силу соотношений (4.43), характеризующих ткани W_{23} , система (4.46), определяющая в этом случае особые точки кубики V , принимает вид:

$$\begin{aligned} (a_{114}x^1 + a_{134}x^3)x^4 &= 0, (a_{223}x^2 + a_{234}x^4)x^3 = 0, \\ a_{134}x^1x^4 + a_{223}(x^2)^2 + 2a_{234}x^2x^4 + 2a_{334}x^3x^4 + a_{344}(x^4)^2 &= 0, \\ a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2 + 2a_{344}x^3x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет 4 решения: две особые точки на ℓ_3 , определяемые уравнением $a_{223}(x^2)^2 + 2a_{234}x^2x^4 + a_{344}(x^4)^2 = 0$, и две особые точки на прямой ℓ_1 , определяемые уравнением $a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2 = 0$. При этом в силу неравенств (4.46) ни одна из этих точек не совпадает с точками A_1 и A_2 . Простым вычислением проверяется, что это свойство характеризует рассматриваемый случай.

Поместив вершины репера A_3 и A_4 в особые точки, получим соотношения $a_{334} = a_{344} = 0$. Таким образом, в построенном каноническом репере ткань W_{23} выделяется соотношениями:

$$a_{123} = a_{124} = a_{144} = a_{233} = a_{334} = a_{344} = 0. \quad (4.43')$$

2-4. В силу соотношений (4.45), характеризующих ткани W_{24} , уравнение кубики V примет вид

$$\begin{aligned} a_{114}x^4(x^1 - ax^3)^2 + a_{223}x^3(x^2 - bx^4)^2 + \\ + 2(a_{123}x^3 + a_{124}x^4)(x^1 - ax^3)(x^2 - bx^4) &= 0. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Как видно, прямая $x^1 - ax^3 = 0$, $x^2 - bx^4 = 0$ лежит на кубике V и все ее точки являются особыми. Она пересекает прямые ℓ_1 и ℓ_3 , но не проходит через точки A_1 и A_2 . Поэтому на нее можно поместить вершины A_3 и A_4 репера. Тогда ее уравнения примут вид $x^1 = x^2 = 0$, то есть получаем $a = b = 0$, в результате чего соотношения (4.45) принимают простой вид:

$$a_{134} = 0, a_{233} = 0, a_{334} = 0, a_{234} = 0, a_{144} = 0, a_{344} = 0. \quad (4.45')$$

Обратно, пусть на кубике V существует прямая m из особых точек, пересекающая прямые ℓ_1 и ℓ_3 , но не содержащая точки A_1 и A_2 . Положим $A_3 \equiv \ell_1 \cap m$, $A_4 \equiv \ell_3 \cap m$, тогда уравнения $x^1 = x^2 = 0$ должны обращать в тождества все равенства системы (4.46), определяющей особые точки. Полагая в (4.46) $x^1 = x^2 = 0$, получим тождества $2a_{134}x^3x^4 + a_{144}(x^4)^2 \equiv 0$, $a_{233}(x^3)^2 + 2a_{234}x^3x^4 \equiv 0$, $a_{334}x^3x^4 \equiv 0$, $a_{334}(x^3)^2 \equiv 0$, откуда и следуют равенства (4.45').

Таким образом, существование прямой из особых точек является характеристическим свойством поверхности V , несущей специальную ткань Бурау W_{24} .

2-5. Анализируя систему (4.46) при условиях (4.35) и (4.37), определяющих ткань W_{25} , найдем, что на кубике V имеется две особые точки: A_2 и $B(0, a_{344}, 0, -2a_{124})$, лежащие на ℓ_3 . В этом случае конус касательных в точке A_2 имеет вид: $\Phi_2(A_2) = x^3(a_{233}x^3 + 2a_{234}x^4)$, то есть точка A_2 — бипланарный узел. При этом, в отличие от тканей W_{22} , плоскость π_1 ($x^3 = 0$) содержит прямые ℓ_2 и ℓ_3 , а плоскость π_2 ($a_{233}x^3 + 2a_{234}x^4 = 0$) содержит прямую ℓ_2 .

Так же, как в п. 2-2, проверяется, что последние свойства являются характеристическими.

Поместив в особую точку B вершину A_4 репера, получим $a_{344} = 0$. В таком репере ткань W_{25} будет определяться соотношениями:

$$a_{223} = a_{124} = a_{144} = a_{123} = a_{344} = 0. \quad (4.37')$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями (4.41), следовательно, классы W_{25} и W_{29} совпадают.

Выделим некоторые специальные случаи.

2-5-1. Ткани W_{25}^1 : к условиям (4.37') добавляется соотношение

$$a_{234} = 0. \quad (4.49)$$

Оно означает, что особая точка A_2 является унипланарным узлом.

2-5-2. Ткани W_{25}^2 : к условиям (4.37') добавляется соотношение

$$a_{114}a_{334} - a_{134}^2 = 0. \quad (4.50)$$

Оно означает, что кубика V имеет еще одну сингулярную точку $P(2a_{134}a_{234}, 0, -2a_{114}a_{234}, a_{114}a_{233})$.

2-5-3. Ткани W_{25}^3 : к условиям (4.37') добавляются соотношения (4.49) и (4.50).

2-6. При условиях (4.35) и (4.38), определяющих ткани W_{26} , система (4.46) примет вид:

$$\begin{aligned} 2a_{114}x^1x^4 + 2a_{123}x^2x^3 + 2a_{134}x^3x^4 + a_{144}(x^4)^2 &= 0, \\ 2a_{123}x^1x^3 + 2sa_{123}(x^3)^2 &= 0, \\ 2a_{123}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^4 + 2sa_{123}x^2x^3 + 2a_{334}x^3x^4 + sa_{144}(x^4)^2 &= 0, \\ a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{144}x^1x^4 + a_{334}(x^3)^2 + 2sa_{144}x^3x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Так как $a_{123} \neq 0$, то из второго уравнения следует, что либо $x^3 = 0$, либо $x^1 + sx^3 = 0$. Если $x^3 = 0$, то из первого и последнего уравнений находим:

$$(2a_{114}x^1 + a_{144}x^4)x^4 = 0, \quad (a_{114}x^1 + 2a_{144}x^4)x^1 = 0.$$

Так как $a_{114}a_{144} \neq 0$, то отсюда следует только $x^1 = x^4 = 0$, то есть получаем точку A_2 .

Если $x^1 + sx^3 = 0$, но $x^3 \neq 0$, то из последнего уравнения системы получаем соотношение $a_{114}s^2 - 2a_{134}s + a_{334} = 0$. В силу последнего соотношения кубика V распадается на плоскость $x^1 + sx^3 = 0$ и квадрату. Следовательно, других особых точек, кроме точки A_2 , нет.

В рассматриваемом случае конус касательных в особой точке A_2 имеет вид: $\Phi_2(A_2) = 2a_{123}x^3(x^1 + sx^3)$, то есть точка A_2 — бипланарный узел. Плоскость π_1 ($x^3 = 0$) содержит прямые ℓ_2 и ℓ_3 , а плоскость π_2 ($x^1 + sx^3 = 0$) содержит прямую ℓ_3 . Непосредственно проверяется, что перечисленные свойства являются характеристическими.

В случае тканей W_{26} репер можно специализировать, положив $A_3 = \pi_2 \cap \ell_1$. Тогда $s = 0$, и соотношения, выделяющие ткани W_{26} , примут вид:

$$a_{223} = a_{124} = a_{234} = a_{233} = a_{344} = 0. \quad (4.38')$$

2-7. Анализируя систему (4.46) при условиях (4.35) и (4.39), определяющих ткани W_{27} , находим, что поверхность V в этом случае имеет только одну особую точку A_2 . Так как $\Phi_2(A_2) = a_{233}(x^3)^2$, то точка A_2 — унипланарный узел, причем $\pi_1 \equiv \pi_2 \ni \ell_2, \ell_3$.

Обратно, пусть кубика, определяемая уравнением (4.30), имеет унипланарный узел A_2 и $\pi_1 \equiv \pi_2 \ni \ell_2, \ell_3$. Тогда $\Phi_2(A_2) = a_{233}(x^3)^2$, что дает соотношения $a_{223} = a_{123} = a_{124} = a_{234} = 0$. В силу этих соотношений уравнение ткани (4.31) после замены параметра $1/\mu \rightarrow \mu$ принимает вид:

$$a_{114}(\nu)^2 + 2a_{134}\nu + a_{233}\lambda + a_{334} + \mu(a_{144}\nu + a_{344}) = 0.$$

Используя условия линеаризации, находим условие регулярности — $a_{144} = 0$, что вместе с полученными выше соотношениями дает условия (4.39), определяющие ткани W_{27} .

Доказана

Теорема 4.5. Пусть V — кубическая поверхность, не распадающаяся на плоскость и квадрату, на которой лежат прямые $\ell_1 = A_3A_1$, $\ell_2 = A_1A_2$, $\ell_3 = A_2A_4$. Специальная три-ткань Бурау W_2 , определяемая прямыми ℓ_i , будет регулярной тогда и только тогда (с точностью до геометрически симметричных случаев), когда кубика V имеет следующие особенности:

- точки A_1 и A_2 являются особыми точками кубики V (основной класс W_{21});

- на прямой ℓ_3 имеется две особые точки, причем одна из них — A_2 является бипланарным узлом со следующим свойством: одна из плоскостей, на которые распадается конус касательных в A_2 , содержит прямую ℓ_2 , а другая — прямую ℓ_3 (основной класс W_{22});
- на каждой из прямых ℓ_1 и ℓ_3 имеется две особые точки, не совпадающие с точками A_1 и A_2 (основной класс W_{23});
- на V существует прямая из особых точек, пересекающая прямые ℓ_1 и ℓ_3 , но не проходящая через точки A_1 и A_2 (основной класс W_{24});
- на прямой ℓ_3 имеется две особые точки, причем точка A_2 является планарным узлом; кроме того одна из плоскостей, на которые распадается конус касательных в A_2 , содержит прямые ℓ_2 и ℓ_3 , а другая — прямую ℓ_2 (основной класс W_{25});
- на прямой ℓ_3 имеется один бипланарный узел A_2 , причем одна из плоскостей, на которые распадается конус касательных в A_2 , содержит прямые ℓ_2 и ℓ_3 , а другая — прямую ℓ_3 (основной класс W_{26});
- на прямой ℓ_3 имеется один унипланарный узел A_2 , который содержит прямые ℓ_2 и ℓ_3 (основной класс W_{27}).

3. Основные классы регулярных три-тканей вида \widetilde{W}_2 .

3-1. Ткань \widetilde{W}_{21} получается проектированием ткани W_{21} из одной из сингулярных точек A_1 или A_2 . Оба случая геометрически эквивалентны. Непосредственно проверяется, что ткань \widetilde{W}_{21} совпадает с тканью \widetilde{W}_{11} , рассмотренной в предыдущем параграфе.

3-2. Ткань \widetilde{W}'_{22} получается проектированием ткани W_{22} из бипланарного узла A_2 на плоскость $\pi = A_1A_3A_4$. Пусть соотношения, выделяющие три-ткань W_{22} , записаны в виде (4.36'). Тогда (см. (4.47))

$$\begin{aligned}\Phi_2(A_2) &= 2x^1(a_{123}x^3 + a_{124}x^4) \equiv 2x^1T_1, \\ \Phi_3(A_2) &= x^4(a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2) \equiv x^4\widetilde{\Phi}_2(A_2).\end{aligned}\quad (4.47')$$

Пучок $\widetilde{\lambda}_1$ задается уравнением

$$2\lambda T_1x^1 + \widetilde{\Phi}_2(A_2) = 0. \quad (4.51)$$

В него входят две вырожденные коники: $T_1x^1 = 0$ и $\widetilde{\Phi}_2(A_2) = 0$, которые пересекаются в двойной точке A_4 и точках \widetilde{m}_1 и \widetilde{m}_2 ($T_1 = 0$, $\widetilde{\Phi}_2(A_2) = 0$). Таким образом, $\widetilde{\lambda}_1$ есть P -пучок коник с простыми вершинами \widetilde{m}_1 , \widetilde{m}_2 и двукратной вершиной A_4 . Так как точка A_4 — двойная, то все коники пучка имеют в этой точке общую касательную A_3A_4 ($x^1 = 0$). Семейство $\widetilde{\lambda}_2$ линий ткани \widetilde{W}'_{22} представляет собой пучок прямых с вершиной A_1 , семейство $\widetilde{\lambda}_3$ — пучок прямых с вершиной A_4 .

3-3. Ткань \widetilde{W}''_{22} получается проектированием ткани W_{22} из конического узла A_4 на плоскость $\pi = A_1A_2A_3$. Запишем уравнение кубики V (с учетом соотношений (4.36')) в виде $\Phi_3(A_4) + x^4\Phi_2(A_4) = 0$, где

$$\begin{aligned} \Phi_2(A_4) &= a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2 + 2a_{124}x^1x^2, \\ \Phi_3(A_4) &= 2a_{123}x^1x^2x^3. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Уравнение пучка $\tilde{\lambda}_1$ имеет вид

$$\Phi_2(A_4) + 2\lambda a_{123}x^1x^3 = 0. \quad (4.53)$$

Прямая A_2A_3 ($x^1 = 0$) касается коники $\Phi_2(A_4)$ в точке A_2 ; прямая $x^3 = 0$ пересекают конику $\Phi_2(A_4)$ в точках A_2 и \tilde{m}_3 ($x^3 = 0$, $a_{114}x^1 + 2a_{124}x^2 = 0$). Так как точка A_2 — тройная, то $\tilde{\lambda}_1$ — SP -пучок коник с тройной вершиной A_2 и простой вершиной \tilde{m}_3 . Все коники этого пучка имеют в точке A_2 общую касательную A_2A_3 (рис. 40).

Уравнение пучка $\tilde{\lambda}_2$ имеет вид

$$\Phi_2(A_4) + 2\mu a_{123}x^1x^2 = 0. \quad (4.54)$$

Все коники этого пучка также проходят через точку A_2 и имеют в ней общую касательную A_2A_3 . Кроме того, они проходят через точки \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 ($x^2 = 0$, $\Phi_2(A_4) = 0$). Следовательно, $\tilde{\lambda}_2$ — P -пучок коник с простыми вершинами \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 и двукратной вершиной A_2 .

Семейство $\tilde{\lambda}_3$ ткани \tilde{W}_{22}'' есть пучок прямых с вершиной A_2 .

3-4. В случае тканей W_{23} все 4 особые точки кубики V равноправны. Обозначим через \tilde{W}_{23} ткань, которая получается проектированием ткани W_{23} , например, из конического узла A_4 на плоскость $\pi = A_1A_2A_3$. Запишем уравнение (4.30) кубики V в виде $\Phi_3(A_4) + x^4\Phi_2(A_4) = 0$, где, в силу соотношений (4.43'),

$$\Phi_2(A_4) = a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3, \quad \Phi_3(A_4) = a_{223}(x^2)^2x^3.$$

Семейство $\tilde{\lambda}_1$ задается уравнением $\Phi_2(A_4) + \lambda a_{223}x^2x^3 = 0$ и состоит из коник, проходящих через точки A_2 , A_3 и \tilde{m}_2 , причем в точке A_2 у них общая касательная $\ell_2 = A_2A_1$. Следовательно, $\tilde{\lambda}_1$ — PE -пучок коник с двойной вершиной A_2 (рис. 41).

Семейство λ_2 задается уравнением $\Phi_2(A_4) + \mu a_{223}(x^2)^2 = 0$ и состоит из коник, проходящих через точки A_3 и \tilde{m}_2 , причем в этих точках у них общие касательные (обозначим их t_1 и t_2). Следовательно, λ_2 — WP -пучок

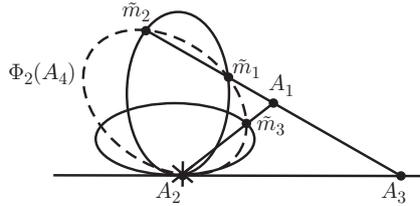


Рис. 40.

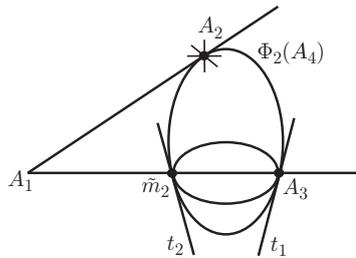


Рис. 41.

коник. Третье семейство линий ткани \widetilde{W}_{23} есть пучок прямых с вершиной A_2 .

3-5. Пусть три-ткань W_{24} задана соотношениями (4.45'), тогда каждая точка прямой A_3A_4 является коническим узлом. Обозначим через \widetilde{W}_{24} проекцию ткани W_{24} , например, из точки A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$. Уравнение кубики V в силу соотношений (4.45') запишется в виде $\Phi_3(A_4) + x^4\Phi_2(A_4) = 0$, где $\Phi_2(A_4) = x^1T_1$, $\Phi_3(A_4) = x^2x^3T_2$, $T_1 = a_{114}x^1 + 2a_{124}x^2$, $T_2 = 2a_{123}x^1 + 2a_{223}x^2$.

Первое семейство $\widetilde{\lambda}_1$ линий ткани \widetilde{W}_{24} определяется уравнением $x^1T_1 + \lambda x^3T_2 = 0$ и состоит из коник, проходящих через точки A_2 , \widetilde{m}_1 и двукратную точку A_3 . Следовательно, $\widetilde{\lambda}_1$ — PE -пучок коник. Все коники пучка имеют в кратной вершине A_3 общую касательную $T_2 = 0$.

Семейство $\widetilde{\lambda}_2$ определяется уравнением $x^1T_1 + \mu x^2T_2 = 0$ и представляет собой семейство пар прямых с общей вершиной A_3 .

Третье семейство линий ткани \widetilde{W}_{24} есть пучок прямых с вершиной A_2 .

3-6. Обозначим через \widetilde{W}'_{24} три-ткань, полученную проектированием ткани W_{24} из произвольной точки $P = A_4 + pA_3$ прямой особых точек A_3A_4 . Непосредственным вычислением можно показать, что первое и третье семейства линий ткани \widetilde{W}'_{24} задаются уравнениями:

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}_1: \Phi_2(P) + \lambda x^3(2a_{123}x^1 + a_{223}x^2) &= 0, \\ \widetilde{\lambda}_3: \Phi_2(P) - \nu x^3(a_{114}x^1 + 2a_{124}x^2) &= 0,\end{aligned}$$

где $\Phi_2(P) = a_{114}(x^1)^2 + 2x^1x^2(pa_{123} + a_{124}) + pa_{223}(x^2)^2$, а второе есть пучок прямых с вершиной A_3 . Семейства λ_1 и λ_3 есть P -пучки с

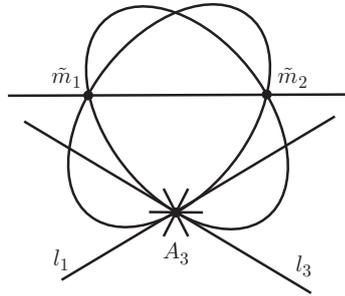


Рис. 42.

общей двойной вершиной A_3 и общими простыми вершинами \widetilde{m}_1 и \widetilde{m}_2 , определяемыми на прямой A_1A_2 уравнением $\Phi_2(P) = 0$. Как видно из написанных выше уравнений пучков, коники пучка λ_1 имеют в вершине A_3 общую касательную $\ell_1 \equiv 2a_{123}x^1 + a_{223}x^2 = 0$, а коники пучка λ_3 — общую касательную $\ell_3 \equiv a_{114}x^1 + 2a_{124}x^2 = 0$ (рис. 42).

3-7. Обозначим через \widetilde{W}'_{25} проекцию ткани W_{25} из бипланарного узла A_2 на плоскость $A_1A_3A_4$. Уравнение кубики V в силу соотношений (4.37') запишется в виде $x^4\widetilde{\Phi}_2(A_2) + x^2\Phi_2(A_2) = 0$, где

$$\begin{aligned}\Phi_2(A_2) &= x^3(a_{233}x^3 + 2a_{234}x^4), \\ \widetilde{\Phi}_2(A_2) &= a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2.\end{aligned}$$

Первое семейство определяется уравнением $\tilde{\Phi}_2(A_2) + \lambda\Phi_2(A_2) = 0$. Это P -пучок коник с кратной вершиной A_4 и с общей касательной в ней $x^3 = 0$. Однократные вершины пучка (обозначим их \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2) есть точки пересечения прямой $a_{233}x^3 + 2a_{234}x^4 = 0$ с парой прямых $\tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$. Семейства λ_2 и λ_3 есть пучки прямых с вершинами A_1 и A_4 .

Отметим, что рассматриваемая ткань отличается от ткани \widetilde{W}'_{22} тем, что вершина A_1 пучка прямых (семейство λ_2) лежит на касательной к пучку коник λ_1 в двойной точке A_4 .

В случае $a_{234} = 0$ (ткани W_{25}^1 , см. (4.49)) семейство λ_1 становится пучком прямых с вершиной A_4 , следовательно, $\lambda_1 \equiv \lambda_3$ и ткань \widetilde{W}'_{25} в этом случае не существует.

В случае $a_{114}a_{334} - a_{134}^2 = 0$ (ткани W_{25}^2 , см. (4.50)) однократные вершины пучка λ_1 совпадают и он становится параболическим (WP) пучком.

3-8. Обозначим через \widetilde{W}''_{25} проекцию ткани W_{25} из конического узла A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$. Уравнение кубики V в силу соотношений (4.37') запишется в виде $\Phi_3(A_4) + x^4\Phi_2(A_4) = 0$, где

$$\begin{aligned}\Phi_2(A_4) &= a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{234}x^2x^3 + a_{334}(x^3)^2, \\ \Phi_3(A_4) &= a_{233}x^2(x^3)^2.\end{aligned}$$

Прямая $x^3 = 0$ касается коники $\Phi_2(A_4)$ в точке A_2 ; прямая $x^2 = 0$ пересекает ее в точках \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 , определяемых уравнением $a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2 = 0$.

Семейство λ_1 задается уравнением $\Phi_2(A_4) + a_{233}\lambda(x^3)^2 = 0$. Это UP -пучок коник с четырехкратной вершиной A_2 . В этой вершине все коники пучка имеют общую касательную $x^3 = 0$.

Семейство λ_2 задается уравнением $\Phi_2(A_4) + a_{233}\mu x^2x^3 = 0$. Это P -пучок коник с двукратной вершиной A_2 , простыми вершинами \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 , и общей касательной $x^3 = 0$.

Третье семейство линий ткани \widetilde{W}''_{25} есть пучок прямых с вершиной A_2 .

В случае $a_{234} = 0$ (ткани W_{25}^1) семейство λ_1 становится пучком прямых с вершиной A_4 и ткань \widetilde{W}'_{25} в этом случае не существует. В случае $a_{114}a_{334} - a_{134}^2 = 0$ (ткани W_{25}^2) однократные вершины пучка λ_1 совпадают и он становится параболическим (WP) пучком.

3-9. Обозначим через \widetilde{W}'''_{25} проекцию ткани W_{25}^2 из особой точки $P(2a_{134}a_{234}, 0, -2a_{114}a_{234}, a_{114}a_{233})$ на плоскость $A_1A_2A_4$ (см. п. 2-5-2). Перейдем к новому реперу, передвинув вершину A_3 в точку P . Тогда координаты преобразуются следующим образом:

$$px^1 + x^3 = \tilde{x}^1, \quad a_{233}x^3 + 2a_{234}x^4 = \tilde{x}^4, \quad x^2 = \tilde{x}^2, \quad x^3 = \tilde{x}^3. \quad (4.54)$$

В новых координатах уравнение кубики V с учетом соотношений (4.37') примет следующий вид («волну» над новыми координата-

ми опускаем):

$$a_{334}(x^1)^2x^4 - a_{334}a_{233}(x^1)^2x^3 + 2a_{234}x^2x^3x^4 = 0, \quad (4.55)$$

а уравнения пучков L_i плоскостей, высекающих ткань Бурау (см. п.1), запишутся, соответственно, так:

$$2a_{234}x^2 = \lambda(x^4 - a_{233}x^3), \quad 2a_{234}x^3 = \mu(x^4 - a_{233}x^3), \quad x^1 = \nu(p+1)x^3.$$

Напомним, что уравнение семейства $\tilde{\lambda}_i$ ткани \widetilde{W}_{25}''' получается исключением переменной x^3 из уравнения (4.55) и уравнения семейства L_i . Пропедев вычисления, получим, соответственно:

$$\begin{aligned} a_{334}a_{233}(x^1)^2 - 2x^2x^4 + \lambda(x^4)^2 &= 0, \\ a_{334}(x^1)^2 + \mu x^2x^4 &= 0, \\ a_{334}(p\nu+1)x^1x^4 - a_{334}a_{233}(x^1)^2 + 2a_{234}x^2x^4 &= 0. \end{aligned}$$

Первое семейство представляет собой UP -пучок с базисными кониками $(x^4)^2 = 0$ и $a_{334}a_{233}(x^1)^2 - 2x^2x^4 = 0$, четверная вершина пучка находится в точке A_2 , прямая $x^4 = 0$ есть общая касательная к коникам пучка. Все коники пучка проходят через точку A_4 . Второе семейство есть WP -пучок коник с общими кратными вершинами A_2 и A_4 и касательными в них $x^4 = 0$ и $x^2 = 0$ соответственно. Третье семейство есть SP -пучок с базисными кониками $a_{334}a_{233}(x^1)^2 - 2x^2x^4 = 0$ и $x^1x^4 = 0$, с тройной вершиной A_2 и простой вершиной A_4 , прямая $x^4 = 0$ есть общая касательная к коникам пучка.

3-10. Обозначим через \widetilde{W}_{26} проекцию ткани W_{26} из планарного узла A_2 на плоскость $A_1A_3A_4$. Уравнение кубики V в силу соотношений (4.38') запишется в виде $2a_{123}x^1x^2x^3 + x^4\tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$, где

$$\tilde{\Phi}_2(A_2) = a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{144}x^1x^4 + a_{334}(x^3)^2.$$

Семейство $\tilde{\lambda}_1$ задается уравнением $2a_{123}\lambda x^1x^3 + \tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$. Это SP -пучок коник с трехкратной вершиной A_4 и простой вершиной \tilde{m}_1 , определяемой уравнениями $x^3 = 0$, $\tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$. В этой вершине все коники пучка имеют общую касательную $x^1 = 0$.

Второе семейство линий ткани \widetilde{W}_{24} есть пучок прямых с вершиной A_1 , третье — пучок прямых с вершиной A_4 .

3-11. Обозначим через \widetilde{W}_{27} проекцию ткани W_{27} из планарного узла A_2 на плоскость $A_1A_3A_4$. Уравнение кубики V в силу соотношений (4.35) и (4.39) запишется в виде $a_{233}x^2(x^3)^2 + x^4\tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$, где

$$\tilde{\Phi}_2(A_2) = a_{114}(x^1)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + a_{334}(x^3)^2 + a_{344}x^3x^4.$$

Семейство $\tilde{\lambda}_1$ задается уравнением $a_{233}\lambda(x^3)^2 + \tilde{\Phi}_2(A_2) = 0$. Это UP -пучок коник с четырехкратной вершиной A_4 . В ней все коники пучка имеют общую касательную $x^3 = 0$. Семейство $\tilde{\lambda}_2$ есть пучок прямых с вершиной A_1 , $\tilde{\lambda}_3$ — пучок прямых с вершиной A_4 .

Итак, всего имеется 10 основных классов регулярных тканей вида \widetilde{W}_2 , отличных от основных классов вида \widetilde{W}_1 , — это ткани \widetilde{W}'_{22} , \widetilde{W}''_{22} , \widetilde{W}_{23} , \widetilde{W}'_{24} , \widetilde{W}''_{24} , \widetilde{W}'_{25} , \widetilde{W}''_{25} , \widetilde{W}'''_{25} , \widetilde{W}_{26} и \widetilde{W}_{27} .

§ 4.5. Регулярные специальные три-ткани Бурау вида W_3 и перспективно эквивалентные им ткани вида \widetilde{W}_3 . Случай 3: все три образующие ℓ_i лежат в одной плоскости

1. Обозначим плоскость, в которой лежат образующие ℓ_i , через π , и выберем репер следующим образом: $\ell_1 = A_2A_3$, $\ell_2 = A_1A_3$, $\ell_3 = A_1A_2$. Кроме того, поместим вершину проективного репера A_4 на кубик V . Тогда ее уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} a_{114}(x^1)^2x^4 + a_{144}x^1(x^4)^2 + a_{224}(x^2)^2x^4 + a_{244}x^2(x^4)^2 + \\ + a_{334}(x^3)^2x^4 + a_{344}x^3(x^4)^2 + 2a_{123}x^1x^2x^3 + 2a_{124}x^1x^2x^4 + \\ + 2a_{134}x^1x^3x^4 + 2a_{234}x^2x^3x^4 = 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Очевидно, что кубика V распадается на квадртку и плоскость π , содержащую прямые ℓ_i , тогда и только тогда, когда $a_{123} = 0$. В этом параграфе будем полагать $a_{123} \neq 0$.

Пучки плоскостей L_i зададим уравнениями

$$x^1 = \lambda x^4, \quad x^2 = \mu x^4, \quad x^3 = \nu x^4. \quad (4.57)$$

Исключая переменные x^α из (4.56) и (4.57), получим уравнение рассматриваемой ткани W_3 :

$$\begin{aligned} 2a_{123}\lambda\mu\nu + a_{114}\lambda^2 + a_{224}\mu^2 + a_{334}\nu^2 + 2a_{124}\lambda\mu + 2a_{134}\lambda\nu + \\ + 2a_{234}\mu\nu + a_{144}\lambda + a_{244}\mu + a_{344}\nu = 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Случай I. Пусть все точки A_i особые. Тогда выполняются соотношения

$$a_{114} = 0, \quad a_{224} = 0, \quad a_{334} = 0, \quad (4.59)$$

уравнение (4.58) становится полилинейным, следовательно, ткань W_3 является регулярной. Отметим, что это в точности ткань W'_0 , которая рассматривалась в предложении 4.1. Обозначим ее теперь W_{31} .

Случай II. Только две из точек A_i особые, пусть A_1 и A_3 . Тогда

$$a_{114} = 0, \quad a_{334} = 0, \quad a_{224} \neq 0, \quad (4.60)$$

и уравнение ткани (4.58) принимает вид:

$$\begin{aligned} a_{224}\mu^2 + \mu(2a_{123}\lambda\nu + 2a_{124}\lambda + 2a_{234} + a_{244}) + \\ + 2a_{134}\lambda\nu + a_{144}\lambda + a_{344}\nu = 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Это уравнение линейно относительно λ и ν , поэтому первое условие линеаризации по μ

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{224} \\ 2a_{123} & 2a_{124} & 2a_{234} & a_{244} \\ 2a_{134} & a_{144} & a_{344} & 0 \end{pmatrix} = 2. \quad (4.62)$$

приводит к регулярности ткани.

Предложение 4.6. *Условие (4.62) необходимо и достаточно для того, чтобы особые точки A_1 и A_3 были бипланарными узлами.*

□ Условие (4.62) эквивалентно соотношениям

$$\frac{a_{134}}{a_{123}} = \frac{a_{144}}{2a_{124}} = \frac{a_{344}}{2a_{234}} \equiv p. \quad (4.63)$$

В силу последних уравнение (4.56) кубики V запишется следующим образом:

$$a_{224}(x^2)^2x^4 + a_{244}x^2(x^4)^2 + 2(px^4 + x^2)(a_{124}x^1x^4 + a_{234}x^3x^4 + a_{123}x^1x^3) = 0. \quad (4.64)$$

Как видно из этого уравнения, конус касательных в точке A_1 распадается на плоскости $px^4 + x^2 = 0$ и $a_{124}x^4 + a_{123}x^3 = 0$, а в точке A_3 — на плоскости $px^4 + x^2 = 0$ и $a_{234}x^4 + a_{123}x^1 = 0$.

Обратно: если потребовать, чтобы точки A_1 и A_3 , лежащие на поверхности (4.56), были бипланарными узлами, то придем к условию (4.63). ■

Предположим, что прямая $a_{124}x^4 + a_{234}x^3 = 0$, $a_{234}x^4 + a_{123}x^1 = 0$ пересекает кубик V в вещественных точках. Поместим в одну из них вершину A_4 , тогда будут выполняться соотношения $a_{124} = a_{234} = 0$ и условие регулярности (4.62) сведется к соотношениям

$$a_{124} = a_{234} = a_{144} = a_{344} = 0. \quad (4.65)$$

Анализируя систему для определения особых точек поверхности V в случае (4.65), найдем, что, помимо A_1 и A_3 , может быть еще сингулярная точка A_4 при условии

$$a_{244} = 0. \quad (4.66)$$

Обозначим регулярную три-ткань, определяемую условиями (4.60) и (4.65), через W_{32} , а условиями (4.60), (4.65) и (4.66) — через W'_{32} .

Таковыми же рассуждениями, как в предыдущих случаях, можно показать, что второе условие линеаризации не приводит к новым классам регулярных тканей.

Случай III. Только одна из точек A_i особая, пусть A_1 . Тогда выполняются соотношения

$$a_{114} = 0, \quad a_{224} \neq 0, \quad a_{334} \neq 0. \quad (4.67)$$

Записав в этом случае уравнение ткани (4.58) по степеням переменных μ или ν и применив первое условие линеаризации, мы придем к условию $a_{123} = 0$, при котором кубика V распадается.

Запишем уравнение (4.58) при условиях (4.67) в виде $\lambda Q_1 + Q_2 = 0$:

$$\lambda(2a_{123}\mu\nu + 2a_{124}\mu + 2a_{134}\nu + a_{144}) + a_{224}\mu^2 + a_{334}\nu^2 + 2a_{234}\mu\nu + a_{244}\mu + a_{344}\nu = 0 \quad (4.68)$$

и применим второе условие линеаризации. Напомним, что оно означает: распадение коник Q_1 и Q_2 и совпадение их центров. Коники Q_1 и Q_2 могут распадаться только следующим образом: $2a_{123}(\mu + a)(\nu + b) = 0$ и $(A\mu + B\nu + C)(A_1\mu + B_1\nu) = 0$ соответственно. Поскольку центры этих коник совпадают, то точка $\mu = -a$, $\nu = -b$ лежит на каждой из прямых, на которые распадается Q_2 . С учетом этого обстоятельства уравнение (4.68) примет вид

$$2a_{123}\lambda(\mu + a)(\nu + b) + p(A(\mu + a) + B(\nu + b))(b\mu - a\nu) = 0, \quad (4.69)$$

если a и b не равны одновременно нулю, или

$$2a_{123}\lambda\mu\nu + (A\mu + B\nu)(A_1\mu + B_1\nu) = 0, \quad (4.69')$$

если $a = b = 0$.

Рассмотрим ткань, заданную уравнением (4.69). Заменяя в (4.69) переменные λ, μ, ν по формулам (4.57), получим уравнение кубики V :

$$2a_{123}x^1(x^2 + ax^4)(x^3 + bx^4) + p(A(x^2 + ax^4) + B(x^3 + bx^4))(bx^2 - ax^3) = 0. \quad (4.70)$$

Найдем особые точки этой кубики. Их координаты определяются системой:

$$\begin{aligned} (x^2 + ax^4)(x^3 + bx^4) &= 0, \\ 2a_{123}x^1(x^3 + bx^4) + pAx^4(bx^2 - ax^3) + \\ &+ (A(x^2 + ax^4) + B(x^3 + bx^4))bx^4 = 0, \\ 2a_{123}x^1(x^2 + ax^4) + pBx^4(bx^2 - ax^3) + \\ &+ (A(x^2 + ax^4) + B(x^3 + bx^4))(-ap)x^4 = 0, \\ 2a_{123}ax^1(x^3 + bx^4) + 2a_{123}bx^1(x^2 + ax^4) + \\ &+ p(bx^2 - ax^3)(A(x^2 + 2ax^4) + B(x^3 + 2bx^4)) = 0. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Эта система удовлетворяется, если положить

$$x^2 + ax^4 = x^3 + bx^4 = 0. \quad (4.72)$$

Следовательно, прямая, определяемая уравнениями (4.72) (обозначим ее m), состоит из особых точек. Теперь вспомним, что вершина репера A_4 находится на кубике V . Поместим ее на m , тогда $m \equiv A_1A_4$, ее уравнения будут $x^2 = x^3 = 0$, и из (4.72) получаем $a = b = 0$. Таким образом, уравнения (4.69) и (4.69') определяют одну и ту же ткань.

Если с помощью (4.57) записать уравнение кубики, соответствующее уравнению (4.69'), то найдем, что

$$a_{114} = 0, a_{124} = 0, a_{134} = 0, a_{144} = a_{244} = a_{344} = 0. \quad (4.73)$$

Предложение 4.7. *Уравнение ткани (4.68) приводится к виду (4.69) или (4.69') тогда и только тогда, когда на кубике V имеется прямая из особых точек, проходящая через точку A_1 .*

□ В одну сторону утверждение уже доказано. Обратное: пусть кубика V , заданная уравнением (4.56) при условии (4.67) имеет прямую особых точек, проходящую через точку A_1 . При этом предположении особые точки кубики V определяются системой:

$$\begin{aligned} 2a_{123}x^2x^3 + 2a_{124}x^2x^4 + 2a_{134}x^3x^4 + a_{144}(x^4)^2 &= 0, \\ 2a_{123}x^1x^3 + 2a_{124}x^1x^4 + 2a_{224}x^2x^4 + 2a_{234}x^3x^4 + a_{244}(x^4)^2 &= 0, \\ 2a_{123}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^4 + 2a_{234}x^2x^4 + 2a_{334}x^3x^4 + a_{344}(x^4)^2 &= 0, \\ 2a_{124}x^1x^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2a_{144}x^1x^4 + a_{224}(x^2)^2 + \\ + 2a_{234}x^2x^3 + 2a_{244}x^2x^4 + a_{334}(x^3)^2 + 2a_{344}x^3x^4 &= 0. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Поместим на особую прямую вершину репера A_4 , тогда все точки прямой A_1A_4 будут особыми и система (4.74) должна удовлетворяться при $x^2 = x^3 = 0$ и произвольных x^1 и x^4 . Это приводит в точности к соотношениям (4.73). ■

Обозначим регулярную ткань, определяемую соотношениями (4.73), через W_{33} , и заметим при этом, что других особых точек на кубике (4.73), помимо лежащих на особой прямой A_1A_4 , нет.

Перепишем уравнение (4.68) в виде $P_0\mu^2 + P_1\mu + P_2 = 0$, где

$$\begin{aligned} P_0 &= a_{224}, \quad P_1 = (2a_{123}\mu\lambda + 2a_{124}\lambda + 2a_{234}\nu + a_{244}), \\ P_2 &= a_{334}\nu^2 + 2a_{134}\lambda\nu + a_{144}\lambda + a_{344}\nu, \end{aligned}$$

и применим второе условие линеаризации. Сравнивая с (1.19), видим, что имеется единственный вариант: один из многочленов U, V должен быть нулевой степени, а другой — степени 2. Отсюда получается, что все P_i принадлежат одному пучку, то есть приходим к первому условию линеаризации. Аналогичный вывод получим, если (4.68) запишем по степеням ν .

Случай IV.

$$a_{114} \neq 0, \quad a_{224} \neq 0, \quad a_{334} \neq 0. \quad (4.75)$$

Применяя, как в предыдущих случаях, первое условие линеаризации к уравнению (4.58), мы придем к матрице, в которой имеются отличные от нуля миноры третьего порядка, равные $2a_{114}a_{224}a_{123}$ и т.п. Поэтому регулярных тканей на этом пути не получится.

Второе условие линеаризации также ничего не даст — доказательство такое же, как и в предыдущем случае.

Полученные результаты объединяет следующая

Теорема 4.8. *Предположим, что прямые $\ell_3 = A_1A_2$, $\ell_1 = A_2A_3$ и $\ell_2 = A_3A_1$ расположены на кубической поверхности V . Тогда уравнение поверхности V имеет вид (4.56), а уравнение специальной три-ткани Бурау W_3 , определяемой прямыми ℓ_i , имеет вид (4.58). Три-ткань W_3 является регулярной тогда и только тогда, когда выполняется одна из следующих серий соотношений: (4.59) (основной класс W_{31}); (4.60) и (4.65) (основной класс W_{32}); (4.60), (4.65) и (4.66) (основной класс W'_{32}); (4.73) (основной класс W_{33}). В каждом из этих случаев кубика V характеризуется соответственно следующими геометрическими условиями: точки A_i пересечения прямых ℓ_i являются особыми точками кубики V ; две из этих точек являются бипланарными узлами; две из этих точек являются бипланарными узлами и существует еще одна особая точка на V ; существует прямая из особых точек, проходящая через одну из точек A_i .*

2. Основные классы регулярных три-тканей вида \widetilde{W}_3 .

2-1. Пусть \widetilde{W}_{31} — проекция ткани W_{31} на плоскость $A_2A_3A_4$ из особой точки A_1 . В силу соотношений (4.59) уравнение (4.56) кубики V запишется в виде $\Phi_3(A_1) + x^1\Phi_2(A_1) = 0$, где

$$\begin{aligned}\Phi_2(A_1) &= a_{144}(x^4)^2 + 2a_{123}x^2x^3 + 2a_{124}x^2x^4 + 2a_{134}x^3x^4, \\ \Phi_3(A_1) &= x^4(a_{244}x^2x^4 + a_{344}x^3x^4 + 2a_{234}x^2x^3) = x^4\widetilde{\Phi}_2(A_1).\end{aligned}$$

Семейство $\widetilde{\lambda}_1$ определяется уравнением $\lambda\Phi_2(A_1) + \widetilde{\Phi}_2(A_1) = 0$ и представляет собой пучок коник, проходящих через точки $A_2, A_3, \widetilde{m}_1$ и \widetilde{m}_2 . Семейства $\widetilde{\lambda}_2$ и $\widetilde{\lambda}_3$ — пучки прямых с вершинами A_2 и A_3 . Очевидно, три-ткань \widetilde{W}_{31} совпадает с три-тканью W_{11} .

2-2. Пусть \widetilde{W}_{32} — проекция ткани W_{32} на плоскость $A_2A_3A_4$ из особой точки A_1 . В силу соотношений (4.60) и (4.65) уравнение (4.56) кубики V в этом случае запишется в виде $\Phi_3(A_1) + x^1\Phi_2(A_1) = 0$, где

$$\begin{aligned}\Phi_2(A_1) &= 2T_1T_2, \\ \Phi_3(A_1) &= x^4(x^2(a_{224}x^2 + a_{244}x^4) + 2a_{234}x^3T_1) \equiv x^4\widetilde{\Phi}_2(A_1),\end{aligned}$$

где $T_1 = x^2 + px^4$, $T_2 = a_{123}x^3 + a_{124}x^4$.

Семейство $\widetilde{\lambda}_1$ определяется уравнением $\lambda\Phi_2(A_1) + \widetilde{\Phi}_2(A_1) = 0$. Это параболический пучок коник с двойной вершиной A_3 и простыми вершинами \widetilde{m}_1 и \widetilde{m}_2 ($T_2 = 0$, $\widetilde{\Phi}_2(A_1) = 0$). Все коники пучка $\widetilde{\lambda}_1$ имеют в вершине A_3 общую касательную $T_2 = 0$.

Семейства $\widetilde{\lambda}_2$ и $\widetilde{\lambda}_3$ есть пучки прямых с вершинами A_2 и A_3 . Как видно из этого описания, ткань \widetilde{W}_{32} совпадает тканью \widetilde{W}'_{22} .

2-3. Пусть \widetilde{W}'_{32} — проекция ткани W'_{32} на плоскость $A_2A_3A_4$ из особой точки A_1 . В силу соотношений (4.60), (4.65) и (4.66) уравнение (4.56) кубики V в этом случае запишется в виде

$$a_{224}(x^2)^2x^4 + 2a_{123}x^1x^2x^3 + 2a_{134}x^1x^3x^4 = 0.$$

Семейство $\tilde{\lambda}_1$ задается уравнением

$$a_{224}(x^2)^2 + 2\lambda x^3(a_{123}x^2 + a_{134}x^4) = 0,$$

а семейства $\tilde{\lambda}_2$ и $\tilde{\lambda}_3$ будут пучками прямых с вершинами A_2 и A_4 соответственно. Семейство $\tilde{\lambda}_1$ представляет собой WP -пучок коник с двойными вершинами A_4 и A_3 и касательными в них $x^3 = 0$ $a_{123}x^2 + a_{134}x^4 = 0$ соответственно.

2-4. Пусть \widetilde{W}_{32}'' — проекция ткани W'_{32} на плоскость $A_1A_2A_3$ из особой точки A_4 . Уравнение кубики V будет то же, что и предыдущем случае, а уравнения семейств запишутся в виде:

$$\tilde{\lambda}_1: a_{224}(x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2\lambda a_{123}x^2x^3 = 0;$$

$$\tilde{\lambda}_2: a_{224}(x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2\mu a_{123}x^1x^3 = 0;$$

$$\tilde{\lambda}_3: a_{224}(x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^3 + 2\nu a_{123}x^1x^2 = 0.$$

Пучок $\tilde{\lambda}_1$ представляет собой SP -пучок коник с вершинами A_1 (тройная) и A_3 , причем общая касательная к коникам пучка в A_1 — прямая $x_3 = 0$. Пучок $\tilde{\lambda}_2$ представляет собой WP -пучок коник с двойными вершинами A_1 и A_3 и касательными в них $x^3 = 0$ $x^1 = 0$ соответственно. Пучок $\tilde{\lambda}_3$ представляет собой SP -пучок коник с вершинами A_1 и A_3 (тройная), причем общая касательная к коникам пучка в A_3 — прямая $x_1 = 0$. Все 3 пучка содержат базисную конику $a_{224}(x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^3 = 0$.

2-5. Пусть \widetilde{W}_{33} — проекция ткани W_{33} на плоскость $A_1A_2A_3$ из особой точки A_4 . В силу (4.73) уравнение кубики (4.56) примет вид

$$a_{224}(x^2)^2x^4 + a_{334}(x^3)^2x^4 + 2a_{123}x^1x^2x^3 + 2a_{234}x^2x^3x^4 = 0. \quad (4.76)$$

Исключая переменную x^4 из уравнений пучков (4.57) и уравнения кубики (4.76), найдем, что семейство $\tilde{\lambda}_1$ представляет собой пучок вырожденных коник — пар прямых с общей вершиной A_1 ; семейство $\tilde{\lambda}_2$ есть параболический пучок коник с общей касательной $\ell_3 = A_1A_2$ в двойной вершине A_1 и простыми вершинами \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 (лежащими на прямой $\ell_1 = A_2A_3$); семейство $\tilde{\lambda}_3$ есть параболический пучок коник с общей касательной $\ell_2 = A_1A_3$ в двойной вершине A_1 и с простыми вершинами \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 . Сравнивая с результатом § 4.4, п. 3-6, убедимся, что ткань \widetilde{W}_{33} совпадает с тканью \widetilde{W}'_{24} .

2-6. Проектируя ткань W_{33} из особой точки A_1 на плоскость $A_2A_3A_4$, получим ткань W_0 , состоящую из трех пучков прямых с вершинами A_2 , A_3 и A_4 .

Итак, имеется всего 3 основных класса регулярных тканей вида \widetilde{W}_3 , отличных от тканей вида \widetilde{W}_1 и \widetilde{W}_2 : это ткани \widetilde{W}'_{32} , \widetilde{W}''_{32} и W_0 .

Результаты объединяет следующая

Теорема 4.9. *Существует всего 17 основных классов регулярных тканей, перспективно эквивалентных специальным регулярным три-тканям Бурау на невырожденных кубических поверхностях, — это ткани $\widetilde{W}_{11}, \widetilde{W}_{12}, \widetilde{W}'_{12}, \widetilde{W}_{13}, \widetilde{W}'_{22}, \widetilde{W}''_{22}, \widetilde{W}_{23}, \widetilde{W}_{24}, \widetilde{W}'_{24}, \widetilde{W}'_{25}, \widetilde{W}''_{25}, \widetilde{W}'''_{25}, \widetilde{W}_{26}, \widetilde{W}_{27}, \widetilde{W}'_{32}, \widetilde{W}''_{32}$ и W_0 .*

§ 4.6. Проективная классификация регулярных три-тканей, перспективно эквивалентных специальным регулярным три-тканям Бурау

Проективная классификация проводится с точностью до проективных преобразований. Напомним, что проективное (дробно-линейное преобразование) однозначно задается 8-ю параметрами или четырьмя парами соответствующих точек, а сложное отношение четырех точек прямой или четырех прямых пучка является проективным инвариантом. Пусть K — некоторая конфигурация на плоскости. Обозначим через p , i и a соответственно число параметров, задающих эту конфигурацию, число ее проективных инвариантов и размерность максимальной группы проективных автоморфизмов. Очевидно, что $a = 8 - p$, и если имеются две одинаковые по форме конфигурации с равными инвариантами, зависящие от $p < 9$ параметров, то такие конфигурации проективно эквивалентны. В этом параграфе две ткани W и W' мы называем эквивалентными, если существует проективное преобразование, переводящее одну ткань в другую.

1. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}_1

1-1. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}_{11}

Согласно § 4.3, п. 2-1 семейство $\widetilde{\lambda}_3$ три-ткани \widetilde{W}_{11} есть пучок коник с базисом $\Phi_2(A_4)$ и $\Phi_2(A_4)$ и вершинами $A_1, A_2, \widetilde{m}_3$ и \widetilde{m}_4 . Семейства $\widetilde{\lambda}_1$ и $\widetilde{\lambda}_2$ — пучки прямых с вершинами A_1 и A_2 . Обозначим через $\widetilde{W}_{11.1}$ и $\widetilde{W}_{11.2}$ ткани, у которых точки \widetilde{m}_3 и \widetilde{m}_4 являются соответственно вещественными и различными или мнимыми. Через $\widetilde{W}_{11.3}$ обозначим ткани, у которых точки \widetilde{m}_3 и \widetilde{m}_4 совпадают. В этом случае семейство $\widetilde{\lambda}_3$ есть PE -пучок с простыми вершинами A_1 и A_2 и двукратной вершиной $m \equiv \widetilde{m}_3 \equiv \widetilde{m}_4$.

Предложение 4.10. *Любые две ткани одного и того же типа $\widetilde{W}_{11.k}$, $k = 1, 2, 3$, проективно эквивалентны. Всякая три-ткань $\widetilde{W}_{11.3}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.*

□ Ткани $\widetilde{W}_{11.1}$ и $\widetilde{W}_{11.2}$ вполне определяются конфигурацией K из вершин $A_1, A_2, \widetilde{m}_3$ и \widetilde{m}_4 , никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Здесь $p = 8$ — параметрами являются координаты вершин. Следовательно, $a = 0$. Так как существует единственное проективное преобразование, переводящее такую четверку точек в аналогичную, то любые две ткани рассматриваемого типа эквивалентны. Конструк-

ция K не имеет проективных инвариантов ($i = 0$), поскольку в ней нет четверок точек, лежащих на одной прямой, и четверок прямых, принадлежащих одному пучку.

Ткань $\widetilde{W}_{11.3}$ вполне определяется точками A_1, A_2, m и общей касательной коник пучка λ_3 в точке m (см. предложение 4.2). Эта конструкция K задается семью параметрами ($p = 7$) — координатами точек и параметром касательной в пучке прямых с вершиной m . Следовательно, $a = 8 - 7 = 1$ и найдется проективное преобразование, которое переведет конструкцию K в любую другую, ей аналогичную. ■

Рассмотрим метрическую модель ткани $\widetilde{W}_{11.2}$. Удалим прямую $\tilde{m}_3\tilde{m}_4$ в бесконечность и возьмем комплексно-сопряженные точки \tilde{m}_3 и \tilde{m}_4 в качестве точек Лагерра¹⁾. Тогда коники станут окружностями. Следовательно, рассматриваемая три-ткань \widetilde{W}_{11} проективно эквивалентна круговой ткани, образованной эллиптическим пучком окружностей и двумя пучками прямых с вершинами в вершинах пучка окружностей (класс 4 по классификации круговых тканей В. Б. Лазаревой, см. гл. 3).

Через $\widetilde{W}_{11.4}$ обозначим ткани, у которых точка \tilde{m}_3 совпадает с точкой A_1 . Они характеризуются соотношением $a_{112}a_{134} = a_{113}a_{124}$. В этом случае $\tilde{\lambda}_3$ будет PE -пучком с простыми вершинами A_2, \tilde{m}_4 и двукратной вершиной A_1 . Через $\widetilde{W}_{11.5}$ обозначим ткани, у которых точка \tilde{m}_3 совпадает с точкой A_1 , а точка \tilde{m}_4 совпадает с точкой A_2 . В этом случае $\tilde{\lambda}_3$ будет WP -пучком с вершинами A_1 и A_2 . Такие ткани характеризуются соотношениями $a_{112}a_{134} = a_{113}a_{124}$ и $2a_{112}a_{234} = -a_{223}a_{124}$.

Аналогично предложению 4.10 доказывается

Предложение 4.11. *Любые две ткани одного и того же типа $\widetilde{W}_{11.4}$ или $\widetilde{W}_{11.5}$ проективно эквивалентны. Три-ткань $\widetilde{W}_{11.4}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов; три-ткань $\widetilde{W}_{11.5}$ допускает двупараметрическую группу проективных автоморфизмов.*

Через $\widetilde{W}_{11.6}$ обозначим ткани, у которых точки \tilde{m}_3 и \tilde{m}_4 совпадают с точкой A_1 . Соотношения, характеризующие такие ткани, можно записать в виде

$$a_{124} = pa_{112}, a_{134} = pa_{113}, a_{234} = qa_{112} - pa_{223}, a_{334} = 2qa_{113} + 2pa_{133}.$$

В этом случае $\tilde{\lambda}_3$ есть SP -пучок с простой вершиной A_2 и трехкратной вершиной A_1 . Базис пучка образуют коника $\Phi_2(A_4)$ (см. (4.24)) и вырожденная коника $A_1A_2 \cup t$, где t_1 — касательная к конике $\Phi_2(A_4)$ в точке A_1 .

¹⁾ Две комплексно сопряженные точки на бесконечно удаленной прямой, через которые проходят все окружности плоскости.

Предложение 4.12. Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{11.6}$ проективно эквивалентны. Три-ткань $\widetilde{W}_{11.6}$ допускает двупараметрическую группу проективных автоморфизмов.

□ Согласно предложению 4.1 существует ∞^1 SP -пучков (SP -связка) коник, имеющих заданные вершины и общую касательную в тройной вершине. Чтобы выделить в связке пучок, надо фиксировать параметр пучка в связке. Таким образом, вся конструкция определяется шестью параметрами: координаты вершин A_1 и A_2 , параметр касательной в пучке с вершиной A_1 и параметр пучка в связке. ■

1-2. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}_{12}

Напомним (§ 4.3, п. 2-2), что три-ткань \widetilde{W}_{12} задается в плоскости $A_1A_2A_4$ общей базисной коникой $\Phi_2(A_3)$ двух P -пучков с общей вершиной $A_1 + A_2$ на ней и прямыми $\ell_1 = A_1A_4$ и $\ell_2 = A_2A_4$, пересекающимися конику $\Phi_2(A_3)$ в точках \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 , \tilde{m}_3 и \tilde{m}_4 соответственно. При этом прямая A_1A_2 касается коники $\Phi_2(A_3)$ в точке $A_1 + A_2$ (рис. 39).

В зависимости от расположения прямых относительно коники получаются следующие проективно различные классы тканей.

Три-ткань $\widetilde{W}_{12.1}$: точки \tilde{m}_1 , \tilde{m}_2 , \tilde{m}_3 и \tilde{m}_4 являются вещественными и различными. Тогда семейство λ_1 (λ_2) есть PE -пучок коник с простыми вершинами \tilde{m}_3 , \tilde{m}_4 (\tilde{m}_1 , \tilde{m}_2) и двукратной вершиной $A_1 + A_2$. Семейство $\tilde{\lambda}_3$ есть пучок прямых с вершиной $A_1 + A_2$.

Три-ткань $\widetilde{W}'_{12.1}$: это такие три-ткань $\widetilde{W}_{12.1}$, у которых параболические пучки коник λ_1 и λ_2 имеют общую вершину $m \equiv \tilde{m}_1 = \tilde{m}_3 = A_4$. Эти ткани выделяются дополнительным соотношением $a_{344} = 0$ и есть в точности ткань \widetilde{W}'_{12} , но мы оставим за ними обозначение $\widetilde{W}'_{12.1}$ для единообразия.

Ткани $\widetilde{W}_{12.2}$: пары точек \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 , \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 являются комплексно-сопряженными. В этом случае семейства λ_1 и λ_2 есть PH -пучки коник.

Ткани $\widetilde{W}_{12.3}$: точки \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 вещественные, а \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 являются комплексно-сопряженными (или наоборот).

Ткани $\widetilde{W}_{12.4}$: одна из прямых, например, ℓ_1 касается коники $\Phi_2(A_3)$ в точке $m \equiv \tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$, а другая прямая пересекает эту конику в двух вещественных точках. В этом случае λ_1 есть WP -пучок коник с двукратными вершинами m и $A_1 + A_2$, а семейство λ_2 есть PE -пучок коник. Рассматриваемый случай характеризуется соотношением $a_{113}a_{344} = (a_{134})^2$.

Ткани $\widetilde{W}_{12.5}$: одна из прямых, например, ℓ_1 касается коники $\Phi_2(A_3)$, другая пересекает эту конику в двух комплексно-сопряженных точках.

Ткани $\widetilde{W}_{12.6}$: ℓ_1 и ℓ_2 касаются $\Phi_2(A_3)$. Соотношения, характеризующие такие ткани, можно записать в виде (см. (4.25)):

$$a_{113} = a^2, a_{344} = b^2, a_{134} = a_{234} = ab.$$

В этом случае семейства $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ являются WP -пучками коник с вершинами $m \equiv \tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$ и $A_1 + A_2$, $n \equiv \tilde{m}_3 = \tilde{m}_4$ и $A_1 + A_2$ соответственно.

Предложение 4.13. *Существует 1) ∞^2 проективно различных тканей типа $\tilde{W}_{12.k}$, где $k = 1, 2, 3$; 2) ∞^1 проективно различных тканей типа $\tilde{W}'_{12.1}$ и $\tilde{W}_{12.k}$, где $k = 4, 5$; 3) любые две ткани типа $\tilde{W}_{12.6}$ проективно эквивалентны.*

□ 1) Сложные отношения точек $I_1 = (A_1, A_4, \tilde{m}_1, \tilde{m}_2)$ и $I_2 = (A_2, A_4, \tilde{m}_3, \tilde{m}_4)$ являются проективными инвариантами ткани W типа $\tilde{W}_{12.k}$, где $k = 1, 2, 3$. Ясно, что если две ткани эквивалентны, то соответствующие сложные отношения совпадают. Покажем обратное. Пусть W' — другая три-ткань этого же типа, и пусть P — проективное преобразование, переводящее 4 точки $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ и \tilde{m}_4 , связанные с три-тканью W , в соответствующие 4 точки со штрихами, связанные с три-тканью W' . Тогда (см. рис. 39) $P(A_4) = A'_4$, а так как $I_1 = I'_1$ и $I_2 = I'_2$, то $P(A_1) = A'_1$ и $P(A_2) = A'_2$. Теперь заметим, что общая базисная коника $\Phi_2(A_3)$ пучков λ_1 и λ_2 касается прямой A_1A_2 . Этим свойством она однозначно определяется в пучке коник с вершинами $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \tilde{m}_3$ и \tilde{m}_4 . Аналогично однозначно находится и коника $\Phi'_2(A_3)$ для ткани W' . А поскольку при проективных преобразованиях сохраняется инцидентность, то получаем, что $P(\Phi_2(A_3)) = \Phi'_2(A_3)$ и, следовательно, $P(A_1 + A_2) = A'_1 + A'_2$, а значит и $P(W) = W'$.

2) Ткань $\tilde{W}'_{12.1}$ имеет единственный инвариант I — сложное отношение четырех прямых, проходящих через точку $A_1 + A_2$: A_2A_1 , $A_1 + A_2m$, $A_1 + A_2\tilde{m}_2$ и $A_1 + A_2\tilde{m}_4$. Покажем, что если у двух тканей W и W' типа $\tilde{W}'_{12.1}$ инварианты совпадают, то эти ткани проективно эквивалентны. Пусть P — (единственное) проективное преобразование, переводящее 4 точки $A_1 + A_2, \tilde{m}_1 \equiv \tilde{m}_3, \tilde{m}_2, \tilde{m}_4$ в соответствующие точки со штрихами. Так как $I = I'$, то $P(A_1A_2) = A'_1A'_2$, то есть общая касательная пучков коник переходит в общую касательную. Согласно предложению 4.1, по касательной и вершинам P -пучки восстанавливаются однозначно; откуда следует, что $P(W) = W'$.

Три-ткани $\tilde{W}'_{12.4}$ и $\tilde{W}_{12.5}$ имеют единственный проективный инвариант I — сложное отношение четырех прямых $A_2A_1, A_1 + A_2m, A_1 + A_2\tilde{m}_3$ и $A_1 + A_2\tilde{m}_4$. Точно так же, как и для тканей $\tilde{W}'_{12.1}$, доказывается, что любые две ткани типа $\tilde{W}'_{12.4}$ (или $\tilde{W}_{12.5}$) проективно эквивалентны, если их инварианты совпадают.

3) Три-ткань $\tilde{W}_{12.6}$ вполне определяется заданием коники $\Phi_2(A_3)$ с тремя фиксированными точками m, n и $A_1 + A_2$ на ней. Коника $\Phi_2(A_3)$, в свою очередь, однозначно определяется заданием трех точек m, n и $A_1 + A_2$ и двух касательных ℓ_1 и ℓ_2 в точках m и n соответственно. Действительно, согласно предложению 4.2, по кратным вершинам m, n и общим касательным ℓ_1 и ℓ_2 однозначно восстанавливается WP -

пучок коник, которому принадлежит и коника $\Phi_2(A_3)$. Последняя однозначно находится из условия, что проходит через точку $A_1 + A_2$.

Из этих рассуждений вытекает, что ткань $\widetilde{W}_{12.6}$ однозначно определяется четверкой точек $m, n, A_1 + A_2$ и $A_4 = \ell_1 \cap \ell_2$. А отсюда следует, что любые две ткани типа $\widetilde{W}_{12.6}$ проективно эквивалентны, поскольку всегда найдется проективное преобразование, переводящее указанную четверку точек в аналогичную четверку точек со штрихами. ■

Отметим, что ткань \widetilde{W}_{12} не эквивалентна никакой круговой ткани, поскольку не существует пары комплексно-сопряженных точек, через которые проходили бы коники обоих пучков $\widetilde{\lambda}_1$ и $\widetilde{\lambda}_2$.

1-3. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}_{13}

Напомним еще раз различие между тканями W_{12} и W_{13} : у последних прямые ℓ_1, ℓ_2 и общая касательная A_1A_2 к коникам пучков λ_1 и λ_2 в точке $A_1 + A_2$ пересекаются в одной точке — A_4 . Поэтому в проективной классификации тканей W_{13} получаются такие же 5 типов тканей, как и в предыдущем случае, кроме случаев $\widetilde{W}'_{12.1}$ и $\widetilde{W}_{12.6}$ — они невозможны, так как прямые ℓ_1, ℓ_2 и $A_4, A_1 + A_2$ различны. Аналогично предложению 4.13 доказывается

Предложение 4.14. *Существует 1) ∞^1 проективно различных тканей типа $\widetilde{W}_{13.k}$, где $k = 1, 2, 3$; 2) любые две ткани типа $\widetilde{W}_{13.4}$ и любые две ткани типа $\widetilde{W}_{13.5}$ проективно эквивалентны.*

2. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}_2

Как отмечено в § 4.4, п. 3-1, ткань \widetilde{W}_{21} совпадает с тканью \widetilde{W}_{11} .

2-1. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}'_{22}

Напомним (§ 4.4, п. 3-2), что первое семейство $\widetilde{\lambda}_1$ линий ткани \widetilde{W}'_{22} задается уравнением (4.51). Это P -пучок коник с простыми вершинами \widetilde{m}_1 и \widetilde{m}_2 и двукратной вершиной A_4 , причем все коники пучка имеют в A_4 общую касательную A_4A_3 . Семейства $\widetilde{\lambda}_2$ и $\widetilde{\lambda}_3$ есть пучки прямых с вершинами A_1 и A_4 соответственно, причем $A_1 \in \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2$. Ткань, у которой вершины \widetilde{m}_1 и \widetilde{m}_2 вещественные и различные, обозначим $\widetilde{W}'_{22.1}$; ткани, у которых эти вершины мнимые или совпадают, обозначим, соответственно, $\widetilde{W}'_{22.2}$ и $\widetilde{W}'_{22.3}$.

Если одна из точек \widetilde{m}_1 или \widetilde{m}_2 совпадает с точкой A_1 , то (см. (4.47')) получаем $a_{114} = 0$, что противоречит условию (4.35).

Если одна из точек \widetilde{m}_1 или \widetilde{m}_2 совпадает с точкой A_4 , из (4.47') получаем $a_{334} = 0$ и кубика V распадается. Таким образом, существует всего 3 указанных выше типа тканей \widetilde{W}'_{22} .

Предложение 4.15. *1) Существует ∞^1 проективно различных тканей $\widetilde{W}'_{22.1}$ и $\widetilde{W}'_{22.2}$, причем любая ткань этих типов допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов; 2) любые две ткани типа $\widetilde{W}'_{22.3}$ проективно эквивалентны, и любая ткань этого типа допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.*

□ 1) В случае тканей $\widetilde{W}'_{22.1}$ через двукратную вершину A_4 пучка $\widetilde{\lambda}_1$ проходят 4 прямые: A_4A_1 , касательная A_4A_3 , $A_4\widetilde{m}_1$ и $A_4\widetilde{m}_2$, сложное отношение которых (обозначим его I) есть инвариант ткани.

Далее заметим, что ткань $\widetilde{W}'_{22.1}$ однозначно определяется точками A_4 , \widetilde{m}_1 и \widetilde{m}_2 , общей касательной $x^1 = 0$ коник пучка $\widetilde{\lambda}_1$ в точке A_4 (всего 7 параметров) и инвариантом I . Так как $p = 7$, то $a = 8 - 7 = 1$.

Для тканей $\widetilde{W}'_{22.2}$ доказательство аналогично.

2) У три-тканей $\widetilde{W}'_{22.3}$ пучок $\widetilde{\lambda}_1$ является дважды параболическим с двукратными вершинами A_4 и $m \equiv \widetilde{m}_1 \equiv \widetilde{m}_2$. Обозначим точку пересечения общих касательных к коникам пучка в двойных вершинах через T . Тогда ткань $\widetilde{W}'_{22.3}$ вполне определяется четверкой точек A_1 , A_4 , m и T .

С другой стороны, существует ∞^1 проективных преобразований, которые одну такую четверку точек переводят в аналогичную. Отсюда вытекает, во-первых, что любые две ткани типа $\widetilde{W}'_{22.3}$ проективно эквивалентны, и, во-вторых, что ткань $\widetilde{W}'_{22.3}$ допускает однопараметрическое семейство проективных автоморфизмов. ■

Метрическая модель ткани $\widetilde{W}'_{22.2}$ получается удалением прямой $\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2$ в бесконечность. Если считать комплексно сопряженные точки \widetilde{m}_1 и \widetilde{m}_2 точками Лагерра, то PH -пучок коник $\widetilde{\lambda}_1$ становится параболическим пучком окружностей, и ткань $\widetilde{W}'_{22.2}$ становится круговой три-тканью. Это класс 6.1 по классификации Лазаревой, см. гл. 3.

2-2. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}''_{22}

Обозначим $\widetilde{W}''_{22.1}$ ткани \widetilde{W}''_{22} , у которых точки \widetilde{m}_1 и \widetilde{m}_2 вещественные; $\widetilde{W}''_{22.2}$ — если точки \widetilde{m}_1 и \widetilde{m}_2 мнимые; $\widetilde{W}''_{22.3}$, если $\widetilde{m}_1 = \widetilde{m}_2 \equiv m$. Если, например, $\widetilde{m}_1 = \widetilde{m}_3$, то получаем $a_{114} = 0$, что противоречит (4.35). Таким образом, существует всего 3 типа тканей \widetilde{W}''_{22} .

Предложение 4.16. *Существует ∞^1 проективно различных тканей типа $\widetilde{W}''_{22.1}$ и типа $\widetilde{W}''_{22.2}$. Любые две ткани типа $\widetilde{W}''_{22.3}$ проективно эквивалентны. Ткань $\widetilde{W}''_{22.3}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.*

□ 1) У тканей $\widetilde{W}''_{22.1}$ и $\widetilde{W}''_{22.2}$ есть один инвариант — сложное отношение точек A_1 , A_3 , \widetilde{m}_1 , \widetilde{m}_2 на прямой A_1A_3 (обозначим его I). Отсюда вытекает первая часть предложения 4.16.

Чтобы задать ткань $\widetilde{W}''_{22.1}$, надо задать координаты точек A_2 , A_3 , \widetilde{m}_3 (6 параметров), параметр прямой A_1A_3 в пучке прямых с вершиной A_3 и координату одной из вершин PE -пучка, например, \widetilde{m}_1 — всего 8 параметров. Тогда точка A_1 определится как пересечение прямых $A_2\widetilde{m}_3$ и $A_3\widetilde{m}_1$, а вторая вершина \widetilde{m}_2 PE -пучка найдется с помощью сложного отношения.

Аналогичные рассуждения проводятся и для ткани $\widetilde{W}''_{22.2}$.

Ткань $\widetilde{W}''_{22.3}$ определится заданием точек A_2 , A_3 , \widetilde{m}_3 и параметром базисной коники $\Phi_2(A_4)$ в SP -пучке $\widetilde{\lambda}_1$ (сам пучок определен тройной

вершиной A_2 , касательной A_2A_3 в ней, и простой вершиной \tilde{m}_3). Итак, всего 7 параметров, откуда $a = 8 - 7 = 1$. ■

2-3. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}_{23}

Произвольная три-ткань \widetilde{W}_{23} образована PE -пучком коник $\tilde{\lambda}_1$ с двукратной вершиной A_2 и простыми вершинами A_3 и \tilde{m}_2 , WP -пучком коник $\tilde{\lambda}_2$ с кратными вершинами A_3 и \tilde{m}_2 , и пучком прямых с вершиной A_2 (см. § 4.4, п. 3-4, и рис. 41). Пучки $\tilde{\lambda}_1$ и $\tilde{\lambda}_2$ имеют общую базисную конику $\Phi_2(A_4)$. Если точки A_3 и \tilde{m}_2 различны, то соответствующую три-ткань обозначим $\widetilde{W}_{23.1}$. Если эти точки совпадают, то $\tilde{\lambda}_1$ становится WP -пучком с кратными вершинами A_2 и A_3 , а $\tilde{\lambda}_2$ — UP -пучком с четырехкратной вершиной A_3 . Коники обоих пучков имеют в вершине A_3 общую касательную A_1A_3 . Обозначим такие ткани $\widetilde{W}_{23.2}$.

Ткани $\widetilde{W}_{23.1}$ и $\widetilde{W}_{23.2}$ имеют проективный инвариант I — сложное отношение точек A_1, A_2, T_1, T_2 на касательной A_1A_2 , где T_1 и T_2 — точки на касательных t_1 и t_2 к коникам WP -пучка в кратных вершинах A_3 и \tilde{m}_2 .

Предложение 4.17. Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{23.1}$ ($\widetilde{W}_{23.2}$) с одинаковым инвариантом проективно эквивалентны. Ткань $\widetilde{W}_{23.2}$ допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.

□ Ткань $\widetilde{W}_{23.1}$ однозначно определяется восемью параметрами: координатами точек A_1, A_3 , координатой точки \tilde{m}_2 на прямой A_1A_3 и параметрами касательных A_1A_2, t_1 и t_2 . Вершина A_2 P -пучка на A_1A_2 определяется инвариантом I .

Ткань $\widetilde{W}_{23.2}$ определяется семью параметрами: координатами точек A_1, A_2, A_3 и параметром базисной коники $\Phi_2(A_4)$ в WP -пучке $\tilde{\lambda}_1$. ■

Ткань \widetilde{W}_{24} совпадает с тканью $\widetilde{W}_{11.4}$, а ткань \widetilde{W}'_{24} — с тканью \widetilde{W}_{33} , которую мы рассмотрим ниже.

2-4. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}'_{25}

Согласно § 4.4, ткани \widetilde{W}'_{25} могут быть трех типов: вершины \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 P -пучка $\tilde{\lambda}_2$ а) вещественные и различные (ткани $\widetilde{W}'_{25.1}$); б) мнимые (ткани $\widetilde{W}'_{25.2}$); в) совпадают (ткани $\widetilde{W}'_{25.3}$).

В первых двух случаях семейства ткани задаются четверкой точек A_4, A_1, \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 , причем три последних лежат на одной прямой. Эта конструкция задается семью параметрами. А в случае, если точки \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 совпадают (ткани $\widetilde{W}'_{25.3}$), — шестью параметрами. Отсюда вытекает

Предложение 4.18. Любые две ткани типа $\widetilde{W}'_{25.i}, i = 1, 2, 3$, проективно эквивалентны. Ткани $\widetilde{W}'_{25.1}$ и $\widetilde{W}'_{25.2}$ допускают однопараметрическую группу проективных автоморфизмов. Ткань $\widetilde{W}'_{25.3}$ допускает двухпараметрическую группу проективных автоморфизмов.

Ткань $\widetilde{W}'_{25.2}$ эквивалентна круговой ткани, образованной двумя параболическими пучками окружностей и эллиптическим пучком, вершины которого совпадают с вершинами параболических пучков, при этом все пучки имеют общую окружность (класс 6.2 по классификации Лазаревой).

2-5. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}''_{25}

Согласно § 4.4, ткани \widetilde{W}''_{25} могут быть трех типов: вершины \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 P -пучка $\tilde{\lambda}_2$ а) вещественные и различные (ткани $\widetilde{W}''_{25.1}$); б) мнимые (ткани $\widetilde{W}''_{25.2}$); в) совпадают. В последнем случае получается ткань $\widetilde{W}_{23.2}$.

Предложение 4.19. Любые две ткани типа $\widetilde{W}''_{25.1}$ или типа $\widetilde{W}''_{25.2}$ проективно эквивалентны.

□ Ткань $\widetilde{W}''_{25.1}$ вполне определяется заданием пары точек A_1 и A_2 (4 параметра), параметром прямой $\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2$ в пучке прямых с вершиной A_1 , параметрами точек \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 на прямой $\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2$ и параметром базисной коники $\Phi_2(A_4)$ в P -пучке λ_2 , — всего 8 параметров. Для тканей $\widetilde{W}''_{25.2}$ рассуждения аналогичны. ■

2-6. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}'''_{25}

В соответствии с п. 3-9 § 4.4, второе и третье семейства ткани \widetilde{W}'''_{25} вполне определяются тройкой точек A_1 , A_2 и A_4 . Однако первое семейство (UP -пучок коник) своей четверной вершиной A_2 и касательной в ней $x^4 = 0$ задается неоднозначно (см. предложение 4.2). Чтобы задать этот пучок, надо фиксировать его базисную конику $\lambda = 0$, которая входит во второе семейство — WP -пучок. Таким образом, ткань вполне определяется семью параметрами: координатами точек A_1 , A_2 , A_4 и параметром коники в WP -пучке. Поэтому верно

Предложение 4.20. Любые две ткани типа \widetilde{W}'''_{25} проективно эквивалентны; ткань \widetilde{W}'''_{25} допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов.

2-7. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}_{26} и \widetilde{W}_{27}

Как видно из § 4.4, пп. 3-10, 3-11, ткани \widetilde{W}_{26} и \widetilde{W}_{27} не допускают проективно различных типов.

Предложение 4.21. 1) Любые две ткани типа \widetilde{W}_{26} проективно эквивалентны; ткань \widetilde{W}_{26} допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов; 2) любые две ткани типа \widetilde{W}_{27} проективно эквивалентны; ткань \widetilde{W}_{27} допускает двухпараметрическую группу проективных автоморфизмов.

□ Три-ткань \widetilde{W}_{26} образована SP -пучком коник $\tilde{\lambda}_1$ с тройной вершиной A_4 и простой вершиной \tilde{m}_1 , и двумя пучками прямых с вершинами A_1 и A_4 , причем $\tilde{m}_1 \in A_1A_4$ и прямая A_3A_4 есть общая касательная коник пучка $\tilde{\lambda}_1$ в вершине A_4 , см. § 4.4, п. 3-10. Эта конструкция зависит от шести параметров: координат точек A_1 и A_4 ,

координаты точки \tilde{m}_1 на прямой A_1A_4 и параметра касательной A_3A_4 в пучке с вершиной A_4 .

Согласно § 4.4, п. 3-11, ткань \widetilde{W}_{27} образована UP -пучком коник $\tilde{\lambda}_1$ с четырехкратной вершиной A_4 и двумя пучками прямых с вершинами A_1 и A_4 , причем A_1A_4 — общая касательная коник пучка $\tilde{\lambda}_1$ в вершине A_4 . Эта конструкция определяется шестью параметрами: координатами точек A_1, A_4 , и двумя параметрами пучка UP -пучка $\tilde{\lambda}_1$ в гиперсвязке коник, определяемой четырехкратной вершиной A_4 и общей касательной A_1A_4 (см. предложение 4.2). ■

3. Проективная классификация три-тканей \widetilde{W}_3

Ткань \widetilde{W}'_{32} (см. § 4.5, п. 2) совпадает с тканью $\widetilde{W}''_{22.3}$.

3-1. Ткань \widetilde{W}''_{32} (см. там же) вполне определяется тройкой точек $A_i, i = 1, 2, 3$, (шесть параметров) и выбором базисной коники $a_{224}(x^2)^2 + 2a_{134}x^1x^3 = 0$ в WP -пучке (один параметр), то есть семью параметрами.

Три-ткань \widetilde{W}_{33} (§ 4.5, п. 2-5) вполне определяется двумя прямыми $\ell_2 = A_3A_1$ и $\ell_3 = A_1A_2$, проходящими через точку A_1 , и двумя точками \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 , лежащими на прямой $\ell_1 = A_2A_3$. Ткани, у которых точки \tilde{m}_1 и \tilde{m}_2 вещественные и различные, обозначим $\widetilde{W}_{33.1}$, комплексно-сопряженные — $\widetilde{W}_{33.2}$, совпавшие — $\widetilde{W}_{33.3}$ (эта ткань выделяется соотношением $(a_{234})^2 = a_{224}a_{334}$ на коэффициенты кубики (4.76)). У тканей $\widetilde{W}_{33.1}$ и $\widetilde{W}_{33.2}$ сложное отношение прямых $\ell_2, \ell_3, \tilde{m}_1$ и $A_1\tilde{m}_2$ является инвариантом ткани. Таким образом, верно

Предложение 4.22. *Любые две ткани типа \widetilde{W}''_{32} проективно эквивалентны. Ткань \widetilde{W}''_{32} допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов. Существует ∞^1 проективно различных тканей $\widetilde{W}_{33.1}$ и $\widetilde{W}_{33.2}$, любая ткань каждого из этих типов допускает однопараметрическую группу проективных автоморфизмов. Любые две ткани типа $\widetilde{W}_{33.3}$ проективно эквивалентны; ткань $\widetilde{W}_{33.3}$ допускает двупараметрическую группу проективных автоморфизмов.*

Поскольку все коники ткани $\widetilde{W}_{33.2}$ проходят через пару комплексно-сопряженных точек, то ткань $\widetilde{W}_{33.2}$ проективно эквивалентна круговой ткани. Последняя образована двумя параболическими пучками окружностей с общей вершиной A_1 и эллиптическим пучком окружностей, одна из вершин которого совпадает с A_1 . Следовательно, все 3 пучка принадлежат одной параболической связке окружностей, и мы получаем класс 0 по классификации Лазаревой.

Результаты этого параграфа объединяет

Теорема 4.23. *Существует 38 проективно различных триангуляций плоскости пучками коник, соответствующих проективно различным типам тканей \widetilde{W} , перспективно эквивалентных регулярным специальным тканям Бурау на невырожденных кубических*

поверхностей. Это ткани: $\widetilde{W}_{11,k}$, $k = \overline{1,6}$; $\widetilde{W}'_{12,1}$; $\widetilde{W}_{12,k}$, $k = \overline{1,6}$; $\widetilde{W}_{13,k}$, $k = \overline{1,5}$; $\widetilde{W}'_{22,k}$, $k = \overline{1,3}$; $\widetilde{W}''_{22,k}$, $k = \overline{1,3}$; $\widetilde{W}_{23,1}$, $\widetilde{W}_{23,2}$; $\widetilde{W}'_{25,k}$, $k = \overline{1,3}$; $\widetilde{W}''_{25,k}$, $k = 1, 2$; \widetilde{W}_{26} ; \widetilde{W}_{27} ; \widetilde{W}''_{32} , $\widetilde{W}_{33,k}$, $k = \overline{1,3}$; W_0 .

Из них ткани $\widetilde{W}'_{12,1}$, $\widetilde{W}_{12,4}$, $\widetilde{W}_{12,5}$, $\widetilde{W}_{13,k}$ ($k = \overline{1,3}$), $\widetilde{W}'_{22,1}$, $\widetilde{W}'_{22,2}$, $\widetilde{W}''_{22,1}$, $\widetilde{W}''_{22,2}$, $\widetilde{W}_{23,1}$, $\widetilde{W}_{33,1}$, $\widetilde{W}_{33,2}$ имеют один проективный инвариант, то есть каждый из этих типов содержит ∞^1 проективно различных тканей; ткани $\widetilde{W}_{12,k}$, $k = \overline{1,3}$, имеют два проективных инварианта.

Ткани $\widetilde{W}_{11,3}$, $\widetilde{W}_{11,4}$, $\widetilde{W}'_{22,i}$, $i = 1, 2, 3$, $\widetilde{W}''_{22,3}$, $\widetilde{W}_{23,2}$, $\widetilde{W}'_{25,1}$, $\widetilde{W}'_{25,2}$, \widetilde{W}''_{32} , $\widetilde{W}_{33,i}$, $i = 1, 2, 3$ допускают однопараметрическую группу проективных автоморфизмов; ткани $\widetilde{W}_{11,5}$, $\widetilde{W}_{11,6}$, $\widetilde{W}'_{25,3}$, \widetilde{W}_{26} , \widetilde{W}_{27} , W_0 допускают двупараметрическую группу проективных автоморфизмов.

Ткани $\widetilde{W}_{11,2}$, $\widetilde{W}'_{22,2}$, $\widetilde{W}_{33,2}$ и $\widetilde{W}'_{25,2}$ проективно эквивалентны кубическим тканям (классы 4, 6.1, 0 и 6.2 соответственно в классификации Лазаревой).

ЗАДАЧИ

4.1 Докажите, что семейства коник $\widetilde{\lambda}_i$ (см. § 4.1) будут (а) квадратичными, если и только если центр проектирования P лежит на V и (б) линейными (то есть пучками), если точка P к тому же является особой точкой кубики V .

4.2 Докажите, что прямые ℓ_i : $u_i = 0$, $u_4 = 0$ лежат на кубике (4.1), а точки их пересечения являются ее особыми точками.

4.3 Докажите предложение 4.2.

4.4 Докажите свойство 1 кубической кривой, см. § 4.2.

4.5 Докажите свойство 3 кубической кривой, см. § 4.2.

4.6 Докажите, что ткани, определяемые соотношениями (4.34)–(4.41), являются регулярными, приведя их уравнения с помощью допустимых преобразований к виду $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

4.7 Кубические поверхности, несущие ткань W_{21} , характеризуются тем, что точки A_1 и A_2 , в которых пересекаются прямые ℓ_i , являются особыми. Докажите, что эти особые точки являются, вообще говоря, коническими узлами.

4.8 Докажите предложение 4.11.

4.9 Постройте метрические модели для проективно различных типов тканей \widetilde{W}_{12} (см. предложение 4.13).

4.10 Опишите специальные ткани Бурау на кубике, которая распадается на плоскость и квадрату.

4.11 Найдите ткани, допускающие дискретные группы автоморфизмов.

ТРИ-ТКАНИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ КУБИЧЕСКИМ АБСОЛЮТОМ

Всегда можно считать, что три-ткань, заданная уравнением $z = f(x, y)$, высекается на графике функции $f(x, y)$ координатными плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $z = \text{const}$. Эти плоскости образуют пучки с осями в бесконечно удаленной (несобственной) плоскости. Тройку осей можно рассматривать как вырожденную кривую третьего порядка. Обобщение этого факта приводит к задаче изучения три-тканей, порождаемых на поверхности трехмерного проективного пространства некоторым кубическим абсолютом: тройкой прямых на плоскости или в пространстве, плоской или пространственной кубической кривой. Такие ткани мы называем далее координатными тканями. В частности, к таковым относятся круговые ткани и ткани Бурау. В этой главе мы изучаем более сложные координатные ткани — на поверхностях пространства Аппеля, триаксиального пространства, пространства с кубическим абсолютом и пространства кубической метрики. В последнем параграфе рассматривается три-ткань, образованная тремя семействами окружностей. Вычислительные сложности преодолеваются универсальным методом внешних форм и подвижного репера Эли Картана. Здесь основная проблема заключается в том, чтобы построить достаточно удобное, симметричное семейство адаптированных реперов, связанное с рассматриваемой три-тканью. Для всех рассматриваемых тканей мы находим структурные уравнения и кривизну. Другие результаты и детали можно найти в работах [Бч-1]-[Бч-3], [Л-1]-[Л-2], [У-1]-[У-3] и [Д-1]-[Д-3].

§ 5.1. Координатные три-ткани на поверхностях в пространстве Аппеля

1. Напомним, что проективное пространство с фиксированной гиперплоскостью называется аффинно-проективным пространством.

Пусть \mathbb{P}^3 — трехмерное проективное пространство. Фиксируем в \mathbb{P}^3 плоскость Σ и в ней трехвершинник Δ (абсолют). Такое аффинно-проективное пространство называется *пространством Аппеля гиперболического типа* и обозначается Ap^3 . Плоскости, проходящие через стороны трехвершинника Δ , называются координатными плоскостями пространства Ap^3 .

В пространстве Ap^3 рассмотрим семейство адаптированных аффинных реперов $R = \{M, \varepsilon_i\}$, $i = 1, 2, 3$, где M — произвольная точка пространства, а векторы ε_i направлены в вершины абсолюта, которые обозначим A_i .

Так как точки A_i неподвижны, то уравнения инфинитезимального перемещения репера R запишутся в виде

$$dM = \Theta^i \varepsilon_i, \quad d\varepsilon_i = \Theta_i \varepsilon_i, \quad (5.1)$$

где $i = 1, 2, 3$, в первом уравнении по индексу i производится суммирование как обычно, а в последних уравнениях суммирования нет.

Дифференцируя внешним образом уравнения системы (5.1), получим уравнения структуры пространства Ap^3 :

$$d\Theta^i = \Theta^i \wedge \Theta_i, \quad d\Theta_i = 0 \quad (5.2)$$

(в первых уравнениях по индексу i суммирования нет).

Для изучения поверхностей в пространстве Ap^3 удобнее другой репер. Пусть π — произвольная плоскость, проходящая через точку M , и не проходящая через вершины A_i трехвершинника Δ . Обозначим через M_3, M_1, M_2 точки пересечения плоскости π с прямыми A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_1 соответственно. На этих прямых найдем точки N_3, N_1, N_2 такие, что $(M_3N_3A_1A_2) = -1$, $(M_1N_1A_3A_2) = -1$, $(M_2N_2A_3A_1) = -1$.¹⁾ Тогда прямые A_1N_1, A_2N_2, A_3N_3 пересекутся в одной точке, обозначим ее M_0 . Точка M_0 инвариантно связана с плоскостью π . Это дает основание назвать прямую MM_0 нормалью плоскости π .

Свяжем с точкой M семейство аффинных реперов \tilde{R} , состоящих из вектора e_0 , направленного в точку M_0 , и векторов e_i , $i = 1, 2, 3$, направленных соответственно в точки M_i . Векторы e_i , e_0 и ε_i нормируем так, чтобы выполнялись условия:

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (5.3)$$

и

$$e_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad e_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad e_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2. \quad (5.4)$$

Отсюда получаем:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{3}(e_0 - e_2 + e_3), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{3}(e_0 - e_3 + e_1), \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{3}(e_0 - e_1 + e_2). \quad (5.5)$$

¹⁾ Напомним, что сложное отношение равно -1 , если четверка точек является гармонической.

Найдем уравнения движения репера \tilde{R} . Дифференцируя внешним образом второе из соотношений (5.3) и используя (5.5) и (5.2), получим:

$$de_0 = \frac{1}{3}(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)e_0 + \frac{1}{3}(\Theta_2 - \Theta_3)e_1 + \\ + \frac{1}{3}(\Theta_3 - \Theta_1)e_2 + \frac{1}{3}(\Theta_1 - \Theta_2)e_3.$$

Обозначим

$$\omega_0 = \frac{1}{3}(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3), \quad \omega_i = \frac{1}{3}(\Theta_{i+1} - \Theta_{i+2}). \quad (5.6)$$

Тогда

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0, \quad (5.7)$$

$$\Theta_i = \omega_0 - \omega_{i+1} + \omega_{i+2}. \quad (5.8)$$

В равенствах (5.8) и всех последующих с подобной индексацией значения индекса i надо рассматривать по модулю 3.

В силу (5.5) первое уравнение системы (5.1) запишется в виде:

$$dM = \frac{1}{3}(\Theta^1 + \Theta^2 + \Theta^3)e_0 - \frac{1}{3}(\Theta^1 - 2\Theta^2 + \Theta^3)e_1 + \\ + \frac{1}{3}(-2\Theta^1 + \Theta^2 + \Theta^3)e_2.$$

Обозначим:

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\Theta^1 + \Theta^2 + \Theta^3), \quad \sigma_i = \frac{1}{3}(-2\Theta^i + \Theta^{i+1} + \Theta^{i+2}) = \sigma_0 - \Theta^i \quad (5.9)$$

и продифференцируем (5.4). С учетом введенных обозначений уравнения движения репера $\{M, e_i\}$ запишутся следующим образом:

$$dM = \sigma_0 e_0 + \sigma_1 e_2 - \sigma_2 e_1 = \sigma_0 e_0 + \sigma_2 e_3 - \sigma_3 e_2 = \sigma_0 e_0 + \sigma_3 e_1 - \sigma_1 e_3, \\ de_0 = \omega_0 e_0 + \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3, \\ de_i = \omega_i e_0 + \omega_0 e_i - \omega_{i+1} e_{i+1} + \omega_{i+2} e_{i+2}. \quad (5.10)$$

Из (5.9) следуют соотношения

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0, \quad (5.11)$$

$$\Theta^i = \sigma_0 - \sigma_i. \quad (5.12)$$

Дифференцируя теперь внешним образом (5.6) и (5.9) и используя уравнения (5.2), соотношения (5.8) и (5.12), придем к уравнениям структуры пространства Ap^3 , записанным в кореперах (ω_0, ω_i) и (σ_0, σ_i) :

$$d\omega_0 = 0, \quad d\omega_i = 0; \\ d\sigma_0 = \sigma_0 \wedge \omega_0 + \sigma_1 \wedge \omega_2 - \sigma_2 \wedge \omega_1 = \\ = \sigma_0 \wedge \omega_0 + \sigma_2 \wedge \omega_3 - \sigma_3 \wedge \omega_2 = \sigma_0 \wedge \omega_0 + \sigma_3 \wedge \omega_1 - \sigma_1 \wedge \omega_3, \\ d\sigma_i = \sigma_i \wedge \omega_0 + (\sigma_0 + \sigma_{i+1}) \wedge \omega_{i+1} - (\sigma_0 + \sigma_{i+2}) \wedge \omega_{i+2}. \quad (5.13)$$

2. Рассмотрим в пространстве Ap^3 гладкую неразвертывающуюся поверхность V . Пусть M — неособая точка на V , а T_M — касательная плоскость к V в этой точке. Присоединим к V подвижной репер \tilde{R} так, чтобы векторы e_i лежали в T_M и были направлены в точки пересечения плоскости T_M со сторонами трехвершинника Δ , а вектор e_0 направлен по нормали к плоскости T_M . Тогда из первого уравнения системы (5.10) следует

$$\sigma_0 = 0. \quad (5.14)$$

Это дифференциальное уравнение поверхности V , а любые две из форм σ_i (см. (5.11)), или, в силу (5.12), любые две из форм Θ^i являются ее базисными формами. Вследствие (5.14) уравнения (5.10) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} dM &= \sigma_1 e_2 - \sigma_2 e_1 = \sigma_2 e_3 - \sigma_3 e_2 = \sigma_3 e_1 - \sigma_1 e_3, \\ de_0 &= \omega_0 e_0 + \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3, \\ de_i &= \omega_i e_0 + \omega_0 e_i - \omega_{i+1} e_{i+1} + \omega_{i+2} e_{i+2}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Продифференцировав уравнение (5.14) внешним образом, с учетом (5.7) и (5.11) получим:

$$\sigma_1 \wedge \omega_2 - \sigma_2 \wedge \omega_1 = \sigma_2 \wedge \omega_3 - \sigma_3 \wedge \omega_2 = \sigma_3 \wedge \omega_1 - \sigma_1 \wedge \omega_3 = 0. \quad (5.16)$$

Отсюда следует, что формы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ являются главными и можно записать их разложение по базисным формам в виде

$$\omega_1 = -a_{13}\sigma_2 + a_{12}\sigma_3, \quad \omega_2 = -a_{21}\sigma_3 + a_{23}\sigma_1, \quad \omega_3 = -a_{32}\sigma_1 + a_{31}\sigma_2. \quad (5.17)$$

Подставляя в (5.16) и учитывая (5.11), придем к соотношениям:

$$a_{21} = a_{12} \equiv a_3, \quad a_{32} = a_{23} \equiv a_1, \quad a_{13} = a_{31} \equiv a_2. \quad (5.18)$$

В результате уравнения (5.17) примут вид:

$$\omega_i = -a_{i+1}\sigma_{i+1} + a_{i+2}\sigma_{i+2}. \quad (5.19)$$

Найдем геометрический смысл коэффициентов a_i . Для этого найдем второй дифференциал точки M . Дифференцируя (5.15), после преобразований получим:

$$d^2 M = (\dots)e_1 + (\dots)e_2 + (\dots)e_3 + (\sigma_1 \omega_2 - \sigma_2 \omega_1)e_0.$$

Форма $\phi = \sigma_1 \omega_2 - \sigma_2 \omega_1$ есть проекция вектора $d^2 M$ параллельно касательной плоскости к V в точке M на нормаль к поверхности в этой точке. Она называется асимптотической формой поверхности V . Из последнего равенства с учетом (5.19) находим:

$$\phi = a_1 \sigma_1^2 + a_2 \sigma_2^2 + a_3 \sigma_3^2. \quad (5.20)$$

Таким образом, величины a_i являются коэффициентами асимптотической формы поверхности V .

3. На поверхности V естественным образом возникают две три-ткани. Во-первых, это три-ткань W^* , образованная интегральными кривыми к векторным полям e_i . Линии этой ткани определяются уравнениями $\sigma_i = 0$. Касательный вектор e_i к линии ткани W^* по формуле (5.4) выражается через векторы ε_{i+1} и ε_{i+2} . Но, согласно (5.1), плоскость, натянутая на эти векторы, неподвижна. Следовательно, интегральная кривая поля e_i лежит в плоскости, проходящей через абсолютную прямую $A_{i+1}A_{i+2}$. Мы доказали, таким образом, что *линии ткани W^* высекаются на поверхности V координатными плоскостями пространства Ap^3 .*

Каждому семейству линий ткани W^* соответствует семейство линий, сопряженных относительно асимптотической формы ϕ (эти два семейства образуют сопряженную сеть). Три семейства линий, сопряженных семействам линий ткани W^* , образуют на поверхности V еще одну три-ткань, обозначим ее W . Уравнения линий ткани W найдем из условия сопряженности:

$$a_1\sigma_1\bar{\sigma}_1 + a_2\sigma_2\bar{\sigma}_2 + a_3\sigma_3\bar{\sigma}_3 = 0. \quad (5.21)$$

Отсюда находим, что направлению $\sigma_i = 0$ сопряжено направление $-a_{i+1}\sigma_{i+1} + a_{i+2}\sigma_{i+2} = 0$, или, в силу (5.19), $\omega_i = 0$. Таким образом, линии ткани W определяются уравнениями $\omega_i = 0$, а уравнение (5.7), связывающее эти формы, является уравнением ткани W .

Из второго уравнения (5.6) следует, что уравнение $\omega_i = 0$ эквивалентно уравнению $\Theta_{i+1} - \Theta_{i+2} = 0$. В силу последнего из (5.1) находим, что при $\lambda = \text{const}$ выполняется равенство $d(\varepsilon_{i+1} + \lambda\varepsilon_{i+2}) = \Theta_{i+1}(\varepsilon_{i+1} + \lambda\varepsilon_{i+2})$. Это означает, что при смещении вдоль кривой $\omega_i = 0$ вектор $\varepsilon_{i+1} + \lambda\varepsilon_{i+2}$ не меняет направления. Следовательно, прямые, на которых лежат векторы $\varepsilon_{i+1} + \lambda\varepsilon_{i+2}$, взятые в разных точках кривой $\omega_i = 0$, параллельны, и пересекаются в одной и той же точке абсолютной прямой $A_{i+1}A_{i+2}$. Таким образом, кривая $\omega_i = 0$ является линией тени, при условии, что поверхность V освещается из некоторой точки абсолютной прямой $A_{i+1}A_{i+2}$. Итак, *линии три-ткани W являются линиями тени, причем семейство $\omega_i = 0$ состоит из линий, которые получают при освещении поверхности V из точек, лежащих на абсолютной прямой $A_{i+1}A_{i+2}$.*

Примечание. Сопряженность соответствующих семейств линий тканей W и W^* вытекает из известной теоремы Кэли: сеть кривых на поверхности V , образованная линиями пересечения поверхности V с плоскостями некоторого пучка и линиями прикосновения поверхности V к конусам с вершинами на оси этого пучка, является сопряженной сетью на поверхности V .

Три-ткани W и W^* назовем координатными три-тканями на поверхности V в пространстве Апшеля Ap^3 .

Найдем структурные уравнения координатной три-ткани W^* . Внешнее дифференцирование форм σ_i (см. (5.9)) дает:

$$\begin{aligned} d\sigma_1 &= \sigma_1 \wedge (\omega_0 + (a_2 - a_3)\sigma_2) = \sigma_1 \wedge (\omega_0 + (a_2 - a_3)\sigma_2 + (a_1 - a_3)\sigma_1), \\ d\sigma_2 &= \sigma_2 \wedge (\omega_0 + (a_3 - a_1)\sigma_3) = \sigma_2 \wedge (\omega_0 + (a_2 - a_3)\sigma_2 + (a_1 - a_3)\sigma_1), \\ d\sigma_3 &= \sigma_3 \wedge (\omega_0 + (a_1 - a_2)\sigma_1) = \sigma_3 \wedge (\omega_0 + (a_2 - a_3)\sigma_2 + (a_1 - a_3)\sigma_1). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Уравнения (5.22) запишем в виде

$$d\sigma_i = \sigma_i \wedge \omega, \quad (5.23)$$

положив

$$\omega = \omega_0 - (a_2 - a_3)\sigma_2 + (a_1 - a_3)\sigma_1 = \omega_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3. \quad (5.24)$$

Уравнения (5.23) представляют собой уравнения структуры три-ткани W^* , а ω есть форма связности соответствующей связности Черна (гл. 2).

Дифференцируя внешним образом уравнения (5.19), придем к уравнениям:

$$\begin{aligned} \sigma_i \wedge [da_i - a_i\omega_0 - a_i(a_{i+1} - a_{i+2})\sigma_{i+1}] - \\ - \sigma_{i+1} \wedge [da_{i+1} - a_{i+1}\omega_0 - a_{i+1}(a_{i+1} - a_i)\sigma_{i+1}] = 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Из формулы (5.24) выразим ω_0 и подставим в (5.25). В результате получим

$$\sigma_i \wedge (da_i - a_i\omega) - \sigma_{i+1} \wedge (da_{i+1} - a_{i+1}\omega) = 0. \quad (5.26)$$

Отсюда видно, что формы Пфаффа, стоящие в круглых скобках, являются главными, то есть можно положить

$$da_i - a_i\omega = \beta_i\sigma_i + \beta_{ii}\sigma_{i+2}. \quad (5.27)$$

Подставим в (5.26) и учтем, что формы σ_i попарно линейно независимы. Тогда из полученного соотношения следует $\beta_{11} = \beta_{22} = \beta_{33} \equiv \beta$ и уравнения (5.27) примут вид:

$$da_i = a_i\omega + \beta_i\sigma_i + \beta\sigma_{i+2}. \quad (5.28)$$

Найдем теперь кривизну координатной три-ткани W^* . Для этого продифференцируем внешним образом соотношение (5.24). Получим:

$$d\omega = da_1 \wedge \sigma_1 + a_1 \wedge d\sigma_1 + da_2 \wedge \sigma_2 + a_2 \wedge d\sigma_2 + da_3 \wedge \sigma_3 + a_3 \wedge d\sigma_3.$$

Подставляя значения da_i из (5.28) и $d\sigma_i$ из (5.23), придем к уравнению

$$d\omega = 3\beta\sigma_1 \wedge \sigma_2.$$

Сравнивая с уравнением (2.8), найдем кривизну b три-ткани W^* : $b = 3\beta$. Отсюда и из теоремы 2.1 вытекает

Теорема 5.1. *Координатная три-ткань W^* на поверхности пространства Аппеля гиперболического типа является регулярной тогда и только тогда, когда выполнено соотношение $\beta = 0$.*

§ 5.2. Координатные три-ткани на поверхностях триаксиального пространства

1. Трехмерное проективное пространство \mathbb{P}^3 с тремя фиксированными прямыми ℓ_i , $i = 1, 2, 3$, общего положения называется *триаксиальным пространством* и обозначается T^3 . Прямые ℓ_i называются *абсолютными прямыми* или *абсолютом* пространства T^3 .

Рассмотрим в пространстве T^3 совокупность реперов $\{A_\alpha\}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, у которых вершины A_i , $i = 1, 2, 3$, лежат соответственно на прямых ℓ_i , а плоскость $A_1A_2A_3$ трансверсальна этим прямым (т. е. не содержит ни одной из них). Инфинитезимальное перемещение репера $\{A_\alpha\}$ запишем в обычном виде:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3). \quad (5.29)$$

Формы ω_α^β удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства

$$d\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta. \quad (5.30)$$

Семейство реперов A_α можно сузить, проведя нормировку $\det(A_0A_1A_2A_3) = 1$. Дифференцируя это равенство и пользуясь уравнениями (5.29), получим

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0. \quad (5.31)$$

Так как точка A_i описывает прямую ℓ_i , то из трех форм ω_i^0 , ω_i^j , $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, при фиксированном i только одна линейно независимая. При этом, так как по условию плоскость $A_1A_2A_3$ не содержит ни одной из прямых ℓ_i , то $\omega_i^0 \neq 0$, и можно положить

$$\omega_i^j = \lambda_j^i \omega_i^0. \quad (5.32)$$

Тогда с помощью деривационных уравнений (5.29) находим:

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_i^0 B_i, \quad B_i = A_0 + \lambda_i^j A_j + \lambda_i^k A_k. \quad (5.33)$$

Так как прямые ℓ_i неподвижны, то выполняются равенства $dB_i = (\dots)B_i + (\dots)A_i$. Отсюда, используя уравнения (5.29) и (5.32), получаем уравнения на величины λ_j^i :

$$d\lambda_j^i - \lambda_j^i \omega_0^0 - (\lambda_j^i)^2 \omega_i^0 + \lambda_j^i \omega_i^i - \omega_0^i - \lambda_j^k (\lambda_j^i - \lambda_k^i) \omega_k^0 = 0, \quad (5.34)$$

причем в этих уравнениях все индексы i, j, k различны.

Зафиксируем точки A_i на прямых ℓ_i , т.е. положим $\omega_i^0 = 0$. Тогда из уравнений (5.34) следует $\delta\lambda_j^i - \lambda_j^i \pi_0^0 + \lambda_j^i \pi_i^i - \pi_0^i = 0$, где символом δ

обозначено дифференцирование по вторичным параметрам, то есть при фиксированных главных параметрах. Отсюда получаем:

$$\delta(\lambda_j^i - \lambda_k^i) = (\lambda_j^i - \lambda_k^i)(\pi_0^0 - \pi_j^i), \quad (5.35)$$

где i, j, k образуют четную подстановку из 1, 2, 3.

Из уравнений (5.35) видно, что величины $\lambda^i = \frac{1}{2}(\lambda_j^i - \lambda_k^i)$ являются относительными инвариантами. Можно показать, что обращение величин λ^i в нуль имеет следующий геометрический смысл:

а) $\lambda^1 = 0, \lambda^2 \lambda^3 \neq 0$ — прямые ℓ_2 и ℓ_3 лежат в одной плоскости σ_1 , определяемой точками $A_2, A_3, A_0 + \lambda_2^1 A_1$;

б) $\lambda^3 \neq 0, \lambda^1 = \lambda^2 = 0$ — прямая ℓ_3 есть пересечение плоскостей, в которых лежат ℓ_1 и ℓ_2 ;

в) $\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = 0$ — прямые ℓ_i проходят через одну точку.

Далее будем предполагать, что ни один из инвариантов λ^i не обращается в нуль.

Прямые ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 определяют в P_3 невырожденную квадрику S , для которой они служат прямолинейными образующими, принадлежащими одному семейству. Нетрудно подсчитать, что полюс A'_0 плоскости $A_1 A_2 A_3$ относительно S имеет вид

$$A'_0 = A_0 + \frac{1}{2}(\lambda_2^1 + \lambda_3^1)A_1 + \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_3^2)A_2 + \frac{1}{2}(\lambda_1^3 + \lambda_2^3)A_3. \quad (5.36)$$

Поместим вершину A_0 репера в полюс плоскости $A_1 A_2 A_3$. Тогда $\lambda_j^i + \lambda_k^i = 0$ и из соотношений $2\lambda^j = \lambda_i^j - \lambda_k^j$ последуют равенства

$$\lambda_2^1 = -\lambda_3^1 = \lambda^1, \quad \lambda_3^2 = -\lambda_1^2 = \lambda^2, \quad \lambda_1^3 = -\lambda_2^3 = \lambda^3. \quad (5.37)$$

Уравнения (5.32) и (5.34) теперь примут соответственно вид

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= -\lambda^2 \omega_1^0, \quad \omega_1^3 = \lambda^3 \omega_1^0, \quad \omega_2^1 = \lambda^1 \omega_2^0, \\ \omega_2^3 &= -\lambda^3 \omega_2^0, \quad \omega_3^1 = -\lambda^1 \omega_3^0, \quad \omega_3^2 = \lambda^2 \omega_3^0, \end{aligned} \quad (5.38)$$

и

$$\omega_0^i = \lambda^i (\lambda^i \omega_i^0 - \lambda^j \omega_j^0 - \lambda^k \omega_k^0), \quad d\lambda^i = \lambda^i (\omega_0^0 - \omega_i^i + \lambda^j \omega_j^0 - \lambda^k \omega_k^0), \quad (5.39)$$

причем i, j, k образуют четную подстановку из 1, 2, 3.

2. Рассмотрим в триаксиальном пространстве T^3 гладкую неразвертывающуюся поверхность V . С помощью поверхности V определим локальную квазигруппу $q: \ell_1 \times \ell_2 \rightarrow \ell_3$ следующим образом: $q(M_1, M_2) = M_3$, $M_i \in \ell_i$, если плоскость $M_1 M_2 M_3$ касается V . Обратное: если задана квазигруппа $q: \ell_1 \times \ell_2 \rightarrow \ell_3$ и $q(M_1, M_2) = M_3$, $M_i \in \ell_i$, то поверхность V определяется как огибающая двупараметрического семейства плоскостей $M_1 M_2 M_3$.

Пусть M — текущая точка поверхности V . Свяжем с ней семейство адаптированных реперов $\{A_\alpha\}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, поместив точки A_i , $i = 1, 2, 3$, на пересечение абсолютных прямых ℓ_i с касательной плос-

костью к поверхности V в точке M , а точку A_0 , как и выше, в полюс плоскости $A_1A_2A_3$ относительно квадрики S . Тогда $M = x^i A_i$ и

$$dM = dx^i A_i + x^i (\omega_i^0 A_0 + \omega_i^j A_j) = (dx^i + x^j \omega_j^i) A_i + x^i \omega_i^0 A_0.$$

Так как $dM \in A_1A_2A_3$, то

$$x^i \omega_i^0 = 0. \quad (5.40)$$

Нормируем точку M условием $M = A_1 + A_2 + A_3$, тогда уравнение (5.40) примет вид

$$\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0 = 0. \quad (5.41)$$

Уравнение (5.41) представляет собой дифференциальное уравнение локальной квазигруппы q .

Дифференцируя уравнение (5.41), получим

$$\tilde{\omega}^i \wedge \omega_i^0 = 0, \quad (5.42)$$

где обозначено

$$\tilde{\omega}^i = \omega_1^i + \omega_2^i + \omega_3^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.43)$$

Заменим в уравнениях (5.42) форму ω_3^0 с помощью (5.41), тогда они примут вид

$$(\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^3) \wedge \omega_1^0 + (\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^3) \wedge \omega_2^0 = 0. \quad (5.42)$$

Отсюда следует, что формы $\tilde{\omega}^i - \tilde{\omega}^j$ — главные, то есть выражаются через формы ω_i^0 . Это можно записать следующим образом:

$$\tilde{\omega}^i = \tilde{\vartheta} + a^i \omega_k^0 + b^i \omega_j^0, \quad (5.44)$$

где индексы i, j, k различны и образуют четную подстановку из $1, 2, 3$, а $\tilde{\vartheta}$ — некоторая 1-форма. Подставляя $\tilde{\omega}^i$ в (5.42), придем к соотношению

$$a^1 + a^2 + a^3 = b^1 + b^2 + b^3. \quad (5.45)$$

Форма $\tilde{\vartheta}$ определена с точностью до произвольной комбинации базисных форм. Положим в равенствах (5.44) $\tilde{\vartheta} = \vartheta + \xi^i \omega_i^0$, где величины ξ^i произвольны. За счет выбора величин ξ^i и с учетом соотношения (5.45) разности $a^i - b^i$ можно привести к нулю. Допустим, это сделано, тогда формулы (5.44) примут более простой вид:

$$\tilde{\omega}_i = \vartheta - a_i \omega_i^0. \quad (5.46)$$

Точно так же, как и в предыдущем параграфе, доказывается, что величины a_i являются коэффициентами асимптотической формы поверхности V , которая имеет вид:

$$\phi = a_1 (\omega_1^0)^2 + a_2 (\omega_2^0)^2 + a_3 (\omega_3^0)^2. \quad (5.47)$$

3. Как и в § 5.1, с помощью абсолютных прямых ℓ_i определим на поверхности V две сопряженные координатные три-ткани W и W^* . Ткань W образована тремя семействами линий тени, ее i -тое семей-

ство (обозначим его S_i) определяется уравнением $\omega_i^0 = 0$ и получается при освещении поверхности V из точек абсолютной прямой ℓ_i . Уравнение (5.41) координатной квазигруппы q является и уравнением координатной три-ткани W .

Сопряженная координатная три-ткань W^* высекается плоскостями, проходящими через абсолютные прямые ℓ_i .

Найдем форму связности и кривизну ткани W . Продифференцировав формы ω_i^0 , получим уравнения

$$d\omega_i^0 = \omega_i^0 \wedge \omega,$$

где

$$\omega = \omega_0^0 - \vartheta + (\lambda^3 - \lambda^2)\omega_1^0 + (\lambda^1 - \lambda^3)\omega_2^0 + (\lambda^2 - \lambda^1)\omega_3^0. \quad (5.48)$$

Сравнивая с формулами (2.6), находим, что ω есть форма связности три-ткани W . Дифференцируя далее уравнения (5.46), приходим к квадратичным уравнениям

$$d\vartheta = \Delta a_i \wedge \omega_i^0, \quad (5.49)$$

где обозначено

$$\Delta a_i = da_i + a_i(\omega_i^i - \omega_i^0 - \omega). \quad (5.50)$$

Исключив из уравнений (5.49) форму $d\vartheta$, после применения леммы Картана получим

$$\Delta a_i = -\beta_i \omega_i^0 + \beta \omega_{i-1}^0, \quad (5.51)$$

где значения индекса $i - 1$ надо рассматривать по модулю 3.

Теперь вычислим кривизну три-ткани W . Для этого продифференцируем внешний образом форму связности ω . Имеем:

$$d\omega = (-\beta + 2(\lambda^1 a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3))\Omega, \quad (5.52)$$

где $\Omega = \omega_1^0 \wedge \omega_2^0 = \omega_2^0 \wedge \omega_3^0 = \omega_3^0 \wedge \omega_1^0$. Сравнивая с (2.8), находим, что величина

$$b = -\beta + 2(\lambda^1 a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3) \quad (5.53)$$

есть кривизна три-ткани W . Из формулы (5.53) и теоремы 2.1 вытекает

Теорема 5.2. *Координатная три-ткань W на поверхности три-аксиального пространства является регулярной тогда и только тогда, когда выполняется соотношение*

$$\beta = 2(\lambda^1 a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3). \quad (5.54)$$

§ 5.3. Координатные три-ткани на поверхностях в пространстве с кубическим абсолютном

I. Пространство с кубическим абсолютном

1. Пусть \mathbb{P}^3 — трехмерное проективное пространство. Пространственной кривой третьего порядка или нормкривой в \mathbb{P}^3 называют

линию N пересечения двух конусов второго порядка, имеющих общую образующую. Далее предполагается, что нормкривая не распадается. В некотором проективном репере такая нормкривая N может быть задана параметрическими уравнениями

$$x^0 = 1, \quad x^1 = t, \quad x^2 = t^2, \quad x^3 = t^3, \quad (5.55)$$

где t — вещественный параметр точки на N . Основное свойство нормкривой, которое будет существенно использоваться в дальнейшем, состоит в том, что любая плоскость пространства пересекает ее в трех точках (не обязательно вещественных и различных).

Трехмерное проективное пространство \mathbb{P}^3 с фиксированной нормкривой N называется *пространством с кубическим абсолютотом* и обозначается N^3 .

В пространстве N^3 рассмотрим семейство R реперов $\{A_\alpha\}$, $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$, таких, что точки A_1, A_2, A_3 принадлежат абсолютоту — нормкривой N . При этом будем считать, что плоскость $A_1A_2A_3$ не касается абсолютота N . Такие реперы будем называть адаптированными. Уравнения перемещения репера R запишем в виде (5.29), структурные уравнения проективного пространства — в виде (5.30).

Найдем дифференциальные уравнения, описывающие семейство адаптированных реперов. Так как точка A_i ($i, j, k = 1, 2, 3$) движется по нормкривой, то из трех форм $\omega_j^0, \omega_i^k, i \neq k$, должна быть только одна независимая. Очевидно, что $\omega_i^0 \neq 0$, так как в противном случае плоскость $A_1A_2A_3$ касается кривой N в точке A_i . Ввиду этого можно положить

$$\omega_i^k = \lambda_i^k \omega_i^0, \quad i \neq k, \quad (5.56)$$

тогда

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_i^k B_i, \quad (5.57)$$

где обозначено

$$B_i = A_0 + \lambda_i^j A_j + \lambda_i^k A_k. \quad (5.58)$$

Здесь и далее, если отсутствует знак \sum , то суммирование по индексам i, j, k не производится.

Прямая A_iB_i касается нормкривой N в точке A_i . Для нераспавшейся нормкривой касательные A_iB_i и A_jB_j не пересекаются для любых пар точек A_i и A_j . В этом случае будут выполняться условия

$$\lambda_i^k \neq \lambda_j^k, \quad i \neq j \neq k \neq i. \quad (5.59)$$

Дифференцируя уравнения (5.56) внешним образом и применяя лемму Картана, придем к соотношениям

$$d\lambda_i^k = \lambda_i^k(\omega_0^0 - \omega_k^k) - \omega_0^k + (\lambda_i^k)^2 \omega_k^0 + \lambda_i^j(\lambda_i^k - \lambda_j^k)\omega_j^0 + 2\mu_i^k \omega_i^0, \quad (5.60)$$

где μ_i^k — некоторые новые функции.

2. Найдем функции μ_i^k . Для этого воспользуемся тем, что нормкривая N проектируется с помощью конуса второго порядка из каждой своей точки. Вначале получим параметрические уравнения нормкривой в подвижном репере, и затем с их помощью найдем уравнения проектирующих конусов с вершинами A_i .

Рассмотрим семейство нормкривых, проходящих через точки A_1 и A_2 , и касающихся в них прямых A_1B_1 , A_2B_2 . Это семейство зависит от пяти параметров и может быть представлено в виде (докажите!):

$$X(t) = A_1 + (p_1A_1 + q_1B_1)t + (p_2A_2 + q_2B_2)t^2 + rA_2t^3.$$

Здесь p_1, p_2, q_1, q_2, r — параметры семейства, а t — параметр точки на нормкривой. При этом значению $t = 0$ соответствует точка A_1 , а $t = \infty$ — точка A_2 . Будем считать, что точке A_3 соответствует параметр $t = 1$. Значения параметров p_1, p_2, q_1, q_2, r найдем из условий а) нормкривая проходит через точку A_3 и б) касательная в A_3 есть прямая A_3B_3 . Это дает соотношения

$$X(1) = xA_3, \quad X'(1) = \rho A_3 + \sigma B_3.$$

В результате получается следующая система:

$$\begin{aligned} q_1 = -q_2, \quad 1 + p_1 - \lambda_2^1 q_1 = 0, \quad \lambda_1^2 q_1 + p_2 + r = 0, \\ p_1 - (2\lambda_2^1 - \lambda_3^1) q_1 = 0, \quad (\lambda_1^2 + \lambda_3^2) q_1 + 2p_2 + 3r = 0. \end{aligned}$$

Система совместна и имеет единственное решение:

$$\begin{aligned} q_1 = -(\lambda_2^1 - \lambda_3^1)^{-1}, \quad q_2 = -(\lambda_2^1 - \lambda_3^1)^{-1}, \\ p_1 = -(2\lambda_2^1 - \lambda_3^1)(\lambda_2^1 - \lambda_3^1)^{-1}, \quad p_2 = (2\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_2^1 - \lambda_3^1)^{-1}, \\ r = (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^1 - \lambda_3^1)^{-1}. \end{aligned}$$

В результате уравнение нормкривой $X(t)$ запишется в виде:

$$\begin{aligned} X(t) = (\lambda_2^1 - \lambda_3^1)A_1 + [(\lambda_2^1 - 2\lambda_3^1)A_1 - B_1]t + \\ + [(2\lambda_1^2 - \lambda_3^2)A_2 + B_2]t^2 + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)t^3 A_2, \end{aligned}$$

или, в координатной форме:

$$\begin{aligned} x^0 = t^2 - t, \quad x^1 = \lambda_2^1 - \lambda_3^1 + (\lambda_3^1 - 2\lambda_2^1)t + \lambda_2^1 t^2, \\ x^2 = -\lambda_1^2 t + (2\lambda_1^2 - \lambda_3^2)t^2 + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)t^3, \quad x^3 = -\lambda_1^3 t + \lambda_2^3 t^2. \end{aligned} \quad (5.61)$$

С помощью уравнений (5.61) найдем уравнение связки поверхностей второго порядка, содержащей все конусы, проектирующие кривую N из ее точек. Произвольную квадрику S связки зададим в подвижном репере $\{A_\alpha\}$ уравнением

$$\sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}, \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3. \quad (5.62)$$

Подставляя координаты (5.61) текущей точки нормкривой в уравнение (5.62) и требуя тождественного обращения в нуль этого

уравнения, получим семь соотношений на десять однородных коэффициентов квадрики:

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0, \quad c_{22} = 0, \quad c_{33} = 0, \\ c_{01} &= -(\lambda_1^2 c_{12} + \lambda_1^3 c_{31}), \quad c_{02} = -(\lambda_2^1 c_{12} + \lambda_2^3 c_{23}), \quad c_{03} = -(\lambda_3^1 c_{31} + \lambda_3^2 c_{23}), \\ c_{00} &= 2(-\lambda_3^1 \lambda_1^2 - \lambda_2^1 \lambda_3^2 + \lambda_3^1 \lambda_3^2) c_{12} + 2(-\lambda_1^3 \lambda_2^1 - \lambda_3^1 \lambda_2^3 + \lambda_2^1 \lambda_2^3) c_{31} + \\ &\quad + 2(-\lambda_1^2 \lambda_2^3 - \lambda_3^2 \lambda_1^3 + \lambda_1^2 \lambda_1^3) c_{23}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Итак, уравнение связки квадратик, содержащих нормкривую $X(t)$, имеет вид

$$\begin{aligned} c_{00}(x^0)^2 - 2c_{12}x^1x^2 - 2c_{31}x^3x^1 - 2c_{23}x^2x^3 + 2(\lambda_1^2 c_{12} + \lambda_1^3 c_{31})x^0x^1 + \\ + 2(\lambda_2^1 c_{12} + \lambda_2^3 c_{23})x^0x^2 + 2(\lambda_3^1 c_{31} + \lambda_3^2 c_{23})x^0x^3 = 0. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Конусы, проектирующие нормкривую, выделяются в этой связке условием, что у них есть особая точка — вершина. Особые точки квадрики (5.64) удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} c_{00}x^0 + (\lambda_1^2 c_{12} + \lambda_1^3 c_{31})x^1 + (\lambda_2^1 c_{12} + \lambda_2^3 c_{23})x^2 + (\lambda_3^1 c_{31} + \lambda_3^2 c_{23})x^3 &= 0, \\ (\lambda_1^2 c_{12} + \lambda_1^3 c_{31})x^0 - c_{12}x^2 - c_{31}x^3 &= 0, \\ (\lambda_2^1 c_{12} + \lambda_2^3 c_{23})x^0 - c_{12}x^1 - c_{23}x^3 &= 0, \\ (\lambda_3^1 c_{31} + \lambda_3^2 c_{23})x^0 - c_{31}x^1 - c_{23}x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Вершины A_i являются особыми точками конусов S_i , проектирующих нормкривую N из этих точек. Подставляя в (5.65) координаты точки A_1 , получим на параметры соотношения

$$c_{12} = 0, \quad c_{31} = 0, \quad c_{00} = (\lambda_1^2 \lambda_1^3 - \lambda_1^2 \lambda_2^3 - \lambda_3^2 \lambda_1^3) c_{23},$$

так что уравнение конуса S_1 имеет вид

$$(\lambda_1^2 \lambda_1^3 - \lambda_1^2 \lambda_2^3 - \lambda_3^2 \lambda_1^3)(x^0)^2 - x^2x^3 + \lambda_2^3 x^0x^2 + \lambda_3^2 x^0x^3 = 0. \quad (5.66)$$

Аналогично находим уравнения конусов с вершинами в точках A_2 и A_3 :

$$(\lambda_2^1 \lambda_2^3 - \lambda_3^1 \lambda_2^3 - \lambda_2^1 \lambda_1^3)(x^0)^2 - x^1x^3 + \lambda_1^3 x^0x^1 + \lambda_3^1 x^0x^3 = 0 \quad (5.67)$$

и

$$(-\lambda_1^2 \lambda_3^1 - \lambda_2^1 \lambda_3^2 + \lambda_3^1 \lambda_3^2)(x^0)^2 - x^1x^2 + \lambda_1^2 x^0x^1 + \lambda_2^1 x^0x^2 = 0. \quad (5.68)$$

Каждый из конусов S_i остается неподвижным, если его вершина A_i неподвижна. Например, условие неподвижности конуса S_3 будет $\omega_3^0 = 0$. С другой стороны, пусть конус S_3 задан в подвижном репере уравнением (5.62). Коэффициенты c_{uv} ($u, v, w = 0, 1, 2$) этого уравнения являются функциями от параметров подвижного репера и должны удовлетворять так называемым уравнениям стационарности $dF = \vartheta F$, где ϑ — некоторая 1-форма, а через F обозначена левая часть уравнения (5.62). Распишем это условие подробно, пользуясь

структурными уравнениями (5.30) и условием неподвижности $\omega_3^0 = 0$. После преобразований получим соотношения

$$dc_{uv} - c_{uw}\omega_v^w - c_{vw}\omega_u^w = \vartheta c_{uw}, \quad (5.69)$$

в которых, как обычно, по одинаковым индексам проводится суммирование.

Из уравнения конуса (5.68) находим коэффициенты c_{uv} :

$$\begin{aligned} c_{00} &= 2(-\lambda_1^2\lambda_3^1 - \lambda_2^1\lambda_3^2 + \lambda_3^1\lambda_3^2), c_{11} = 0, \\ c_{12} &= -1, c_{22} = 0, c_{01} = \lambda_1^2, c_{02} = \lambda_2^1. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Подставляя в (5.69) и используя (5.56), (5.60) и условие $\omega_3^0 = 0$ неподвижности вершины конуса, получим всего 4 уравнения:

$$\begin{aligned} \lambda_2^1\omega_1^0 + \lambda_1^2\omega_2^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 &= \vartheta, \\ -(\lambda_2^1\lambda_1^2 + c_{00} - 2\mu_1^2)\omega_1^0 + (\lambda_1^2)^2\omega_2^0 - \lambda_1^2(\omega_1^1 + \omega_2^2) &= \lambda_1^2\vartheta, \\ (\lambda_2^1)^2\omega_1^0 - (\lambda_1^2\lambda_2^1 + c_{00} - 2\mu_2^1)\omega_2^0 - \lambda_2^1(\omega_1^1 + \omega_2^2) &= \lambda_2^1\vartheta, \\ \lambda_2^1(2\lambda_2^1\lambda_1^2 + c_{00} - 2\mu_1^2)\omega_1^0 + \lambda_3^2(2\lambda_2^1\lambda_1^2 + c_{00} - 2\mu_2^1)\omega_2^0 &= 0. \end{aligned}$$

Исключая форму ϑ из первых трех уравнений, находим:

$$2\mu_1^2 = 2\lambda_2^1\lambda_1^2 + c_{00}, \quad 2\mu_2^1 = 2\lambda_2^1\lambda_1^2 + c_{00}. \quad (5.71)$$

Из (5.71) в силу произвольного выбора величин λ_j^i следует

$$\mu_1^2 = \mu_2^1. \quad (5.72)$$

Аналогично находим условия неподвижности конусов S_1 и S_2 :

$$\mu_3^2 = \mu_2^3, \quad \mu_1^3 = \mu_3^1. \quad (5.73)$$

Итак, мы нашли условия, которым должны удовлетворять функции μ_j^i из уравнений (5.60) нормкривой.

Подставляя в (5.71) значение c_{00} из (5.70), получим

$$\mu_1^2 = -(\lambda_3^2 - \lambda_1^2)(\lambda_2^1 - \lambda_3^1). \quad (5.74)$$

Аналогично, для μ_2^3 и μ_3^1 будем иметь:

$$\mu_2^3 = -(\lambda_1^3 - \lambda_2^3)(\lambda_3^2 - \lambda_1^2), \quad \mu_3^1 = -(\lambda_2^1 - \lambda_3^1)(\lambda_1^3 - \lambda_2^3). \quad (5.75)$$

В результате формулы (5.60) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} d\lambda_i^k &= \lambda_i^k(\omega_0^0 - \omega_k^k) - \omega_0^k + (\lambda_i^k)^2\mu_k^0 + \lambda_i^j(\lambda_i^k - \lambda_j^k)\omega_j^0 - \\ &\quad - 2(\lambda_j^i - \lambda_k^i)(\lambda_i^k - \lambda_j^k)\omega_i^0. \end{aligned} \quad (5.76)$$

Можно проверить, что система уравнений (5.56), (5.76) вполне интегрируема. Поэтому верна

Теорема 5.3. Система дифференциальных уравнений (5.56), (5.76) определяет нормкривую вместе с семейством адаптированных реперов.

3. Из (5.60) видно, что при фиксированных главных параметрах ($\omega_i^0 = 0$) функции λ_i^k удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\delta(\lambda_i^k + \lambda_j^k) + (\lambda_i^k + \lambda_j^k)(\pi_i^k - \pi_j^k) + 2\pi_i^k = 0,$$

где δ — оператор дифференцирования по вторичным параметрам, перемещающим репер в фиксированной точке поверхности. Из этих уравнений видно, что величины $\lambda_i^k + \lambda_j^k$ могут быть приведены к нулю за счет выбора вторичных параметров, входящих в формы π_i^k . В самом деле, полагая $\lambda_i^k + \lambda_j^k = 0$, из предыдущего равенства получим $\pi_i^k = 0$. С помощью структурных уравнений и теоремы Фробениуса устанавливаем, что эта система уравнений вполне интегрируема. Следовательно, существует подсемейство реперов, в которых равенство $\lambda_i^k + \lambda_j^k = 0$ будет выполняться. Соответствующее сужение семейства адаптированных реперов называется канонизацией, а построенный таким образом адаптированный репер называется каноническим репером пространства N^3 .

В каноническом репере введем следующие обозначения:

$$\lambda_2^1 = -\lambda_3^1 = \lambda^1, \quad \lambda_3^2 = -\lambda_1^2 = \lambda^2, \quad \lambda_1^3 = -\lambda_2^3 = \lambda^3. \quad (5.77)$$

Тогда уравнения (5.56) и (5.76) примут соответственно вид:

$$\omega_1^2 = -\lambda^2 \omega_1^0, \quad \omega_2^3 = -\lambda^3 \omega_2^0, \quad \omega_3^1 = -\lambda^1 \omega_3^0, \quad (5.78)$$

$$\begin{aligned} \omega_3^2 &= \lambda^2 \omega_3^0, \quad \omega_1^3 = \lambda^3 \omega_1^0, \quad \omega_2^1 = \lambda^1 \omega_2^0; \\ d\lambda^1 &= \lambda^1(\omega_0^0 - \omega_1^1 - 3\lambda^2 \omega_2^0 + 3\lambda^3 \omega_3^0), \\ d\lambda^2 &= \lambda^2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - 3\lambda^3 \omega_3^0 + 3\lambda^1 \omega_1^0), \\ d\lambda^3 &= \lambda^3(\omega_0^0 - \omega_1^1 - 3\lambda^1 \omega_1^0 + 3\lambda^2 \omega_2^0); \end{aligned} \quad (5.79)$$

$$\begin{aligned} \omega_0^1 &= \lambda^1(\lambda^1 \omega_1^0 - 5\lambda^2 \omega_2^0 - 5\lambda^3 \omega_3^0), \\ \omega_0^2 &= \lambda^2(\lambda^2 \omega_2^0 - 5\lambda^3 \omega_3^0 - 5\lambda^1 \omega_1^0), \\ \omega_0^3 &= \lambda^3(\lambda^3 \omega_3^0 - 5\lambda^1 \omega_1^0 - 5\lambda^2 \omega_2^0). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Как мы видим, в каноническом репере формы ω_0^k стали главными. В силу (5.77) условия (5.59) запишутся в виде $\lambda^k \neq 0$, $k = 1, 2, 3$.

Геометрический смысл проведенной канонизации тот же, что и в предыдущем параграфе: вершина A_0 репера помещена в полюс плоскости $A_1 A_2 A_3$ относительно квадрики S , содержащей в качестве образующих прямые $A_i B_i$. Однако в рассматриваемом случае квадрика S является переменной, зависящей от выбора точек A_i , в то время как в § 5.2 она была постоянной.

II. Основные уравнения гладкой поверхности в N^3

1. Рассмотрим в пространстве N^3 гладкую неразвертывающуюся поверхность V . Пусть M — текущая точка этой поверхности, T_M — касательная плоскость к V в точке M . Напомним, что произвольная

плоскость пересекает нормкривую в трех точках. Предположим, что T_M пересекает абсолют N в трех различных вещественных точках. Присоединим к V подвижной репер $\{\tilde{A}_\alpha\}$, $\alpha = 0, 1, 2, 3$, поместив вершины $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \tilde{A}_3$ в точки пересечения T_M с абсолютотом. Тогда

$$M = x^1 \tilde{A}_1 + x^2 \tilde{A}_2 + x^3 \tilde{A}_3.$$

Проведем нормировку репера, полагая

$$A_0 = \tilde{A}_0, A_1 = x^1 \tilde{A}_1, A_2 = x^2 \tilde{A}_2, A_3 = x^3 \tilde{A}_3.$$

В новом репере точка M запишется в виде

$$M = A_1 + A_2 + A_3. \quad (5.81)$$

Дифференцируя и пользуясь уравнениями (5.29), находим:

$$dM = (\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0)A_0 + \sum_i (\omega_i^1 + \omega_i^2 + \omega_i^3)A_i.$$

Так как плоскость $A_1 A_2 A_3$ касается поверхности в точке M , то дифференциал dM при любых смещениях лежит в этой плоскости. Поэтому из последнего равенства получаем дифференциальное уравнение поверхности V в рассматриваемом репере:

$$\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0 = 0. \quad (5.82)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (5.82), получим уравнение, аналогичное (5.42):

$$\tilde{\omega}^1 \wedge \omega_1^0 + \tilde{\omega}^2 \wedge \omega_2^0 + \tilde{\omega}^3 \wedge \omega_3^0 = 0,$$

где формы $\tilde{\omega}^i$ имеют тот же смысл, что и § 5.2, см. (5.43). Рассуждая как в § 5.2, приведем формы $\tilde{\omega}^i$ к виду (5.46):

$$\tilde{\omega}^i = \vartheta - a_i \omega_i^0. \quad (5.83)$$

Соотношения (5.43) и (5.83) позволяют выразить формы ω_i^i через форму ϑ и базисные формы ω_i^0 . В результате получим:

$$\omega_i^i = \vartheta - a_i \omega_i^0 - \lambda_j^i \omega_j^0 - \lambda_k^i \omega_k^0. \quad (5.84)$$

Как и в предыдущем параграфе доказывается, что величины a_i являются коэффициентами асимптотической формы поверхности V , причем сама форма имеет вид (5.47).

2. Обратимся теперь к дифференциальной окрестности третьего порядка. Внешнее дифференцирование равенств (5.43) с учетом уравнений (5.30) и (5.82) дает

$$d\tilde{\omega}^i = \sum_j \tilde{\omega}^j \wedge \omega_j^i.$$

Преобразуя правую часть с помощью (5.83) и (5.56), после некоторых вычислений получим:

$$d\tilde{\omega}^i = a_i \omega_i^0 \wedge (\vartheta - \omega_i^i). \quad (5.85)$$

Далее, внешний дифференциал формы ω_i^0 в силу равенств (5.57) и (5.84) запишется так:

$$d\omega_i^0 = \omega_i^0 \wedge [\omega_0^0 - \vartheta + (\lambda_i^j + \lambda_j^i)\omega_j^0 + (\lambda_i^k + \lambda_k^i)\omega_k^0],$$

где $j \neq i \neq k$. Последние равенства эквивалентны следующим:

$$d\omega_i^0 = \omega_i^0 \wedge \omega, \quad (5.86)$$

где обозначено

$$\omega = \omega_0^0 - \vartheta - (\lambda_3^2 + \lambda_2^3)\omega_1^0 - (\lambda_3^1 + \lambda_1^3)\omega_2^0 - (\lambda_2^1 + \lambda_1^2)\omega_3^0. \quad (5.87)$$

С учетом равенств (5.85) и (5.86) внешнее дифференцирование соотношений (5.83) приводит к системе

$$d\vartheta = \Delta a_i \wedge \omega_i^0, \quad (5.88)$$

где

$$\Delta a_i = da_i + a_i(\omega_i^i - \vartheta - \omega). \quad (5.89)$$

Исключая $d\vartheta$ из уравнений (5.88), приходим к равенствам

$$\Delta a_i \wedge \omega_i^0 - \Delta a_k \wedge \omega_k^0 = 0, \quad \Delta a_j \wedge \omega_j^0 - \Delta a_k \wedge \omega_k^0 = 0.$$

Разрешая последние уравнения, получим

$$\Delta a_i = -\beta_i \omega_i^0 + \beta \omega_{i-1}^0. \quad (5.90)$$

Отсюда, в частности, находим, что при фиксированных главных параметрах ($\omega_i^0 = 0$) функции a_i удовлетворяют уравнениям

$$\delta a_i = a_i(\pi_0^0 - \tilde{\pi}).$$

Эти равенства означают, что величины a_i являются относительными инвариантами. Более детальные рассуждения показывают, что величина β также является относительным инвариантом.

III. Координатные три-ткани на поверхности пространства N^3

Гладкая тангенциально невырожденная поверхность V в N^3 устанавливает на нормкривой N локальное точечное соответствие $q: N \times N \rightarrow N$ следующим образом. Пусть M_0 произвольная точка поверхности V , A_i^0 — точки пересечения касательной плоскости T_{M_0} к поверхности с N и U_i — достаточно малые окрестности этих точек на N . Тогда для любых $A_1 \in U_1$, $A_2 \in U_2$ существует единственная плоскость, касательная к V в некоторой точке M и проходящая через точки A_1 и A_2 . Пусть A_3 третья точка пересечения этой плоскости с нормкривой. Устанавливаемое таким образом соответствие $A_3 = q(A_1, A_2)$ представляет собой локальную трехбазисную дифференциальную квазигруппу (см. § 1.4).

Квазигруппе q соответствует на поверхности V координатная три-ткань W , образованная линиями тени. Действительно, зафиксируем

точку A_1 . Плоскости, проходящие через точку A_1 и касающиеся поверхности V , образуют однопараметрическое семейство и касаются V вдоль некоторой кривой L_1 — линии тени. Аналогично получаются кривые L_2 и L_3 для точек A_2 и A_3 . При этом линии L_1, L_2, L_3 проходят через точку M . Меняя положение точек A_1, A_2, A_3 на кривой N , получим на поверхности три однопараметрических семейства линий, образующих три-ткань W в некоторой окрестности точки M . Из описанной конструкции вытекает, что квазигруппа q является координатной квазигруппой ткани W .

Помимо ткани W на поверхности V определена сопряженная ей координатная три-ткань W^* . Три семейства линий этой ткани состоят из кривых, касательные к которым направлены в точки A_i абсолютта N . Уравнения этих линий получаются, как и в предыдущих параграфах, из условия сопряженности относительно асимптотической формы поверхности V .

Замечание. Квазигруппу $q: N \times N \rightarrow N$ можно определить, вообще говоря, независимо от поверхности V , задав в N^3 двухпараметрическое семейство V^* плоскостей. Этой квазигруппе соответствует три-ткань W , определяемая на семействе V^* . Линиями такой ткани будут однопараметрические семейства плоскостей из V^* , проходящих через точку нормкривой N . Условие прохождения трех линий через одну точку состоит в том, что точки A_1, A_2, A_3 , определяющие эти линии, принадлежат одной плоскости из V^* . Если семейство имеет двумерную огибающую V , то на последней возникает соответствующая координатная три-ткань W из кривых. Если поверхность V точечно вырождена, то три-ткань W реализуется на самом семействе плоскостей V^* .

Линии ткани W получаются при фиксации точек A_i , поэтому их уравнения имеют вид $\omega_i^0 = 0$. Формы ω_i^0 связаны уравнением (5.82), которое является уравнением ткани W и ее координатной квазигруппы q . Уравнения (5.86) совпадают по форме с уравнениями (2.6), следовательно, форма ω , заданная формулой (5.87), является формой связности ткани W .

Предложение 5.4. Кривизна b координатной три-ткани W вычисляется по формуле

$$b = -\beta + (\lambda_2^1 - \lambda_3^1)a_1 + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)a_2 + (\lambda_1^3 - \lambda_2^3)a_3. \quad (5.91)$$

□ Продифференцируем внешним образом уравнение (5.87). Пользуясь уравнениями (5.76), (5.82), (5.85) и (5.90), получим:

$$\begin{aligned} d\omega = & -d\theta - [(\lambda_3^2 + \lambda_2^3)\omega_0^0 - \lambda_3^2\omega_2^2 - \lambda_3^3\omega_3^3 + (\lambda_3^2)^2\omega_2^0 + (\lambda_2^3)^2\omega_3^0] \wedge \omega_1^0 - \\ & - [(\lambda_1^3 + \lambda_3^1)\omega_0^0 - \lambda_1^3\omega_3^3 - \lambda_3^1\omega_1^1 + (\lambda_3^1)^2\omega_1^0 + (\lambda_1^3)^2\omega_3^0] \wedge \omega_2^0 - \\ & - [(\lambda_2^1 + \lambda_1^2)\omega_0^0 - \lambda_2^1\omega_1^1 - \lambda_1^2\omega_2^2 + (\lambda_2^1)^2\omega_1^0 + (\lambda_1^2)^2\omega_2^0] \wedge \omega_3^0 - \\ & - [(\lambda_3^2 + \lambda_2^3)\omega_1^0 + (\lambda_1^3 + \lambda_3^1)\omega_2^0 + (\lambda_2^1 + \lambda_1^2)\omega_3^0] \wedge \omega. \quad (5.92) \end{aligned}$$

Значение $d\vartheta$ найдем, подставляя Δa_i из (5.89) в формулы (5.88). В результате получим:

$$d\vartheta = \beta\omega_1^0 \wedge \omega_2^0. \quad (5.93)$$

Подставляя в (5.92) значения ω_i^i из (5.84), ω из (5.87) и учитывая (5.93), перепишем (5.92) в виде $d\omega = b\Omega$, где $\Omega = \omega_1^0 \wedge \omega_2^0 = \omega_2^0 \wedge \omega_3^0 = \omega_3^0 \wedge \omega_1^0$, $b = -\beta + J$ — кривизна ткани, $J = (\lambda_2^1 - \lambda_3^1)a_1 + (\lambda_3^2 - \lambda_1^2)a_2 + (\lambda_1^3 - \lambda_2^3)a_3$. ■

Так как величины b и β являются относительными инвариантами, то и величина J является относительным инвариантом.

Из полученных формул и теоремы 2.1 вытекает

Теорема 5.5. *Координатная три-ткань W на поверхности пространства N^3 является регулярной тогда и только тогда, когда относительные инварианты J и β равны.*

В случае, если выполнены условия канонизации (5.77), форма связности и относительный инвариант J примут вид:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0^0 - \vartheta + (\lambda^3 - \lambda^2)\omega_1^0 + (\lambda^1 - \lambda^3)\omega_2^0 + (\lambda^2 - \lambda^1)\omega_3^0, \\ J &= 2(\lambda^1 a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3). \end{aligned}$$

§ 5.4. Координатные три-ткани на поверхностях в пространстве кубической метрики

1. Пространством кубической метрики K^3 называется трехмерное аффинно-проективное пространство, в несобственной плоскости Σ которого фиксирован абсолют — кривая третьего порядка Υ :

$$\Upsilon: F \equiv a_{ijk}x^i x^j x^k = 0 \quad (5.94)$$

(здесь и далее $i, j, k = 1, 2, 3$). Будем считать, что Υ не распадается на три прямые, имеющие общую точку.

С кривой Υ свяжем семейство проективных реперов $\{A_i\}$, $i = 1, 2, 3$, $A_i \in \Sigma$, следующим образом. Пусть ℓ — произвольная прямая, пересекающая Υ в трех различных точках M_i . Уравнение касательной к Υ в точке M_i имеет вид

$$F_{j,i}x^j = 0, \quad F_{j,i} = \left. \frac{\partial F}{\partial x^j} \right|_{M_i}.$$

Эти касательные образуют треугольник в том и только в том случае, если

$$\det\|F_{j,i}\| \neq 0. \quad (5.95)$$

Поместим в точки пересечения касательных вершины A_1, A_2, A_3 проективного репера плоскости Σ , тогда будут выполняться соотношения

$$F_{1,3} = F_{2,3} = F_{1,2} = F_{3,2} = F_{2,1} = F_{3,1} = 0. \quad (5.96)$$

Нормируем проективный репер условиями $M_i = A_{i+1} - A_{i+2}$. Тогда уравнение прямой ℓ примет вид $x^1 + x^2 + x^3 = 0$, и из соотношений (5.96) получим:

$$\begin{aligned} a_{111} - 2a_{112} + a_{122} &= 0, & a_{112} - 2a_{122} + a_{222} &= 0, \\ a_{333} - 2a_{133} + a_{113} &= 0, & a_{133} - 2a_{113} + a_{111} &= 0, \\ a_{222} - 2a_{223} + a_{233} &= 0, & a_{223} - 2a_{233} + a_{333} &= 0. \end{aligned} \quad (5.97)$$

Условие (5.95) примет вид $F_{1,1} \cdot F_{2,2} \cdot F_{3,3} \neq 0$ или

$$(a_{112} - 2a_{123} + a_{233})(a_{223} - 2a_{123} + a_{113})(a_{133} - 2a_{123} + a_{122}) \neq 0. \quad (5.98)$$

Обозначив $a_{111} = u_1$, $a_{222} = u_2$, $a_{333} = u_3$, из (5.97) найдем:

$$\begin{aligned} a_{112} &= \frac{1}{3}(2u_1 + u_2), & a_{113} &= \frac{1}{3}(2u_1 + u_3), & a_{122} &= \frac{1}{3}(u_1 + 2u_2), \\ a_{133} &= \frac{1}{3}(u_1 + 2u_3), & a_{223} &= \frac{1}{3}(2u_2 + u_3), & a_{233} &= \frac{1}{3}(u_2 + 2u_3). \end{aligned} \quad (5.99)$$

В результате уравнение (5.94) кривой Υ запишется следующим образом:

$$(u_1x^1 + u_2x^2 + u_3x^3)(x^1 + x^2 + x^3)^2 - 2px^1x^2x^3 = 0, \quad (5.100)$$

где

$$p = u_1 + u_2 + u_3 - 3a_{123}, \quad (5.101)$$

а условие (5.98) примет вид $p \neq 0$.

Заметим, что при $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ кубика-абсолют распадается на три прямые, и мы приходим к пространству Аппеля гиперболического типа, которое рассматривалось в § 5.1.

2. Запишем уравнения инфинитезимального смещения репера $\{A_i\}$, $i = 1, 2, 3$, в виде

$$dA_i = \Theta_i^j A_j. \quad (5.102)$$

Формы Θ_i^j удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства:

$$d\Theta_i^j = \Theta_i^k \wedge \Theta_k^j. \quad (5.103)$$

Нормируем репер A_i еще одним условием: $(A_1 A_2 A_3) = 1$. Продифференцировав последнее равенство, придем к соотношению

$$\Theta_1^1 + \Theta_2^2 + \Theta_3^3 = 0. \quad (5.104)$$

Коэффициенты a_{ijk} , входящие в уравнение (5.94) кривой Υ , являются функциями параметров подвижного репера и удовлетворяют условию стационарности $dF = \vartheta F$, где ϑ — некоторая форма Пфаффа. Отсюда, используя структурные уравнения (5.103), получим диффе-

ренциальные уравнения на коэффициенты a_{ijk} (условия стационарности кубики Υ) :

$$da_{ijk} - a_{ij\ell}\Theta_k^\ell - a_{ik\ell}\Theta_j^\ell - a_{jkl}\Theta_i^\ell = \vartheta a_{ijk}. \quad (5.105)$$

Равенства (5.105) можно упростить. Продифференцировав внешним образом равенство $dF = \vartheta F$, получим $d\vartheta = 0$, откуда $\vartheta = d\varphi$. При перенормировке уравнения кубики $F \rightarrow \lambda F$ форма ϑ преобразуется следующим образом: $\vartheta \rightarrow d \ln \lambda + \vartheta = d \ln \lambda + d\varphi$. Отсюда видно, что выбором λ форму ϑ можно привести к нулю. Допустим, что это сделано, тогда с помощью соотношений (5.99) и (5.101) из (5.105) находим:

$$\begin{aligned} du_1 &= 3u_1\Theta_1^1 + (2u_1 + u_2)\Theta_1^2 + (2u_1 + u_3)\Theta_1^3, \\ du_2 &= 3u_2\Theta_2^2 + (2u_2 + u_3)\Theta_2^3 + (2u_2 + u_1)\Theta_2^1, \\ du_3 &= 3u_3\Theta_3^3 + (2u_3 + u_1)\Theta_3^1 + (2u_3 + u_2)\Theta_3^2; \end{aligned} \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned} dp &= 3(u_1\Theta_1^1 + u_2\Theta_2^2 + u_3\Theta_3^3) + (2u_1 - u_2 - u_3)(\Theta_1^2 + \Theta_1^3) + \\ &+ (2u_2 - u_1 - u_3)(\Theta_2^3 + \Theta_2^1) + (2u_3 - u_1 - u_2)(\Theta_3^1 + \Theta_3^2); \end{aligned} \quad (5.107)$$

$$\begin{aligned} (u_1 - u_2)(\Theta_1^1 - \Theta_2^2 + \Theta_1^2 - \Theta_2^1) + p\Theta_1^3 &= 0, \\ (u_1 - u_2)(\Theta_1^1 - \Theta_2^2 + \Theta_1^2 - \Theta_2^1) + p\Theta_2^3 &= 0, \\ (u_2 - u_3)(\Theta_2^2 - \Theta_3^3 + \Theta_2^3 - \Theta_3^2) + p\Theta_2^1 &= 0, \\ (u_2 - u_3)(\Theta_2^2 - \Theta_3^3 + \Theta_2^3 - \Theta_3^2) + p\Theta_3^1 &= 0, \\ (u_3 - u_1)(\Theta_3^3 - \Theta_1^1 + \Theta_3^1 - \Theta_1^3) + p\Theta_3^2 &= 0, \\ (u_3 - u_1)(\Theta_3^3 - \Theta_1^1 + \Theta_3^1 - \Theta_1^3) + p\Theta_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Можно доказать (задача 5.4), что вторые поляры базисных точек A_i относительно кубики Υ имеют общую точку, которая совпадает с точкой $M_i = A_{i+1} - A_{i+2}$ если и только если $u_{i+1} = u_{i+2}$. В дальнейшем будем рассматривать наиболее общую ситуацию, когда $u_i \neq u_j$. Но тогда из соотношений (5.108) получаем $\Theta_2^1 = \Theta_3^1$, $\Theta_1^2 = \Theta_3^2$, $\Theta_1^3 = \Theta_2^3$. Положим

$$\tilde{\omega}^1 \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_2^1 = \Theta_3^1, \quad \tilde{\omega}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_1^2 = \Theta_3^2, \quad \tilde{\omega}^3 \stackrel{\text{def}}{=} \Theta_1^3 = \Theta_2^3.$$

Подставляя $\tilde{\omega}^i$ снова в (5.108), найдем:

$$\Theta_i^i - \Theta_{i+1}^{i+1} = \tilde{\omega}^i - \tilde{\omega}^{i+1} - \frac{p}{u^i - u^{i+1}} \tilde{\omega}^{i+2} \quad (5.109)$$

(здесь и дальше в этом параграфе по встречающимся индексам суммирования нет). Сложив равенства (5.109), придем к соотношению

$$\omega^1 + \omega^2 + \omega^3 = 0, \quad (5.110)$$

где обозначено

$$\omega^i = (u_{i+1} - u_{i+2})^{-1} \tilde{\omega}^i. \quad (5.111)$$

Из системы (5.109) с учетом (5.104) находим:

$$\Theta_i^i = \tilde{\omega}^i - \frac{1}{3}\Omega + \frac{p}{3}(\omega^{i+1} - \omega^{i+2}), \quad (5.112)$$

где

$$\Omega = \tilde{\omega}^1 + \tilde{\omega}^2 + \tilde{\omega}^3. \quad (5.113)$$

Уравнения (5.106) и (5.107) ввиду сделанных обозначений запишутся так:

$$du_i = u_i\Omega + (u_1\tilde{\omega}^1 + u_2\tilde{\omega}^2 + u_3\tilde{\omega}^3) + u_1p(\omega^{i+1} - \omega^{i+2}), \quad (5.114)$$

$$dp = -\Omega p. \quad (5.115)$$

Уравнения (5.102) в результате примут вид:

$$dA_i = \frac{1}{3}[-\Omega + p(\omega^{i+1} - \omega^{i+2})] A_i + \tilde{\omega}^1 A_1 + \tilde{\omega}^2 A_2 + \tilde{\omega}^3 A_3, \quad (5.116)$$

а структурные уравнения (5.103) — вид

$$d\omega^i = 0, \quad d\Theta_i^i = (u_{i+1} - u_{i+2})\Omega \wedge \omega^i. \quad (5.117)$$

Получим еще одно соотношение, полезное для дальнейшего. Дифференцируя внешним образом формулу Ω (см. (5.113)), найдем, что $d\Omega = 0$.

Выясним геометрический смысл уравнения (5.110). Формы ω^i являются базисными на многообразии прямых плоскости Σ и каждое из уравнений $\omega^i = 0$ вполне интегрируемо. Положим, например, $\omega^3 = 0$. Тогда из уравнений (5.116) следует, что

$$d(A_1 - A_2) = \frac{1}{3}(p\omega^2 - \Omega)(A_1 - A_2),$$

то есть точка $M_3 = A_1 - A_2$ неподвижна. Таким образом, уравнение $\omega^3 = 0$ определяет пучок прямых с центром M_3 . Аналогично находим, что уравнения $\omega^1 = 0$ и $\omega^2 = 0$ определяют пучки прямых с центрами M_1 и M_2 соответственно. Таким образом, на многообразии прямых плоскости Σ кубика Υ определяет грасманову три-ткань, а уравнение (5.110) является уравнением этой ткани (см. § 1.9). Напомним, что грасманова ткань, заданная кубической кривой, является регулярной.

Проективный репер A_i , в котором выполняются соотношения (5.106)–(5.108), назовем адаптированным кубике Υ .

Пусть теперь M — произвольная точка пространства K^3 . Свяжем с ней семейство проективных адаптированных реперов $\{A_0, A_i\}$, поместив вершину A_0 в точку M , а точки A_i — как описано выше (чтобы они образовывали адаптированный репер кубики Υ). Кроме того, с точкой M свяжем семейство аффинных адаптированных реперов $R = \{M, \varepsilon_i\}$, где той же буквой M обозначен радиус-вектор точки M относительно некоторого неподвижного начала координат, а векто-

ры ε_i направлены в точки A_i . Инфинитезимальные перемещения репера R в силу (5.102) можно записать в виде:

$$dM = \Theta^i \varepsilon_i, \quad d\varepsilon_i = \Theta_i^j \varepsilon_j, \quad (5.118)$$

а структурные уравнения в силу (5.117) — в виде

$$\begin{aligned} d\Theta^i &= \frac{1}{3} \Theta^i \wedge (-\Omega + p(\omega^{i+1} - \omega^{i+2})) + \\ &\quad + (u_{i+1} - u_{i+2})(\Theta^1 + \Theta^2 + \Theta^3) \wedge \omega^i, \\ d\omega^i &= 0, \quad d\Theta_i^i = (u_{i+1} - u_{i+2})\Omega \wedge \omega^i. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Первая серия уравнений получается при внешнем дифференцировании первого уравнения (5.118).

3. Рассмотрим в пространстве K^3 гладкую неразвертывающуюся поверхность V . Пусть M — такая точка этой поверхности, касательная плоскость T_M в которой пересекает абсолют Υ в трех различных точках M_i таких, что выполняется условие (5.95). Тогда к точке M можно присоединить семейство адаптированных аффинных реперов $R = \{M, \varepsilon_i\}$. Такие реперы будем называть адаптированными реперами поверхности пространства K^3 .

Введем векторы $e_i \equiv \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+2}$, направленные в точки $M_i = A_{i+1} - A_{i+2}$. Тогда в некоторой окрестности точки M поверхности V в адаптированном репере имеем:

$$\begin{aligned} dM &= \sigma^1 e_1 + \sigma^2 e_2 = \sigma^1(\varepsilon_2 - \varepsilon_3) + \sigma^2(\varepsilon_3 - \varepsilon_1) = \\ &= -\sigma^2 \varepsilon_1 + \sigma^1 \varepsilon_2 + (\sigma^2 - \sigma^1) \varepsilon_3. \end{aligned}$$

Сравнивая эти разложения с (5.118), найдем, что $\sigma^1 = \Theta^2$, $\sigma^2 = -\Theta^1$, $\sigma^2 - \sigma^1 = \Theta^3$. Отсюда получаем уравнение поверхности V в рассматриваемом репере:

$$\Theta^1 + \Theta^2 + \Theta^3 = 0. \quad (5.120)$$

Любые две из форм Θ^i являются базисными на V .

В силу (5.120) первое из уравнений (5.118) запишется в виде:

$$dM = \Theta^2 e_1 - \Theta^1 e_2 = \Theta^1 e_3 - \Theta^3 e_1 = \Theta^3 e_2 - \Theta^2 e_3. \quad (5.121)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (5.120), получим:

$$\Theta^1 \wedge (\omega^2 - \omega^3) + \Theta^2 \wedge (\omega^3 - \omega^1) + \Theta^3 \wedge (\omega^1 - \omega^2) = 0.$$

Запишем это уравнение, используя (5.120), тремя способами:

$$\omega^1 \wedge \Theta^2 - \omega^2 \wedge \Theta^1 = \omega^2 \wedge \Theta^3 - \omega^3 \wedge \Theta^2 = \omega^3 \wedge \Theta^1 - \omega^1 \wedge \Theta^3 = 0.$$

Отсюда находим:

$$\omega^1 = -a_2 \Theta^2 + a_3 \Theta^3, \quad \omega^2 = -a_3 \Theta^3 + a_1 \Theta^1, \quad \omega^3 = -a_1 \Theta^1 + a_2 \Theta^2. \quad (5.122)$$

Функции a_i являются коэффициентами асимптотической формы ϕ поверхности V , причем $\phi = a_1(\Theta^1)^2 + a_2(\Theta^2)^2 + a_3(\Theta^3)^2$.

Как и в предыдущих параграфах, на поверхности V возникают две координатные три-ткани, W и W^* , у которых соответствующие семейства линий образуют на поверхности V сопряженную сеть.

Координатная три-ткань W^* образована интегральными кривыми векторных полей e_i . Из (5.121) следует, что линии ткани W^* задаются уравнениями $\Theta^i = 0$, следовательно, уравнение (5.120) является уравнением этой ткани.

Три-ткань W образована линиями тени — линиями, вдоль которых поверхности V касаются конусы прямых с вершинами на кубике-абсолюте Υ . При этом линиям, проходящим через точку M , соответствуют конусы с вершинами в точках $M_i = T_M \cap \Upsilon$. Линии ткани W задаются уравнениями $\omega^i = 0$ (см. (5.22)), которые связаны уравнением ткани $W - \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 = 0$.

4. Найдем структурные уравнения координатной три-ткани W^* . Внешнее дифференцирование форм Θ^i в силу (5.122) дает:

$$d\Theta^1 = \Theta^1 \wedge \omega, \quad d\Theta^2 = \Theta^2 \wedge \omega, \quad d\Theta^3 = \Theta^3 \wedge \omega, \quad (5.123)$$

где

$$-3\omega = \Omega + p(a_1\Theta^1 + a_2\Theta^2 + a_3\Theta^3). \quad (5.124)$$

Уравнения (5.123) есть структурные уравнения три-ткани W^* , а ω — ее форма связности.

Найдем кривизну ткани W^* . Дифференцируя внешним образом уравнения (5.122) и используя уравнения (5.113), (5.117) и (5.123), получим:

$$\Theta^i \wedge (da_i - a_i\omega) - \Theta^{i+1} \wedge (da_{i+1} - a_{i+1}\omega) = 0.$$

Отсюда, пользуясь леммой Картана, находим формы da_i :

$$da_i = a_i\omega + \beta_i\Theta^i + \beta\Theta^{i+2}. \quad (5.125)$$

Дифференцируем далее внешним образом соотношение (5.124) и подставляем в полученное квадратичное равенство значения форм $d\Theta^i$, da_i , $d\Omega$ и dp . После преобразований приходим к уравнению $d\omega = b\Theta^1 \wedge \Theta^2$, где b — кривизна ткани W^* — выражается формулой:

$$b = -p[(u_1 - u_2)a_1a_2 + (u_2 - u_3)a_2a_3 + (u_3 - u_1)a_3a_1 + \beta]. \quad (5.126)$$

Из (5.126) в силу теоремы 2.1 вытекает

Теорема 5.6. *Координатная три-ткань W^* на поверхности пространства K^3 является регулярной тогда и только тогда, когда выполнено соотношение*

$$\beta = (u_2 - u_1)a_1a_2 + (u_3 - u_2)a_2a_3 + (u_1 - u_3)a_3a_1.$$

§ 5.5. Три-ткани, образованные семействами окружностей

1. Обозначим через W три-ткань, образованную в некоторой области D плоскости тремя гладкими семействами окружностей. При отображении Дарбу (см. гл. 3) семейства окружностей, образующих три-ткань W , перейдут в 3 кривые (обозначим их ℓ_i , $i = 1, 2, 3$) трехмерного проективного пространства \mathbb{P}^3 , в котором фиксирована квадрика Дарбу Q . Таким образом, изучение три-тканей из семейств окружностей сводится к изучению геометрии тройки кривых в проективном пространстве с фиксированной овальной квадрикой. При этом три окружности ткани из разных семейств, проходящие через текущую точку M области D , изобразятся тремя точками M_i , $M_i \in \ell_i$, лежащими в касательной плоскости T_M к квадрике Дарбу Q в точке M ; точки этих окружностей изобразятся на Q точками линий тени при освещении из точек M_i .

С тройкой кривых ℓ_i пространства \mathbb{P}^3 свяжем подвижной репер $\{A_\alpha\}$ (далее $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3$) аналогичный тому, который использовался в § 5.2 для изучения координатных тканей на поверхности триаксиального пространства. Инфинитезимальные перемещения подвижного репера запишем в виде (5.29), а структурные уравнения пространства \mathbb{P}^3 — в виде (5.30).

Поместим вершину A_i репера на кривую ℓ_i и рассмотрим область пространства \mathbb{P}^3 , в которой плоскость $\pi_0 = A_1 A_2 A_3$ трансверсальна кривым ℓ_i . Так как точка A_i описывает кривую ℓ_i , то из трех форм $\omega_i^0, \omega_i^j, i, j = 1, 2, 3, i \neq j$, при фиксированном i только одна линейно независимая. При этом, так как плоскость π_0 трансверсальна кривым ℓ_i , то $\omega_i^0 \neq 0$, и можно положить

$$\omega_i^j = \lambda_i^j \omega_i^0. \quad (5.127)$$

Тогда

$$dA_i = \omega_i^i A_i + \omega_i^0 B_i, \quad (5.128)$$

где

$$B_i = A_0 + \lambda_i^j A_j + \lambda_i^k A_k. \quad (5.129)$$

Дифференцируя уравнения (5.127), получим квадратичные уравнения, из которых найдем:

$$d\lambda_i^k + \lambda_i^k (\omega_k^k - \omega_0^0) + \omega_0^k + \lambda_i^j (\lambda_j^k - \lambda_i^k) \omega_j^0 - (\lambda_i^k)^2 \omega_k^0 = 2\mu_i^k \omega_i^0, \quad (5.130)$$

где индексы i, j, k все различны. Верны следующие утверждения.

Теорема 5.7. [П-1, А-3] *Величины μ_i^k являются относительными проективными инвариантами тройки кривых ℓ_i . Кривая ℓ_i является прямой тогда и только тогда, когда $\mu_i^j = \mu_i^k = 0$ (здесь все индексы различны).*

Теорема 5.8. [А-3] *Для того, чтобы тройка кривых ℓ_i принадлежала одной нормкривой пространства \mathbb{P}^3 , необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\mu_2^1 + \mu_1^2 = 0, \quad \mu_3^1 + \mu_1^3 = 0, \quad \mu_2^3 + \mu_3^2 = 0. \quad (5.131)$$

Как и в § 5.2, семейство реперов A_α можно сузить, поместив вершину репера A_0 в полюс плоскости $\pi_0 = A_1 A_2 A_3$ относительно линейчатой квадрики S , содержащей в качестве прямолинейных образующих касательные $A_i B_i$ к кривым ℓ_i . Тогда будут выполняться равенства $\lambda_j^i + \lambda_k^i = 0$, в которых все индексы различны. Введем обозначения (5.37), и тогда уравнения (5.127) примут вид (см. (5.38)):

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= -\lambda^2 \omega_1^0, & \omega_1^3 &= \lambda^3 \omega_1^0, \\ \omega_2^3 &= -\lambda^3 \omega_2^0, & \omega_2^1 &= \lambda^1 \omega_2^0, \\ \omega_3^1 &= -\lambda^1 \omega_3^0, & \omega_3^2 &= \lambda^2 \omega_3^0, \end{aligned} \quad (5.132)$$

а уравнения (5.130) приведутся к следующему виду [А-3]:

$$\begin{aligned} d\lambda^1 + \lambda^1(\omega_1^1 - \omega_0^0) &= (\mu_2^1 + \lambda^1 \lambda^2) \omega_2^0 + (\mu_3^1 - \lambda^1 \lambda^3) \omega_3^0, \\ d\lambda^2 + \lambda^2(\omega_2^2 - \omega_0^0) &= (\mu_3^2 + \lambda^2 \lambda^3) \omega_3^0 + (\mu_1^2 - \lambda^1 \lambda^2) \omega_1^0, \\ d\lambda^3 + \lambda^3(\omega_3^3 - \omega_0^0) &= (\mu_1^3 + \lambda^3 \lambda^1) \omega_1^0 + (\mu_2^3 - \lambda^3 \lambda^2) \omega_2^0, \\ \omega_0^1 &= (\lambda^1)^2 \omega_1^0 + (\mu_2^1 - \lambda^1 \lambda^2) \omega_2^0 - (\mu_3^1 + \lambda^1 \lambda^3) \omega_3^0, \\ \omega_0^2 &= (\lambda^2)^2 \omega_2^0 + (\mu_3^2 - \lambda^2 \lambda^3) \omega_3^0 - (\mu_1^2 + \lambda^2 \lambda^1) \omega_1^0, \\ \omega_0^3 &= (\lambda^3)^2 \omega_3^0 + (\mu_1^3 - \lambda^3 \lambda^1) \omega_1^0 - (\mu_2^3 + \lambda^3 \lambda^2) \omega_2^0. \end{aligned} \quad (5.133)$$

Точки B_i , лежащие на касательных к кривым ℓ_i , запишутся так (см. (5.129)):

$$B_1 = A_0 - \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3, \quad B_2 = A_0 - \lambda^3 A_3 + \lambda^1 A_1, \quad B_3 = A_0 - \lambda^1 A_1 + \lambda^2 A_2. \quad (5.134)$$

Величины λ^i являются относительными инвариантами, геометрический смысл обращения их в нуль указан в § 5.2. Геометрический смысл величин μ_j^i проясняет следующее утверждение, которое доказывается непосредственным вычислением.

Предложение 5.9. *Соприкасающаяся плоскость π_i к кривой ℓ_i в текущей точке A_i имеет вид $A_i B_i C_i$, где*

$$C_1 = -\mu_1^2 A_2 + \mu_1^3 A_3, \quad C_2 = -\mu_2^3 A_3 + \mu_2^1 A_1, \quad C_3 = -\mu_3^1 A_1 + \mu_3^2 A_2.$$

2. Найдем уравнение три-ткани W . Пусть квадрика Дарбу Q задана в подвижном репере $\{A_\alpha\}$ уравнением

$$g_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3. \quad (5.135)$$

Коэффициенты $g_{\alpha\beta} \equiv g_{\beta\alpha}$ являются функциями параметров подвижного репера и удовлетворяют условию стационарности:

$$dg_{\alpha\beta} - g_{\gamma\beta} \omega_\alpha^\gamma - g_{\alpha\gamma} \omega_\beta^\gamma = \vartheta g_{\alpha\beta}. \quad (5.136)$$

Напомним, что плоскость $\pi_0 = A_1A_2A_3$ касается квадрики Дарбу Q в точке M . Нормируем эту точку условием $M = A_1 + A_2 + A_3$. Подставляя координаты точки M в уравнение (5.135), получим соотношение $g_{11} + g_{22} + g_{33} + 2g_{12} + 2g_{13} + 2g_{23} = 0$, которое можно записать в виде

$$g_1 + g_2 + g_3 = 0, \quad (5.137)$$

введя обозначения

$$g_\alpha = g_{\alpha 1} + g_{\alpha 2} + g_{\alpha 3}. \quad (5.138)$$

Как известно, полярное соответствие точек $A(x^\alpha)$ и $B(y^\alpha)$ относительно квадрики Q определяется равенством $g_{\alpha\beta}x^\alpha y^\beta = 0$. Кратко это условие записывают в виде $(AB) = 0$. В частности, для базисных точек условие $(A_\alpha B_\beta) = 0$ эквивалентно $g_{\alpha\beta} = 0$.

Так как плоскость $\pi_0 = A_1A_2A_3$ касается квадрики Q в точке $M = A_1 + A_2 + A_3$, то эта точка полярно сопряжена каждой точке плоскости π_0 . Это эквивалентно условиям $(MA_1) = 0$, $(MA_2) = 0$, $(MA_3) = 0$, что в силу обозначений (5.138) дает

$$g_i = 0. \quad (5.139)$$

Теперь, используя деривационные уравнения (5.29), запишем дифференциал точки $M = A_1 + A_2 + A_3$:

$$dM = (\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0)A_0 + (\dots)A_1 + (\dots)A_2 + (\dots)A_3.$$

По той же причине — точка M лежит на квадрике Q , а плоскость $A_1A_2A_3$ касается Q в точке M — в правой части коэффициент при A_0 должен равняться нулю:

$$\omega_1^0 + \omega_2^0 + \omega_3^0 = 0. \quad (5.140)$$

Теперь заметим, что в силу (5.128) уравнение $\omega_i^0 = 0$ фиксирует точку A_i , а, следовательно, и соответствующую линию тени на квадрике Дарбу Q . Поэтому уравнения $\omega_i^0 = 0$ задают линии ткани W , а соотношение (5.140) есть дифференциальное уравнение этой ткани в подвижном репере.

3. Найдем структурные уравнения три-ткани W . Продифференцируем равенства (5.139), пользуясь уравнениями (5.136). После преобразований с учетом (5.139) и (5.140) получим

$$g_{ik}\tilde{\omega}^k + g_0\omega_i^0 = 0, \quad (5.141)$$

где введено обозначение

$$\tilde{\omega}^k = \omega_1^k + \omega_2^k + \omega_3^k. \quad (5.142)$$

В силу (5.139) из трех уравнений (5.141) только 2 независимых. С учетом (5.139) первые 2 из уравнений (5.141) примут вид:

$$\begin{aligned} g_{11}(\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^3) + g_{12}(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^3) + g_0\omega_1^0 &= 0, \\ g_{21}(\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^3) + g_{22}(\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^3) + g_0\omega_2^0 &= 0. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что эта система имеет решение

$$\tilde{\omega}^1 - \tilde{\omega}^3 = \frac{g_0}{\Delta}(g_{23}\omega_1^0 - g_{12}\omega_3^0), \quad \tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^3 = \frac{g_0}{\Delta}(g_{13}\omega_2^0 - g_{12}\omega_3^0), \quad (5.143)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Delta &= g_{12}g_{13} + g_{12}g_{23} + g_{13}g_{23} \equiv g_{11}g_{22} - (g_{12})^2 \equiv \\ &\equiv g_{11}g_{33} - (g_{13})^2 \equiv g_{22}g_{33} - (g_{23})^2. \end{aligned} \quad (5.144)$$

Равенства (5.143) запишем в симметричной форме, введя новую форму $\tilde{\vartheta}$:

$$\tilde{\omega}^1 = \tilde{\vartheta} + \frac{g_0}{\Delta}g_{23}\omega_1^0, \quad \tilde{\omega}^2 = \tilde{\vartheta} + \frac{g_0}{\Delta}g_{13}\omega_2^0, \quad \tilde{\omega}^3 = \tilde{\vartheta} + \frac{g_0}{\Delta}g_{12}\omega_3^0. \quad (4.145)$$

Внешнее дифференцирование уравнения (5.140) в силу (5.145) приводит к тождеству (проверьте!), а внешнее дифференцирование форм ω_1^0 и ω_2^0 дает

$$d\omega_1^0 = \omega_1^0 \wedge \omega, \quad d\omega_2^0 = \omega_2^0 \wedge \omega, \quad (5.146)$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0^0 - \tilde{\vartheta} + \omega_1^2 + \omega_2^1 + \omega_1^3 + \omega_3^1 + \omega_2^3 + \omega_3^2 = \\ &= \omega_0^0 - \tilde{\vartheta} + (\lambda^3 - \lambda^2)\omega_1^0 + (\lambda^1 - \lambda^3)\omega_2^0 + (\lambda^2 - \lambda^1)\omega_3^0. \end{aligned} \quad (5.147)$$

Сравнивая уравнения (5.146) и (2.6), видим, что уравнения (5.146) являются структурными уравнениями рассматриваемой ткани W , а форма ω является ее формой связности.

Непосредственным вычислением доказываем следующие утверждения.

Лемма 1.

$$\begin{aligned} dg_0 &= g_0(\vartheta + \omega_0^0) + g_{0k}\tilde{\omega}^k = \\ &= g_0(\vartheta + \tilde{\vartheta} + \omega_0^0) + \frac{g_0}{\Delta}(g_{01}g_{23}\omega_1^0 + g_{02}g_{13}\omega_2^0 + g_{03}g_{12}\omega_3^0). \end{aligned} \quad (5.148)$$

Лемма 2.

$$\begin{aligned} d\Delta &= 2\Delta(\vartheta + 2\tilde{\vartheta} - (\omega_1^2 + \omega_2^1 + \omega_1^3 + \omega_3^1 + \omega_2^3 + \omega_3^2)) + \\ &+ 2g_{23}(g_{02} + g_{03})\omega_1^0 + 2g_{13}(g_{01} + g_{03})\omega_2^0 + 2g_{12}(g_{01} + g_{02})\omega_3^0. \end{aligned} \quad (5.149)$$

С помощью формул (5.148) и (5.149) доказываемся

Лемма 3. Внешнее дифференцирование уравнений (5.145) дает единственное уравнение:

$$\begin{aligned} d\tilde{\vartheta} &= -\frac{g_0}{\Delta}(g_{11}\lambda^1 + g_{22}\lambda^2 + g_{33}\lambda^3)\omega_1^0 \wedge \omega_2^0 - \\ &- \frac{g_0}{\Delta^2}(g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13}))\omega_1^0 \wedge \omega_2^0. \end{aligned} \quad (5.150)$$

Наконец, с помощью этой формулы и предыдущих продифференцируем форму ω , данную формулой (5.147). После вычислений получим уравнение вида (2.8):

$$d\omega = b\omega_1^0 \wedge \omega_2^0,$$

где b — кривизна ткани W — вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned} b = & -2(\mu_1^2 + \mu_1^2 + \mu_1^3 + \mu_3^1 + \mu_3^2 + \mu_2^3) + \\ & + \frac{g_0}{\Delta}(\lambda^1(g_{22} + g_{33}) + \lambda^2(g_{11} + g_{33}) + \lambda^3(g_{11} + g_{22})) + \\ & + \frac{g_0}{\Delta^2}(g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13})). \end{aligned}$$

Из последней формулы и теоремы 2.1 вытекает

Теорема 5.10. *Три-ткань W является регулярной тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\begin{aligned} -2(\mu_1^2 + \mu_1^2 + \mu_1^3 + \mu_3^1 + \mu_3^2 + \mu_2^3) + \\ + \frac{g_0}{\Delta}(\lambda^1(g_{22} + g_{33}) + \lambda^2(g_{11} + g_{33}) + \lambda^3(g_{11} + g_{22})) + \\ + \frac{g_0}{\Delta^2}(g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13})) = 0. \end{aligned}$$

Как видно из формулы (5.151), кривизна представляет собой сумму трех слагаемых, принадлежащих, соответственно, дифференциальным окрестностям второго, первого и нулевого порядков. Поэтому в классе регулярных тканей ($b = 0$) естественным образом возникают 3 подкласса, выделяемые, соответственно, условиями:

$$\mu_1^2 + \mu_1^2 + \mu_1^3 + \mu_3^1 + \mu_3^2 + \mu_2^3 = 0, \quad (5.152)$$

$$\lambda^1(g_{22} + g_{33}) + \lambda^2(g_{11} + g_{33}) + \lambda^3(g_{11} + g_{22}) = 0, \quad (5.153)$$

$$g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13}) = 0. \quad (5.154)$$

В связи с этим возникает ряд задач.

1. Выяснить геометрический смысл каждого из условий (5.152)–(5.154).

Например, условие регулярности первого из указанных трех классов состоит из равенств (5.152) и

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda^1(g_{22} + g_{33}) + \lambda^2(g_{11} + g_{33}) + \lambda^3(g_{11} + g_{22})) + \\ + (g_{01}g_{23}(g_{13} - g_{12}) + g_{02}g_{13}(g_{12} - g_{23}) + g_{03}g_{12}(g_{23} - g_{13})) = 0. \end{aligned} \quad (5.155)$$

Последнее равенство при условиях $\mu_j^i = 0$ характеризует регулярные круговые ткани и совпадает с формулой (32) из [Л-1]. Его геометрический смысл до сих пор не выяснен, хотя все регулярные круговые ткани описаны! Поэтому интересно было бы

2. Найти геометрический смысл условия (5.155), в частности, для круговых тканей.

К равенствам (5.152) и (5.155) следует добавить их дифференциальные следствия. Заметим, что дифференцирование (5.152) не даст новых условий на величины λ^i и $g_{\alpha\beta}$. Этот факт вытекает из легко доказываемого

Предложения 5.11. Система (5.133) правильно продолжаема.

Естественно рассмотреть еще следующие две задачи.

3. Найти регулярные ткани, образованные семействами окружностей, в случае, если выполняются соотношения (5.131) (кривые ℓ_i принадлежат одной кубической нормкривой).

4. Найти необходимое и достаточное условие принадлежности кривых ℓ_i одной кубической поверхности и описать соответствующий класс регулярных тканей.

В заключение отметим, что полученные результаты можно сформулировать в конформных терминах. В связи с этим отсылаем читателя к работам Р.М. Гейдельмана и М.А. Аквиса по дифференциальной геометрии семейств окружностей и сфер, см. обзор [А-4], § 6 в [Г-1] и монографию [АГо-2].

ЗАДАЧИ

5.1. Докажите возможность нормировок (5.3), (5.4).

5.2. Найдите кривизну координатной три-ткани W на поверхности пространства Аппеля (см. § 5.1).

5.3. Найдите кривизну координатной три-ткани W^* на поверхности триаксиального пространства (см. § 5.2).

5.4. Вторые поляры базисных точек A_i относительно кубики (5.100) имеют общую точку, которая совпадает с точкой $M_i = A_{i+1} - A_{i+2}$ если и только если $u_{i+1} = u_{i+2}$.

Указание: пусть $F(x, y, z)$ — трилинейная форма, соответствующая левой части уравнения (5.100). Тогда вторая поляра точки $M(x)$ относительно кубики (5.100) есть прямая $F(x, x, z) = 0$.

5.5. Произвольная плоскость в \mathbb{P}^3 пересекает нормкривую не более чем в трех точках.

5.6. Группа коллинеаций пространства \mathbb{P}^3 , переводящих нормкривую в себя (§ 5.3), изоморфна группе проективных преобразований прямой.

Указание: всякой коллинеации пространства \mathbb{P}^3 , переводящей нормкривую в себя, соответствует дробно-линейное преобразование параметра t . Верно и обратное.

5.7. Докажите, что

а) нормкривая N , заданная уравнениями (5.55), принадлежит трем квадрикам

$$f_1 \equiv x^1 x^3 - (x^2)^2 = 0, \quad f_2 \equiv x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0, \quad f_3 \equiv x^0 x^2 - (x^1)^2 = 0,$$

причем многочлены f_i связаны зависимостями

$$x^0 f_1 + x^1 f_2 + x^2 f_3 = 0, \quad x^1 f_1 + x^2 f_2 + x^3 f_3 = 0;$$

б) уравнение

$$(f_2)^2 - 4f_1 f_3 = 0$$

определяет развертывающуюся поверхность четвертого порядка, ребром возврата которой служит нормкривая N ;

в) нормкривая вполне определяется шестью своими точками, не лежащими по четыре в одной плоскости, или двумя точками и четырьмя бисекантами, или тремя точками и тремя бисекантами (бисекантой называется прямая, пересекающая нормкривую в двух точках);

г) из каждых двух бисекант точки пространственной кривой третьего порядка проектируются проективными пучками плоскостей. Выведите отсюда, что нормкривая может быть получена как геометрическое место точек пересечения соответствующих плоскостей трех проективных пучков плоскостей.

5.8. Найдите кривизну координатной три-ткани W^* на поверхности пространства N^3 (см. § 5.3).

5.9. Опишите поверхности пространства K^3 (см. § 5.4), для которых нельзя построить адаптированный репер.

5.10. Найдите кривизну координатной три-ткани W на поверхности пространства кубической метрики (см. § 5.4).

5.11. Выведите формулы (5.130).

5.12. Докажите теорему 5.7 из § 5.5.

5.13. С помощью теоремы 5.8 докажите следующее утверждение:

Теорема 5.12. Для того, чтобы тройка кривых ℓ_i принадлежала одной нормкривой пространства \mathbb{F}^3 , необходимо и достаточно, чтобы плоскости π_i и $\pi_0 = A_1 A_2 A_3$ (см. предложение 5.9) принадлежали одной связке с вершиной в точке Брианшона треугольника $A_1 A_2 A_3$ относительно коники $\pi_0 \cap S$.

5.14. Докажите предложение 5.9. Покажите, что

а) в репере A_α плоскости π_i определяются соответственно уравнениями:

$$\begin{aligned} (\mu_1^3 \lambda^2 - \mu_1^2 \lambda^3) x^0 + \mu_1^3 x^2 + \mu_1^2 x^3 &= 0, \\ (\mu_2^1 \lambda^3 - \mu_2^3 \lambda^1) x^0 + \mu_2^3 x^1 + \mu_2^1 x^3 &= 0, \\ (\mu_3^2 \lambda^1 - \mu_3^1 \lambda^2) x^0 + \mu_3^2 x^1 + \mu_3^1 x^2 &= 0. \end{aligned}$$

б) плоскости π_i и $\pi_0 = A_1 A_2 A_3$ принадлежат одной связке тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\mu_1^3 \mu_2^1 \mu_3^2 + \mu_2^3 \mu_1^2 \mu_3^1 = 0.$$

5.15. Докажите леммы 1–3 из § 5.5.

5.16. Докажите предложение 5.11.

Приложение 1

Вычисление ковариантных производных кривизны три-ткани через частные производные от функции ткани

В некоторых задачах, например, при изучении конкретных тканей, приходится вычислять кривизну три-ткани и ее ковариантные производные через обычные частные производные от функции, задающей эту ткань в некоторых локальных координатах. В частности, чтобы проверить, является ли три-ткань, заданная уравнением $z = f(x, y)$, линейризуемой или нет, нужно (см. § 2.8) найти ее кривизну и ковариантные производные кривизны по крайней мере до третьего порядка включительно.

Выражение для тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани, заданной на $2r$ -мерном многообразии, найдено в [АШ-1]. Для криволинейной ткани ($r = 1$) кручение равно нулю, а формула для кривизны принимает вид (2.9).

Формулы для ковариантных производных первого и второго порядков тензора кривизны многомерной три-ткани найдены в [Ш-1] и [Ш-2]. Из этих формул легко получаются соответствующие формулы для криволинейной ткани (при $r = 1$). Но в данной работе мы приводим их в том виде, как они были найдены в [Го-1]. Из (2.10) находим:

$$\begin{cases} b_1 = \frac{b_x}{f_x} + 2b \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \\ b_2 = \frac{b_y}{f_y} + 2b \frac{f_{xy}}{f_x f_y}. \end{cases} \quad (1)$$

Из этих рекуррентных соотношений с учетом (2.9) получаем:

$$\begin{cases} b_1 = \frac{f_{x^3y}}{(f_x)^3 f_y} - \frac{f_{x^2y^2}}{(f_x)^2 (f_y)^2} - 3 \frac{f_{x^2y} f_{x^2}}{(f_x)^4 f_y} + \frac{f_{xy^2} f_{xy}}{(f_x)^2 (f_y)^3} \\ - \frac{f_{x^3} f_{xy}}{(f_x)^4 f_y} + \frac{f_{x^2y} f_{xy}}{(f_x)^3 (f_y)^2} + \frac{f_{xy^2} f_{x^2}}{(f_x)^3 (f_y)^2} + \frac{f_{x^2y} f_{y^2}}{(f_x)^3 (f_y)^2} \\ + 3 \frac{f_{xy} (f_{x^2})^2}{(f_x)^5 f_y} - \frac{(f_{xy})^2 f_{y^2}}{(f_x)^2 (f_y)^4} - \frac{f_{x^2} f_{y^2} f_{xy}}{(f_x)^3 (f_y)^3} - \frac{(f_{xy})^2 f_{x^2}}{(f_x)^4 (f_y)^2}, \\ b_2 = \frac{f_{xy^3}}{f_x (f_y)^3} - \frac{f_{x^2y^2}}{(f_x)^2 (f_y)^2} - 3 \frac{f_{xy^2} f_{y^2}}{f_x (f_y)^4} + \frac{f_{x^2y} f_{xy}}{(f_x)^3 (f_y)^2} \\ - \frac{f_{y^3} f_{xy}}{f_x (f_y)^4} - \frac{f_{xy^2} f_{xy}}{(f_x)^2 (f_y)^3} + \frac{f_{x^2y} f_{y^2}}{(f_x)^2 (f_y)^3} + \frac{f_{xy^2} f_{y^2}}{(f_x)^3 (f_y)^2} \\ + 3 \frac{f_{xy} (f_{y^2})^2}{f_x (f_y)^5} - \frac{(f_{xy})^2 f_{x^2}}{(f_x)^4 (f_y)^2} - \frac{f_{x^2} f_{y^2} f_{xy}}{(f_x)^3 (f_y)^3} - \frac{(f_{xy})^2 f_{y^2}}{(f_x)^2 (f_y)^2}. \end{cases} \quad (2)$$

Для следующих производных из (2.11) находим:

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{(b_1)_x}{f_x} + 3b_1 \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \\ b_{22} = \frac{(b_1)_y}{f_y} + 3b_2 \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \\ b_{12} = b^2 + \frac{(b_1)_y}{f_y} + 3b_1 \frac{f_{xy}}{f_x f_y} = -b^2 + \frac{(b_2)_x}{f_x} + 3b_2 \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \end{cases} \quad (3)$$

или, с учетом предыдущих формул,

$$\begin{aligned} b_{11} = & 3(F_{x^2})^2 F_{xy} F_{y^2} + 2F_{x^2} (F_{xy})^2 F_{y^2} + (F_{xy})^3 F_{y^2} - 15(F_{x^2})^3 F_{xy} \\ & + 10(F_{x^2})^2 (F_{xy})^2 - F_{x^2} (F_{xy})^3 - F_{x^3} F_{xy} F_{y^2} - 3F_{x^2} F_{x^2 y} F_{y^2} \\ & - 2F_{x^2 y} F_{xy} F_{y^2} + 10F_{x^2} F_{x^3} F_{xy} + 15(F_{x^2})^2 F_{x^2 y} - 3(F_{x^2})^2 F_{xy^2} \\ & - 3F_{x^3} (F_{xy})^2 - 11F_{x^2} F_{x^2 y} F_{xy} - 2F_{x^2} F_{xy} F_{xy^2} - F_{x^2 y} (F_{xy})^2 \\ & - (F_{xy})^2 F_{xy^2} + F_{x^3 y} F_{y^2} - F_{x^4} F_{xy} - 4F_{x^3} F_{x^2 y} \\ & - 6F_{x^2} F_{x^3 y} + F_{x^3} F_{xy^2} + 3F_{x^3 y} F_{xy} + 3F_{x^2} F_{x^2 y^2} \\ & + 2(F_{x^2 y})^2 + F_{x^2 y} F_{xy^2} + F_{x^4 y} - F_{x^3 y^2}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} b_{12} = & 3F_{x^2} F_{xy} (F_{y^2})^2 + 5(F_{xy})^2 (F_{y^2})^2 - 3F_{x^2} F_{xy} F_{y^2} - (F_{xy})^3 F_{y^2} \\ & - 5(F_{x^2})^2 (F_{xy})^2 - 5F_{x^2} (F_{xy})^3 - F_{x^2} F_{xy} F_{y^3} - (F_{xy})^2 F_{y^3} \\ & - 3F_{x^2 y} (F_{y^2})^2 + F_{x^3} F_{xy} F_{y^2} + 3F_{x^2} F_{x^2 y} F_{y^2} - 3F_{x^2} F_{x^2 y} F_{y^2} \\ & - 7F_{xy} F_{xy^2} F_{y^2} + 3(F_{x^2})^2 F_{xy^2} + F_{x^3} F_{xy} + 7F_{x^2} F_{x^2 y} F_{xy} \\ & - F_{x^2 y} (F_{xy})^2 + (F_{xy})^2 F_{xy^2} + F_{x^2 y} F_{y^3} - F_{x^3 y} F_{y^2} \\ & + 3F_{x^2 y^2} F_{y^2} - F_{x^3} F_{x^2 y} - F_{x^3 y} F_{xy} - 3F_{x^2} F_{x^2 y^2} - 2(F_{x^2 y})^2 \\ & + F_{x^2} F_{xy^3} + F_{xy} F_{xy^3} + 2(F_{xy^2})^2 + F_{x^3 y^2} - F_{x^2 y^3}, \end{aligned} \quad (5)$$

где обозначено $F_{x^p y^q} = \frac{f_{x^p y^q}}{(f_x)^p (f_y)^q}$.

Для следующих производных приведем только рекуррентные соотношения:

$$\begin{cases} b_{111} = \frac{(b_{11})_x}{f_x} + 4b_{11} \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \\ b_{112} = \frac{(b_{11})_y}{f_y} + 4b_{11} \frac{f_{xy}}{f_x f_y} = -5b_1 b + \frac{(b_{12})_x}{f_x} + 4b_{12} \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \\ b_{122} = \frac{(b_{22})_x}{f_x} + 4b_{22} \frac{f_{xy}}{f_x f_y} = 5b_2 b + \frac{(b_{12})_y}{f_y} + 4b_{12} \frac{f_{xy}}{f_x f_y}, \\ b_{222} = \frac{(b_{22})_y}{f_y} + 4b_{22} \frac{f_{xy}}{f_x f_y}. \end{cases} \quad (6)$$

Формулы, выражающие эти ковариантные производные непосредственно через частные производные от f , очень громоздкие, поэтому мы их не приводим (при желании их можно найти в [Го-1]). Там же приведены выражения для сумм $b_{11} + b_{22}$ и $b_{112} - b_{122}$, которые встречаются, например, в (2.127).

Теперь допустим, что на ткани выбрана стандартная параметризация (§ 1.11), и разложение функции f в ряд записано как в [Ш-2] (ср. (1.46)):

$$\begin{aligned}
 f(x, y) = & x + y + axy + \frac{1}{2}\lambda_{21}x^2y + \frac{1}{2}\lambda_{12}xy^2 + \\
 & + \frac{1}{6}\lambda_{31}x^3y + \frac{1}{4}\lambda_{22}x^2y^2 + \frac{1}{6}\lambda_{13}xy^3 + \\
 & + \frac{1}{24}\lambda_{41}x^4y + \frac{1}{12}\lambda_{32}x^3y^2 + \frac{1}{12}\lambda_{23}x^2y^3 + \frac{1}{24}\lambda_{14}xy^4 + \dots
 \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда значения кривизны и ее ковариантных производных в точке $(0, 0)$ вычисляются по формулам (см. [АШ-4], [Ш-1], [Ш-2]):

$$\begin{aligned}
 b &= \lambda_{12} - \lambda_{21}, \\
 b_1 &= \lambda_{22} - \lambda_{31}, b_2 = \lambda_{13} - \lambda_{22}, \\
 b_{11} &= \lambda_{32} - \lambda_{41} - 2\lambda_{12}\lambda_{21} - (\lambda_{21})^2, \\
 b_{21} &= \lambda_{23} - \lambda_{32} - 4b\lambda_{12}, \\
 b_{22} &= \lambda_{14} - \lambda_{23} + 2\lambda_{12}\lambda_{21} + (\lambda_{12})^2.
 \end{aligned} \tag{8}$$

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $A = (A_1, A_2, A_3)$ — автотопия три-ткани или квазигруппы
 \mathbb{A}^n — аффинное пространство размерности n
 Ap^3 — пространство Аппеля гиперболического типа
 b — кривизна три-ткани
 B_ℓ — левая фигура Бола, также класс левых тканей Бола
 B_r — правая фигура Бола, также класс правых тканей Бола
 B_m — средняя фигура Бола, также класс средних тканей Бола
 δ — символ дифференцирования по вторичным параметрам
 E — фигура, определяемая тождеством эластичности, также класс тканей, на которых замыкаются все фигуры E
 e — единица луны (группы)
 G — группа Ли; многообразие прямых проективной плоскости
 $\mathbf{GL}(n)$ — полная линейная группа
 $G(r, n)$ — грассманово многообразие r -мерных подпространств проективного пространства P^n
 GW — грассманова три-ткань
 Γ — связность Черна три-ткани
 $\gamma(W)$ — пучок аффинных связностей, присоединенных к три-ткани W
 H — шестиугольная фигура, также класс шестиугольных три-тканей
 $J = (J_1, J_2, J_3)$ — изотопия три-тканей, квазигрупп
 K^3 — пространство кубической метрики
 $\ell_p, \ell(a, b)$ — координатная луна три-ткани, связанная с точкой $p = (a, b)$
 $\ell(a, b)$ — LP -изотоп квазигруппы
 L_a — левый сдвиг в луне (группе)
 λ_i — i -тое слоение ткани
 M — тождество Муфанг, также класс три-тканей Муфанг
 N^3 — пространство с кубическим абсолютном
 ∇ — оператор ковариантного дифференцирования относительно инвариантной связности, присоединенной к три-ткани
 ∇_δ — оператор ковариантного дифференцирования по вторичным параметрам
 \mathbb{P}^n — проективное пространство размерности n
 Π — три-ткань, образованная семействами параллельных прямых
 $q = (\cdot, X_\alpha)$ — трехбазисная квазигруппа
 $q(\cdot)$ — квазигруппа
 Q — луна, квазигруппа, группоид
 \mathbb{R}^n — евклидово пространство размерности n
 ω — форма связности Черна
 ω_i — базисные формы слоения λ_i три-ткани
 R — фигура Рейдемейстера, также класс групповых три-тканей (тканей R)
 R_a — правый сдвиг в луне (группе)
 T_e — касательное пространство к луне в единице e

T — фигура Томсена, также класс параллелизуемых (регулярных) три-тканей
 $T_p(X)$ — касательное пространство к многообразию X в точке p
 W_0 — три-ткань, образованная тремя пучками прямых
 \wedge — символ внешнего умножения
 $/$ и \backslash — правая и левая обратные операции в квазигруппе

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- А-1. Акивис М.А. *О три-тканях многомерных поверхностей.*//Тр. геом. сем. ВИНТИ АН СССР, М., 1969, т. 2, с. 7–31.
- А-2. Акивис М.А. *О канонических разложениях уравнений локальной аналитической квазигруппы.* //ДАН СССР, 1969, т. 188, N 5, с. 967–970.
- А-3. Акивис М.А. *Об условии алгебраизуемости тройки кривых в трехмерном проективном пространстве.*//В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, с. 129–136.
- А-4. Акивис, М.А. *Конформно-дифференциальная геометрия.*// В книге: Итоги науки. Геометрия 1963. АН СССР, М., 1965, с. 108–137.
- АГо-1. Акивис М.А., Гольдберг В.В. *Differential geometry of web.*// Chapter 1 in Handbook of Differential Geometry, Elsevier Science B. V., Amsterdam, 2000, pp. 1–152.
- АГо-2. Акивис М.А., Гольдберг В.В. *Conformal Differential Geometry and Its Generalizations.* John Wiley&Sons, Inc., New York, 1996, pp. XIV+383.
- АГол-1. Акивис М.А., Гольдберг В.В., Лычагин В.В. *Linearizability of d -webs, $d \geq 4$, on the 2-dimensional manifold.* Preprint, arXiv: math.DG, 0209290, 2002, pp. 21.
- АШ-1. Акивис М.А., Шелехов, А.М. *О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани и ассоциатора связанной с ней локальной квазигруппы.*// Сиб. мат. ж., 1971, т. 12, N 5, с. 953–960.
- АШ-2. Акивис М.А., Шелехов А.М. *О канонических координатах в локальной аналитической лупе.*//В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, с. 120–124.
- АШ-3. Акивис М.А., Шелехов А.М. *Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992, pp. xvii+358.
- АШ-4. Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения.* Тверь, Тверской гос. ун-т, 2010, 307 с.
- Ац-1. Ацел (Aczel, J.). *Quasigroups, nets and nomograms.*//Adv. in Math., 1965, v.1, N 3, p. 383–450.
- Ба-1. Балабанова Р.С. *Шестовзгляньни три-ткани от снопове окръжности, два от които са спрегнати.*// Науч. тр. Пловдив. ун-та, мат., 1973, т. 11, N 4, с. 128–141.
- БФ-1. Балк А.М., Ферапонтов Е.В. *Invariants of wave systems and web geometry.*//In: Nonlinear waves and weak turbulence (ed. V. E. Zakharov). // Amer. Math. Soc. Trans., Ser. 2, vol 182, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 1–30.
- Б-1. Белоусов В.Д. *Основы теории квазигрупп и луп.* М., Наука, 1967, 223 с.

- Б-2. Белоусов, В.Д.: *Алгебраические сети и квазигруппы*. Кишинев, Штиинца, 1971, 165 с.
- БР-1. Белоусов В.Д., Рыжков В.В. *Геометрия тканей*. В книге: Алгебра. Геометрия. Топология, Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР, М., 1972, т. 10, с. 159–188.
- ББл-1. Белоусов В.Д., Белявская Г.Б. *Латинские квадраты, квазигруппы и их приложения*. Кишинев, Штиинца, 1989, 80 с.
- Бл-1. Бляшке В. *Введение в геометрию тканей*. М., Физматгиз, 1959, 144 с. Перевод с немецкого (Blaschke, W.: *Einführung in die Geometrie der Weben*. Birkhäuser-Verlag, Basel-Stuttgart, 1955, 108 pp.)
- ББ-1. Бляшке В., Бол Г. (Blaschke W., Bol G.). *Geometrie der Gewebe*. Springer-Verlag, Berlin, 1938, viii+339 pp.
- Бч-1. Бычек В.М. *О координатных три-тканях на подмногообразиях обобщенного пространства Аппеля*. // Моск. гос. пед. ин-т. М., 1980. Деп. в ВИНТИ АН СССР 13.10.1980, N 4335-80 ДЕП., 34 с.
- Бч-2. Бычек В.М. *О конгруэнциях нормалей поверхности в трехмерном пространстве Аппеля гиперболического типа*. // В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, с. 23–29.
- Бч-3. Бычек В.М. *О многомерном обобщении гиперболического пространства Аппеля и некоторых вопросах его дифференциальной геометрии*. // Изв. вузов. Матем., 1981, N 6, с. 65–68.
- ВЮ-1. Виноградов А.М., Юмагузин В.А. *Дифференциальные инварианты тканей на двумерных многообразиях*. // Матем. заметки, 1990, т. 48, N 1, с. 26–37.
- Г-1. Гейдельман Р.М. *Дифференциальная геометрия семейств подпространств в многомерных однородных пространствах*. // В книге: Итоги науки. Алгебра. Топология. Геометрия 1965. ВИНТИ АН СССР, М., 1967, с. 323–374.
- Го-1. Гольдберг В.В. *On a linearizability condition for a three-web on a two-dimensional manifold*. // Differential Geometry (Peniscola, 1988). Lecture Notes in Math., v. 1410. Springer-Verlag, Berlin/New York, 1989, p. 223–239.
- Го-2. Гольдберг В.В. *Curvilinear 4-webs with equal curvature forms of its 3-subwebs*. // In: Webs and Quasigroups, Tver, Tver State University, 1993, p. 9–19.
- Го-3. Гольдберг В.В. *Special classes of curvilinear 4-webs with equal curvature forms of their 3-subwebs*. // In: Webs and Quasigroups, Tver, Tver State University, 1996–1997, p. 24–39.
- Го-4. Гольдберг В.В. *Four-webs in the plane and their linearizability*. // Acta Appl. Math., 2004, v. 80, N 1, p. 35–55.
- ГоЛ-1. Гольдберг В.В., Лычагин В.В. *On the Blaschke conjecture for 3-webs*. // arXiv:math.DG, 0411460, v. 1, n. 21, Nov 2004, pp. 51.
- ГоЛ-2. Гольдберг В.В., Лычагин В.В. *On the Blaschke conjecture for 3-webs*. // The Journal of Geometric Analysis, 2006, v. 16, N 1, p. 69–115.
- ГоЛ-3. Гольдберг В.В., Лычагин В.В. *Geodesic Webs on a Two-Dimensional Manifold and Euler Equations*. // Acta Appl. Math., 2010, v. 109, p. 5–17.

- Д-1. Драгунов В.К. *О координатной три-ткани на поверхности в пространстве кубической метрики.* // В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, с. 86–93.
- Д-2. Драгунов В.К. *О семействе кубических сфер, соприкасающихся с кубической поверхностью в пространстве кубической метрики K^3 .* // В книге: Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, с. 133–139.
- Д-3. Драгунов В.К. *О существовании координатной три-ткани Дарбу на поверхности в пространстве K^3 .* // В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, с. 29–36.
- ДД-2. Дюфур Ж., Джейн П. (Dufour J.P., Jean P.). *Rigidity of webs and families of hypersurfaces.* // Singularities and Dynamical Systems (Iraklion, 1983), North-Holland Math. Stud., 103, North-Holland, Amsterdam/New York, 1985, p. 271–283.
- Дю-1. Дюфур Ж. (Dufour J. P.). *Introduction aux tissus.* // Semin. Gaston Darboux Geom. Topologie Differ. 1990–1991, 1992, p. 55–76.
- Дю-2. Дюфур Ж. (Dufour J. P.). *Rigidity of webs.* // In: Web theory and related topics, World Scientific, Singapore, 2001, p. 106–113.
- Кр-1. Картан Э. *Пространства аффинной, проективной и конформной связности.* Казань, КГУ, 1962, 210 с.
- Кр-2. Картан Э. *Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения.* Москва, МГУ, 1962, 237 с.
- Л-1. Лазарева В.Б. *Три-ткани, образованные семействами окружностей на плоскости.* // В книге: Дифференциальная геометрия, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1977, с. 49–64.
- Л-2. Лазарева В.Б. *Три-ткани на двумерной поверхности в триаксиальном пространстве.* // В книге: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Калининград, Калининградский гос. ун-т, 1979, N 10, с. 54–79.
- Л-3. Лазарева В.Б. *О три-тканях, порожденных тремя g -плоскостями в проективном пространстве размерности $2g + 1$.* // В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1981, с. 56–68.
- Л-4. Лазарева В.Б. *Об одном классе многомерных параллелизуемых три-тканей.* // Материалы 5 конф. молодых ученых УДН. Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы., М., 1982, с. 47–50. Деп. в ВИНТИ 15.07 1982, N 3814-82 Деп.
- Л-5. Лазарева В.Б. *О три-ткани Дарбу на поверхности в триаксиальном пространстве.* // В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1982, с. 45–55.
- Л-6. Лазарева В.Б. *Об одном классе поверхностей, несущих сеть кривых второго порядка.* // Материалы 6 конф. молодых ученых УДН. Ун-т дружбы народов им. П. Лумумбы., М., 1983, с. 104–107. Деп. в ВИНТИ 5.03 1984, N 1316-84 Деп.
- Л-7. Лазарева В.Б. *О соприкасающихся гомографиях точечного соответствия трех прямых.* // В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1984, с. 70–76.

- Л-8. Лазарева В.Б. *О гомографиях Годо в трехмерном проективном пространстве.*//В книге: Проблемы теории тканей и квазигрупп, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1985, с. 84–89.
- Л-9. Лазарева В.Б. *К геометрии n -аксиального пространства.*//В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, с. 68–75.
- Л-10. Лазарева В.Б. *Параллелизуемые три-ткани, образованные пучками окружностей.*//В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, с. 74–77.
- Л-11. Лазарева В.Б. *Three-axial geometry and its multidimensional analogues.*//In: Diff. Geom. and Appl. Proc. of Conf., Dubrovnik, June 26–July 3, 1988. Univ. Novi Sad, Novi Sad, 1989, p. 141–144.
- Л-12. Лазарева В.Б. *On some five-dimensional Moufang loops.*//In: Geometry, Proc. 3rd Congr., Thessaloniki/Greece 1991, 1992, p. 376–384.
- Л-13. Лазарева В.Б. *Three-webs on cubic surfaces.*//In: Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1996–1997, p. 101–126.
[2]
- Л-14. Лазарева В.Б. *Классификация регулярных круговых три-тканей с точностью до круговых преобразований.*//Фундаментальная и прикладная математика. - 2010. - Том 16, выпуск 1. - с. 95Ц107.
- ЛО-1. Лазарева В.Б., Орлова О.В. *Об одном классе шестиугольных три-тканей, образованных пучками окружностей.* //В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, с. 115–119.
- ЛШ-1. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *О геометрической интерпретации инвариантного оснащения точечного соответствия трех прямых.*// Изв. вузов. Матем., 1984, N 9, с. 43–47.
- ЛШ-2. Лазарева В.Б., Шелехов, А.М. *Примеры G -тканей размерности 4, 6, 8, 10 с различными касательными алгебрами.*// Деп.в ВИНТИ, 26.07.1989, N 5030-B89, 11 с.
- ЛШ-3. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *An addition to the problem of analytic G -loops.* //В книге: Квазигруппы и неассоциативные алгебры в физике, Тарту, 1990, с. 89–97.
- ЛШ-4. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *Around a Blaschke problem in the web theory.*//In: Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1996–1997, p. 65–73.
- ЛШ-5. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *Three-webs formed by pencils of conics.* //In: Webs and quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2000, p. 63–76.
- ЛШ-6. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *Hexagonal three-webs formed by conics.*//In: Rendiconti del seminario matematico di Messina/Atti del Congresso Internazionale in onore di Pasquale Calapso, Messina 12–14 ott., 1998. Palermo, 2000, p. 241–252.
- ЛШ-7. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *An example of hexagonal but non-parallelizable four-web formed by 4 pencils of spheres.* //In: Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 2002, p. 49–52.
- ЛШ-8. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *Конфигурации и ткани, порождаемые пучками сфер.* //В книге: Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Чебоксары, изд. ЧГУУ, 2006, с. 87–95.

- ЛШ-9. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *О триангуляциях плоскости пучками коник.* // Матем. сб., 2007, т. **198**, N 11, с. 107–134.
- ЛШ-10. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *К проблеме классификации регулярных 4-тканей, образованных пучками сфер.* // Изв. вузов. Матем., 2007, N 12, с. 70–76.
- ЛШ-11. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *Теоремы о границах криволинейной три-ткани и их приложение к проблеме триангуляции плоскости пучками кривых второго порядка.* // Тезисы международной конференции «Геометрия в Одессе-2008», Наука, Одесса, 2008, с. 97.
- ЛШ-12. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *О триангуляциях плоскости пучками кривых второго порядка.* // Тверской гос. ун-т, Тверь, 2009. Деп. В ВИНТИ 21.01.09, N 25-В2009, 63 с.
- ЛШ-13. Лазарева В.Б., Шелехов А.М. *О представлениях регулярной криволинейной три-ткани.* // В книге: Математика, информатика, их приложения и роль в образовании. Материалы второй Всероссийской школы-конференции с международным участием для молодых ученых, Тверь, 2010. Тверь, ТвГУ, 2011, с. 201–207.
- ЛШУ-1. Лазарева В.Б., Уткин А.А., Шелехов А.М. *К теории криволинейных три-тканей.* // В книге: Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 124, М., ВИНТИ, 2010, с. 63–114.
- Ла-1. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей.* // В книге: Итоги науки. Геометрия 1963. М., Ин-т научной информации АН СССР, 1965, с. 5–64.
- На-1. Накай И. (Nakai I.). *Topology of complex webs of codimension one and geometry of projective space curves.* // Topology, 1987, v. **26**, p. 475–504.
- На-2. Накай И. (Nakai I.) *Curvature of curvilinear 4-webs and pencils of one forms.* // In: Topology of holomorphic dynamical systems and related topics (Kyoto, 1995), Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku N 955 (1996), N 8, p. 109–132.
- На-3. Накай И. (Nakai I.). *Curvature of curvilinear 4-webs and pencils of one forms: Variation on the theme a theorem of Poincaré, Mayrhofer and Reidemeister on curvilinear 4-webs.* // Comment. Math. Helv., 1998, v. **73**, p. 177–205.
- Пи-1. Пирио Л. (Pirio Luc.). *Sur la linéarization des tissus.* // L'Enseignement Mathématique (2), 2009, 55, p. 285–328.
- П-1. Понселе Ж. (Poncelet J.V.). *Analyse des transversales.* // Journ. fur reine u. ang. Math., 1832, 8, 21–41, 117–137, 213–252, 370–410.
- По-1. Постников М.М. *Лекции по геометрии, V. Группы Ли и алгебры Ли.* М., Наука, 1982, 447 с.
- Р-1. Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства.* М., Наука, 1966, 647 с.
- Ст-1. Стернберг Ш. (Sternberg S.). *On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space II.* // Am. J. of Math., 1958, v. 80, p. 623–631.
- Тм-1. Томсен Г. (Thomsen G.). *Un teoreme topologico sulle schiere di curve e una caratterizzazione geometrica delle superficie isoterme-asintotiche.* // Boll. Un. Mat. Ital. Bologna 1927, v. **6**, p. 80–85.

- У-1. Уткин А.А. *О три-ткани, определяемой на поверхности норм-кривой.* //В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, с. 71–77.
- У-2. Уткин А.А. *О существовании координатной три-ткани Дарбу на гладкой поверхности в пространстве N^3 .* //В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, с. 113–119.
- У-3. Уткин А.А. *О соприкасающихся кубических сферах поверхности пространства N^3 .* //В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1988, с. 51–58.
- У-4. Уткин А.А. *О геометрическом условии принадлежности тройки кривых трехмерного пространства одной норм-кривой.* //Изв. вузов. Матем., 1989, N 5, с. 82–84.
- У-5. Уткин А.А. *On connections determined by a normal cubic on a smooth surface.* //In: Webs and Quasigroups, 1992, Tver, Tver State Univ., p. 97–105.
- У-6. Уткин А.А. *On some geometric sign of algebraizability criterion for a triple of curves.* //In: Webs and Quasigroups, Tver, Tver State Univ., 1995, p. 135–138.
- УШ-1. Уткин А.А., Шелехов М.А. *К геометрии гладкой поверхности пространства N^3 .* //В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, с. 120–128.
- УШ-2. Уткин А.А., Шелехов М.А. *On local classification of curvilinear three-webs.* //In: Webs and quasigroups, Tver State Univ., 1998–1999, p. 76–85.
- УШ-3. Уткин А.А., Шелехов М.А. *О три-тканях, определяемых линейным дифференциальным уравнением первого порядка.* // Изв. вузов. Матем., 2001, N 11, с. 4–57.
- УШ-4. Уткин А.А., Шелехов М.А. *Три-ткани, определяемые уравнением Риккати.* // Изв. Вузов. Матем., 2004, N 11(510), с. 87–90.
- Фе-1. Ферапонтов Е.В. *Слабо нелинейные полугамильтоновы системы дифференциальных уравнений с точки зрения теории тканей.* // Уч. зап. Таргусского ун-та, 1988, т. **803**, с. 103–114.
- Фе-2. Ферапонтов Е.В. *Системы трех дифференциальных уравнений гидродинамического типа с шестиугольной три-тканью из характеристик на решениях.* // Функциональный анализ и его приложения, 1989, т. **23**, N 2, с. 79–80.
- Фе-3. Ферапонтов Е.В. *Интегрирование слабо нелинейных полугамильтоновых систем гидродинамического типа методами теории тканей.* // Мат. сб., 1990, т. **181**, N 9, с. 1220–1235.
- Фе-4. Ферапонтов Е.В. *Уравнения гидродинамического типа с точки зрения теории тканей.* //Мат. заметки, 1991, т. **50**, N 5, с. 97–108.
- Фе-5. Ферапонтов Е.В. *Web Gemetry and Mathematical Physics.* // In: Akivis, M.A.; Shelekhov, A.M. *Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992, pp. 310–323.
- Хе-1. Хено А. (Heñaut A.). *Caractérisation des tissus de C^2 dont le rang est maximal et qui sont linéarisables.* //Compositio Math., 1994, v. **94**, p. 247–268.

- Хе-2. Хено А. (Heñaut A.). *On planar web geometry through abelian relations and connections.* //Annals of Mathematics, 2004, v. **159**, p. 425–445.
- Ча-1. Чакмазян А.В. *О геодезических три-тканях на двумерном многообразии аффинной связности.* // ДАН Арм. ССР, 1974, т. **59**, с. 136–140.
- Ш-1. Шелехов А.М. *О вычислении ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани.* //В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1986, с. 96–103.
- Ш-2. Шелехов А.М. *Вычисление вторых ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани.* //В книге: Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1990, с. 49–55.
- Ш-3. Шелехов А.М. *Криволинейные три-ткани, допускающие однопараметрическое семейство автоморфизмов.* // Изв. вузов. Матем., 2005, N 5(516), с. 68–70.
- Ш-4. Шелехов А.М. *Дифференциально-геометрические объекты высших порядков многомерной три-ткани.* //В книге: Проблемы геометрии. Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР, 1987, т. **19**, с. 101–154.
- Ш-5. Шелехов А.М. *Классификация многомерных три-тканей по условиям замыкания.* //В книге: Проблемы геометрии. Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР, 1989, т. **21**, с. 109–154.
- Ш-6. Шелехов А.М. *О три-тканях, образованных пучками окружностей.* //В книге: Итоги науки и техники ВИНТИ. Современная математика и ее приложения, 2005, т. **32**, с. 7–28.
- Ш-7. Шелехов А. М. *Некоторые топологические вопросы теории тканей.* //Proc. Intern. Geom. Center, 2009, v. **2**, N 3, p. 75–92.
- Ш-8. Шелехов А.М. *Решение проблемы Гронвелла об эквивалентности грассмановых тканей.* // Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.К. Белинского, серия физико-математических и технических наук, т. **26**, с. 311–320.
- Ш-9. Шелехов А.М. *Три-ткани, образованные семействами окружностей.* //Proc. Intern. Geom. Center, 2012, v. **5**, N 2, p. 6–16.
- Ш-10. Шелехов А.М. *Проблема регулярности для криволинейных тканей и задача о композиции гладких функций.* Тезисы международной конференции "Геометрия в Одессе-2012". Наука, Одесса, 2012, с. 83.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- C*-ткань, 108
- LP*-изотоп, 25

- Дарбу
 - квадрака, 109
 - отображение, 109

- абсолют, 185, 186
- автоморфизм
 - аффинной связности, 84
 - три-ткани, 82
- автотопия
 - квазигруппы, 25
 - три-ткани, 82
- асимптотическая форма поверхности, 188
- аффинная связность, 65
 - Черна, 65

- геодезическая линия, 97, 98
- главный изотоп квазигруппы, 25
- граница, 11
 - второго рода, 13, 14, 18, 22
 - непараболическая, 23
 - параболическая, 13, 18
 - — второго рода, 13, 14
 - — первого рода, 13, 14
 - — третьего рода, 13
 - первого рода, 12, 14, 18, 22
 - третьего рода, 12, 13
- граница три-ткани, 11
- граничная кривая, 11, 12, 22, 23
- группа, 23
 - автоморфизмов три-ткани, 83
 - — транзитивная, 83
 - автотопий три-ткани, 83

- группоид, 23

- дифференциальные инварианты три-ткани
 - абсолютные, 68
 - относительные, 66

- единица лупы, 25

- изоморфизм, 24
- изотопия, 24
 - главная, 24, 25, 27
 - квазигрупп, 24
 - регулярная, 24
- инвариантные производные, 102
- инвариантные формы три-ткани, 102

- каноническая гладкая структура, 57
- каноническое разложение, 57
- квазигруппа, 23, 24
 - координатная три-ткани, 26, 27
 - локальная, 25
 - однобазисная, 24
 - трехбазисная, 24
- кватернион, 24
- ковариантные производные кривизны три-ткани, 65
- конфигурация (фигура)
 - E , 29
 - Бола
 - — левая (B_ℓ), 29
 - — правая (B_r), 29
 - — средняя (B_m), 29
 - Паскаля (P), 42

- Рейдемейстера (R), 29
- Томсена (T), 29
- координатная R , 32
- координатная T , 32
- полукоординатная B_ℓ , 50
- полукоординатная T , 49
- шестиугольная (H), 28
- координатизация, 34
- три-ткани, 26
- координаты
- канонические, 55
- тангенциальные, 38
- корепер, 67
- адаптированный три-ткани, 68
- — канонический, 68
- — натуральный, 68
- корреляция, 43
- кривая класса 1, 37
- кривая класса 2, 38
- кривая класса 3, 38
- кривая класса n , 37, 38
- кривизна три-ткани, 65

- линеаризация, 21
- линия тени, 189
- локальный диффеоморфизм, 14, 15
- лупа, 23–25
- Муфанг, 28
- альтернативная, 28
- коммутативная, 28
- координатная три-ткани, 27
- левая Бола, 28
- левоальтернативная, 28
- локальная, 25, 26
- моноассоциативная, 28
- неассоциативная, 24
- обратимая, 60
- правая Бола, 28
- правоальтернативная, 28
- средняя Бола, 53
- эластичная, 28

- многообразие
- грассманоно, 41
- луп, 27, 45

- — инвариантное относительно изотопии, 45
- номограмма, 44
- из выравненных точек, 44
- номография, 44

- октава, 24
- основные классы три-тканей, 69
- отношение инцидентности, 46
- охват геометрического объекта, 91

- параболические точки границы, 13
- параметр
- вторичный, 67
- главный, 67
- параметризация стандартная, 55
- парастроф, 26
- парастрофия, 26
- плоскость конформная, 110
- проблема
- Гронвола, 45, 96
- грассманизуемости, 45
- линеаризуемости, 45
- спрямляемости, 45
- пространство
- кубической метрики, 203
- Аппеля гиперболического типа, 186
- аффинно-проективное, 185
- проективное, 185
- с кубическим абсолютотом, 195
- триаксиальное, 191
- пучок коник, 144
- гиперболический (H -пучок), 144
- дважды параболический (WP -пучок), 144
- параболический
- — гиперболического типа (PH -пучок), 144
- — эллиптического типа (PE -пучок), 144
- параболический (P -пучок), 144
- полуэллиптический (HE -пучок), 144
- сверхпараболический (UP -пучок), 144

- сильнопараболический (SP -пучок), 144
- эллиптический (E -пучок), 144
- пучок окружностей, 17
- гиперболический, 17
- параболический, 17
- эллиптический, 16

- репер
 - аффинный, 186
 - подвижной, 87
 - — адаптированный, 87
 - проективный, 87

- система
 - вполне интегрируемая, 94
 - правильно продолжаемая, 90
 - уравнений Пфаффа, 94
- слоение, 10
- сложное отношение, 186
- сопряженная сеть, 189

- теорема
 - Алберта, 45
 - Графа–Зауэра, 40
 - Графа–Зауэра двойственная, 43
 - Кэнигса, 189
 - Паскаля, 44
 - Паскаля обобщенная, 44
 - Паскаля–Паппа, 44
 - Фробениуса, 94
 - Шаля, 39
 - о границах, 22
 - о линеаризации, 21
 - основная о тканях H , 34
- тождество
 - B_m , 52
 - T , 49
 - Бола
 - — левое, 28
 - — правое, 28
 - Муфанг, 28
 - ассоциативности, 28
 - левой альтернативности, 28
 - моноассоциативности, 28
 - порядка 3, 63
 - порядка 4, 63
 - правой альтернативности, 28
 - производное, 54
 - универсальное, 45
 - условное, 28
 - эластичности, 28
 - тождество ассоциативности, 27
 - тождество коммутативности, 27
 - точки Лагерра, 176
 - трансверсальность, 11
 - трехвершинник, 186
 - три-ткани
 - допустимые преобразования, 66
 - структурные уравнения, 65
 - форма связности, 65
 - эквивалентные, 14–16, 68
 - три-ткань, 11
 - параболического типа, 123
 - Бола левая, B_ℓ , 30
 - Бола правая, B_r , 30
 - Бола средняя, B_m , 30
 - Бурау, 142
 - Муфанг, 31
 - Рейдемейстера, R , 30
 - Томсена, T , 30
 - грассманова, 84, 87
 - грассманова GW , 41
 - координатная, 189
 - круговая, 108
 - параллелизуемая, 16
 - параллельная, 13, 16, 26
 - перспективно эквивалентная, 142
 - полная, 26, 46
 - прямолинейная, 37
 - регулярная, 16, 19, 22, 23
 - спрямляемая, 96
 - шестиугольная, H , 30
 - эластичная, E , 30
 - триангуляция, 35, 37, 141

 - узел
 - бипланарный, 146
 - конический, 146
 - унипланарный, 146
 - уравнение
 - Абеля, 72
 - — обобщенное, 72

- Риккати, 72, 78
- дифференциальное
 - — первого порядка, 74
 - три-ткани, 11, 15
- уравнения
 - движения репера, 88
 - деривационные, 88
 - инфинитезимальных перемещений репера, 88
 - структуры проективного пространства, 88
- условие
 - Сен-Робера, 19
 - алгебраизуемости, 44
 - линеаризации второе, 22
 - линеаризации первое, 22
- условия
 - стационарности, 197, 205, 210
- форма кривизны, 99
- функция три-ткани, 12

Научное издание

ШЕЛЕХОВ Александр Михайлович
ЛАЗАРЕВА Валентина Борисовна
УТКИН Алексей Алексеевич

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ТРИ-ТКАНИ

Оригинал-макет: А.Е. Алексеева

Подписано в печать 14.01.2013. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,4. Уч.-изд. л. 15,2. Тираж 300 экз.
Заказ N 2318к

Тверской государственный университет
170100, Тверь, ул. Желябова, 33

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП "Типография "Наука"
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6