

И. А. ДРОЖЖИН

**АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

ТВЕРЬ 2014

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тверской государственный университет»

И. А. ДРОЖЖИН

АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Монография

ТВЕРЬ 2014

УДК 517.518.8

ББК В161.547

Д75

Научный редактор

кандидат физико-математических наук, профессор

Н. Б. Тихомиров

Дрожжин И. А.

Д75 Аппроксимация непрерывных функций с ограничениями:
монография. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2014. – 87 с.

ISBN 978–5–7609–0965–7

Монография посвящена экстремальным задачам теории приближений в пространстве непрерывных функций при аппроксимации элементами конуса, натянутого на конечное число образующих. В терминах расширенного конуса, чебышевского альтернанса с использованием понятия правого знака конуса, приводятся критерии элемента наилучшего приближения с ограничениями и условия его единственности для любой непрерывной функции.

Монографии предназначена для студентов старших курсов и аспирантов математических специальностей университетов, она будет полезна научным работникам в области теоретической и прикладной математики.

УДК 517.518.8

ББК В161.547

© Дрожжин И. А., 2014

© Тверской государственный
университет, 2014

ISBN 978–5–7609–0965–7

Оглавление

Введение	4
Глава 1.	
Наилучшие приближения непрерывных функций элементами конечномерного конуса	6
§1. Основные понятия	6
§2. Критерии элемента наилучшего приближения. Аналог теоремы Колмогорова	16
§3. Системы Чебышева	23
§4. Необходимые и достаточные условия элемента наилучшего приближения в терминах чебышевского альтернанса	31
§5. Конусы Хаара. Критерий элемента наилучшего приближения ..	43
§6. Единственность элемента наилучшего приближения	50
Глава 2.	
Наилучшие приближения непрерывных функций элементами конуса конечной размерности с ограничениями	54
§1. Постановка задачи. Основные понятия	54
§2. Наилучшие односторонние приближения непрерывных функций	61
§3. Наилучшие приближения с ограничениями для квазичебышевских конусов	66
§4. Единственность элемента наилучшего приближения с ограничениями для конусов Чебышева и Хаара	80
Список литературы	86

Введение

Достаточно часто при решении практических и теоретических задач встает необходимость аппроксимации заданной функции элементами более простой природы. В классической теории приближений непрерывные функции аппроксимируют элементами некоторого конечномерного подпространства. Конечная размерность подпространства обеспечивает существование элемента наилучшего приближения для любой непрерывной функции. На вопрос о единственности элемента наилучшего приближения для любой функции отвечает теорема А. Хаара, а характеристику элемента наилучшего приближения осуществляют теоремы типа теорем П. Л. Чебышева.

Переход от изучения приближений непрерывных функций элементами некоторого подпространства к вопросу аппроксимации функций элементами конуса целиком находится в русле одного из движений в современной математике, заключающимся в переходе от исследования объектов, определяемых равенствами, к исследованию объектов определяемых неравенствами.

В связи с этим встает задача получения аналогов классических теорем теории приближения в случае аппроксимации непрерывных функций элементами конечномерного конуса с возможными дополнительными ограничениями.

В первой главе рассматривается задача наилучшего равномерного приближения непрерывных на метрическом компакте функций элементами конуса с конечным числом образующих. Так как в этом случае конус является замкнутым локально компактным множеством, то элемент наилучшего приближения существует для любой непрерывной функции, а множество элементов наилучшего приближения выпукло.

В терминах чебышевского альтернанса приводятся необходимые и достаточные условия наилучшего приближения для квазичебышевских конусов, для конусов Хаара с использованием понятий расширенного конуса и правого знака конуса.

С помощью полученных характеристических признаков наилучшего приближения непрерывных на отрезке функций доказывается единственность элемента наилучшего приближения для конусов Чебышева и Хаара.

Во второй главе рассматривается задача наилучшего равномерного приближения непрерывных на отрезке функций при аппроксимации элементами конуса конечной размерности, не превышающими некоторой заданной функции.

В случае аппроксимации элементами чебышевского подпространства В. В. Каминским получены характеристические признаки и условия единственности элемента наилучшего приближения с указанными ограничениями.

В монографии приводятся аналоги теорем В. В. Каминского для квазичебышевских конусов, конусов Хаара и, в частности, критерии наилучшего одностороннего приближения непрерывных на отрезке функций.

Глава 1. Наилучшие приближения непрерывных функций элементами конечномерного конуса

1. Основные понятия

Пусть T — метрический компакт, $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций с чебышевской метрикой, которое упорядочено естественным образом.

Непустое выпуклое множество $H \subset C(T)$ называется конусом, если для любого $h \in H$ и произвольного числа $c \geq 0$ будет $ch \in H$.

Нетрудно видеть, что любой конус замкнут относительно операций сложения и умножения на неотрицательное число.

Под задачей наилучшего приближения функции $f \in C(T)$ элементами конуса $H \subset C(T)$ в метрике $C(T)$ будем понимать задачу отыскания величины

$$E(f, H) = \inf\{\|f - h\| : h \in H\}.$$

Число $E(f, H)$ назовем величиной наилучшего приближения функции f элементами конуса H , а элемент $h \in H$, для которого

$$E(f, H) = \|f - h\|,$$

будем называть элементом наилучшего приближения (э.н.п.) функции f в H .

Геометрически наилучшее приближение функции f трактуется как ее расстояние до множества H , а элемент наилучшего приближения — как точка конуса H , ближайшая к f .

Отметим, что любое подпространство $H \subset C(T)$ является конусом. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только правильные конусы, т.е. те конусы, которые не являются подпространствами пространства $C(T)$.

Пусть система непрерывных на T функций $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ — линейно независима, m — неотрицательное целое число. Будем считать, что конус H имеет вид

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, k = 1, 2, \dots, n, \alpha_j \geq 0, j > m \right\}.$$

Функции $h_1, h_2, \dots, h_n$ назовем образующими конуса H .

Отметим, что конус H является замкнутым множеством.

Предложение 1.1.1. *Величина наилучшего приближения*

$$E(f, H) = 0$$

тогда и только тогда, когда функция f принадлежит конусу H .

Доказательство. Действительно, если $f \in H$, то по определению величины наилучшего приближения число $E(f, H) = 0$.

Сдругой стороны, если величина $E(f, H) = 0$, то по определению нижней грани числового множества для каждого натурального k найдем $\varphi_k \in H$ такой, что

$$\|f - \varphi_k\| < \frac{1}{k}. \quad (*)$$

Переходя к пределу в неравенстве (*) при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = f.$$

В силу замкнутости конуса функция f принадлежит H .

Теорема 1.1.1. *Для любой функции $f \in C(T)$ в конусе H существует элемент наилучшего приближения .*

Доказательство. Пусть $f \in C(T)$. По определению нижней грани для каждого натурального k найдем $\varphi_k \in H$ такой, что

$$\|f - \varphi_k\| < E(f, H) + \frac{1}{k}. \quad (1)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \|\varphi_k\| &= \|\varphi_k - f + f\| \leq \|\varphi_k - f\| + \|f\| < E(f, H) + \frac{1}{k} + \|f\| \leq \\ &\leq E(f, H) + 1 + \|f\| \end{aligned}$$

для любого $k \in N$. Последнее означает ограниченность последовательности $\{\varphi_k\}$. Так как конус H есть локально компактное множество в $C(T)$, то из данной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, причем ее предел принадлежит H в силу замкнутости конуса. Можно считать, что последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится. Положим

$$h_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k.$$

Переходя к пределу в неравенстве (1) при $k \rightarrow \infty$, получим

$$\|f - h_0\| \leq E(f; H).$$

Поэтому $\|f - h_0\| = E(f; H)$ и h_0 есть элемент наилучшего приближения функции f в конусе H . Теорема доказана.

Теорема 1.1.2. Для любой функции $f \in C(T)$ множество элементов наилучшего приближения выпукло.

Доказательство. Пусть $f \in C(T)$ и $\varphi, \psi \in H$ суть э.н.п. функции f элементами конуса H . Рассмотрим функцию $\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi \in H$, $\lambda \in [0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} E(f; H) &\leq \|f - (\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi)\| = \|\lambda(f - \varphi) + (1-\lambda)(f - \psi)\| \leq \\ &\leq \lambda\|f - \varphi\| + (1-\lambda)\|f - \psi\| = E(f; H). \end{aligned}$$

Следовательно, $E(f; H) = \|f - (\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi)\|$ и $\lambda\varphi + (1-\lambda)\psi$ есть э.н.п. функции f . Теорема доказана.

Отметим теперь простейшие свойства наилучшего приближения и э.н.п. при аппроксимации непрерывных функций элементами конуса, натянутого на конечное число образующих.

1⁰ Величина $E(f; H) \leq \|f\|$, т.к. в качестве приближающего элемента в конусе H можно рассмотреть нулевой элемент.

2⁰ Если $h_0 \in H$ есть э.н.п. функции f , то для любого $c \geq 0$ элемент ch_0 является э.н.п. функции cf в конусе H , причем

$$cE(f; H) = E(cf; H).$$

Действительно, при $c = 0$ свойство очевидно. Пусть $c > 0$. Обозначим соответственно h_0 и ψ — элементы наилучшего приближения функций f и cf в H . Из неравенств

$$\begin{aligned} E(f; H) &= \|f - h_0\| = \frac{1}{c}\|cf - ch_0\| \geq \frac{1}{c}E(cf; H), \\ E(cf; H) &= \|cf - \psi\| = c\|f - \frac{\psi}{c}\| \geq cE(f; H) \end{aligned}$$

следует, что $cE(f; H) = E(cf; H)$. Из равенств

$$cE(f; H) = c\|f - h_0\| = \|cf - ch_0\| = E(cf; H)$$

получаем, что элемент ch_0 — э.н.п. функции cf в конусе H .

3⁰ Для любой функции $f \in C(T)$ и произвольного $\psi \in H$ справедливы неравенства

$$E(f + \psi; H) \leq E(f; H) \leq E(f - \psi; H). \quad (2)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} E(f; H) &= \|f - h_0\| = \|f + \psi - (h_0 + \psi)\| \geq E(f + \psi; H), \\ E(f - \psi; H) &= \|f - \psi - h\| = \|f - (\psi + h)\| \geq E(f; H), \end{aligned}$$

где h_0 и h суть элементы наилучшего приближения соответственно функций f и $f - \psi$ и неравенства (2) доказаны.

Ясно, что если $\psi, -\psi \in H$, то

$$E(f + \psi; H) = E(f; H) = E(f - \psi; H).$$

Если $\psi \in H$ — э.н.п. функции f , то $E(f; H) = E(f - \psi; H)$, т.к.

$$E(f - \psi; H) \leq \|f - \psi\| = E(f; H) \leq E(f - \psi; H).$$

Приведем пример показывающий, что в неравенствах (2) может иметь место и знак строгого неравенства.

Пусть $T = [0; 1]$, функции $h_1(x) = 1$, $h_2(x) = x$, $h_3(x) = x^2$, $x \in [0; 1]$ являются образующими конуса

$$H = \{h : h = \alpha h_1 + \beta h_2 + \gamma h_3, \alpha, \beta, \gamma \geq 0\}.$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x - 1$, $x \in [0; 1]$ и элемент $\psi = 1$. Нетрудно видеть справедливость следующих соотношений

$$0 = E(f + \psi; H) < E(f; H) = 1 < E(f - \psi; H) = 2.$$

4⁰ Для любых функций $f, g \in C(T)$ верно неравенство

$$E(f + g; H) \leq E(f; H) + E(g; H).$$

Приведем доказательство данного свойства. Обозначим через φ и ψ соответственно элементы наилучшего приближения функций f и g в конусе H . Тогда

$$\begin{aligned} E(f + g; H) &\leq \|f + g - (\varphi + \psi)\| = \|(f - \varphi) + (g - \psi)\| \leq \\ &\leq \|f - \varphi\| + \|g - \psi\| = E(f; H) + E(g; H). \end{aligned}$$

5⁰ Для любых функций $f, g \in C(T)$ верно неравенство

$$|E(f; H) - E(g; H)| \leq \|f - g\|.$$

Из свойств 1^0 , 4^0 имеем

$$\begin{aligned} E(f; H) &\leq E(f - g; H) + E(g; H) \leq \|f - g\| + E(g; H), \\ E(g; H) &\leq E(g - f; H) + E(f; H) \leq \|f - g\| + E(f; H). \end{aligned}$$

Из этих неравенств следует справедливость свойства 5^0 .

6^0 Если $\varphi, \psi \in H$ соответственно являются э.н.п. функций f и g , то элемент $\varphi + \psi$, вообще говоря, не есть э.н.п. функции $f + g$.

Для доказательства этого утверждения достаточно привести пример. Пусть конус $H = \{h : h = ah_1 + bh_2, a \in R, b \geq 0\} \subset C[0; 1]$ натянут на образующие $h_1(x) = 1, h_2(x) = x, x \in [0; 1]$. Каждый элемент $h \in H$ является возрастающей функцией на $[0; 1]$. Положим

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} -1 + 4x, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,5, \\ 3 - 4x, & \text{если } 0,5 \leq x \leq 1, \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,25, \\ 3 - 8x, & \text{если } 0,25 \leq x \leq 0,5, \\ -5 + 8x, & \text{если } 0,5 \leq x \leq 0,75, \\ 1, & \text{если } 0,75 \leq x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 4x, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,25, \\ 2 - 4x, & \text{если } 0,25 \leq x \leq 0,5, \\ -2 + 4x, & \text{если } 0,5 \leq x \leq 0,75, \\ 4 - 4x, & \text{если } 0,75 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что нулевой элемент $\Theta \in H$ есть э.н.п. функций f и g . Однако, элемент $h = \frac{1}{2}$ является э.н.п. функции $f + g$ в конусе H .

7^0 Пусть даны последовательности $\{f_n\}$ функций из $C(T)$ и $\{\psi_n\}$ элементов из H , причем ψ_n — э.н.п. функции f_n для каждого $n \in N$. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n; H) = E(f; H),$$

при этом в случае единственности э.н.п. ψ для функции f в H имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi.$$

Докажем это свойство. Соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n; H) = E(f; H)$$

следует из свойства 5⁰. Так как оследовательности $\{\|f_n - f\|\}$ и $\{E(f_n; H)\}$ являются сходящимися, то они ограничены. Пусть

$$E(f_n; H) \leq c_1, \quad \|f_n - f\| \leq c_2,$$

для любого $n \in N$. Тогда

$$\|\psi_n\| \leq \|\psi_n - f_n\| + \|f_n - f\| + \|f\| \leq c_1 + c_2 + \|f\|.$$

Из ограниченности этой последовательности следует, что она содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть подпоследовательность $\{\psi_{n_k}\}$ сходится и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{n_k} = \varphi,$$

при этом $\varphi \in H$ в силу замкнутости конуса H . Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в равенстве

$$E(f_{n_k}; H) = \|f_{n_k} - \psi_{n_k}\|,$$

получим, что $E(f; H) = \|f - \varphi\|$, т.е. φ — э.н.п. функции f в H .

Если э.н.п. функции f единствен, то $\psi = \varphi$. Из компактности последовательности $\{\psi_n\}$ и единственности предельного элемента следует ее сходимость к ψ . Свойство доказано.

Пусть дана последовательность $\{H_n\}$ конусов из $C(T)$. Каждый конус H_n имеет конечное число образующих. Будем считать, что $H_n \subset H_{n+1}$ для каждого $n \in N$.

8⁰ Для любой функции $f \in C(T)$ и каждого $n \in N$ верно неравенство

$$E(f; H_{n+1}) \leq E(f; H_n).$$

9⁰ Для того чтобы для любого $f \in C(T)$ выполнялось соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f; H_n) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы множество $\bigcup_n H_n$ было плотно в $C(T)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in C(T)$, $\varepsilon > 0$ и ψ_n — э.н.п. для f в H_n . Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f; H_n) = 0,$$

то $E(f; H_n) = \|f - \psi_n\| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_1, n \in N$. Последнее соотношение означает, что множество $\bigcup_n H_n$ плотно в $C(T)$.

Достаточность. Пусть множество $\bigcup_n H_n$ плотно в $C(T)$ и $f \in C(T)$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем элемент $h \in \bigcup_n H_n$, для которого $\|f - h\| < \varepsilon$. Считаем, что $h \in H_{n_0}$. Используя свойство 8⁰, получим

$$E(f; H_n) \leq E(f; H_{n_0}) \leq \|f - h\| < \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f; H_n) = 0.$$

Доказательство закончено.

На этом основные свойства наилучших приближений исчерпаны.

Хорошо известна /2/ следующая

Терема 1.1.3. Если $\{H_k\}$ последовательность подпространств конечной размерности пространства $C(T)$, причем

$$H_k \subset H_{k+1} \text{ для всех } k \in N$$

и $\bigcup_k H_k$ плотно в $C(T)$, то для любой последовательности положительных чисел $\{\mu_k\}$, монотонно стремящейся к 0, существует элемент $f \in C(T)$, для которого

$$E(f; H_k) = \mu_k$$

для всех $k \in N$.

Необходимо отметить, что идея и первое доказательство этого результата в алгебраическом случае принадлежит С. Н. Бернштейну.

Получим аналог приведенной теоремы для последовательности конусов с конечным числом образующих.

Лемма 1.1.1. Пусть $f_1, f_2 \in C(T)$ и $f_2 \notin H$. Тогда для любого числа $\mu \geq E(f_1; H)$ найдется число $\nu \geq 0$ такое, что

$$E(f_1 + \nu f_2; H) = \mu.$$

Доказательство. Действительно, функция $E(f_1 + \nu f_2; H)$ переменного ν непрерывна на промежутке $[0; +\infty)$ в силу свойства 5⁰, причем при $\nu = 0$ она обращается в $E(f_1; H)$ и

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} E(f_1 + \nu f_2; H) = +\infty,$$

т.к.

$$E(f_1 + \nu f_2; H) = \|f_1 + \nu f_2 - h_0\| \geq \nu \|f_2\| - \|f_1 - h_0\|,$$

где $h_0 \in H$ — э.н.п. функции $f_1 + \nu f_2$. Следовательно утверждение леммы верно.

Теорема 1.1.4. Пусть $\{H_k\}$ последовательность конусов с конечным числом образующих пространства $C(T)$, причем

$$H_k \neq H_{k+1}, \text{ lin } H_k \subset H_{k+1} \text{ для всех } k \in N,$$

где $\text{lin } H_k$ — линейная оболочка конуса H_k , и $\bigcup_k H_k$ плотно в $C(T)$. Тогда для любой последовательности положительных чисел $\{\mu_k\}$, монотонно стремящейся к 0, существует функция $f \in C(T)$, для которой

$$E(f; H_k) \leq \mu_k \text{ для всех } k \in N.$$

Доказательство. Пусть m — натуральное число, $m > 1$. Покажем сначала существование такого элемента $f_m \in H_m$, что

$$E(f_m; H_n) \leq \mu_n, \quad n = 1, 2, \dots, m-1.$$

Для этого в каждом конусе H_n найдем элемент h_n , не принадлежащий H_{n-1} . Применяя лемму 1.1.1, подберем $\alpha_m \geq 0$ так, чтобы для функции $g_m = \alpha_m h_m$ будет $E(g_m; H_{m-1}) = \mu_{m-1}$. Рассмотрим функцию

$$g_{m-1} = g_m - \varphi_{m-1} + \alpha_{m-1} h_{m-1} \in H_m,$$

где φ_{m-1} — э.н.п. функции g_m при аппроксимации элементами конуса H_{m-1} . Так как $\mu_{m-2} \geq \mu_{m-1} = \|g_m - \varphi_{m-1}\|$, то применяя вновь лемму 1.1.1 найдем $\alpha_{m-1} \geq 0$ такое, что

$$E(g_{m-1}; H_{m-2}) = \mu_{m-2}.$$

Используя свойство 3^0 , получим следующие неравенства

$$\begin{aligned} E(g_{m-1}; H_{m-1}) &= E(g_m - \varphi_{m-1} + \alpha_{m-1} h_{m-1}; H_{m-1}) \leq \\ &\leq E(g_m - \varphi_{m-1}; H_{m-1}) = E(g_m; H_{m-1}). \end{aligned}$$

Итак, имеем $E(g_{m-1}; H_n) \leq \mu_n$, $n = m-2, m-1$.

Докажем теперь индукцией по j существование такого элемента

$$g_{m-j} \in H_m, \quad j \leq m-2,$$

для которого

$$E(g_{m-j}; H_n) \leq \mu_n, \quad n = m-j-1, m-j, \dots, m-1.$$

Уже рассмотренный случай $j = 1$ представляет базу индукции, остается установить возможность индукционного перехода. Пусть элемент $g_{m-(j-1)} \in H_m$ уже построен и

$$E(g_{m-(j-1)}; H_n) \leq \mu_n, \quad n = m-j, m-j+1, \dots, m-1.$$

Обозначим через φ_{m-j} — э.н.п. функции $g_{m-(j-1)}$ при аппроксимации элементами конуса H_{m-j} , так что

$$\|g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j}\| = E(g_{m-(j-1)}; H_{m-j}) \leq \mu_{m-j}.$$

Будем искать следующий элемент $g_{m-j} \in H_m$ в виде

$$g_{m-j} = g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j} + \alpha_{m-j} h_{m-j}.$$

Учитывая, что

$$E(g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j}; H_{m-j-1}) \leq \|g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j}\| \leq \mu_{m-j} \leq \mu_{m-j-1},$$

и применяя лемму 1.1.1, выберем $\alpha_{m-j} \geq 0$ таким, чтобы

$$E(g_{m-j}; H_{m-j-1}) = \mu_{m-j-1}.$$

По свойству $\mathcal{Z}^0$ получим

$$\begin{aligned} E(g_{m-j}; H_{m-j}) &= E(g_{m-j+1} - \varphi_{m-j} + \alpha_{m-j} h_{m-j}; H_{m-j}) \leq \\ &\leq E(g_{m-j+1} - \varphi_{m-j}; H_{m-j}) = E(g_{m-j+1}; H_{m-j}) \leq \mu_{m-j}. \end{aligned}$$

Если $n > m-j$, то из включений $-\varphi_{m-j} + \alpha_{m-j} h_{m-j} \in \text{lin} H_{m-j} \subset H_n$ по свойству $\mathcal{Z}^0$ имеем

$$\begin{aligned} E(g_{m-j}; H_n) &= E(g_{m-j+1} - \varphi_{m-j} + \alpha_{m-j} h_{m-j}; H_n) = \\ &= E(g_{m-j+1}; H_n) \leq \mu_n. \end{aligned}$$

Этим доказана возможность индукционного перехода и следовательно существование всех $g_{m-j} \in H_m$. Если положим теперь $f_m = g_2$, то получим элемент с требуемыми свойствами.

Обозначим через χ_m — э.н.п. функции f_m при аппроксимации элементами конуса H_1 . Положим $\psi_m = f_m - \chi_m \in H_m$. Тогда

$$E(f_m - \chi_m; H_n) = E(f_m; H_n) \leq \mu_n, \quad n = 1, 2, \dots, m-1,$$

$$E(f_m - \chi_m; H_n) = 0, \quad n \geq m, \quad (3)$$

$$\|\psi_m\| = \|f_m - \chi_m\| \leq \mu_1.$$

Все элементы последовательности $\{\psi_m\}$ ($m \geq 2$) принадлежат множеству

$$M = \{f \in C(T) : \|f\| \leq \mu_1, E(f; H_n) \leq \mu_n, n \in N\}.$$

Покажем, что множество M компактно. Для этого по произвольному $\varepsilon > 0$ найдем такой номер K , что $\mu_K < \varepsilon$. Положим

$$M_\varepsilon = \{\psi \in H_K : \|\psi\| \leq \mu_1 + \varepsilon\}.$$

Множество M_ε компактно, т.к. ограничено и принадлежит конечномерному пространству $\text{lin} H_K$, и в то же время является ε — сетью для M . Действительно, для любого $f \in M$ его э.н.п. $\varphi \in H_K$ таков, что

$$\begin{aligned} \|f - \varphi\| &\leq \mu_K < \varepsilon, \\ \|\varphi\| &\leq \|f\| + \|f - \varphi\| \leq \mu_1 + \varepsilon, \end{aligned}$$

т.е. $\varphi \in M_\varepsilon$. Обладая при каждом ε компактной ε — сетью, само множество M также компактно. Итак, из последовательности $\{\psi_m\}$ можно выделить сходящуюся к некоторому $f \in C(T)$ подпоследовательность. Переходя к пределу по соответствующей подпоследовательности индексов в неравенствах (3) получим

$$E(f; H_n) \leq \mu_n.$$

Теорема доказана.

Приведем пример построения последовательности конусов с указанными свойствами.

Линейно независимую систему $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ непрерывных на T функций будем называть полной в $C(T)$, если для каждой функции $f \in C(T)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется элемент $h = \sum_{j=1}^k a_j h_j$ ($a_j \in R$) такой, что $\|f - h\| < \varepsilon$.

Рассмотрим произвольную строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел и систему $\{h_k\}_{k=1}^\infty$ полную в $C(T)$.

Положим

$$H_1 = \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} a_j h_j : a_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n_1 \right\},$$

$$H_{k+1} = \left\{ \sum_{j=1}^{n_{k+1}} b_j h_j : b_j \geq 0 \text{ при } j > n_k \right\}$$

для каждого $k \in N$. Очевидно, что $\text{lin} H_k \subset H_{k+1}$ для всех $k \in N$ и множество $\bigcup_k H_k$ плотно в $C(T)$.

2. Критерии элемента наилучшего приближения. Аналог теоремы Колмогорова

В параграфе приводятся критерии элемента наилучшего приближения при аппроксимации непрерывных на метрическом компакте функций элементами конуса, натянутого на конечное число образующих с использованием понятия расширенного конуса, а также аналог признака А. Н. Колмогорова /2/.

Пусть система функций $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset C(T)$ является линейно независимой, m — неотрицательное целое число и

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k, \alpha_k \in R, k = 1, 2, \dots, n, \alpha_j \geq 0, j > m \right\},$$

$$f \in C(T), h_0 = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k \in H.$$

Обозначим

$$R(f, h_0) = \{x \in T : \|f - h_0\| = |f(x) - h_0(x)|\},$$

$$I(h_0) = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{k : \mu_k > 0\},$$

$$H_{I(h_0)} = \left\{ h = \sum_{k=1}^n \nu_k h_k : \nu_k \geq 0, k \notin I(h_0); \nu_i \in R, i \in I(h_0) \right\}.$$

Ясно, что множество $H_{I(h_0)}$ является конусом, причем $H \subset H_{I(h_0)}$ и

$$E(f, H) \geq E(f, H_{I(h_0)}).$$

Конус $H_{I(h_0)}$ будем называть расширенным относительно элемента h_0 .

Сформулируем и докажем вначале два вспомогательных утверждения.

Будем говорить, что конус H (конус $H_{I(h_0)}$) обладает свойством $A(f, h_0)$ (соответственно свойством $A^*(f, h_0)$), если система

$$\begin{cases} \text{sign}(f(x) - h_0(x)) \sum_{j=1}^n c_j h_j(x) > 0, & x \in R(f, h_0); \\ c_j \geq 0, & j > m \text{ (соответственно } c_j \geq 0, j \notin I(h_0)) \end{cases}$$

относительно c_j несовместна, т.е. другими словами, конус H (конус $H_{I(h_0)}$) не содержит элемента, который бы во всех точках множества $R(f, h_0)$ принимал значения того же знака, что и разность $f - h_0$.

Лемма 1.2.1. Пусть $f \in C(T)$, $f \notin H$. Если h_0 есть э.н.п. функции f в конусе H , то выполнены условия:

1. Конус H обладает свойством $A(f, h_0)$;
2. При выполнении равенства $E(f, H) = E(f, H_{I(h_0)})$, конус $H_{I(h_0)}$ обладает свойством $A^*(f, h_0)$;
3. В случае, когда $E(f, H) > E(f, H_{I(h_0)}) \neq 0$, конус $H_{I(h_0)}$ не обладает свойством $A^*(f, h_0)$.

Доказательство. Докажем вначале справедливость условия (1). Предположим противное. Пусть $h \in H$ — элемент, который в точках множества $R(f, h_0)$ принимает значения тех же знаков, что и разность $f - h_0$. Положим $M = \|h\|$. Множество $R(f, h_0)$ замкнуто и элемент h на нем в нуль не обращается, поэтому

$$m = \min \{|h(x)| : x \in R(f, h_0)\} > 0.$$

Так как функции $h, f - h_0$ непрерывны на метрическом компакте (T, ρ) и следовательно равномерно непрерывны, то найдется такое $\delta > 0$, что как только $\rho(x_1, x_2) < \delta$, так

$$|[f(x_1) - h_0(x_1)] - [f(x_2) - h_0(x_2)]| < \frac{1}{2}\|f - h_0\|,$$

$$|h(x_1) - h(x_2)| < \frac{1}{2}m.$$

Обозначим через T_1 множество тех точек из T , расстояние от которых до множества $R(f, h_0)$ меньше δ , и положим $T_2 = T \setminus T_1$. Очевидно, что множество T_1 открыто, а T_2 замкнуто. В силу выбора δ , в каждой

точке множества T_1 функции $f - h_0$, h принимают значения одного знака. Положим теперь

$$\max \{|f(x) - h_0(x)| : x \in T_2\} = \|f - h_0\| - \varepsilon.$$

По построению множество T_2 не содержит точек множества $R(f, h_0)$. Поэтому число $\varepsilon > 0$. Наконец, определим элемент $h^* \in H$, положив

$$h^* = h_0 + \frac{\varepsilon}{2M}h.$$

Оценим разность $f - h^*$. Если $x \in T_1$, то

$$f(x) - h^*(x) = [f(x) - h_0(x)] - \frac{\varepsilon}{2M}h(x).$$

Уменьшаемое и вычитаемое имеют один и тот же знак и оба по абсолютной величине не превосходят $\|f - h_0\|$. Значит, для $x \in T_1$ верно неравенство

$$|f(x) - h^*(x)| < \|f - h_0\|.$$

Если $x \in T_2$, то

$$|f(x) - h^*(x)| \leq |f(x) - h_0(x)| + \frac{\varepsilon}{2M}|h(x)| \leq \|f - h_0\| - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < \|f - h_0\|.$$

Таким образом, $\|f - h^*\| < \|f - h_0\|$. Неравенство означает, что h_0 не является э.н.п. функции f . Полученное противоречие доказывает справедливость условия (1).

Покажем справедливость условия (2). Ясно, что в этом случае, элемент h_0 есть э.н.п. функции f в конусе $H_{I(h_0)}$. Повторяя для конуса $H_{I(h_0)}$ изложенное выше доказательство, получим требуемое свойство.

Перейдем к доказательству условия (3).

Пусть $h' \in H_{I(h_0)}$ является э.н.п. функции f в конусе $H_{I(h_0)}$. Рассмотрим элемент $h' - h_0 \in H_{I(h_0)}$ и разность

$$h'(x) - h_0(x) = \{f(x) - h_0(x)\} - \{f(x) - h'(x)\} \text{ при } x \in R(f, h_0).$$

Так как

$$|f(x) - h_0(x)| = \|f - h_0\| > \|f - h'\| \geq |f(x) - h'(x)|$$

при $x \in R(f, h_0)$, то $h' - h_0$ на множестве $R(f, h_0)$ имеет значения того же знака, что и разность $f - h_0$. Итак, конус $H_{I(h_0)}$ не обладает свойством $A^*(f, h_0)$. Лемма доказана.

Приведем пример, показывающий, что условие (1) леммы 1.2.1 не является достаточным для того, чтобы h_0 являлся э.н.п. для функции f в конусе H . Рассмотрим $f(x) = -x$, $h_0(x) = 2$, $x \in [0, 1]$,

$$H = \{\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 : \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, x \in [0, 1]\}.$$

Ясно, что $\|f - h_0\| = 3$, $R(f, h_0) = \{1\}$, причем $(f - h_0)(1) = -3$ и $h(1) \geq 0$ для любого $h \in H$. Из последнего следует, что конус H обладает свойством $A(f, h_0)$. Однако, $E(f, H) = 1$ и следовательно h_0 не является э.н.п. функции f в конусе H .

Лемма 1.2.2. Пусть $f \notin H_{I(h_0)}$. Если конус $H_{I(h_0)}$ обладает свойством $A^*(f, h_0)$, то $\|f - h_0\| = E(f, H) = E(f, H_{I(h_0)})$, т.е. h_0 есть э.н.п. функции f в конусах H и $H_{I(h_0)}$.

Доказательство. Покажем, что h_0 является э.н.п. функции f в конусе H . Предположим противное. Пусть $h \in H$ есть э.н.п. функции f . Тогда $\|f - h\| < \|f - h_0\|$. Ясно, что $h - h_0 \in H_{I(h_0)}$ и на множестве $R(f, h_0)$ он принимает значения того же знака, что и разность $f - h_0$. Последнее противоречит указанному свойству конуса $H_{I(h_0)}$. Поэтому $\|f - h_0\| = E(f, H)$. Далее, в силу леммы 1.2.1 при выполнении неравенства $E(f, H) > E(f, H_{I(h_0)}) \neq 0$, конус $H_{I(h_0)}$ не обладает свойством $A^*(f, h_0)$. Итак, $E(f, H) = E(f, H_{I(h_0)})$ и лемма доказана.

Теорема 1.2.1. Элемент $h_0 \in H$ является э.н.п. функции f в конусе H тогда и только тогда, когда нулевой элемент Θ есть э.н.п. функции $f - h_0$ в конусе $H_{I(h_0)}$.

Доказательство. Случай, когда $f \in H$, очевиден. Пусть $f \notin H$.

Необходимость. Пусть h_0 есть э.н.п. функции f в конусе H . Предположим, что нашелся элемент $v \in H_{I(h_0)}$, для которого $\|f - h_0 - v\| < \|f - h_0\|$. Пусть точка $x \in R(f, h_0)$ такова, что $f(x) - h_0(x) = \|f - h_0\|$. Тогда

$$0 < v(x) < 2(f(x) - h_0(x)).$$

Для случая, когда $h_0(x) - f(x) = \|f - h_0\|$, имеем

$$-2(f(x) - h_0(x)) < v(x) < 0.$$

Далее, подберем $m_0 \in N$ таким образом, чтобы выполнялись условия

$$h_0 + \frac{v}{n} \in H, \quad \left\| \frac{v}{n} \right\| < \frac{1}{2} \|f - h_0\|$$

для всех $n \geq m_0$. Для каждого $n \geq m_0$ найдем $y_n \in T$ такой, что

$$|f(y_n) - h_0(y_n) - \frac{v(y_n)}{n}| = \|f - h_0 - \frac{v}{n}\|, \text{ при этом}$$

$$\|f - h_0 - \frac{v}{n}\| \geq \|f - h_0\| \geq |f(y_n) - h_0(y_n)|.$$

Так как $\{y_n\}$ является последовательностью точек компакта T , то она содержит сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что $\{y_n\}$ сходится, причем

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in T.$$

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(y_n) - h_0(y_n) - \frac{v(y_n)}{n}| = |f(y_0) - h_0(y_0)|,$$

$$|f(y_0) - h_0(y_0)| \geq \|f - h_0\|.$$

Из последних соотношений следует, что $y_0 \in R(f, h_0)$. Если $\|f - h_0\| = |f(y_0) - h_0(y_0)|$, то для достаточно больших n верны неравенства

$$f(y_0) - h_0(y_0) - \frac{v(y_n)}{n} \geq f(y_n) - h_0(y_n) - \frac{v(y_n)}{n} \geq f(y_0) - h_0(y_0).$$

Отсюда получаем, что $v(y_n) \leq 0$. Переходя к пределу, имеем

$$v(y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(y_n) \leq 0.$$

Последнее неравенство противоречит тому, что $v(y_0) > 0$. Аналогично можно получить неравенство $v(y_0) \geq 0$ для случая, когда $\|f - h_0\| = h_0(y_0) - f(y_0)$, хотя $v(y_0) < 0$. Полученные противоречия доказывают необходимость.

Достаточность. Если существует элемент $u \in H$ такой, что

$$\|f - u\| < \|f - h_0\|,$$

т.е. h_0 не является э.н.п. функции f в конусе H , то элемент $u - h_0 \in H_{I(h_0)}$ обладает свойством

$$\|f - u\| = \|f - h_0 - (u - h_0)\| < \|f - h_0\|.$$

Таким образом, нулевой элемент Θ не является э.н.п. функции $f - h_0$ в конусе $H_{I(h_0)}$ и достаточность доказана.

Теорема 1.2.2. Пусть $f \in C(T)$, $h_0 \in H$. Элемент h_0 является э.н.п. функции f в конусе H тогда и только тогда, когда h_0 есть э.н.п. функции f в конусе $H_{I(h_0)}$.

Доказательство. Случай, когда $f \in H$, очевиден. Пусть $f \notin H$.
 Необходимость. Предположим противное. Пусть $u \in H_{I(h_0)}$ есть э.н.п. функции f в конусе $H_{I(h_0)}$ и $\|f - u\| < \|f - h_0\|$. Ясно, что элемент $u - h_0 \in H_{I(h_0)}$ и

$$\|f - u\| = \|(f - h_0) - (u - h_0)\| < \|f - h_0\|.$$

Однако, в силу теоремы 1.2.1 для любого $v \in H_{I(h_0)}$ верно неравенство

$$\|(f - h_0) - v\| \geq \|f - h_0\|.$$

Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность следует из очевидных неравенств

$$\|f - h_0\| \geq E(f, H) \geq E(f, H_{I(h_0)}) = \|f - h_0\|.$$

Теорема доказана.

Замечание 1.2.1. Если $h_0 \in H$ и $E(f, H) = E(f, H_{I(h_0)})$, то h_0 может не являться э.н.п. функции f в конусе H .

Действительно, пусть

$$\begin{aligned} H &= \{h \in C[0; 1] : h(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0\}, \\ f(x) &= 2|x - \frac{1}{2}|, \quad h_0(x) = 1, \quad x \in [0; 1], \\ H_{I(h_0)} &= \{h \in C[0; 1] : h(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \beta_1, \beta_2 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Так как любой элемент $h \in H_{I(h_0)}$ является возрастающей функцией на $[0; 1]$, то

$$\frac{1}{2} = E(f, H) = E(f, H_{I(h_0)}), \quad \text{а} \quad \|f - h_0\| = 1.$$

Из теоремы 1.2.2 и лемм 1.2.1, 1.2.2 вытекает

Теорема 1.2.3. Пусть $f \in C(T)$, $f \notin H$. Элемент $h_0 \in H$ является э.н.п. функции f в конусе H тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} \text{sign}(f(x) - h_0(x)) \sum_{j=1}^n c_j h_j(x) > 0, \quad x \in R(f, h_0); \\ c_j \geq 0, \quad j \notin I(h_0) \end{cases}$$

относительно c_j несовместна, т.е. другими словами, конус $H_{I(h_0)}$ не содержит элемента, который бы во всех точках множества $R(f, h_0)$ принимал значения того же знака, что и разность $f - h_0$.

Если конус H является подпространством конечной размерности, то имеем известный признак элемента наилучшего приближения, который является лишь частным случаем более общей теоремы, доказанной А. Н. Колмогоровым. В этом случае $H = H_{I(h_0)}$ для любого $h_0 \in H$. Поэтому, если $f \notin H$, то h_0 есть элемент наилучшего приближения функции f в том и только в том случае, когда подпространство H не содержит элемента, который бы во всех точках множества $R(f, h_0)$ принимал значения того же знака, что и разность $f - h_0$.

Замечание 1.2.2. Признак А. Н. Колмогорова нельзя обобщить для задачи равномерного наилучшего приближения непрерывных на метрическом компакте функций элементами выпуклого множества.

Пусть H — замкнутое выпуклое множество в $C(T)$ и $f \in C(T)$. Под задачей наилучшего равномерного приближения функции f элементами множества H будем понимать задачу отыскания величины

$$E(f; H) = \inf\{\|f - h\| : h \in H\}.$$

Элемент $h \in H$, для которого $E(f; H) = \|f - h\|$, назовем э.н.п. функции f в H .

В случае, когда множество H есть выпуклая оболочка конечного числа элементов из $C(T)$, элемент наилучшего приближения в H существует для любой функции $f \in C(T)$.

Пусть $h_1, h_2, \dots, h_n \in C(T)$, $H = \text{conv}\{h_k\}_{k=1}^n$ и h_0 — э.н.п. функции $f \in C(T)$,

$$h_0 = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k, \quad \mu_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad \sum_{k=1}^n \mu_k = 1.$$

Обозначим

$$J(h_0) = \{k : \mu_k > 0\} = \{i_1, i_2, \dots, i_m\},$$

$$H_{J(h_0)} = \text{conv}\{h_1, \dots, h_n, -h_{i_1}, -h_{i_2}, \dots, -h_{i_m}\}.$$

Приведем пример показывающий, что множество $H_{J(h_0)}$ может содержать элемент, который на множестве максимального отклонения $R(f; h_0)$ принимает значения того же знака, что и разность $f - h_0$.

Пусть $T = [0; 1]$, множество $H = \text{conv}\{\Theta, I, g\}$, где Θ — нулевой элемент, функции $I(x) = 1$, $g(x) = x$ на $[0; 1]$. Рассмотрим функцию $f(x) = 2$ на $[0; 1]$. Очевидно, что $f - h \geq I$ на $[0; 1]$ для любого $h \in H$. Поэтому $h_0 = I$ есть э.н.п. для f , причем $E(f; H) = 1$. Множество

$$H_{J(h_0)} = \text{conv}\{\Theta, I, -I, g\}$$

содержит элемент $h = \frac{1}{2} \in H$, который на множестве $R(f; h_0) = [0; 1]$ принимает значения того же знака, что и разность $f - h_0$.

3. Системы Чебышева

Пусть T — метрический компакт.

Следуя П. Л. Чебышеву, подпространство $H_n \subset C(T)$ размерности n будем называть чебышевским, если для любой функции $f \in C(T)$ э.н.п. единствен в H_n .

Базис чебышевского подпространства H_n назовем системой Чебышева (T — система) порядка n на компакте T .

А. Хаар доказал, что подпространство $H_n \subset C(T)$ является чебышевским тогда и только тогда, когда всякий отличный от тождественного нуля элемент $h \in H_n$ обращается в нуль не более, чем в $(n - 1)$ точке компакта T .

В связи с этим, под системой Чебышева порядка n на компакте T будем понимать линейно независимую систему $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ непрерывных на T функций, для которой любой ненулевой обобщенный полином

$$h = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k, \mu_k \in R, k = 1, 2, \dots, n,$$

имеет на T не более, чем $(n - 1)$ нулей.

Примером чебышевской системы порядка n на произвольном промежутке $[a; b]$ может служить система степенных функций $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$.

Из определения чебышевской системы немедленно следует, что если два обобщенных полинома по системе Чебышева порядка n совпадают в n точках компакта T , то они совпадают всюду на T .

Оказывается, что существование на компакте T чебышевской системы порядка $n \geq 2$ накладывает на T сильное топологическое ограничение. Дж. Мэрхьюбер [11] показал, что в этом случае компакт T гомеоморфен либо окружности, либо ее замкнутой части. Таким образом, если компакт T является связным множеством, то он гомеоморфен либо окружности, либо отрезку $[a; b]$.

В последнем случае окружность можно мыслить как отрезок $[a; b]$ с отождествленными концами, и T — система на окружности есть T — система на $[a; b]$ при условии, что $h_k(a) = h_k(b)$, $k = 1, 2, \dots, n$. При этом образующие h_k можно периодически (с периодом $b - a$) продолжить

с полуинтервала $[a; b)$ на всю числовую ось и говорить о периодической T —системе на R .

Приведем некоторые основные свойства чебышевских систем.

Теорема 1.3.1. *Линейно независимая система $\{h_k\}_{k=1}^n$ непрерывных на T функций является системой Чебышева порядка n тогда и только тогда, когда определитель*

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \dots & h_n(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \dots & h_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1(x_{n-1}) & h_2(x_{n-1}) & \dots & h_n(x_{n-1}) \\ h_1(x_n) & h_2(x_n) & \dots & h_n(x_n) \end{pmatrix}$$

отличен от нуля, каковы бы ни были различные точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ компакта T .

Доказательство. Если нашлись такие точки $x_1, x_2, \dots, x_n \in T$, что $\Delta = 0$, то система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n c_j h_j(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

относительно неизвестных c_j имеет ненулевое решение. Соответствующий этому решению обобщенный полином

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^n c_j h_j(x), \quad x \in T,$$

обращается в нуль во всех точках x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) и поэтому система $\{h_k\}_{k=1}^n$ не чебышевская.

Обратно, если система $\{h_k\}_{k=1}^n$ не чебышевская, то найдется отличный от тождественного нуля обобщенный полином ψ , который имеет не менее n нулей на T . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ его корни. Тогда определитель Δ системы (4) равен нулю, т.к. коэффициенты полинома ψ дают ненулевое решение этой системы. Теорема доказана.

Так как определитель

$$\det \begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \dots & h_n(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \dots & h_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1(x_{n-1}) & h_2(x_{n-1}) & \dots & h_n(x_{n-1}) \\ h_1(x_n) & h_2(x_n) & \dots & h_n(x_n) \end{pmatrix}$$

есть непрерывная функция аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$, то для чебышевских систем на отрезке $[a; b]$ он должен сохранять определенный знак при всех значениях $x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, что

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b.$$

В дальнейшем без ограничения общности можно предположить, что определитель для чебышевской системы $\{h_k\}_{k=1}^n$ сохраняет знак $(+)$ при всех значениях $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$.

Такие системы будем называть T_+ – системами.

Следствие 1.3.1. Для любых $(n - 1)$ различных точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in T$ существует ненулевой обобщенный полином ψ по данной чебышевской системе $\{h_k\}_{k=1}^n$, имеющий точки $x_k, k = 1, 2, \dots, n - 1$, своими нулями. Этот полином определяется с точностью до постоянного множителя и

$$\begin{aligned} \psi(x) &= c \Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x \end{pmatrix} = \\ &= c \det \begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \dots & h_n(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \dots & h_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1(x_{n-1}) & h_2(x_{n-1}) & \dots & h_n(x_{n-1}) \\ h_1(x) & h_2(x) & \dots & h_n(x) \end{pmatrix}, \text{ где } c \neq 0. \end{aligned}$$

Следствие 1.3.2. Пусть $\{h_k\}_{k=1}^n$ – система Чебышева на T . В классе обобщенных полиномов по данной системе однозначно разрешима любая интерполяционная задача, т.е. каковы бы ни были различные точки

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in T \text{ и числа } a_1, a_2, \dots, a_n \in R$$

найдется единственный обобщенный полином $\varphi = \sum_{k=1}^n \nu_k h_k$ такой, что $\varphi(x_k) = a_k, k = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Задача построения интерполяционного полинома сводится к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n c_j h_j(x_k) = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

относительно c_j , которая однозначно разрешима и силу доказанной теоремы 1.3.1.

Следствие 1.3.3. Порядок n периодической T – системы $\{h_k\}_{k=1}^n$ может быть только нечетным.

Доказательство. В самом деле, при $h_k(a) = h_k(b)$, $k = 1, 2, \dots, n$ и четном n имеем

$$\Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ a & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix} = -\Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & b \end{pmatrix},$$

что невозможно для T – системы при $a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$.

Приведем теперь несколько известных примеров T_+ – систем.

1). Системы :

$$\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\};$$

$$\left\{ \frac{1}{x+d_1}, \frac{1}{x+d_2}, \dots, \frac{1}{x+d_n} \right\},$$

где $0 < d_1 < d_2 < \dots, < d_n$, $d_k \in R$, $k = 1, 2, \dots, n$, $a + d_1 > 0$;

$\{e^{xd_1}, e^{xd_2}, \dots, e^{xd_n}\}$, где $d_1 < d_2 < \dots < d_n$;

$\{x^{d_1}, x^{d_2}, \dots, x^{d_n}\}$, где $d_1 < d_2 < \dots, < d_n$, $a > 0$

являются T_+ – системами на любом отрезке $[a; b]$.

2). Если производная $(n-1)$ порядка функции f положительна на отрезке $[a; b]$, то функции

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-2}, f(x)$$

образуют T_+ – систему на $[a; b]$.

Напомним, что нуль обобщенного полинома ψ по системе $\{h_k\}_{k=1}^n$ непрерывных на $[a; b]$ функций, лежащий на $(a; b)$, называется простым, если при переходе через этот нуль полином ψ меняет знак, и двойным, если при переходе через этот нуль полином ψ не меняет знака.

Концы отрезка $[a; b]$, если они являются нулями полинома, будем считать простыми.

Теорема 1.3.2. Если обобщенный полином p^* по данной T – системе $\{h_j\}_{j=1}^n$ порядка n имеет на $[a; b]$ k двойных и l простых нулей, то

$$2k + l \leq n - 1.$$

Доказательство. При $k = 0$ теорема верна. Пусть $k > 0$ и p^* имеет нули

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{k+l}.$$

Обозначим

$$M_i = \max\{|p^*(t)| : t \in [t_{i-1}; t_i]\},$$

$$i = 1, 2, \dots, k + l + 1, \quad t_0 = a, \quad t_{k+l+1} = b.$$

Выберем $\mu > 0$, меньшее всех M_i , $i = 1, 2, \dots, k + l + 1$. Построим обобщенный полином p по данной T – системе, который принимает значения $+\mu$ в двойных нулях полинома p^* , в окрестности которых $p^*(t) \geq 0$, и значение $-\mu$ в двойных нулях, в окрестности которых $p^*(t) \leq 0$ и, кроме того, обращается в нуль во всех простых нулях полинома p^* .

Подберем δ ($0 < \delta \leq 1$) так, чтобы

$$\max\{|\delta p(t)| : t \in [a; b]\} < \mu,$$

и рассмотрим полином

$$p_1(t) = p^*(t) - \delta p(t), \quad t \in [a; b].$$

Заметим, что каждому двойному нулю полинома p^* соответствует два нуля многочлена p_1 . В самом деле, пусть t_i – двойной нуль полинома p^* , в окрестности которого, например, $p^*(t) \geq 0$. В некоторой точке $x_i \in (t_{i-1}; t_i)$ и точке $x_{i+1} \in (t_i; t_{i+1})$ имеем

$$p^*(x_i) = M_i > \mu, \quad p^*(x_{i+1}) = M_{i+1} > \mu.$$

Поэтому

$$p_1(x_i) > 0 \text{ и } p_1(x_{i+1}) > 0,$$

и т.к. $p_1(t_i) = -\delta\mu < 0$, то p_1 имеет нуль как в $(x_i; t_i)$, так и в $(t_i; x_{i+1})$.

Кроме того, полином p_1 обращается в нуль во всех простых нулях полинома p^* . Поэтому он имеет по крайней мере $2k + l$ различных нулей. Тогда

$$2k + l \leq n - 1$$

и теорема доказана.

С. Н. Бернштейн показал, что какие бы ни были точки

$$x_1, x_2, \dots, x_p, \quad a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_p \leq b,$$

и отличные от них точки

$$y_1, y_2, \dots, y_q, \quad a < y_1 < y_2 < \dots < y_q < b,$$

при условии, что $p + 2q = n - 1$, существует обобщенный полином по системе Чебышева $\{h_k\}_{k=1}^n$, имеющий в точках $x_1, x_2, \dots, x_p$ простые нули, а в точках $y_1, y_2, \dots, y_q$ — двойные и не имеющий на отрезке других нулей.

Эта теорема выражает основное свойство чебышевских систем.

Например, при выяснении условий сходимости последовательности линейных положительных операторов, необходимо знать, существует ли обобщенный полином по системе Чебышева порядка n с числом нулей $p + 2q < n - 1$.

В. И. Волков в [1] доказал, что если $(n - 1) - (p + 2q) = 2k + 1$, то для любых различных точек

$$a < x_1 < x_2 < \dots, < x_p < b, \quad a < y_1 < y_2 < \dots < y_q < b,$$

а, если $(n - 1) - (p + 2q) = 2k$, то для любых различных точек

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots, < x_p \leq b, \quad a < y_1 < y_2 < \dots, < y_q < b$$

существуют обобщенные полиномы по системе Чебышева порядка n , имеющие простые нули в точках $x_1, x_2, \dots, x_p$ и двойные нули в точках $y_1, y_2, \dots, y_q$ и не имеющие других нулей на отрезке $[a; b]$

Для продолжаемых за границы отрезка $[a; b]$ систем Чебышева результат С. Н. Бернштейна остается верным и при условии $p + 2q \leq n - 1$. Однако продолжаемость систем не является здесь необходимым, т.к. можно указать непродолжаемые системы Чебышева, обладающие полиномами с произвольным расположением нулей при $p + 2q < n - 1$.

Отметим еще одно важное свойство чебышевских подпространств в вопросе приближения непрерывных функций его элементами.

Предложение 1.3.1. Пусть $H_n \subset C(T)$ — чебышевское подпространство, $h_0 \in H_n$ — э.н.п. функции $f \notin H_n$. Тогда множество максимального отклонения $R(f; h_0)$ содержит по меньшей мере $n + 1$ точку.

Доказательство. Допустим, что множество $R(f; h_0)$ содержит m точек

$$x_1, x_2, \dots, x_m \text{ и } m \leq n.$$

Если $m < n$, то выберем произвольно точки $x_{m+1}, \dots, x_n \in [a; b]$ так, чтобы все точки x_k , $k = 1, 2, \dots, n$ оказались различными. Используя следствие 1.3.2, построим интерполяционный полином ψ по условию

$$\psi(x_k) = \text{sign}(f(x_k) - h_0(x_k)), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда во всех точках множества $R(f; h_0)$ полином $\psi \in H_n$ принимает значения того же знака, что и разность $f - h_0$. Поэтому по теореме Колмогорова элемент h_0 не является э.н.п. функции f . Предложение доказано.

Сформулируем критерий э.н.п. при аппроксимации непрерывных функций элементами чебышевского подпространства.

Теорема 1.3.3. Пусть $H_n \subset C[a; b]$ — чебышевское подпространство. Для того чтобы полином $\psi \in H_n$ был э.н.п. функции $f \notin H_n$, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие точки

$$x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \quad (a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b),$$

что

- 1) $\|f - \psi\| = |f(x_i) - \psi(x_i)| \quad (i = 1, 2, \dots, n+1),$
- 2) знаки чисел $f(x_i) - \psi(x_i)$ чередуются.

Систему точек $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \quad (a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b)$, с указанными в теореме свойствами, назовем чебышевским альтернансом.

Для нечебышевских подпространств наличие альтернанса $/3/$ является достаточным признаком э.н.п., например, в случае приближения функций многих переменных. Вместе с тем для нечебышевских подпространств э.н.п. непрерывной функции может и не обладать альтернансом, более того, множество максимального отклонения может состоять вообще из одной точки.

Рассмотрим пространство $C[0; 1]$. Считаем, что H_n натянута на функции

$$x, x^2, \dots, x^n, f(x) = 1 \text{ на } [0; 1].$$

Так как любой элемент $\psi \in H_n$ в точке $x = 0$ обращается в нуль, то $E(f; H_n) = 1$, а э.н.п. функции f является, например, $\psi(x) = x$. Для этого полинома множество максимального отклонения $R(f; \psi)$ состоит из единственной точки 0.

Остановимся теперь на некоторых специального вида чебышевских системах, которые будут использованы в дальнейшем изложении.

Всякий алгебраический полином, все корни которого положительны, имеет коэффициенты чередующихся знаков. Рассмотрим чебышевские системы с аналогичным свойством.

Именно, систему Чебышева $\{h_k\}_{k=1}^n$ будем называть специальной (или ST -системой) на отрезке $[a; b]$, если коэффициенты всякого полинома

$h = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k$ с $n - 1$ различными нулями все отличны от нуля и имеют чередующиеся знаки, т.е.

$$\mu_k \mu_{k+1} < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1.$$

Теорема 1.3.4. Для того чтобы система Чебышева $\{h_k\}_{k=1}^n$ на отрезке $[a; b]$ была ST – системой, необходимо и достаточно, чтобы при любых x_j таких, что $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, все миноры порядка $(n - 1)$ определителя

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \dots & h_n(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \dots & h_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1(x_{n-1}) & h_2(x_{n-1}) & \dots & h_n(x_{n-1}) \\ h_1(x_n) & h_2(x_n) & \dots & h_n(x_n) \end{pmatrix}$$

имели один и тот же знак.

Доказательство. Ясно, что нетривиальный обобщенный полином $h = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k$ имеет своими нулями точки

$$t_j \in [a; b], \quad a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} \leq b$$

в том и только в том случае, когда

$$h(t) = c \Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} & t \end{pmatrix} = c \sum_{k=1}^n (-1)^{k+n} \Delta_k h_k(t),$$

где Δ_k – минор элемента $h_k(t)$. Отсюда видно, что коэффициенты обобщенного полинома h имеют чередующиеся знаки тогда и только тогда, когда $\Delta_k \Delta_{k+1} > 0$, $k = 1, 2, \dots, n - 1$. Теорема доказана.

Из теоремы вытекает, что ST – системами будут, в частности, такие T_+ – системы, которые обладают тем свойством, что после удаления любой одной функции h_k оставшиеся функции снова образуют T_+ – систему. Такие ST – системы будем называть ST_+ – системами.

Система Чебышева $\{h_k\}_{k=1}^n$ на отрезке $[a; b]$, обладающая свойством: все миноры порядка $r \leq n$ определителя Δ имеют один и тот же знак $\delta_r \in \{-1; 1\}$, $r = 2, 3, \dots, n$, называется системой Декарта (или D – системой).

В частности, указанное свойство означает, что если из D — системы удалить произвольное количество $r \leq n-1$ функций, то оставшиеся $n-r$ функции образуют систему Чебышева порядка $n-r$.

Если при этом все $\delta_r = 1$, $r = 2, 3, \dots, n$, то система Декарта называется D_+ — системой.

4. Необходимые и достаточные условия элемента наилучшего приближения в терминах чебышевского альтернанса.

Пусть $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ — линейно независимая система непрерывных функций, заданных на отрезке $[a; b]$, m — целое неотрицательное число и конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\}.$$

В случае, когда $m \geq 1$, конус H содержит собственное m — мерное подпространство.

Конус $H \subset C[a; b]$ будем называть квазичебышевским порядка r , $1 \leq r \leq n$, если всякий ненулевой элемент $h \in H$ имеет на отрезке $[a; b]$ не более, чем $r-1$ нулей, и существует ненулевой элемент, принадлежащий конусу H , имеющий ровно $r-1$ нулей на отрезке $[a; b]$.

Число $\delta \in \{-1; 1\}$ назовем правым знаком /12/ квазичебышевского конуса H порядка r , если каждый элемент $h \in H$, имеющий ровно $r-1$ нулей на $[a; b]$, справа от последнего нуля принимает значения со знаком равным δ .

Примером квазичебышевского конуса H может служить конус, натянутый на чебышевскую систему функций. В этом случае, всякий ненулевой элемент из конуса будет иметь на отрезке $[a; b]$ не более, чем $n-1$ нулей. Поэтому конус является квазичебышевским некоторого порядка.

В связи с этим, конусы, натянутые на чебышевские системы в дальнейшем будем называть конусами Чебышева.

Теорема 1.4.1. Пусть $f \in C[a; b]$, $f \notin H$, $h_0 \in H$ и конус $H_{I(h_0)}$ является квазичебышевским порядка r , $1 \leq r \leq n$, с правым знаком, равным δ .

Если выполнено одно из условий:

1. Существуют точки $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{r+1}$, $\xi_i \in [a; b]$, $i = 1, 2, \dots, r+1$, такие, что

$$|f(\xi_k) - h_0(\xi_k)| = \|f - h_0\|,$$

где числа $a_k = \text{sign}(f(\xi_k) - h_0(\xi_k))$, $k = 1, 2, \dots, r+1$ имеют чередующиеся знаки;

2. Существуют точки $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_r$, $\nu_j \in [a; b]$, $j = 1, 2, \dots, r$, для которых

$$|f(\nu_j) - h_0(\nu_j)| = \|f - h_0\|,$$

числа $b_j = \text{sign}(f(\nu_j) - h_0(\nu_j))$ имеют чередующиеся знаки и

$$\delta(f(\nu_r) - h_0(\nu_r)) < 0,$$

то h_0 есть э.н.п. функции f в конусе H .

Доказательство. Пусть выполнено условие (1), а элемент $h_0 \in H$ не является э.н.п. функции f . Тогда нулевой элемент Θ не есть э.н.п. функции $f - h_0$ в конусе $H_{I(h_0)}$. Обозначим через $v \in H_{I(h_0)}$ э.н.п. функции $f - h_0$. Имеем

$$\|f - h_0 - v\| < \|f - h_0\|.$$

Ради определенности, считаем, что $\|f - h_0\| = f(\xi_1) - h_0(\xi_1)$. Следовательно

$$(-1)^{k-1}(f - h_0 - v)(\xi_k) < (-1)^{k-1}(f - h_0)(\xi_k), \quad k = 1, 2, \dots, r + 1.$$

Поэтому $(-1)^k v(\xi_k) < 0$, $k = 1, 2, \dots, r + 1$, и функция $v \in H_{I(h_0)}$ имеет не менее, чем r нулей на $[a; b]$. Так как порядок конуса $H_{I(h_0)}$ равен r , то $v = \Theta$. Итак, если условие (1) верно, то h_0 есть э.н.п. функции f в конусе H .

Пусть выполнено условие (2). Вновь предположим, что h_0 не является э.н.п. функции f в конусе H , а следовательно нулевой элемент Θ не есть э.н.п. функции $f - h_0$ в конусе $H_{I(h_0)}$. Пусть $w \in H_{I(h_0)}$ — э.н.п. функции $f - h_0$ в конусе $H_{I(h_0)}$. Как и ранее, считаем, что $\|f - h_0\| = f(\nu_1) - h_0(\nu_1)$. Тогда

$$(-1)^{j-1}(f - h_0 - w)(\nu_j) < (-1)^{j-1}(f - h_0)(\nu_j),$$

$$(-1)^j w(\nu_j) < 0, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Последние неравенства означают, что функция w на $(a; b)$ имеет ровно $r - 1$ нулей. Однако,

$$-\delta(f - h_0 - w)(\nu_r) < -\delta(f - h_0)(\nu_r),$$

$$\delta w(\nu_r) < 0.$$

Таким образом, функция w справа от последнего нуля принимает значения со знаком $-\delta$, что противоречиво, т.к. правый знак конуса $H_{I(h_0)}$

равен δ . Итак, при выполнении условия (2) элемент h_0 есть э.н.п. функции f в конусе H . Теорема доказана.

Приведенный результат является лишь достаточными условиями э.н.п.. В отличие от результатов классической теории приближений в задаче наилучшего приближения непрерывных функций элементами конуса Чебышева порядка n , чебышевское свойство образующих конуса не гарантирует существование во множестве максимального отклонения функции от э.н.п. не менее n точек.

Приведем соответствующие примеры.

1. Пусть $m = 0$ и конус определен условиями

$$H_0 = \{h \in C[0; 1] : h(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2, x \in [0; 1], \mu_0, \mu_1, \mu_2 \geq 0\}.$$

Нетрудно видеть, что для функции $f(x) = x - 1$ величина наилучшего приближения такова, что $E(f; H_0) = 1$, а полиномы

$$\psi_1(x) = 0, \psi_2(x) = x, \psi_3(x) = x^2$$

суть э.н.п. функции f элементами конуса H_0 , причем множества максимального отклонения имеют вид

$$R(f; \psi_1) = \{0\}, R(f; \psi_2) = [0; 1], R(f; \psi_3) = \{0; 1\}.$$

Однако, конус H_0 является чебышевским порядка $r = 2$, а множество $R(f; \psi_1)$ состоит из одной точки.

2. Конус

$$H_0 = \left\{ h \in C[0; \pi] : h(x) = \sum_{k=0}^2 \mu_k \sin^k x, x \in [0; \pi], \mu_k \geq 0 \right\}$$

является квазичебышевским порядка $r = 3$, но для функции $f(x) = \sin x - 1$ величина наилучшего приближения $E(f, H_0) = 1$, при этом функции Θ , $\sin x$, $\sin^2 x$ являются элементами наилучшего приближения для f и

$$R(f; \Theta) = \{0; \pi\}, R(f; \sin(x)) = [0; \pi], R(f; \sin^2(x)) = \{0; \frac{\pi}{2}; \pi\}.$$

Множество $R(f; \Theta)$ содержит лишь две точки.

Остановимся на случае, когда чебышевский конус H имеет порядок равный n .

Предложение 1.4.1. Пусть чебышевский конус H имеет порядок равный n , $f \in C[a; b]$, $f \notin H$, $h_0 \in H$. Если множество $R(f; h_0)$ максимального уклонения f от h_0 содержит не менее $n + 1$ точек

$$t_1, t_2, \dots, t_p, t_1 < t_2 < \dots < t_p,$$

причем числа $\delta_k = \text{sign}(f(t_k) - h_0(t_k))$, $k = 1, 2, \dots, p$, имеют чередующиеся знаки, то h_0 есть э.н.п. функции f в конусе H .

Доказательство. Так как h_0 есть э.н.п. функции f при ее приближении элементами чебышевского подпространства H_n , базисом которого являются функции $h_1, h_2, \dots, h_n$, то утверждение вытекает из очевидных неравенств

$$\|f - h_0\| \geq E(f, H) \geq E(f, H_n) = \|f - h_0\|.$$

Предложение 1.4.2. Пусть H — конус Чебышева порядка n с правым знаком $\delta \in \{-1; 1\}$, $f \in C[a; b]$, $f \notin H$, множество $R(f; \Theta)$ максимального уклонения f от нулевого элемента Θ содержит лишь n точек

$$t_1, t_2, \dots, t_n, t_1 < t_2 < \dots < t_n,$$

для которых числа $\delta_k = f(t_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) имеют чередующиеся знаки.

Нулевой элемент Θ есть э.н.п. функции f тогда и только тогда, когда

$$-\delta \text{sign} f(t_n) > 0.$$

Доказательство. Пусть Θ — э.н.п. функции f при аппроксимации элементами конуса H . Предположим, что имеет место неравенство

$$\delta \text{sign} f(t_n) > 0.$$

Пусть H_n — линейная оболочка конуса H . Ясно, что существует $v \in H_n$, который является э.н.п. функции f при аппроксимации элементами чебышевского подпространства, причем

$$\|f\| > \|f - v\|.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \delta(-1)^{n-i}(f - v)(t_i) &\leq \|f - v\| < \|f\| = \delta(-1)^{n-i}f(t_i), \\ -\delta(-1)^{n-i}v(t_i) &< 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Поэтому функция v имеет ровно $n - 1$ нулей на $[a; b)$ и справа от последнего нуля принимает значения со знаком δ . Следовательно $v \in H$. Полученное противоречие доказывает необходимость.

С другой стороны, если предположить, что $w \in H$ — э.н.п. функции f и $\|f\| > \|f - w\|$, то

$$-\delta(-1)^{n-i}(f - w)(t_i) \leq \|f - w\| < \|f\| = -\delta(-1)^{n-i}f(t_i),$$

$$\delta(-1)^{n-i}w(t_i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Функция w имеет ровно $n - 1$ нулей и справа от последнего нуля принимает значения со знаком $-\delta$, что противоречит определению правого знака конуса H . Предложение доказано полностью.

Будем говорить, что конус Чебышева H порядка n с правым знаком равным δ обладает B — свойством, если для любых различных точек

$$t_1, t_2, \dots, t_l \in (a; b), \quad t_1 < t_2 < \dots < t_l, \quad l \leq n - 1$$

выполнены условия:

1. При $l < n - 1$ существуют элементы $v, w \in H$, для которых данные точки являются простыми нулями и других нулей нет, и справа от последнего нуля принимающие значения разных знаков;
2. При $l = n$ существует элемент $g \in H$, который обращается в нуль в этих точках, причем справа от последнего нуля принимает значения со знаком δ .

Приведем сначала примеры конусов с указанными свойствами.

Предложение 1.4.3. Пусть

$$\{h_k\}_{k=1}^n, \quad \{h_k\}_{k=1}^{n-1} -$$

T —системы на отрезке $[a; b]$. Тогда конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_n \geq 0 \right\}$$

имеет правый знак и обладает B — свойством.

Доказательство. Так как конус H содержит $(n - 1)$ — мерное чебышевское подпространство, то существование элементов принадлежащих конусу H , которые имеют своими нулями наперед заданные точки

$$t_1, t_2, \dots, t_l, \quad l < n - 1,$$

и принимающих справа от последнего нуля значения разных знаков, следует из основных свойств систем Чебышева.

Ясно, что элемент

$$h(t) = c\Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} & t \end{pmatrix}, \quad c \neq 0$$

имеет своими простыми нулями произвольные различные точки

$$t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, \quad t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$$

и принадлежит конусу H , если $\alpha_n \geq 0$. Осталось показать, что конус H имеет правый знак. Предположим, что у конуса нет правого знака. Возможны два случая:

1. Для точек $a \leq t_1, t_2, \dots, t_{n-1} < b$ нашлись два элемента v, w из конуса, для которых

$$v(t_k) = w(t_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad v(t)w(t) < 0 \quad \text{при} \quad t > t_{n-1}.$$

2. Для некоторых двух различных наборов точек

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b, \quad a \leq y_1 < y_2 < \dots < y_{n-1} < b$$

существуют элементы $v, w \in H$, для которых

$$\begin{aligned} v(x_k) = w(y_k) &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \\ c_1 v(x) &> 0, \quad c_2 w(y) > 0, \quad \text{при} \quad x > x_{n-1}, \quad y > y_{n-1}, \end{aligned}$$

причем числа c_1, c_2 , такие что $c_1 c_2 < 0$.

В первом случае элементы v, w можно представить в виде

$$\begin{aligned} v(t) &= d_1 \Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} & t \end{pmatrix}, \\ w(t) &= d_2 \Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ t_1 & t_2 & \dots & t_{n-1} & t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $d_1 d_2 < 0$. Раскладывая определитель Δ по элементам последней строки, получим

$$v(t) = d_1 \sum_{k=1}^n \nu_k h_k(t), \quad w(t) = d_2 \sum_{k=1}^n \mu_k h_k(t),$$

причем $\mu_n \nu_n > 0$. Поэтому один из элементов v, w не может принадлежать конусу H .

Остановимся теперь на 2 случае. Элементы v , w имеют вид

$$v(t) = p_1 \Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & t \end{pmatrix},$$

$$w(t) = p_2 \Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} & t \end{pmatrix},$$

и $p_1 p_2 < 0$. С другой стороны

$$v(t) = \sum_{k=1}^n \nu_k h_k(t), \quad w(t) = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k(t),$$

причем

$$\nu_n = p_1 \Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} \end{pmatrix} > 0, \quad \mu_n = p_2 \Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} \\ y_1 & y_2 & \dots & y_{n-1} \end{pmatrix} > 0.$$

Так как оба определителя имеют один и тот же знак, то $p_1 p_2 > 0$. Получили противоречие. Следовательно конус H имеет правый знак. Предложение доказано.

Предложение 1.4.4. Пусть $\{h_k\}_{k=1}^n$ есть ST_+ —система, а функции $\{\varepsilon_k h_k\}_{k=1}^n$ —образующие конуса

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k \varepsilon_k h_k : \alpha_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, n \right\},$$

при этом числа ε_k , $k = 1, 2, \dots, n$ имеют чередующиеся знаки и $|\varepsilon_k| = 1$ для любого k . Если данная T — система продолжаема на $[a_1; b_1]$ ($a_1 < a < b < b_1$), то конус H имеет правый знак и обладает B — свойством.

Доказательство. Существование элемента из конуса, для которого произвольные $n - 1$ точки являются его нулями достаточно очевидно, если элемент представить в виде

$$h(t) = c \Delta \begin{pmatrix} \varepsilon_1 h_1 & \varepsilon_2 h_2 & \dots & \varepsilon_{n-1} h_{n-1} & h_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & t \end{pmatrix}.$$

Проводя аналогичные рассуждения как и в предложении 1.4.3 можно доказать, что все элементы конуса, имеющие на $[a; b]$ $(n - 1)$ нулей, справа от последнего нуля принимают значения одного знака. Таким образом, конус H имеет правый знак. Построение по произвольному набору различных точек $t_1 < t_2 < \dots < t_r$, $r < n - 1$ интервала $(a; b)$

элементов, принадлежащих конусу, которые обращаются в нуль в этих точках (причем нули простые) и принимают справа от последнего нуля значения разных знаков, основано на продолжаемости ST – системы и осуществляется следующим образом. К уже выбранным r точкам интервала $(a; b)$ сначала добавляем $n - 1 - r$ точек, принадлежащих $(a_1; a)$. Получим первый набор из $n - 1$ точки отрезка $[a_1; b]$. Затем к данным r точкам добавим одну точку из интервала $(b; b_1)$ и $n - 2 - r$ точек из интервала $(a_1; a)$. Строим полиномы по данной системе образующих, которые в построенных точках обращаются в нуль, и имеют неотрицательные коэффициенты. Ясно, что сужение этих полиномов на отрезок $[a; b]$ искомые элементы конуса. Предложение доказано.

Предложение 1.4.4 имеет следующее обобщение.

Предложение 1.4.5. Пусть $\sigma \in \{-1; 1\}$ и $\{h_k\}_{k=1}^n - T$ – система на отрезке $[a; b]$, которая продолжаема на отрезок $[a_1; b_1]$, причем $a_1 < a < b < b_1$, и обладает свойством: для любых точек $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1}$ интервала $(a_1; b_1)$ существует элемент

$$g = \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k, \quad \alpha_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

имеющий данные точки своими нулями и принимающий справа от последнего нуля значения со знаком σ . Если σ есть правый знак конуса

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, n \right\} \subset C[a; b],$$

то он обладает B – свойством.

Замечание 1.4.1. Нетрудно видеть, что множество конусов, обладающих свойствами, отмеченными в предложении 1.4.4, является подмножеством множества конусов, описанных в предложении 1.4.5.

Приведем соответствующие примеры.

Пример 1. Конус, образующими которого являются функции

$$h_1(t) = 1, \quad h_2(t) = t, \quad h_3(t) = t^2, \quad \dots, \quad h_n = t^{n-1}, \quad \text{где } t \in [a; b], \quad b < 0,$$

удовлетворяет условиям предложения 1.4.5, имеет правый знак равный $\delta=1$. Однако, указанная система функций не является ST – системой

ни на каком отрезке, принадлежащем отрицательной полуоси.

Пример 2. Так как производная второго порядка функции

$$g(t) = \frac{1}{1+t}, \quad t \in [a; b], \quad [a; b] \subset (-1; +\infty)$$

положительна, то $\{1, t, g(t)\}$ — T_+ -система на $[a; b]$. Положим $[a; b] = [-0, 8; -0, 6]$, $[a_1; b_1] = [-0, 9; -0, 5]$. Рассмотрим произвольные точки $t_1, t_2 \in [a_1; b_1]$, причем $t_1 < t_2$. Построим полином

$$h(t) = \mu_1 + \mu_2 t + \mu_3 g(t),$$

обращающийся в нуль в этих точках и имеющий положительные коэффициенты. Для этого положим

$$h(t) = \Delta \begin{pmatrix} 1 & t & g(t) \\ t_1 & t_2 & t \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$h(t) = \left(\frac{t_1}{1+t_2} - \frac{t_2}{1+t_1} \right) + \left(\frac{1}{1+t_1} - \frac{1}{1+t_2} \right) t + (t_2 - t_1)g(t).$$

Ясно, что коэффициенты полинома положительны, но рассмотренная система функций не является ST — системой на данных отрезках.

Замечание 1.4.2. Конусы, которые определены в предложениях 1.4.3, 1.4.4, 1.4.5 содержат элементы, принимающие только отрицательные или только положительные значения на отрезке $[a; b]$.

Точки, принадлежащие множеству $R(f; h)$ максимального уклонения функции $f \in C[a; b]$ от элемента $h \in H$, где

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\},$$

называются e — точками.

Если $\|f - h\| = (h - f)(x)$, то x называется e^+ — точкой, в противном случае x называется e^- — точкой.

Точки $t_1, t_2, \dots, t_p, t_1 < t_2 < \dots < t_p$, множества $R(f; h_0)$ такие, что числа $\delta_k = \text{sign}(f(t_k) - h_0(t_k))$, $k = 1, 2, \dots, p$ имеют чередующиеся знаки назовем чебышевским альтернансом длины p .

Теорема 1.4.2. Если конус Чебышева H порядка n обладает B — свойством и содержит строго положительную и строго отрицательную функции, то для любой функции f и э.н.п. h_0 множество $R(f; h_0)$ содержит не менее n точек

$$t_1, t_2, \dots, t_p, t_1 < t_2 < \dots < t_p,$$

таких, что числа $\delta_k = \text{sign}(f(t_k) - h_0(t_k))$ ($k = 1, 2, \dots, p$) имеют чередующиеся знаки.

Доказательство. Множество $R(f; h_0)$ содержит по меньшей мере одну точку. Если предположить, что оно состоит, например, только из e^+ — точек, то на нем разность $f - h_0$ принимает только отрицательные значения. А так как конус содержит строго отрицательную функцию, то по теореме 1.2.3 функция h_0 не может быть э.н.п. функции f . Таким образом, наличие в конусе H строго положительной и строго отрицательной функций обеспечивает существование во множестве $R(f; h_0)$ как e^- — так и e^+ — точек.

Покажем теперь существование чебышевского альтернанса длины $p \geq n$. Предположим, что $p < n$. Построим систему отрезков $\{\Delta_k\}_{k=1}^p$ обладающих следующими свойствами:

1. $\Delta_k \cap \Delta_j = \emptyset$, $k \neq j$;
2. Δ_k содержит e^- — точки одного знака, причем, если, например, Δ_k содержит e^+ — точки, то Δ_{k+1} содержит только e^- — точки, $k = 1, 2, \dots, p$;
3. $R(f; h_0) \subset \bigcup_{k=1}^p \Delta_k$.

Пусть отрезки пронумерованы в порядке расположения на числовой прямой. Выбирая между каждыми двумя отрезками Δ_k , Δ_{k+1} произвольную точку, не принадлежащую им, и используя B — свойство конуса, построим элемент, который в этих точках равен нулю и принимает на $R(f; h_0)$ значения того же знака, что и разность $f - h_0$. Тогда по теореме 1.2.3 элемент h_0 не является э.н.п. функции f . Полученное противоречие доказывает теорему.

Из приведенных выше результатов следует

Теорема 1.4.3. Пусть конус Чебышева H порядка n обладает B — свойством и имеет правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$, функция $f \in C[a; b]$, $f \notin H$.

Для того чтобы нулевой элемент Θ был э.н.п. функции f , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. Существуют точки $t_1 < t_2, \dots, t_{n+1}$, принадлежащие множеству $R(f; \Theta)$, такие, что числа $a_k = \text{sign} f(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n+1$ имеют чередующиеся знаки;
2. Существует лишь n точек $z_1 < z_2 < \dots < z_n$, принадлежащих множеству $R(f; \Theta)$, таких, что числа $b_k = \text{sign} f(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеют чередующиеся знаки и $-\delta b_n > 0$.

Доказательство. Необходимость. Так как конус обладает B — свойством то существует чебышевский альтернанс длины $p \geq n$. Поэтому, если $p \geq n+1$, то выполнено условие 1. Пусть $p = n$. Тогда в силу предложения 1.4.2 имеем $-\delta b_n > 0$.

Достаточность. Если выполнено условие 1, то из предложения 1.4.1 следует, что нулевой элемент наилучшим образом приближает функцию f .

При выполнении условия 2 нулевой элемент Θ — э.н.п. функции f в силу предложения 1.4.2. Теорема доказана.

Из теоремы 1.2.1 следует

Теорема 1.4.4. Пусть H — конус Чебышева порядка n , $f \in C[a; b]$, $f \notin H$, $h_0 \in H$, конус $H_{I(h_0)}$ имеет правый знак равный δ и обладает B —свойством. Для того чтобы h_0 был э.н.п. функции f , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. Существуют точки $t_1 < t_2, \dots, t_{n+1}$, принадлежащие множеству $R(f; h_0)$, такие, что числа $a_k = \text{sign}(f(t_k) - h_0(t_k))$, $k = 1, 2, \dots, n+1$ имеют чередующиеся знаки;
2. Существует лишь n точек $z_1 < z_2 < \dots < z_n$, принадлежащих множеству $R(f; h_0)$, таких, что числа $b_k = \text{sign}(f(t_k) - h_0(t_k))$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеют чередующиеся знаки и $-\delta b_n > 0$.

Приведем теперь необходимый признак э.н.п. при аппроксимации непрерывных функций элементами квазичебышевского конуса конечного порядка.

Пусть $h_1, h_2, \dots, h_n$ — образующие конуса H , т.е.

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\},$$

где m — целое неотрицательное число.

Теорема 1.4.5. Пусть конус H содержит функции, принимающие только положительные и отрицательные значения, $f \in C[a; b]$, $f \notin H$, $h_0 \in H$, конус $H_{I(h_0)}$ является квазичебышевским порядка $r \geq 2$, имеет

правый знак равный δ и содержит чебышевский конус H_r размерности и порядка r с правым знаком равным δ , обладающий B — свойством.

Если h_0 есть э.н.п. функции f в конусе H , то выполнено одно из условий (1), (2) теоремы 1.4.1.

Доказательство. Отметим, что наличие в конусе $H_{I(h_0)}$ строго положительного и строго отрицательного элементов гарантирует существование во множестве максимального уклонения $R(f, h_0)$ как e^+ —, так и e^- — точек.

Если предположить, что длина чебышевского альтернанса меньше, чем r , то используя свойства конуса $H_{I(h_0)}$, нетрудно построить элемент $v \in H_{I(h_0)}$, который в точках множества $R(f, h_0)$ принимает значения того же знака, что и разность $f - h_0$. Таким образом, длина чебышевского альтернанса больше или равна r .

Предположим теперь, что длина альтернанса $y_1, y_2, \dots, y_p$ равна r , т.е. $p = r$, а $\delta(f - h_0)(y_r) > 0$. Из теоремы 1.2.1 следует, что нулевой элемент Θ есть э.н.п. функции $f - h_0$ в конусе $H_{I(h_0)}$. Чебышевское подпространство

$$H_0 = \text{lin } H_r,$$

которое является линейной оболочкой конуса H_r , содержит элемент $w \notin H_{I(h_0)}$, удовлетворяющий неравенству

$$\|f - h_0 - w\| < \|f - h_0\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned} (-1)^{r-k} \delta(f - h_0 - w)(y_k) &< (-1)^{r-k} \delta(f - h_0)(y_k), \\ \delta(-1)^{r-k+1} w(y_k) &< 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \\ \delta w(y_r) &> 0. \end{aligned}$$

Элемент $w \in H_0$ имеет ровно $r - 1$ нулей на $[a; b]$ и справа от последнего нуля принимает значения со знаком δ . Поэтому по свойству чебышевских систем w принадлежит конусу H_r и следовательно конусу $H_{I(h_0)}$. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Из теорем 1.4.1, 1.4.5 следует

Теорема 1.4.6. Пусть $f \in C[a; b]$, $f \notin H$, $h_0 \in H$. Если конусы $H, H_{I(h_0)}$ обладают указанными в теореме 1.4.5 свойствами, то элемент h_0 есть э.н.п. функции f в конусе H тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий (1), (2) теоремы 1.4.1.

5. Конусы Хаара. Критерий элемента наилучшего приближения

В параграфе будут рассмотрены чебышевские конусы специального вида. Впервые конусы Хаара определила П.Пейскер в работе /12/, там же были исследованы их свойства и доказан критерий э.н.п. для непрерывных на отрезке функций в терминах чебышевского альтернанса с использованием понятия правого знака конуса.

Пусть функции $h_1, h_2, \dots, h_n \in C[a; b]$ образуют линейно независимую систему на отрезке $[a; b]$, m — целое неотрицательное число.

Рассмотрим конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k h_k : \mu_k \in R, \mu_i \geq 0 \text{ для } i > m \right\}.$$

Конус $H \subset C[a; b]$ называется конусом Хаара, если для каждого множества индексов L , содержащего p элементов и удовлетворяющего включениям

$$\{1, 2, \dots, m\} \subset L \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

система функций $\{h_j : j \in L\}$ есть T — система порядка p .

Если $m < n$, то конус Хаара будем называть правильным.

Конус H является конусом Хаара в случае, когда $\{h_k\}_{k=1}^n$ есть D — система.

Очевидно, что каждый конус Хаара размерности n является квазичебышевским некоторого порядка r , где $m \leq r \leq n$. Поэтому для всякого конуса Хаара будем указывать порядок.

Каждой функции $h = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k \in H$ поставим в соответствии множество индексов

$$J(h) = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{i \geq m+1 : \mu_i > 0\},$$

и натуральное число $k(h)$, равное количеству элементов во множестве $J(h)$.

Из определения конуса Хаара и основных свойств чебышевских систем следует, что для любого набора индексов $l_1, l_2, \dots, l_k$ таких, что

$$\{1, 2, \dots, m\} \subset \{l_1, l_2, \dots, l_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

определители $\det (h_{l_1}(t_j) \ h_{l_2}(t_j) \ \dots \ h_{l_k}(t_j))_{j=1}^k$ имеют один и тот же знак для произвольных точек

$$a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b.$$

Остановимся теперь на основных свойствах конусов Хаара, с помощью которых будет получен критерий э.н.п. при аппроксимации непрерывных функций элементами конуса Хаара.

Пусть $H \subset C[a; b]$ есть конус Хаара размерности n с порядком r , $m \leq r \leq n$ и $h_1, h_2, \dots, h_n$ — его образующие. Через H_m обозначим m — мерное чебышевское подпространство, базисом которого являются функции $h_1, h_2, \dots, h_m$. Ясно, что $H_m \subset H$.

Предложение 1.5.1. Пусть $l \in N$, $m + 1 \leq l \leq r$. Тогда существуют l — мерный конус Хаара H_l , $H_m \subset H_l \subset H$, и функция $v \in H_l$, имеющая в точности $l - 1$ различных нулей на отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Так как порядок конуса Хаара H равен r , то множество

$$M_l = \{v \in H : v \neq \Theta, v \text{ имеет по крайней мере } l - 1 \text{ нулей}\} \neq \emptyset.$$

Выберем функцию $v_0 \in M_l$ с минимальным значением $k(v_0)$ и обозначим через $s_1 < s_2 < \dots < s_{l-1}$ первые ее $l - 1$ нулей.

Ясно, что $k(v_0) \geq l$. Покажем, что $k(v_0) = l$. Пусть $k(v_0) > l$ и множество индексов L , содержащее l элементов, такое, что

$$\{1, 2, \dots, m\} \subset L \subset J(v_0).$$

Обозначим $H_L = \text{lin}\{h_i : i \in L\}$. Пространство H_L является чебышевским и имеет размерность равную l . Поэтому существует ненулевая функция $h \in H_L$, обращающаяся в нуль в точках $s_1 < s_2 < \dots < s_{l-1}$. Обозначив $I = \{1, 2, \dots, m\}$, запишем

$$\begin{aligned} h &= \sum_{i \in I} \mu_i h_i + \sum_{j \in L \setminus I} \mu_j h_j, \\ v_0 &= \sum_{i \in I} \nu_i h_i + \sum_{j \in L \setminus I} \nu_j h_j + \sum_{k \in J(v_0) \setminus L} \nu_k h_k. \end{aligned}$$

Если $\mu_j \geq 0$ для всех $j \in L \setminus I$, то элемент $h \in H$ и его характеристика $k(h) < k(v_0)$. Последнее противоречит выбору элемента v_0 . Обозначим через

$$K = \{j \in L \setminus I : \mu_j < 0\}.$$

Вспоминая, что $\nu_j > 0$, $j \in L \setminus I$, подберем положительные числа a_j так, чтобы $\nu_j + a_j \mu_j = 0$, $j \in K$. Положим $a_{j_0} = \min\{a_j : j \in K\}$. Тогда

$$\nu_j + a_{j_0} \mu_j \geq 0, \quad j \in K \text{ и } \nu_{j_0} + a_{j_0} \mu_{j_0} = 0.$$

Таким образом, функция $w = v_0 + a_{j_0} h \in M_l$ и число $k(v_0) > k(w)$, что противоречит выбору элемента v_0 . Следовательно $k(v_0) = l$ и

$$H_l = \left\{ \sum_{i \in J(v_0)} a_i h_i : a_i \geq 0 \text{ для } i \geq m+1 \right\}$$

искомый конус Хаара размерности l , причем $v_0 \in H_l$. Предложение доказано.

Предложение 1.5.2. Пусть $m+1 \leq l \leq r$, H_l — конус Хаара размерности l и $H_m \subset H_l \subset H$. Если H_l содержит функцию, имеющую ровно $l-1$ различных нулей, то в H_l существуют ненулевые функции, обращающиеся в нуль в произвольных $l-1$ точках отрезка $[a; b]$, и конус H_l имеет правый знак.

Доказательство. Пусть функции $h_1, \dots, h_m, h_{i_{m+1}}, \dots, h_{i_l}$ являются образующими конуса Хаара H_l и $v_0 \in H_l$ обращается в нуль в $l-1$ точках $s_1 < s_2 < \dots < s_{l-1}$ отрезка $[a; b]$. Так как в l -мерном пространстве Чебышева функции с $l-1$ заранее заданными нулями определены с точностью до постоянных множителей, то существует $c_0 \in R$ такое, что

$$v_0(t) = c_0 \det \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_m & h_{i_{m+1}} & \dots & h_{i_{l-1}} & h_{i_l} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m & s_{m+1} & \dots & s_{l-1} & t \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что функция

$$w(t) = c_0 \det \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_m & h_{i_{m+1}} & \dots & h_{i_{l-1}} & h_{i_l} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m & t_{m+1} & \dots & t_{l-1} & t \end{pmatrix}$$

при любых $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{l-1} \leq b$ принадлежит конусу H_l . Действительно, раскладывая последний определитель по элементам последней строки, получим, что для функции w коэффициенты при $h_{i_{m+1}}, \dots, h_{i_l}$ имеют те же знаки, что и соответствующие коэффициенты функции v_0 . Поэтому $w \in H_l$. В l -мерном правильном конусе Хаара функции, имеющие заданные $l-1$ нулей, отличаются друг от друга на положительный сомножитель. Поэтому все функции конуса H_l , обращающиеся в нуль в

$l - 1$ точке $[a; b)$, справа от последнего нуля принимают значения одного фиксированного знака. Следовательно конус H_l имеет правый знак. Предложение доказано.

Предложение 1.5.3. *Правильный конус Хаара H имеет правый знак.*

Доказательство. Пусть порядок конуса H равен r . Покажем, что любые два конуса $H_r, G_r \subset H$ размерности r , удовлетворяющие условиям предложения 1.5.2, имеют один и тот же правый знак.

Пусть функции $v \in H_r, w \in G_r$ обращаются в нуль в точках $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1} < b$ и принимают справа от последнего нуля значения разных знаков. Тогда нетрудно подобрать положительные числа c, d такие, что функция $cv + dw \in H$ имеет дополнительный нуль справа от точки t_{r-1} , что противоречиво, т.к. порядок конуса H равен r .

Далее, предположим, что функции $v \in H_r, w \in G_r$, обращаются в нуль соответственно в точках

$$a \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{r-1} < b, \quad a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1} < b$$

и принимают справа от последнего нуля значения разных знаков. Построим функцию $v_0 \in H_r$, которая в точках $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1} < b$ равна нулю и принимает справа от последнего нуля значения со знаком равным $\sigma(H_r)$, где $\sigma(H_r)$ — правый знак конуса H_r . Повторяя изложенные выше рассуждения, получим существование в конусе H функции, которая имеет не менее r нулей на $[a; b]$. Вновь получили противоречие.

Рассмотрим теперь случай, когда произвольные функции из H , не обязательно принадлежащие r — мерному подконусу конуса H , имеют ровно $r - 1$ нулей на отрезке $[a; b]$.

Предположим вначале, что существуют две функции $f, g \in H$, которые имеют своими нулями точки $z_1 < z_2 < \dots < z_{r-1}$, принадлежащие $[a; b)$, и справа от последнего нуля принимают значения разных знаков. Пусть $z_0 \in (z_{r-1}; b)$. Рассмотрим

$$\psi = \frac{f}{|f(z_0)|} + \frac{g}{|g(z_0)|} \in H.$$

Тогда $\psi(z_k) = 0, k = 0, 1, \dots, r - 1$, т.е. $\psi \in H$ имеет не менее r нулей. Следовательно $\psi = \Theta$ и

$$f = -\frac{|f(z_0)|}{|g(z_0)|}g.$$

Таким образом, функции $f, -f$ принадлежат конусу H . Следовательно $f \in H_m$. Полученное противоречие показывает, что функции f и g справа от последнего нуля принимают значения одного знака.

Предположим теперь, что нашлись точки

$$z_1 < z_2 < \dots < z_{r-1}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_{r-1},$$

принадлежащие $[a; b)$, и функции $f, g \in H$, которые соответственно обращаются в нуль в этих точках и справа от последнего нуля принимают значения разных знаков.

Положим $I = \{1, 2, \dots, m\}$ и

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^n \alpha_j h_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j h_j + \sum_{j \in J(f) \setminus I} \alpha_j h_j, \\ g &= \sum_{j=1}^n \beta_j h_j = \sum_{j=1}^m \beta_j h_j + \sum_{j \in J(g) \setminus I} \beta_j h_j. \end{aligned}$$

Построим два конуса Хаара

$$\begin{aligned} H_f &= \left\{ \sum_{j=1}^m \mu_j h_j + \sum_{j \in J(f) \setminus I} \mu_j h_j : \mu \geq 0, j > m \right\}, \\ H_g &= \left\{ \sum_{j=1}^m \nu_j h_j + \sum_{j \in J(g) \setminus I} \nu_j h_j : \nu \geq 0, j > m \right\}, \end{aligned}$$

принадлежащие конусу H и имеющие порядок равный r . Введем обозначения

$$\delta = \text{sign}\{f(z) : z > z_{r-1}\}, \quad \sigma = \text{sign}\{g(s) : s > s_{r-1}\}.$$

Выделим в конусе H_f подконус $H_r(f)$ размерности r , имеющий правый знак, равный δ . Если подконус $H_r(f)$ имеет правый знак равный σ , то существует элемент $h \in H_r(f)$ такой, что

$$h(z_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r-1, \quad h(z) \sigma > 0 \text{ для всех } z > z_{r-1}.$$

Тогда

$$\varphi = \frac{f}{|f(z_0)|} + \frac{h}{|h(z_0)|} \in H, \quad z_0 > z_{r-1},$$

имеет не менее r нулей на $[a; b]$.

Аналогично можно выделить в конусе H_g подконус $H_r(g)$ размерности r , который имеет правый знак равный σ . Однако, в начале доказательства теоремы было показано, что конусы $H_r(f)$ и $H_r(g)$ не могут иметь разные правые знаки. Таким образом функции f, g справа от последнего нуля принимают значения одного знака. Предложение доказано.

В дальнейшем, знак конуса H будем обозначать $\sigma(H)$. Кроме того, через $H_{l,\varepsilon}$, $H_m \subset H_{l,\varepsilon} \subset H$, обозначим конус Хаара размерности l , содержащий функцию с различными $l - 1$ нулями, и правым знаком равным ε . Отметим, что при $l = r$ возможен только знак $\sigma(H)$. В случае, когда $l < r$, подконус может иметь правый знак равный как 1, так и -1.

Предложение 1.5.4. Для любых $m + 1 \leq l < r$ и $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ существует подконус $H_{l,\varepsilon}$.

Доказательство. Согласно предложению 1.5.1 существует $l+1$ -мерный конус Хаара H_{l+1} , содержащий функцию v с l различными нулями

$$a \leq s_1 < s_2 < \dots < s_l < b.$$

Так как все нули функции v простые, то существуют точки t_1, t_2 , принадлежащие интервалу $(s_{l-1}; b)$, такие, что $v(t_1) < 0$, $v(t_2) > 0$.

Обозначим через $M_{l,\varepsilon}$ множество ненулевых функций из конуса H , которые на полуинтервале $[a; b)$ имеют по крайней мере $l - 1$ нулей, при этом в некоторой точке интервала $(a; b)$ справа от последнего нуля принимают значения со знаком равным ε . Множество $M_{l,\varepsilon} \neq \emptyset$.

Выберем $v_0 \in M_{l,\varepsilon}$ с минимальным значением $k(v_0)$. Как и в доказательстве предложения 1.5.1 приходим к заключению, что $k(v_0) = l$. Таким образом, функция v_0 имеет в точности $l - 1$ нулей на $[a; b)$ и принимает справа от последнего нуля значения со знаком равным ε . Следовательно, конус

$$H_{l,\varepsilon} = \left\{ \sum_{i \in J(v_0)} \mu_i h_i : \mu_i \geq 0 \ i \geq m + 1 \right\}$$

искомый. Предложение доказано.

Пусть конус Хаара H размерности n содержит m — мерное подпространство. Так как для чебышевских подпространств критерий э.н.п. известен, то ограничимся рассмотрением случая, когда H — правильный конус. Считаем, что r — порядок конуса, а σ — его правый знак.

Теорема 1.5.1. /12/ Пусть $f \in C[a; b]$, $f \notin H$. Следующие условия эквивалентны:

1. Нулевая функция является э.н.п. функции f ;
2. Существуют точки $t_1 < t_2 < \dots < t_r$, принадлежащие множеству $R(f; \Theta)$, такие, что числа $a_k = f(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, r$, имеют чередующиеся знаки, причем $-\sigma f(t_r) > 0$.

Доказательство. Достаточность. Допустим, что существуют точки

$$a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq b$$

такие, что

$$(-\sigma)(-1)^{r-i}f(t_i) = \|f\|, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Предположим, что ненулевая функция v является э.н.п. для f в H , при этом $\|f - v\| < \|f\|$. Тогда для каждого i ($1 \leq i \leq r$) будем иметь

$$(-\sigma)(-1)^{r-i}(f - v)(t_i) \leq \|f - v\| < \|f\| = (-\sigma)(-1)^{r-i}f(t_i).$$

Это означает, что

$$(-1)^{r-i}(-\sigma)f(t_i) > 0, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Поэтому v имеет ровно $r - 1$ нулей и справа от последнего нуля принимает значения со знаком $-\sigma$. Полученное противоречие доказывает, что нулевая функция является э.н.п. функции f .

Необходимость. Пусть Θ есть э.н.п. функции f . Предположим, что условие 2 не выполнено. Обозначим через $s_1 < s_2 < \dots < s_l$ альтернанс длины l для функции f и пусть $\varepsilon f(s_l) > 0$.

Возможны два случая:

1. $l < r$;
2. $l = r$, но $\varepsilon = \sigma$.

Так как конус H содержит чебышевское подпространство размерности m , то $l \geq m + 1$. Рассмотрим подконус Хаара $H_{l,\varepsilon}$. Пусть $K = \text{lin} H_{l,\varepsilon}$. Тогда существует функция $h \in K$, для которой $\|f - h\| < \|f\|$.

Повторяя приведенные выше рассуждения, получим

$$\varepsilon(-1)^{l-i}h(s_i) > 0, \quad 1 \leq i \leq l.$$

Поэтому функция h имеет ровно $l - 1$ нулей и справа от последнего нуля принимает значения со знаком ε . Последнее означает, что $h \in H_{l,\varepsilon}$. Так как $H_{l,\varepsilon} \subset H$ и $\|f - h\| < \|f\|$, то нулевая функция не является

э.н.п. функции f . Полученное противоречие доказывает необходимость. Теорема доказана полностью.

Пусть H — конус Хаара размерности n содержит m — мерное подпространство, функция $f \in C[a; b] \setminus H$, элемент $h_0 \in H$ и $\{h_k\}_{k=1}^n$ — базисные функции конуса H . Положим

$$H_{J(h_0)} = \left\{ \sum_{i=1}^n \mu_i h_i : \mu_i \in R, \mu_i \geq 0, i \notin J(h_0) \right\}.$$

Ясно, что $H_{J(h_0)}$ есть конус Хаара. Пусть p — его порядок, а δ — правый знак.

Из теоремы 1.2.2 следует

Теорема 1.5.2. Для того чтобы $h_0 \in H$ был э.н.п. функции f , необходимо и достаточно, чтобы существовали точки $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ из отрезка $[a; b]$, для которых выполнены следующие условия:

1. Точки $t_1, t_2, \dots, t_p \in R(f; h_0)$;
2. Числа $a_k = \text{sign}(f(t_k) - h_0(t_k))$, $k = 1, 2, \dots, p$, имеют чередующиеся знаки и $-\delta(f(t_p) - h_0(t_p)) > 0$.

Замечание 1.5.1. Из перечисленных свойств правильных конусов Хаара размерности n с порядком r следует существование чебышевского подконуса, размерность и порядок которого равны r , обладающего B — свойством. Поэтому критерии э.н.п. при аппроксимации непрерывных функций элементами конусов Хаара легко получаются из теорем четвертого параграфа.

6. Единственность элемента наилучшего приближения

Вопрос о единственности элемента наилучшего приближения для любой непрерывной функции является ключевым как в классической теории приближения, так и в теории аппроксимации с ограничениями. В случае приближения непрерывных функций элементами конечномерного подпространства ответ на этот вопрос дает теорема А. Хаара.

В параграфе будут приведены некоторые необходимые условия единственности э.н.п. при аппроксимации непрерывных функций элементами конуса с конечным числом образующих, а также примеры конусов специального вида, для которых всякая непрерывная функция будет иметь единственный элемент наилучшего приближения.

Пусть система $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ непрерывных на метрическом компакте T функций линейно независима и m — неотрицательное целое число.

Рассмотрим конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k h_k : \mu_k \in R, \mu_j \geq 0, j > m \right\}.$$

Теорема 1.6.1. *Если для любой функции $f \in C(T)$ э.н.п. в H единствен, то конус H является квазичебышевским некоторого порядка r ($r \leq n$).*

Доказательство. Предположим противное. Пусть ненулевой элемент

$$v = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k \in H$$

на компакте T имеет n различных нулей. Обозначим $z_1, z_2, \dots, z_n$ его нули и рассмотрим определитель

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ z_1 & z_2 & \dots & z_n \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\Delta = 0$. Отсюда следует, что система линейных уравнений

$$a_1 h_j(z_1) + a_2 h_j(z_2) + \dots + a_n h_j(z_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

относительно a_i имеет ненулевое решение. Через $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ обозначим какое-нибудь ненулевое решение этой системы. Заметим, что числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ обладают тем свойством, что каков бы ни был элемент

$h = \sum_{k=1}^n c_k h_k \in H$ верно равенство

$$\sum_{k=1}^n a_k h(z_k) = 0. \quad (5)$$

Действительно, для $h \in H$ имеем

$$\sum_{j=1}^n a_j h(z_j) = \sum_{j=1}^n a_j \left(\sum_{k=1}^n c_k h_k(z_j) \right) = \sum_{k=1}^n c_k \left(\sum_{j=1}^n a_j h_k(z_j) \right) = 0.$$

Построим непрерывную на T функцию g , удовлетворяющую следующим условиям:

$$g(z_i) = \text{sign } a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad \|g\| = 1.$$

Положим $M = \|v\|$ и

$$f = g \left(1 - \frac{1}{M} |v| \right).$$

Функция f обладает свойствами:

1. $f(z_i) = g(z_i) = \text{sign } a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$
2. $\|f\| = 1;$
3. $E(f; H) = 1.$

Свойства (1), (2) очевидны, докажем последнее. Имеем

$$E(f; H) \leq \|f\| = 1.$$

Допустим, что $E(f; H) < 1$. Пусть $\psi \in H$ — э.н.п. функции f . Тогда для тех i , при которых $a_i \neq 0$, окажется

$$\text{sign } \psi(z_i) = \text{sign } f(z_i) = \text{sign } a_i,$$

т.к.

$$\psi(z_i) = f(z_i) - (f(z_i) - \psi(z_i)),$$

причем $|f(z_i)| = 1$, $|f(z_i) - \psi(z_i)| \leq E(f; H) < 1$. Последнее противоречит тождеству (5). Свойство (3) доказано.

При любом δ ($0 < \delta < \frac{1}{M}$) элемент $\delta v \in H$ есть э.н.п. функции f , т.к. для всех $z \in T$ верны неравенства

$$\begin{aligned} |f(z) - \delta v(z)| &\leq |g(z)| \left(1 - \frac{1}{M} |v(z)| \right) \leq \\ &\leq 1 - \left(\frac{1}{M} - \delta \right) |v(z)| \leq 1 = E(f; H). \end{aligned}$$

Нулевая функция также является э.н.п. f при аппроксимации элементами конуса H . Таким образом, для функции f э.н.п. не единствен. Теорема доказана.

Отметим, что полученные необходимые условия единственности э.н.п. не являются достаточными. Соответствующие примеры были уже рассмотрены ранее.

Приведем еще одно необходимое условие единственности э.н.п., которое сформулируем следующим образом.

Предложение 1.6.1. Пусть $\sigma \in \{-1; 1\}$, конус H определен следующим образом

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k h_k : \mu_k \geq 0 \right\} \subset C(T).$$

Если найдется точка $x_0 \in T$ такая, что:

1. $\sigma h_k(x_0) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$;
2. Существует ненулевой элемент $v \in H$, который обладает свойствами:

$$v(x_0) = 0; \sigma v(x) \geq 0 \text{ для всех } x \in T,$$

то существует функция $f \in C(T)$, имеющая по крайней мере два различных элемента наилучшего приближения.

Доказательство. Ради определенности, положим $\sigma = 1$.

Пусть $a = \frac{1}{2}\|v\|$ и $f(x) = v(x) - a$, $x \in T$. Для любого $h \in H$ имеем

$$\|f - h\| \geq |f(x_0) - h(x_0)| = h(x_0) + a \geq a.$$

Так как $\|f\| = a = \|f - v\|$, то $E(f; H) = a$. Поэтому нулевой элемент и $v \in H$ являются э.н.п. функции f при аппроксимации элементами конуса H . Предложение доказано.

Покажем теперь, что при приближении непрерывных функций элементами конусов: Чебышева, обладающих B — свойством; Хаара, любая непрерывная функция имеет единственный э.н.п..

Теорема 1.6.2. Пусть m — целое неотрицательное число, конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k h_k : \mu_k \geq 0, k > m \right\}$$

является чебышевским порядка n , имеет правый знак равный σ и обладает B — свойством. Тогда для любой функции $f \in C[a; b]$ э.н.п. в конусе H единствен.

Доказательство. Предположим, что некоторая функция $f \in C[a; b]$ имеет два элемента наилучшего приближения в конусе H . Обозначим их через ψ, φ . Так как функция $w = \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}\varphi \in H$ также есть э.н.п. для f , то по теореме 1.4.2 множество $R(f; w)$ максимального уклонения w от f содержит не менее n точек. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_n \in R(f; w)$. Тогда

$$E(f; H) = \|f - w\| = |f(t_i) - w(t_i)| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{1}{2}(f(t_i) - \psi(t_i)) + \frac{1}{2}(f(t_i) - \varphi(t_i)) \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2} |f(t_i) - \psi(t_i)| + \frac{1}{2} |f(t_i) - \varphi(t_i)| \leq E(f; H).
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что $f(t_i) - \psi(t_i) = f(t_i) - \varphi(t_i)$, и тогда $\psi(t_i) = \varphi(t_i)$, $1 \leq i \leq n$. Однако, конус H является чебышевским порядка n . Поэтому $\psi = \varphi$ и теорема доказана.

Теорема 1.6.3. Пусть m — целое неотрицательное число и

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k h_k : \mu_k \geq 0, k > m \right\} \subset C[a; b]$$

есть конус Хаара порядка r . Тогда для любой функции $f \in C[a; b]$ э.н.п. в конусе H единствен.

Доказательство. Случай, когда $f \in H$ очевиден. Пусть $f \notin H$ и v_1, v_2 суть различные элементы наилучшего приближения функции f в конусе H . Элемент $v = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \in H$ является э.н.п. функции f . Положим

$$I = I(v), I_1 = I(v_1), I_2 = I(v_2).$$

Легко видеть, что $I_1, I_2 \subset I$, а $H_{I_1}, H_{I_2} \subset H_I$. Возможны два случая:

1. H_I — чебышевское подпространство;
2. H_I — правильный конус Хаара.

Так как нулевой элемент Θ есть э.н.п. функции $f - v$ в конусе H_I и $f \notin H_I$, то в обоих случаях существует чебышевский альтернанс длины не меньшей, чем r . Повторяя вышеизложенное рассуждение, получим, что в этих точках элементы v_1, v_2 совпадают. Таким образом, отличный от нулевого, элемент $v_1 - v_2 \in K_{I_2} \subset K_I$ имеет на $[a; b]$ не менее, чем r различных нулей. Поэтому $v_1 = v_2$. Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Глава 2. Наилучшие приближения непрерывных функций элементами конуса конечной размерности с ограничениями

1. Постановка задачи. Основные понятия

Пусть T — метрический компакт, $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций с чебышевской метрикой, которое упорядочено естественным образом, $g \in C(T)$, H — конус в $C(T)$, G — замкнутое подмножество компакта T .

Под задачей наилучшего приближения функции $f \in C(T)$ конусом $H \subset C(T)$ с ограничениями $(H^-; g; G)$ в метрике $C(T)$ будем понимать задачу отыскания величины

$$E_g^-(f; H; G) = \inf \{ \|f - h\| : h \in H, h \leq g \text{ на } G \}.$$

Число $E_g^-(f; H; G)$ назовем величиной наилучшего приближения функции f элементами конуса H с ограничениями $(H^-; g; G)$, а элемент $h \in H$, $h \leq g$ на G , для которого

$$E_g^-(f; H; G) = \|f - h\|,$$

будем называть элементом наилучшего приближения (э.н.п.) функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$.

При $g = f$, $G = T$ задача называется задачей наилучшего нижнего одностороннего приближения функции f элементами конуса H .

Считаем, что конус H имеет конечную размерность, содержит строго отрицательную функцию, а функции

$$h_1, h_2, \dots, h_n \in C(T)$$

являются образующими конуса H , т.е.

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k, \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\},$$

где m — целое неотрицательное число. В этом случае множество

$$\{ \|f - h\| : h \in H, h \leq g \text{ на } G \} \neq \emptyset.$$

Теорема 2.1.1. Для любой функции $f \in C(T)$ элемент наилучшего приближения с ограничениями $(H^-; g; G)$ существует.

Доказательство. Пусть $f \in C(T)$. По определению нижней грани для каждого натурального n найдем $\varphi_n \in H$ такой, что

$$\|f - \varphi_n\| < E_g^-(f; H; G) + \frac{1}{n}, \varphi_n \leq g \text{ на } G.$$

Заметим, что

$$\|\varphi_n\| = \|\varphi_n - f + f\| \leq \|\varphi_n - f\| + \|f\| <$$

$$< E_g^-(f; H; G) + \frac{1}{n} + \|f\| \leq E_g^-(f; H; G) + 1 + \|f\|$$

для любого $n \in N$. Последнее неравенство означает ограниченность последовательности $\{\varphi_n\}$. Так как конус H есть локально компактное множество в $C(T)$, то из данной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность, причем ее предел принадлежит H в силу замкнутости конуса. Считаем, что последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится. Положим

$$h_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n.$$

Переходя к пределу в неравенствах

$$\|f - \varphi_n\| < E_g^-(f; H; G) + \frac{1}{n}, \quad \varphi_n \leq g \text{ на } G$$

при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\|f - h_0\| \leq E_g^-(f; H; G), \quad h_0 \leq g \text{ на } G.$$

Поэтому

$$\|f - h_0\| = E_g^-(f; H; G)$$

и $h_0 \in H$ есть элемент наилучшего приближения функции f элементами конуса H с ограничения $(H^-; g; G)$. Теорема доказана.

Теорема 2.1.2. Для любой функции $f \in C(T)$ множество элементов наилучшего приближения с ограничениями $(H^-; g; G)$ выпукло.

Доказательство. Пусть $f \in C(T)$ и $\varphi, \psi \in H$ суть э.н.п. функции f элементами конуса H с ограничениями $(H^-; g; G)$. Рассмотрим функцию $y = \lambda\varphi + (1 - \lambda)\psi \in H$, $\lambda \in (0, 1)$. Тогда

$$\begin{aligned} E_g^-(f; H; G) &\leq \|f - (\lambda\varphi + (1 - \lambda)\psi)\| = \|\lambda(f - \varphi) + (1 - \lambda)(f - \psi)\| \leq \\ &\leq \lambda\|f - \varphi\| + (1 - \lambda)\|f - \psi\| = E_g^-(f; H; G). \end{aligned}$$

Следовательно

$$E_g^-(f; H; G) = \|f - (\lambda\varphi + (1 - \lambda)\psi)\|,$$

при этом $\lambda\varphi + (1 - \lambda)\psi \leq g$ на G . Таким образом $y \in H$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$. Поэтому множество элементов наилучшего приближения с ограничениями $(H^-; g; G)$ выпукло.

Под задачей наилучшего приближения функции $f \in C(T)$ конусом $H \subset C(T)$ с ограничения $(H^+; g; G)$ в метрике $C(T)$ будем понимать задачу отыскания величины

$$E_g^+(f; H; G) = \inf \{ \|f - h\| : h \in H, h \geq g \text{ на } G \}.$$

Число $E_g^+(f; H; G)$ назовем величиной наилучшего приближения функции f элементами конуса H с ограничениями $(H^+; g; G)$, а элемент $h \in H$, $h \geq g$ на G , для которого

$$E_g^+(f; H; G) = \|f - h\|,$$

будем называть элементом наилучшего приближения (э.н.п.) функции f с ограничениями $(H^+; g; G)$.

При $g = f$, $G = T$ задача называется задачей наилучшего верхнего одностороннего приближения функции f элементами конуса H .

Аналогично формулируются и доказываются теоремы о существовании э.н.п. и о выпуклости множества элементов наилучшего приближения с ограничениями $(H^+; g; G)$ при аппроксимации непрерывных функций элементами конуса конечной размерности, содержащего строго положительную функцию.

В случае, когда конус H есть конечномерное чебышевское подпространство, задачи характеристики и единственности э.н.п. для непрерывных на отрезке $[0; 1]$ функций с ограничениями $(H^-; g; G)$ полностью решены В. А. Каминским /7/. Основные результаты сформулированы в терминах чебышевского альтернанса.

Будем говорить, что элемент h_0 , принадлежащий n -мерному чебышевскому подпространству $H \subset C[a; b]$, обладает чебышевским альтернансом длины l относительно функций $\mu, \nu \in C[a; b]$ ($\mu(x) \leq \nu(x)$, $x \in [a; b]$), если

$$\mu(x) \leq h_0(x) \leq \nu(x), \quad x \in [a; b]$$

и существует l различных точек $z_1 < z_2 < \dots < z_l$ отрезка $[a; b]$, в которых значения элемента h_0 поочередно совпадают со значениями одной из функций μ или ν , т.е. либо

$$h_0(z_k) = \mu(z_k), \quad h_0(z_{k+1}) = \nu(z_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, l-1,$$

либо

$$h_0(z_k) = \nu(z_k), \quad h_0(z_{k+1}) = \mu(z_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, l-1.$$

Если $h_0(z) = \nu(z)$, то точка z называется e^+ – точкой. Если же $h_0(z) = \mu(z)$, то z называется e^- – точкой.

Приведем без доказательства основные результаты работы /7/.

Теорема 2.1.3. (В. А. Каминский) Пусть H — n - мерное чебышевское подпространство из $C[0; 1]$. Для того чтобы элемент $p^* \in H$ являлся э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

$$1) \|f - p^*\| \leq \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}, \text{ при этом}$$

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}.$$

2) Для некоторого положительного числа

$$E > \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\},$$

элемент p^* обладает чебышевским альтернансом длины $(n + 1)$ относительно функций

$$F^- = f - E, \quad F^+ = \min\{g; f + E\}.$$

В этом случае элемент p^* единствен и $E = E_g^-(f; H; [a; b])$.

Теорема 2.1.4. (В. А. Каминский) Пусть H — n - мерное чебышевское подпространство из $C[0; 1]$. Для того чтобы элемент $p^* \in H$ являлся э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

$$1) \|f - p^*\| \leq \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}, \text{ при этом}$$

$$E_g^-(f; H; G) = \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}.$$

2) Для некоторого положительного числа

$$E > \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}$$

элемент p^* обладает чебышевским альтернансом длины $(n + 1)$ относительно функций

$$F^- = f - E, \quad F^+ = \min\{g_\infty; f + E\},$$

причем функция g_∞ совпадает с g на множестве G и равна ∞ на его дополнении. В этом случае элемент p^* единствен и $E = E_g^-(f; H; G)$.

Приведем критерий э.н.п. при аппроксимации непрерывных функций элементами конуса конечной размерности с ограничениями $(H^-; g; G)$ в терминах расширенного конуса.

Пусть функции $h_1, h_2, \dots, h_n \in C(T)$ являются образующими для конуса H , т.е.

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k, \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\},$$

$$f \in C(T), h_0 = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k \in H, h_0 \leq g \text{ на } G.$$

Обозначим

$$R(f, h_0) = \{x \in T : \|f - h_0\| = |f(x) - h_0(x)|\},$$

$$I(h_0) = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{k : \mu_k > 0\},$$

$$H_{I(h_0)} = \left\{ \sum_{k=1}^n \nu_k h_k : \nu_k \geq 0, k \notin I(h_0); \nu_i \in R, i \in I(h_0) \right\}.$$

Теорема 2.1.5. Элемент $h_0 \in H$ является э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$ тогда и только тогда, когда нулевой элемент Θ есть э.н.п. функции $f - h_0$ с ограничениями $(H_{I(h_0)}^-; g - h_0; G)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть h_0 есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$. Предположим, что нашелся элемент $v \in H_{I(h_0)}$, $v \leq g - h_0$ на G , для которого

$$\|f - h_0 - v\| < \|f - h_0\|.$$

Если точка $x \in R(f, h_0)$ такова, что $f(x) - h_0(x) = \|f - h_0\|$, то $v(x) > 0$. Для случая, когда $h_0(x) - f(x) = \|f - h_0\|$, получим $v(x) < 0$.

Имеем $h_0 \leq g$, $v + h_0 \leq g$ на G . По индукции покажем, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство

$$h_0 + \frac{1}{n}v \leq g \text{ на } G.$$

При $n = 1$ неравенство верно. Предположим справедливость неравенства для некоторого $n \in N$, т.е. $h_0 + \frac{1}{n}v \leq g$ на G . Умножая данное неравенство на n и складывая с неравенством $h_0 \leq g$ на G , получим

$$v + (n + 1)h_0 \leq (n + 1)g \text{ на } G.$$

Осталось разделить это неравенство на $(n + 1)$ и получить требуемое.

Далее, подберем $n_0 \in N$ таким образом, чтобы выполнялись условия

$$h_0 + \frac{v}{n} \in H, \quad \left\| \frac{v}{n} \right\| < \frac{1}{2} \|f - h_0\|$$

для всех $n \geq n_0$. Для каждого $n \geq n_0$ найдем $y_n \in T$ такой, что

$$\begin{aligned} |f(y_n) - h_0(y_n) - \frac{v(y_n)}{n}| &= \left\| f - h_0 - \frac{v}{n} \right\|, \text{ при этом} \\ \left\| f - h_0 - \frac{v}{n} \right\| &\geq \|f - h_0\| \geq |f(y_n) - h_0(y_n)|. \end{aligned}$$

Так как $\{y_n\}_{n=n_0}^\infty$ есть последовательность точек метрического компакта T , то она содержит сходящуюся подпоследовательность. Без ограничения общности, считаем, что $\{y_n\}_{n=n_0}^\infty$ сходится, при этом

$$y_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \in T.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |f(y_n) - h_0(y_n) - \frac{v(y_n)}{n}| &= |f(y_0) - h_0(y_0)|, \\ |f(y_0) - h_0(y_0)| &\geq \|f - h_0\|. \end{aligned}$$

Следовательно, элемент $y_0 \in R(f, h_0)$. Если $\|f - h_0\| = f(y_0) - h_0(y_0)$, то для достаточно больших n верны неравенства

$$f(y_0) - h_0(y_0) - \frac{v(y_n)}{n} \geq f(y_n) - h_0(y_n) - \frac{v(y_n)}{n} \geq f(y_0) - h_0(y_0).$$

Отсюда получаем, что $v(y_n) \leq 0$. Переходя к пределу, имеем

$$v(y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} v(y_n) \leq 0.$$

Последнее неравенство противоречит тому, что $v(y_0) > 0$. Аналогично можно получить неравенство $v(y_0) \geq 0$ для случая, когда $\|f - h_0\| = h_0(y_0) - f(y_0)$, хотя $v(y_0) < 0$. Полученные противоречия доказывают необходимость.

Достаточность. Если существует элемент $u \in H$, $u \leq g$ на G такой, что

$$\|f - u\| < \|f - h_0\|,$$

т.е. h_0 не является э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$, то элемент $u - h_0 \in H_{I(h_0)}$ обладает свойствами:

$$u - h_0 \leq g - h_0 \text{ на } G, \quad \|f - u\| = \|f - h_0 - (u - h_0)\| < \|f - h_0\|.$$

Таким образом, нулевой элемент Θ не является э.н.п. функции $f - h_0$ с ограничениями $(H_{I(h_0)}^-; g - h_0; G)$ и достаточность доказана. Теорема верна.

Теорема 2.1.6. Пусть $f \in C(T)$, $h_0 \in H$, $h_0 \leq g$ на G . Элемент h_0 является э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$ тогда и только тогда, когда h_0 есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H_{I(h_0)}^-; g; G)$.

Доказательство. Необходимость. Предположим противное. Пусть

$$u \in H_{I(h_0)}, \quad u \leq g \text{ на } G,$$

есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H_{I(h_0)}^-; g; G)$ и $\|f - u\| < \|f - h_0\|$. Ясно, что элемент $u - h_0$ обладает свойствами:

$$u - h_0 \in H_{I(h_0)}, \quad u - h_0 \leq g - h_0 \text{ на } G,$$

и

$$\|f - u\| = \|(f - h_0) - (u - h_0)\| < \|f - h_0\|.$$

Однако, в силу теоремы 2.1.5 для любого $v \in H_{I(h_0)}$, удовлетворяющему условию $v \leq g - h_0$ на G , верно неравенство

$$\|(f - h_0) - v\| \geq \|f - h_0\|.$$

Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность следует из очевидных неравенств

$$\|f - h_0\| \geq E_g^-(f; H; G) \geq E_g^-(f; H_{I(h_0)}; G) = \|f - h_0\|.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.1.1 Пусть $f \in C(T)$. Элемент $h_0 \in H$ является элементом наилучшего нижнего одностороннего приближения (э.н.н.п.) функции f тогда и только тогда, когда нулевой элемент $\Theta \in H_{I(h_0)}$ есть э.н.н.п. функции $f - h_0$ при аппроксимации элементами конуса $H_{I(h_0)}$.

Соответствующие теоремы для задачи наилучшего равномерного приближения непрерывных функций с ограничениями $(H^+; g; G)$ формулируются и доказываются аналогично. Предлагается читателю сделать это самостоятельно.

2. Наилучшие односторонние приближения непрерывных функций

Пусть система $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ непрерывных на метрическом компакте T функций линейно независима и m — целое неотрицательное число.

Конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k h_k : \mu_k \in R, \mu_j \geq 0, j > m \right\}$$

содержит отрицательную и положительную функции. Тогда для любой непрерывной на компакте T функции множества элементов наилучших односторонних приближений непусты и выпуклы.

Если конус H есть чебышевское подпространство, то необходимые и достаточные условия элементов наилучших односторонних приближений легко получаются из теорем типа теорем П. Л. Чебышева /2/.

В этом параграфе будут приведены необходимые и достаточные условия элементов наилучших односторонних приближений при аппроксимации непрерывных функций элементами конуса с конечным числом образующих.

Теорема 2.2.1. Пусть $f \in C(T)$, $f \geq \Theta$. Нулевой элемент $\Theta \in H$ является э.н.н.п. функции f тогда и только тогда, когда Θ есть э.н.п. функции $f - \frac{1}{2}\|f\|$ в конусе H .

Доказательство. Необходимость. Предположим противное. Пусть $h_0 \in H$ такой, что

$$E(f - \frac{1}{2}\|f\|; H) = \|f - \frac{1}{2}\|f\| - h_0\| < \|f - \frac{1}{2}\|f\| \| = \frac{1}{2}\|f\|.$$

Тогда

$$-E(f - \frac{1}{2}\|f\|; H) \leq f - \frac{1}{2}\|f\| - h_0 \leq E(f - \frac{1}{2}\|f\|; H),$$

$$\begin{aligned} f - \|f\| &< f - \frac{1}{2}\|f\| - E(f - \frac{1}{2}\|f\|; H) \leq h_0 \leq \\ &\leq f - \frac{1}{2}\|f\| + E(f - \frac{1}{2}\|f\|; H) < f. \end{aligned}$$

Таким образом, элемент $h_0 \in H$, удовлетворяет неравенствам: $h < f$ и $\Theta < f - h_0 < \|f\|$. Следовательно $\|f - h_0\| < \|f\|$ и Θ не является э.н.н.п. функции f . Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что существует $h \in \{h \in H : h \leq f\}$, для которого

$$0 \leq \|f - h\| < \|f\|.$$

Нетрудно видеть, что

$$\|f - \frac{1}{2}\|f\| - h\| < \frac{1}{2}\|f\| = E(f - \frac{1}{2}\|f\|; H).$$

Поэтому нулевой элемент Θ не является э.н.п. функции $f - \frac{1}{2}\|f\|$. Теорема доказана.

Используя теоремы четвертого и пятого параграфов первой главы, получим справедливость следующих результатов.

Теорема 2.2.2. Пусть конус H является квазичебышевским порядка r , имеет правый знак равный σ , содержит в себе чебышевский подконус H_r размерности и порядка r , обладающий B — свойством. Для того чтобы $\Theta \in H$ был э.н.п. неотрицательной функции $f \in C[a; b] \setminus H$, необходимо и достаточно, выполнения одного из условий :

1. Существуют точки $t_1 < t_2 < \dots < t_{r+1}$, принадлежащие множеству $R(f - \frac{1}{2}\|f\|; \Theta)$, такие, что числа $a_k = \text{sign}(f(t_k) - \frac{1}{2}\|f\|)$ имеют чередующиеся знаки;
2. Существует лишь r точек $z_1 < z_2 < \dots < z_r$, принадлежащих множеству $R(f - \frac{1}{2}\|f\|; \Theta)$, таких, что числа $b_k = \text{sign}(f(t_k) - \frac{1}{2}\|f\|)$, $k = 1, 2, \dots, r$, имеют чередующиеся знаки и $-\sigma b_r > 0$.

Доказательство. По теореме 2.2.1 нулевой элемент $\Theta \in H$ является э.н.п. функции f тогда и только тогда, когда Θ есть э.н.п. функции $f - \frac{1}{2}\|f\|$ в конусе H . Заметим, что если $h_0 = \Theta$, то конусы H и расширенный $H_{I(h_0)}$ совпадают. Применяя теорему 1.4.6 получим, что в случае, когда конус H обладает указанными в теореме свойствами, элемент Θ есть э.н.п. функции $f - \frac{1}{2}\|f\|$ в конусе H тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий (1) , (2).

Следствие 2.2.1. Пусть конус H является чебышевским порядка n и имеет правый знак, равный σ , и обладает B — свойством. Для того чтобы $\Theta \in H$ был э.н.п. неотрицательной функции $f \in C[a; b] \setminus H$, необходимо и достаточно, выполнение одного из условий :

1. Существуют точки $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$, принадлежащие множеству $R(f - \frac{1}{2}\|f\|; \Theta)$, такие, что числа $a_k = \text{sign}(f(t_k) - \frac{1}{2}\|f\|)$, $k = 1, 2, \dots, n + 1$ имеют чередующиеся знаки;
2. Существует лишь n точек $z_1 < z_2 < \dots < z_n$, принадлежащих множеству $R(f - \frac{1}{2}\|f\|; \Theta)$, таких, что числа $b_k = \text{sign}(f(t_k) - \frac{1}{2}\|f\|)$, $k = 1, 2, \dots, n$, имеют чередующиеся знаки и $-\sigma b_n > 0$.

Следствие 2.2.2. Пусть H является конусом Хаара порядка r и имеет правый знак, равный σ . Для того чтобы $\Theta \in H$ был э.н.н.п. неотрицательной функции $f \in C_{[a;b]} \setminus H$, необходимо и достаточно, выполнение одного из следующих условий :

1. Существуют точки $t_1 < t_2 < \dots < t_{r+1}$, принадлежащие множеству $R(f - \frac{1}{2}\|f\|)$, такие, что числа $a_k = \text{sign}(f(t_k) - \frac{1}{2}\|f\|)$, $k = 1, 2, \dots, r+1$, имеют чередующиеся знаки;
2. Существует лишь r точек $z_1 < z_2 < \dots < z_r$, принадлежащих множеству $R(f - \frac{1}{2}\|f\|; \Theta)$, таких, что числа $b_k = \text{sign}(f(t_k) - \frac{1}{2}\|f\|)$, $k = 1, 2, \dots, r$, имеют чередующиеся знаки и $-\sigma b_r > 0$.

С геометрической точки зрения условия (1), (2) теоремы 2.2.2 означают наличие чебышевского альтернанса для нулевого элемента $\Theta \in H$ относительно функций $F^- = f - \|f\|$, $F^+ = f$, т.е. значения нулевого элемента в точках альтернанса поочередно совпадают со значениями одной из функций F^+ или F^- . При этом условие $-\sigma b_r > 0$ эквивалентно тому, что правая точка альтернанса является e – точкой со "знаком" равным σ .

Поэтому теорему 2.2.2 можно сформулировать в следующем виде.

Если конус H обладает указанными в теореме 2.2.2 свойствами, то нулевой элемент $\Theta \in H$ является э.н.н.п. функции f тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

1. Для $\Theta \in H$ существует чебышевский альтернанс, содержащий не менее $r+1$ точек, относительно функций $F^- = f - \|f\|$, $F^+ = f$;
2. Для $\Theta \in H$ существует чебышевский альтернанс, содержащий лишь r точек, относительно функций $F^- = f - \|f\|$, $F^+ = f$ и правая точка альтернанса является e – точкой со "знаком" равным σ .

Пусть $h_0 = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k \in H$, $h_0 \leq f$. Обозначим

$$I(h_0) = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{k : \mu_k > 0\},$$

$$H_{I(h_0)} = \left\{ \sum_{k=1}^n \nu_k h_k : \nu_k \geq 0, k \notin I(h_0); \nu_i \in R, i \in I(h_0) \right\}.$$

Применяя последовательно: 1) следствие 2.1.1; 2) теорему 2.2.1; 3) теорему 1.4.6, получим справедливость следующей теоремы.

Теорема 2.2.3. Пусть конус $H_{I(h_0)}$ является квазичебышевским порядка r , имеет правый знак, равный σ , и содержит в себе чебышевский

подконус H_r размерности и порядка r , обладающий B — свойством. Для того чтобы $h_0 \in H$ был э.н.н.п. функции $f \in C[a; b] \setminus H$, необходимо и достаточно, выполнения одного из условий :

1. Существуют точки $t_1 < t_2 < \dots < t_{r+1}$, принадлежащие множеству

$$\left\{ x \in [a; b] : |f(x) - h_0(x) - \frac{1}{2}\|f - h_0\| | = \frac{1}{2}\|f - h_0\| \right\},$$

такие, что числа $a_k = \text{sign}(f(t_k) - h_0(t_k) - \frac{1}{2}\|f - h_0\|)$, $k = 1, 2, \dots, r + 1$, имеют чередующиеся знаки;

2. Существует лишь r точек $z_1 < z_2 < \dots < z_r$, принадлежащих множеству

$$\left\{ x \in [a; b] : |f(x) - h_0(x) - \frac{1}{2}\|f - h_0\| | = \frac{1}{2}\|f - h_0\| \right\},$$

таких, что числа $a_k = \text{sign}(f(t_k) - h_0(t_k) - \frac{1}{2}\|f - h_0\|)$, $k = 1, 2, \dots, r$, имеют чередующиеся знаки и $-\sigma a_r > 0$.

Если предположить, что $a_k = 1$, то значение элемента $h_0 \in H$ в соответствующей точке альтернанса совпадает со значением функции $f - \|f - h_0\|$. При $a_k = -1$ значение элемента $h_0 \in H$ в точке альтернанса совпадает со значением функции f . Условие $-\sigma a_r > 0$ означает, что правая точка альтернанса является e — точкой со "знаком" равным σ . Таким образом теорема 2.2.3 имеет и такую формулировку.

Пусть конус $H_{I(h_0)}$ является квазичебышевским порядка r , имеет правый знак равный σ , содержит в себе чебышевский подконус H_r размерности и порядка r , обладающий B — свойством. Для того чтобы $h_0 \in H$ был э.н.н.п. функции $f \in C_{[a; b]} \setminus H$, необходимо и достаточно, выполнения одного из условий :

1. Для $h_0 \in H$ существует чебышевский альтернанс, содержащий $r + 1$ точек, относительно функций $F^- = f - \|f - h_0\|$, $F^+ = f$;

2. Для $h_0 \in H$ существует чебышевский альтернанс, содержащий лишь r точек, относительно функций $F^- = f - \|f - h_0\|$, $F^+ = f$ и правая точка альтернанса является e — точкой со "знаком" равным σ .

Следствие 2.2.3. Пусть конус $H_{I(h_0)}$ является чебышевским порядка n , имеет правый знак равный σ и обладает B — свойством. Для того чтобы $h_0 \in H$ был э.н.н.п. функции $f \in C[a; b] \setminus H$, необходимо и достаточно, выполнения одного из условий :

1. Для $h_0 \in H$ существует чебышевский альтернанс , содержащий $n + 1$ точек, относительно функций $F^- = f - \|f - h_0\|$, $F^+ = f$;

2. Для $h_0 \in H$ существует чебышевский альтернанс, содержащий лишь n точек, относительно функций $F^- = f - \|f - h_0\|$, $F^+ = f$ и правая точка альтернанса является ϵ – точкой со "знаком" равным σ .

Следствие 2.2.4. Пусть $H_{I(h_0)}$ является конусом Хаара порядка r , имеет правый знак, равный σ . Для того чтобы $h_0 \in H$ был э.н.н.п. функции $f \in C[a; b] \setminus H$, необходимо и достаточно, выполнения одного из условий :

1. Для $h_0 \in H$ существует чебышевский альтернанс, содержащий $r + 1$ точек, относительно функций $F^- = f - \|f - h_0\|$, $F^+ = f$;

2. Для $h_0 \in H$ существует чебышевский альтернанс, содержащий лишь r точек, относительно функций $F^- = f - \|f - h_0\|$, $F^+ = f$ и правая точка альтернанса является ϵ – точкой со "знаком" равным σ .

Так как элемент $h_0 \in H$, $h_0 \leq f$ является э.н.н.п. функции $f \in C[a; b]$ тогда и только тогда, когда нулевой элемент $\Theta \in H_{I(h_0)}$ есть э.н.п. функции $f - h_0 - \frac{1}{2}\|f - h_0\|$ при аппроксимации непрерывных функций элементами конуса $H_{I(h_0)}$, то из теорем о единственности э.н.п. для непрерывных функций при аппроксимации элементами конусов Чебышева или Хаара следует справедливость следующих утверждений.

Теорема 2.2.4. Пусть конус H является чебышевским порядка n и обладает B – свойством. Тогда для всякой функции $f \in C[a; b]$ э.н.н.п. единствен.

Теорема 2.2.5. Пусть H является конусом Хаара. Тогда для всякой функции $f \in C[a; b]$ э.н.н.п. единствен.

3. Наилучшие приближения с ограничениями для квазичебышевских конусов

В параграфе будут получены аналоги теорем В. А. Каминского при аппроксимации непрерывных функций элементами квазичебышевских конусов, которые, в частности, являются обобщением критериев наилучших односторонних приближений.

Пусть H — конус в $C[a; b]$, H имеет конечное число образующих и содержит строго отрицательную функцию.

Рассмотрим задачу наилучшего равномерного приближения непрерывных функций элементами конуса H с ограничениями $(H^-; g; G)$, где $g \in C[a; b]$, G — замкнутое подмножество $[a; b]$.

Для произвольных функции $f, g \in C[a; b]$ и конуса H справедливы неравенства:

$$E_g^-(f; H; G) \geq \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\};$$

$$f(x) - E_g^-(f; g; G) \leq \min\{g(x); f(x) + E_g^-(f; g; G)\}, x \in [a; b].$$

Пусть система $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций линейно независима и m — целое неотрицательное число.

Рассмотрим конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k h_k : \mu_k \in R, \mu_j \geq 0, j > m \right\}$$

и элемент $p = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k \in H$, $p \leq g$ на $[a; b]$. Обозначим

$$I(p) = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{k : \mu_k > 0\},$$

$$H_{I(p)} = \left\{ \sum_{k=1}^n \nu_k h_k : \nu_k \geq 0, k \notin I(p); \nu_i \in R, i \in I(p) \right\}.$$

Для получения необходимых условий э.н.п. с ограничениями $(H^-; g; G)$ воспользуемся теоремой 2.1.6.

Положим вначале $G = [a; b]$. Будем считать, что конус $H_{I(p)}$ является квазичебышевским порядка r , имеет правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$ и содержит подконус Чебышева H_r размерности и порядка r , который обладает В — свойством и имеет строго положительную и строго отрицательную функции.

Теорема 2.3.1. Если $p \in H$ есть э.н.п. функции $f \in C[a; b] \setminus H_{I(p)}$ с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$ то выполнено одно из условий:

1. $E_g^-(f; H; [a; b]) = \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\};$
2. $E_g^-(f; H; [a; b]) > \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$ и $p \in H$ имеет чебышевский альтернанс длины $l \geq r$, относительно функций

$$F^- = f - E_g^-(f; H; [a; b]), F^+ = \min\{g; f + E_g^-(f; H; [a; b])\},$$

причем при $l = r$ "знак" правой e — точки альтернанса совпадает с правым знаком конуса $H_{I(p)}$.

Доказательство. Отметим вначале, что в силу теоремы 2.1.6 элемент $p \in H$ является э.н.п. функции f с ограничениями $(H_{I(p)}; g; [a; b])$.

Пусть условие (1) не выполнено. Тогда

$$E_g^-(f; H; [a; b]) > \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}, \quad F^+ > F^- \text{ на } [a; b].$$

Покажем наличие чебышевского альтернанса длины $l \geq r$ для элемента p относительно функций F^- , F^+ . Понятно, что для p существуют e^+ , e^- – точки, так как в противном случае элемент p не приближает наилучшим образом функцию f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$.

Действительно, если для p отсутствуют e^- – точки, то имеют место неравенства

$$F^- < p \leq F^+$$

на отрезке $[a; b]$. Обозначим через $h_- \in H_r$ строго отрицательную функцию. Подберем $\varepsilon_- > 0$ настолько малым так, чтобы элемент $\psi = p + \varepsilon_- h_- \in H$ удовлетворял неравенствам

$$f - E_g^-(f; H; [a; b]) = F^- < \psi < F^+ \leq g, \quad f + E_g^-(f; H; [a; b])$$

на отрезке $[a; b]$ и следовательно

$$\|f - \psi\| < \|f - p\| = E_g^-(f; H; [a; b]).$$

Если же для p отсутствуют e^+ – точки, то имеют место неравенства

$$F^- < p \leq F^+$$

на отрезке $[a; b]$. Обозначим через $h^+ \in H_r$ строго положительную функцию. Выберем $\varepsilon^+ > 0$ достаточно малым так, чтобы для элемента $\varphi = p + \varepsilon^+ h^+ \in H$ были верны неравенства

$$f - E_g^-(f; H; [a; b]) = F^- < \varphi < F^+ \leq g, \quad f + E_g^-(f; H; [a; b])$$

на отрезке $[a; b]$. Поэтому

$$\|f - \varphi\| < \|f - p\| = E_g^-(f; H; [a; b]).$$

Таким образом, в обоих случаях получим, что p не является э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$. Поэтому для p альтернанс содержит e^- , e^+ – точки.

Допустим теперь, что для p среди e – точек можно выбрать лишь $k \leq r - 1$ точек $x_1 < x_2 < \dots < x_k$, являющихся поочередно e^- , e^+ – точками. Тогда на $[a; b]$ можно выделить k непересекающихся отрезков

$$[y_i; z_i], \quad y_i < z_i, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad a \leq y_1 < y_2 < \dots < y_k < b,$$

таких, что:

- 1) все e^+ , e^- – точки являются внутренними точками этих отрезков, за исключением точек a , b ;
- 2) каждый отрезок содержит e – точки одного "знака";
- 3) "знаки" e – точек на двух соседних отрезках противоположны.

Построим полином $q \in H_{I(p)}$, не обращающийся в нуль на этих отрезках и имеющий противоположные знаки на каждом двух соседних отрезках. Можно считать, что q имеет на каждом отрезке $[y_i; z_i]$ знак, противоположный "знаку" e – точек, принадлежащих этому отрезку. Построение элемента с указанными свойствами возможно, так как конус $H_{I(p)}$ содержит подконус Чебышева порядка и размерности r , который обладает B – свойством на отрезке $[a; b]$.

Обозначим через D^+ – объединение отрезков, содержащих e^+ – точки, D^- – объединение отрезков, содержащих e^- – точки, $D = D^+ \cup D^-$ и $E = [a; b] \setminus D$.

Отметим, что замыкание $\overline{E}$ множества E не содержит e – точек, множество D^+ не содержит e^- – точек, а D^- не содержит e^+ – точек.

Тогда существует число $\nu > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} F^-(x) + \nu &\leq p(x) \leq F^+(x) - \nu \text{ для всех } x \in E^-; \\ F^-(x) + \nu &\leq p(x) \leq F^+(x) \text{ для всех } x \in D^+; \\ F^-(x) &\leq p(x) \leq F^+(x) - \nu \text{ для всех } x \in D^-. \end{aligned}$$

Рассмотрим элемент $q^* = p + \varepsilon q \in H_{I(p)}$, где $\varepsilon > 0$ настолько мало, что

$$\max\{|\varepsilon q(x)| : x \in [a; b]\} = \varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}\nu.$$

Пусть $\min\{|\varepsilon q(x)| : x \in D\} = \sigma$. Ясно, что $\sigma > 0$ и $\sigma \leq \varepsilon_0 \leq \frac{1}{2}\nu$. Так как $q(x) > 0$ на D^- и $q(x) < 0$ на D^+ , то для любого $x \in D^+$ получим:

$$\begin{aligned} q^*(x) &= p(x) + \varepsilon q(x) = p(x) - |\varepsilon q(x)| \leq F^+(x) - \sigma, \\ q^*(x) &= p(x) - |\varepsilon q(x)| \geq F^-(x) + \nu - \varepsilon_0 \geq F^-(x) + \sigma, \end{aligned}$$

а для любого $x \in D^-$ имеем:

$$\begin{aligned} q^*(x) &= p(x) + \varepsilon q(x) = p(x) + |\varepsilon q(x)| \geq F^-(x) + \sigma, \\ q^*(x) &= p(x) + |\varepsilon q(x)| \leq F^+(x) - \nu + \varepsilon_0 \leq F^+(x) - \sigma. \end{aligned}$$

На множестве E справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} q^*(x) &= p(x) + \varepsilon q(x) \leq p(x) + |\varepsilon q(x)| \leq F^+(x) - \nu + \frac{1}{2}\nu \leq F^+(x) - \sigma, \\ q^*(x) &= p(x) + \varepsilon q(x) \geq p(x) - |\varepsilon q(x)| \geq F^-(x) + \nu - \frac{1}{2}\nu \geq F^-(x) + \sigma. \end{aligned}$$

Итак, сделанные предположения приводят к тому, что при некотором $\sigma > 0$ всюду на отрезке $[a; b]$ выполняются неравенства:

$$F^-(x) + \sigma \leq q^*(x) \leq F^+(x) - \sigma.$$

Поэтому

$$q^*(x) \leq g(x), \quad f(x) - E_g^-(f; H) + \sigma \leq q^*(x) \leq f(x) + E_g^-(f; H) - \sigma \quad \text{на } [a; b].$$

Таким образом,

$$\|f - q^*\| \leq E_g^-(f; H) - \sigma, \quad q^* \in H, \quad q^* \leq g.$$

Следовательно $p \in H$ не является э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$. Полученное противоречие доказывает, что длина альтернанса $l \geq r$.

Предположим теперь, что $l = r$ и "знак" правой e – точки альтернанса x_r противоположен правому знаку конуса $H_{I(p)}$. Ясно, что из цепочки неравенств

$$f - \|f - p\| \leq p \leq \min\{g; f + \|f - p\|\}$$

следует, что

$$f - p - \|f - p\| \leq \Theta \leq \min\{g - p; f - p + \|f - p\|\}.$$

Так как нулевой элемент $\Theta \in H_{I(p)}$ есть э.н.п. функции $f - p$ с ограничениями $(H_{I(p)}^-; g - p; [a; b])$, а длина альтернанса для него равна r , то по теореме В. А. Каминского чебышевское подпространство $H_0 = \text{lin } H_r$ (линейная оболочка конуса H_r) содержит элемент $v \in H_0$ такой, что

$$\|f - p - v\| = \inf\{\|f - p - w\| : w \in H_0, w \leq g - p\} < \|f - p\|.$$

Рассмотрим элемент $w = p + v$. Отметим, что

$$w \notin H_{I(p)}, \quad w \leq g, \quad \|f - w\| < \|f - p\|.$$

Имеем выполнение следующих неравенств

$$\begin{aligned} f - E_g^-(f; H; [a; b]) &< f - \|f - w\| \leq w \leq \\ &\leq \min\{g; f + \|f - w\|\} \leq \min\{g; f + \|f - p\|\}, \\ f - E_g^-(f; H; [a; b]) &\leq p \leq \min\{g; f + E_g^-(f; H; [a; b])\}. \end{aligned}$$

Подберем $\varepsilon_1 > 0$ так, чтобы элемент $w + \varepsilon_1 h_-$ удовлетворял соотношениям

$$f - E_g^-(f; H; [a; b]) < w + \varepsilon_1 h_- < \min\{g; f + E_g^-(f; H; [a; b])\}.$$

В каждой e^+ – точке альтернанса имеем

$$p(x_j) = \min\{g(x_j); f(x_j) + E_g^-(f; H; [a; b])\} > (w + \varepsilon_1 h_-)(x_j),$$

а в каждой e^- – точке справедливы неравенства

$$p(x_j) = f(x_j) - E_g^-(f; H; [a; b]) < (w + \varepsilon_1 h_-)(x_j).$$

Поэтому элемент $(w + \varepsilon_1 h_-) - p = v + \varepsilon_1 h_- \in H_0$ имеет на $(a; b)$ ровно $r - 1$ нулей, причем справа от последнего нуля принимает значения со знаком, совпадающим с правым знаком конуса $H_{I(p)}$. По свойству чебышевских систем элемент $(w + \varepsilon_1 h_-) - p \in H_r$. Итак, элемент $w + \varepsilon_1 h_- \in H_{I(p)}$ и

$$w + \varepsilon_1 h_- \leq g + \varepsilon_1 h_- < g; \|f - (w + \varepsilon_1 h_-)\| < \|f - p\| = E_g^-(f; H).$$

Последние соотношения означают, что p не есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H_{I(p)}^-; g; [a; b])$. Противоречие доказывает справедливость теоремы.

Приведем достаточные условия э.н.п. с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$.

Теорема 2.3.2. Пусть $p \in H$, $p \leq g$, функция $f \in C[a; b] \setminus H$, δ – правый знак квазичебышевского конуса $H_{I(p)}$ порядка r , конус H содержит строго отрицательную функцию.

Если выполнено одно из условий:

1. $\|f - p\| = \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$, при этом

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\};$$

2. $\|f - p\| > \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$ и для $p \in H$ существует чебышевский альтернанс $x_1 < x_2 < \dots < x_l$ длины $l \geq r$ относительно функций

$$F^- = f - \|f - p\|, F^+ = \min \{g; f + \|f - p\|\},$$

причем при $l = r$ "знак" правой e^- – точки альтернанса x_r совпадает с правым знаком конуса $H_{I(p)}$, то элемент $p \in H$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$.

Доказательство. Пусть выполнено условие (1). Тогда верны неравенства

$$\|f - p\| \leq \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\} \leq E_g^-(f; H; [a; b]).$$

Следовательно p есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$ и

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}.$$

Пусть теперь выполнено условие (2), причем длина альтернанса $l \geq r + 1$. Допустим, что $v \in H$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, причем $\|f - p\| > \|f - v\|$. Имеем

$$F^- < f - \|f - v\| \leq v \leq \min\{g; f + \|f - v\| \leq F^+,$$

при этом в каждой e^+ – точке альтернанса для p верны неравенства

$$F^+(x_k) = p(x_k) \geq v(x_k),$$

а в каждой e^- – точке получим

$$F^-(x_j) = p(x_j) < v(x_j).$$

Таким образом, разность $v - p \in H_{I(p)}$ обращается в нуль не менее, чем в r точках отрезка $[a; b]$. Следовательно $v = p$, что противоречиво. Итак $p \in H$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$.

Предположим, что $l = r$ и "знак" правой e – точки чебышевского альтернанса x_n совпадает с правым знаком конуса $H_{I(p)}$. Допустим, что

$$E = \|f - p\| > E_g^-(f; H; [a; b]) = \|f - q\|, \text{ где } q \in \{h \in H : h \leq g\}.$$

Тогда на отрезке $[a; b]$ справедливы неравенства

$$f - E_g^-(f; H; [a; b]) \leq q \leq f + E_g^-(f; H; [ab]),$$

$$F^- = f - E < q \leq \min\{g; f + E\} = F^+,$$

причем $q(x) = F^+(x)$ лишь тогда, когда $F^+(x) = g(x)$, $x \in [a; b]$.

Пусть элемент $h_- \in H$ принимает отрицательные значения на $[a; b]$. Подберем $\varepsilon > 0$ настолько малым так, чтобы элемент $q + \varepsilon h_- \in H$ всюду на $[a; b]$ удовлетворял неравенствам

$$F^- = f - E < q + \varepsilon h_- < \min \{g; f + E\} = F^+.$$

Поэтому в каждой e^+ – точке альтернанса имеем

$$p(x_k) = F^+(x_k) > (q + \varepsilon h_-)(x_k),$$

а в каждой e^- – точке альтернанса справедливы неравенства

$$p(x_k) = F^-(x_k) < (q + \varepsilon h_-)(x_k).$$

Заметим, что элемент $(q + \varepsilon h_-) - p \in H_{I(p)}$ имеет на $(a; b)$ ровно $r - 1$ простых нулей, при этом:

1) если x_r является e^+ – точкой, то справа от последнего нуля элемент $(q + \varepsilon h_-) - p$ принимает значения со знаком равным -1;

2) если x_r является e^- – точкой, то справа от последнего нуля элемент $(q + \varepsilon h_-) - p$ принимает значения со знаком равным 1.

Таким образом, элемент $(q + \varepsilon h_-) - p$ не может принадлежать конусу $H_{I(p)}$, так как правый знак конуса совпадает со "знаком" правой точки альтернанса. Противоречие доказывает теорему.

Из доказанных теорем следует

Теорема 2.3.3. Пусть $p \in H$, $p \leq g$, функция $f \in C_{[a;b]} \setminus H$, конус $H_{I(p)}$ является квазичебышевским порядка r , имеет правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$ и содержит подконус Чебышева H_r размерности и порядка r , который обладает B – свойством и имеет строго положительную и строго отрицательную функции.

Для того чтобы $p \in H$ являлся э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий (1), (2) теоремы 2.3.2.

Следствие 2.3.1. Пусть $p \in H$, $p \leq g$, функция $f \in C[a; b] \setminus H$, конусы H , $H_{I(p)}$ являются чебышевскими порядка n , имеют правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$. Конус $H_{I(p)}$ обладает B – свойством и имеет строго положительную и строго отрицательную функции.

Для того чтобы $p \in H$ являлся э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. $\|f - p\| = \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$, при этом

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\};$$

2. $\|f - p\| > \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$ и для $p \in H$ существует чебышевский альтернанс $x_1 < x_2 < \dots < x_l$ длины $l \geq n$ относительно функций

$$F^- = f - \|f - p\|, F^+ = \min \{g; f + \|f - p\|\},$$

причем при $l = n$ "знак" правой e – точки альтернанса x_n совпадает с правым знаком конусов H , $H_{I(p)}$.

Следствие 2.3.2. Пусть $p \in H$, $p \leq g$, функция $f \in C[a; b] \setminus H$, H , $H_{I(p)}$ являются конусами Хаара, при этом конус $H_{I(p)}$ имеет порядок r и правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$.

Для того чтобы $p \in H$ являлся э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. $\|f - p\| = \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$, при этом

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\};$$

2. $\|f - p\| > \max \{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$ и для $p \in H$ существует чебышевский альтернанс $x_1 < x_2 < \dots < x_l$ длины $l \geq r$ относительно функций

$$F^- = f - \|f - p\|, F^+ = \min \{g; f + \|f - p\|\},$$

причем при $l = r$ "знак" правой e – точки альтернанса x_r совпадает с правым знаком конуса $H_{I(p)}$.

Пусть G — произвольное замкнутое подмножество отрезка $[a; b]$. Покажем, что задачу отыскания величены

$$E_g^-(f; H; G) = \inf \{\|f - h\| : h \in H, h \leq g \text{ на } G\}$$

можно свести к рассмотренному нами случаю.

Обозначим через M_1 — множество элементов наилучшего приближения функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$. Отметим, что множество M_1 замкнуто и ограничено. Так как конус H имеет конечную размерность, то по теореме Арцела о компактности множества в пространстве непрерывных функций семейство элементов наилучшего приближения функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$ равностепенно непрерывно. Поэтому функция $\Phi = \sup\{h : h \in M_1\}$ непрерывна на $[a; b]$ и $\Phi \leq g$ на G . Рассмотрим непрерывную функцию φ , которая равна нулю на множестве G и положительна на его дополнении. Положим

$$\Phi^* = \Phi + \varphi, g_1 = \max\{g; \Phi^*\}.$$

Отметим, что $g_1 \in C[a; b]$, причем $g = g_1$ на G , т.к.

$$\Phi^* = \Phi + \varphi, \Phi \leq g \text{ на } G.$$

Рассмотрим задачу наилучшего приближения функции f с ограничениями $(H^-; g_1; [a; b])$. Обозначим M_2 —множество элементов наилучшего приближения функции f с ограничениями $(H^-; g_1; [a; b])$. Заметим, что ограничения $(H^-; g_1; [a; b])$ более сильные, чем ограничения $(H^-; g; G)$. Поэтому

$$E_{g_1}^-(f; H; [a; b]) \geq E_g^-(f; H; G).$$

Так как $g_1 \geq \Phi$ всюду на отрезке $[a; b]$, то э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$ удовлетворяет и ограничению $(H^-; g_1; [a; b])$. Следовательно,

$$E_{g_1}^-(f; H; [a; b]) \leq E_g^-(f; H; G).$$

Таким образом,

$$E_{g_1}^-(f; H; [a; b]) = E_g^-(f; H; G) \text{ и } M_1 = M_2.$$

Ясно, что

$$\max\{f(x) - g_1(x) : x \in [a; b]\} = \max\{f(x) - g(x) : x \in G\},$$

так как $g = g_1$ на G и $g_1 \geq g$ на $[a; b] \setminus G$.

Если предположить, что для функции f множество M_1 или множество M_2 содержит лишь один элемент, то э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g_1; [a; b])$ и с ограничениями $(H^-; g; G)$ один и тот же и единствен.

Пусть $q^* \in H$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g_1; [a; b])$. При выполнении условия 2 теоремы 2.3.1 он обладает чебышевским альтернансом длины $l \geq r$ относительно функций

$$F_1^- = f - \|f - q^*\|, \quad F_1^+ = \min\{g_1; f + \|f - q^*\|\}.$$

Так как q^* есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$ и

$$\Phi^* > \Phi = q^*$$

вне G , то он будет обладать чебышевским альтернансом длины $l \geq r$ относительно функций

$$F^- = f - \|f - q^*\|, \quad F^+ = \min\{g_\infty; f + \|f - q^*\|\},$$

где функция g_∞ совпадает с g на G и равна ∞ на его дополнении.

Из приведенных выше рассуждений следуют аналоги полученных теорем для задачи наилучшего равномерного приближения непрерывной функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$.

Теорема 2.3.4. Пусть $p \in H$ и конус $H_{I(p)}$ является квазичебышевским порядка r , имеет правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$ и содержит подконус Чебышева H_r размерности и порядка r , который обладает B — свойством и имеет строго положительную и строго отрицательную функции.

Если $p \in H$ есть э.н.п. функции $f \in C[a; b] \setminus H_{I(p)}$ с ограничениями $(H^-; g; G)$ то выполнено одно из условий:

1. $E_g^-(f; H; G) = \max\{f(x) - g(x) : x \in G\};$
2. $E_g^-(f; H; G) > \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}$ и $p \in H$ имеет чебышевский альтернанс длины $l \geq r$ относительно функций

$$F^- = f - E_g^-(f; H; G), \quad F^+ = \min\{g_\infty; f + E_g^-(f; H; G)\},$$

причем при $l = r$ "знак" правой e — точки альтернанса совпадает с правым знаком конуса $H_{I(p)}$.

Теорема 2.3.5. Пусть $p \in H$, $p \leq g$ на G , $f \in C[a; b] \setminus H$, δ —правый знак квазичебышевского конуса $H_{I(p)}$ порядка r , конус H содержит строго отрицательную функцию.

Если выполнено одно из условий:

1. $\|f - p\| = \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}$, при этом

$$E_g^-(f; H; G) = \max\{f(x) - g(x) : x \in G\};$$

2. $\|f - p\| > \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}$ и для $p \in H$ существует чебышевский альтернанс $x_1 < x_2 < \dots < x_l$ длины $l \geq r$ относительно функций

$$F^- = f - \|f - p\|, \quad F^+ = \min\{g_\infty; f + \|f - p\|\},$$

причем при $l = r$ "знак" правой e — точки альтернанса x_r совпадает с правым знаком конуса $H_{I(p)}$, то элемент $p \in H$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$.

Итак, справедлива

Теорема 2.3.6. Пусть $p \in H$, $p \leq g$ на G , $f \in C[a; b] \setminus H$, конус $H_{I(p)}$ является квазичебышевским порядка r , имеет правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$ и содержит подконус Чебышева H_r размерности и порядка r , который обладает B — свойством и имеет строго положительную и строго отрицательную функции.

Для того чтобы p являлся э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из условий (1), (2) теоремы 2.3.5.

Следствие 2.3.3. Пусть $p \in H$, $p \leq g$ на G , $f \in C[a; b] \setminus H$, конусы H , $H_{I(p)}$ являются чебышевскими порядка n , имеют правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$. Конус $H_{I(p)}$ обладает B — свойством и имеет строго положительную и строго отрицательную функции.

Для того чтобы $p \in H$ являлся э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. $\|f - p\| = \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}$, при этом

$$E_g^-(f; H; G) = \max\{f(x) - g(x) : x \in G\};$$

2. $\|f - p\| > \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}$ и для $p \in H$ существует чебышевский альтернанс $x_1 < x_2 < \dots < x_l$ длины $l \geq n$ относительно функций

$$F^- = f - \|f - p\|, \quad F^+ = \min\{g_\infty; f + \|f - p\|\},$$

причем при $l = n$ "знак" правой e — точки альтернанса x_n совпадает с правым знаком конусов H , $H_{I(p)}$.

Следствие 2.3.4. Пусть $p \in H$, $p \leq g$ на G , $f \in C[a; b] \setminus H$, H , $H_{I(p)}$ являются конусами Хаара, при этом конус $H_{I(p)}$ имеет порядок r и правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$.

Для того чтобы $p \in H$ являлся э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось одно из следующих условий:

1. $\|f - p\| = \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}$, при этом

$$E_g^-(f; H; G) = \max\{f(x) - g(x) : x \in G\};$$

2. $\|f - p\| > \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}$ и для $p \in H$ существует чебышевский альтернанс $x_1 < x_2 < \dots < x_l$ длины $l \geq r$ относительно функций

$$F^- = f - \|f - p\|, \quad F^+ = \min\{g_\infty; f + \|f - p\|\},$$

причем при $l = r$ "знак" правой e — точки альтернанса x_r совпадает с правым знаком конуса $H_{I(p)}$.

Следующая теорема показывает возможность ослабления ограничений типа $(H^-; g; [a; b])$.

Теорема 2.3.7. Пусть $p \in H$, $p \leq g$, функция $f \in C[a; b] \setminus H$, $H_{I(p)}$ является квазичебышевским порядка r , имеет правый знак, равный

$\delta \in \{-1; 1\}$, и содержит подконус Чебышева H_r размерности и порядка r , который обладает B — свойством и имеет строго положительную и строго отрицательную функции.

Если $p \in H$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, то существует конечное множество $G_0 \subset [a; b]$, содержащее не более $[\frac{1}{2}(r+2)]$ точек, такое, что

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = E_g^-(f; H; G_0).$$

Доказательство. Предположим, что

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\} = f(x_0) - g(x_0).$$

Положим $G_0 = \{x_0\}$. Из неравенств

$$\begin{aligned} E_g^-(f; H; [a; b]) &\geq E_g^-(f; H; G_0) \geq \max\{f(x) - g(x) : x \in G_0\} = \\ &= f(x_0) - g(x_0) \end{aligned}$$

следует, что $E_g^-(f; H; [a; b]) = E_g^-(f; H; G_0)$.

Пусть теперь

$$E_g^-(f; H; [a; b]) > \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}.$$

Тогда в качестве множества

$$G_0 = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_k^*\}, \quad k \leq [\frac{1}{2}(n+2)]$$

можно взять e^+ — точки чебышевского альтернанса для p относительно функций

$$F^- = f - \|f - p\|, \quad F^+ = \min\{g; f + \|f - p\|\},$$

в которых значения элемента p совпадают со значениями функции g . Если при этом $k = 0$, то это означает несущественность наложенного ограничения. В этом случае утверждение теоремы выполняется тривиальным образом. Поэтому этот случай мы исключим из рассмотрения.

Так как

$$E_g^-(f; H; [a; b]) \geq E_g^-(f; H; G_0),$$

то предположим, что

$$E_g^-(f; H; [a; b]) > E_g^-(f; H; G_0). \quad (*)$$

Положим

$$\sigma = E_g^-(f; H; [a; b]) - E_g^-(f; H; G_0) > 0.$$

Пусть $q \in H$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; G_0)$, т.е.

$$E_g^-(f; H; G_0) = \|f - q\|, \quad q(x_j^*) \leq g(x_j^*), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Ясно, что функции p, q различны. Рассмотрим элемент $q^* = q + h_- \in H$, где $h_- \in H$ строго отрицательная функция такая, что

$$\max\{|h_-(x)| : x \in [a; b]\} \leq \frac{1}{2}\sigma.$$

Пусть $\min\{|h_-(x)| : x \in [a; b]\} = \nu$. Тогда для любой e^+ – точки x_j элемента p имеем

$$q^*(x_j) = q(x_j) + h_-(x_j) \leq F^+(x_j) - \nu = p(x_j) - \nu < p(x_j),$$

а в каждой e^- – точке x_i верны соотношения

$$\begin{aligned} q^*(x_j) &= q(x_j) + h_-(x_j) = (q(x_i) - f(x_i)) + (f(x_i) - p(x_i)) + \\ &+ (p(x_i) + h_-(x_i)) \geq (f(x_i) - p(x_i)) + (p(x_i) - \frac{1}{2}\sigma) - |q(x_i) - f(x_i)| \geq \\ &\geq E_g^-(f; H; [a; b]) + p(x_i) - \frac{1}{2}\sigma - E_g^-(f; H; G_0) = p(x_i) + \frac{1}{2}\sigma > p(x_i). \end{aligned}$$

Таким образом, элемент $q^* - p \in H_{I(p)}$ меняет знак между каждыми двумя соседними точками альтернанса и, следовательно, должен иметь не менее $(r - 1)$ нулей на $(a; b)$.

Если число нулей больше $(r - 1)$, то $p = q^*$. Тогда для каждого $x_i^* \in G_0$ верны неравенства

$$g(x_i^*) = p(x_i^*) = q(x_i^*) + h_-(x_i^*) \leq g(x_i^*) + h_-(x_i^*) < g(x_i^*),$$

что противоречиво. Поэтому

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = E_g^-(f; H; G_0).$$

Если же число нулей равно $(r - 1)$, то заметим, что справа от последнего нуля элемент $q^* - p \in H_{I(p)}$ принимает значения со знаком, противоположным правому знаку конуса $H_{I(p)}$, что не возможно.

Следовательно, предположение (*) было не верным и имеет место равенство

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = E_g^-(f; H; G_0).$$

Теорема доказана.

Следствие 2.3.5. Пусть $p \in H$, $p \leq g$, $f \in C[a; b] \setminus H$, конусы H , $H_{I(p)}$ являются чебышевскими порядка n , имеют правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$. Конус H обладает B -свойством и имеет строго положительную и строго отрицательную функции.

Если $p \in H$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, то существует конечное множество $G_0 \subset [a; b]$, содержащее не более $[\frac{1}{2}(r+2)]$ точек, такое, что

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = E_g^-(f; H; G_0).$$

Следствие 2.3.6. Пусть $p \in H$, $p \leq g$, $f \in C[a; b] \setminus H$, H является конусом Хаара, при этом конус $H_{I(p)}$ имеет порядок r и правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$.

Если $p \in H$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, то существует конечное множество $G_0 \subset [a; b]$, содержащее не более $[\frac{1}{2}(r+2)]$ точек, такое, что

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = E_g^-(f; H; G_0).$$

Совершенно аналогично можно получить критерии э.н.п. для задачи отыскания величины

$$E_g^+(f; H; G) = \inf\{\|f - h\| : h \in H, h \geq g \text{ на } G\}$$

при аппроксимации непрерывных на отрезке функций посредством элементов из конуса H , не меньших некоторой заданной функции $g \in C[a; b]$ на произвольном замкнутом множестве $G \subset [a; b]$.

4. Единственность элемента наилучшего приближения с ограничениями для конусов Чебышева и Хаара

Пусть система $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ непрерывных на метрическом компакте $T = [a; b]$ функций линейно независима и m — целое неотрицательное число.

Конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k h_k : \mu_k \in R, \mu_j \geq 0, j > m \right\}$$

является чебышевским порядка n , имеет правый знак равный $\delta \in \{-1; 1\}$ и обладает B — свойством. Конус H содержит строго отрицательную и строго положительную функции.

Приведем достаточные условия единственности э.н.п. с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$ для любой непрерывной функции.

Теорема 2.4.1. Для всякой функции $f \in C[a; b]$ при выполнении условия

$$E_g^-(f; H; [a; b]) > \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$$

э.н.п. с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$ единствен.

Доказательство. Случай, когда $f \in H$ очевиден. Пусть $f \in C[a; b] \setminus H$. Отметим вначале, что если элемент $h_0 \in \{h \in H : h \leq g\}$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, то верны неравенства

$$f - E_g^-(f; H; [a; b]) \leq h_0 \leq \min\{g; f + E_g^-(f; H; [a; b])\} \text{ на } [a; b],$$

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = \|f - h_0\|.$$

Если предположить, что для f функции $p_1, p_2 \in H$ являются элементами наилучшего приближения с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, то $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \in H$ также есть э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$. Используя следствие 2.3.1 получим, что для $\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2$ существует чебышевский альтернанс длины $l \geq n$ относительно функций F^- , F^+ и всюду на отрезке $[a; b]$ верны неравенства

$$F^- = f - E_g^-(f; H; [a; b]) \leq \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \leq \min\{g; f + E_g^-(f; H; [a; b])\} = F^+.$$

Пусть $x_0 \in [a; b]$ есть e^- — точка. Тогда

$$f(x_0) - E_g^-(f; H; [a; b]) = \frac{1}{2}p_1(x_0) + \frac{1}{2}p_2(x_0),$$

при этом

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p_1(x_0) &\geq \frac{1}{2}(f(x_0) - E_g^-(f; H; [a; b])) \text{ и} \\ \frac{1}{2}p_2(x_0) &\geq \frac{1}{2}(f(x_0) - E_g^-(f; H; [a; b])). \end{aligned}$$

Следовательно, $p_1(x_0) = p_2(x_0) = f(x_0) - E_g^-(f; H; [a; b])$. Таким образом, значения элементов p_1, p_2 совпадают в e^- — точках альтернанса. Пусть $y_0 \in [a; b]$ есть e^+ — точка. Имеем

$$\frac{1}{2}p_1(y_0) + \frac{1}{2}p_2(y_0) = \min\{g(y_0); f(y_0) + E_g^-(f; H; [a; b])\}.$$

Поэтому из неравенств

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}p_1(y_0) &\leq \frac{1}{2}\min\{g(y_0); f(y_0) + E_g^-(f; H; [a; b])\}, \\ \frac{1}{2}p_2(y_0) &\leq \frac{1}{2}\min\{g(y_0); f(y_0) + E_g^-(f; H; [a; b])\}\end{aligned}$$

следует, что

$$\frac{1}{2}p_1(y_0) = \frac{1}{2}p_2(y_0) = \frac{1}{2}\min\{g(y_0); f(y_0) + E_g^-(f; H; [a; b])\}.$$

Итак, значения элементов p_1 , p_2 совпадают и в e^+ – точках. Так как значения p_1 , p_2 совпадают не менее, чем в n точках отрезка $[a; b]$, а образующие конуса H являются чебышевской системой на данном отрезке, то $p_1 = p_2$. Таким образом, доказана единственность э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$.

Следствие 2.4.1. Если разность $\psi = f - g$ достигает максимума не менее, чем в n точках, то э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$ единствен.

Доказательство. Действительно, если выполнено условие

$$E_g^-(f; H; [a; b]) > \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\},$$

то э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$ единствен.

Пусть теперь имеет место равенство

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$$

и $\psi(x_k) = \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

В этом случае $g(x_k) = F^-(x_k)$. Если $p^* \in H$ есть э.н.п. функции f , то

$$F^-(x) \leq p^*(x) \leq g(x) \text{ и значит } p^*(x_k) = g(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Эти условия однозначно определяют полином p^* . Следствие доказано.

Рассмотрим систему Чебышева $\{h_k\}_{k=1}^n$, состоящую из дифференцируемых функций.

Точку $x_0 \in [a; b]$ назовем d – простым нулем обобщенного полинома h по данной системе функций, если $h(x_0) = 0$, $h'(x_0) \neq 0$.

Если же $h(x_0) = 0$, $h'(x_0) = 0$, то точку x_0 назовем d – двойным нулем полинома h .

Будем говорить, что система Чебышева $\{h_j\}_{j=1}^n$ удовлетворяет условию (D) , если она состоит из дифференцируемых функций и для всякого

ненулевого полинома по этой системе число k его d — простых нулей и число l его d — двойных нулей удовлетворяет неравенству $k + 2l \leq n - 1$.

Считаем, что конус H натянут на систему Чебышева, которая удовлетворяет условию (D) , и обладает указанными в теореме 2.4.1 свойствами.

Следствие 2.4.2. Пусть в каждой точке отрезка $[a; b]$ либо функция f , либо функция g дифференцируема и разность $\psi = f - g$ достигает максимума не менее, чем в $[\frac{1}{2}(n + 1)]$ внутренних точках отрезка $[a; b]$, либо в $[\frac{1}{2}(n + 1)] + 1$ точках отрезка $[a; b]$ (включая и концевые). Тогда э.н.п. функции f с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$ единствен.

Доказательство. В случае, когда

$$E_g^-(f; H; [a; b]) > \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\},$$

единственность имеет место в силу теоремы 2.4.1. Пусть

$$E_g^-(f; H; [a; b]) = \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$$

и функция ψ достигает максимума в ν внутренних точках $x_1 < x_2 < \dots < x_\nu$ отрезка $[a; b]$, при этом $\nu \geq [\frac{1}{2}(n + 1)]$. Тогда

$$g(x_j) = F^-(x_j) = f(x_j) - E_g^-(f; H; [a; b]), \quad p^*(x_j) = g(x_j),$$

где $p^* \in H$ — э.н.п. функции f и кроме того выполняется одно из равенств

$$p^{*'}(x_j) = f'(x_j), \text{ либо } p^{*'}(x_j) = g'(x_j).$$

Действительно, допустим, что функция f дифференцируема в точке x_j , а значит, и функция $f - E_g^-(f; H; [a; b])$, но $p^{*'}(x_j) \neq f'(x_j)$. Предположим, например, что $p^{*'}(x_j) > f'(x_j)$. Нетрудно видеть, что в любой окрестности точки x_j слева от нее найдется точка x , для которой $p^*(x) < f(x) - E_g^-(f; H; [a; b])$, что невозможно. Аналогичные рассуждения можно провести и в случае, когда дифференцируема функция g .

Таким образом, если все точки $x_1, x_2, \dots, x_\nu$ внутренние, то на полином накладывается 2ν условий

$$p^*(x_j) = g(x_j), \quad p^{*'}(x_j) = f'(x_j) \text{ (либо } p^{*'}(x_j) = g'(x_j)).$$

Так как $2\nu \geq 2[\frac{1}{2}(n + 1)] \geq n$, то в силу условия (D) системы $\{h_j\}_{j=1}^n$, полином определен однозначно. Случай с концевыми точками отличается от рассмотренного только тем, что в концевых точках на производную полинома никаких условий не накладывается и поэтому общее число

максимумов разности $f - g$, достаточное для единственности полинома p^* , увеличивается на единицу. Следствие доказано.

Следствие 2.4.3. Для всякой функции $f \in C[a; b] \setminus H$ при выполнении условия

$$E_g^-(f; H; [a; b]) > \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$$

э.н.п. с ограничениями $(H^-; g; [a; b])$, $(H^-; g; G_0)$, где G_0 — множество, построенное в теореме об очистке, один и тот же и единствен.

Из приведенной теоремы и результатов предыдущего параграфа следует

Теорема 2.4.2. Для всякой функции $f \in C_{[a; b]}$ при выполнении условия

$$E_g^-(f; H; G) > \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}$$

э.н.п. с ограничениями $(H^-; g; G)$ единствен.

Пусть m — натуральное число и

$$K = \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k h_k : \mu_k \in R, \mu_j \geq 0, j > m \right\} \subset C[a; b]$$

есть конус Хаара.

Теорема 2.4.3. Для всякой функции $f \in C[a; b]$ при выполнении условия

$$E_g^-(f; K; [a; b]) > \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$$

э.н.п. с ограничениями $(K^-; g; [a; b])$ единствен.

Доказательство. Случай, когда $f \in K$ очевиден. Пусть $f \notin K$ и v_1, v_2 суть различные элементы наилучшего приближения функции f с ограничениями $(K^-; g; [a; b])$. Элемент $v = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 \in K$ и является э.н.п. функции f с ограничениями $(K^-; g; [a; b])$. Следуя введенным ранее обозначениям, положим

$$I = I(v), I_1 = I(v_1), I_2 = I(v_2).$$

Легко видеть, что $I_1, I_2 \subset I$, а $K_{I_1}, K_{I_2} \subset K_I$. Отметим, что конус Хаара K_I является квазичебышевским некоторого порядка r ($r \leq n$). Возможны два случая:

1. K_I — чебышевское подпространство;

2. K_I — правильный конус Хаара.

Так как $v \in K$ есть э.н.п. функции f с ограничениями $(K_I^-; g; [a; b])$ и $f \notin K_I$, то в обоих случаях существует чебышевский альтернанс длины не меньше, чем r . Проводя аналогичные рассуждения, как и в доказательстве теоремы 2.4.1, получим, что в этих точках элементы v_1, v_2 совпадают. Таким образом, отличный от нулевого, элемент $v_1 - v_2$ имеет на $[a; b]$ не менее, чем r различных нулей. Однако,

$$v_1 - v_2 \in K_{I_2} \subset K_I.$$

Следовательно $v_1 = v_2$, что и доказывает справедливость теоремы.

Следствие 2.4.4. Для всякой функции $f \in C[a; b] \setminus K$ при выполнении условия

$$E_g^-(f; K; [a; b]) > \max\{f(x) - g(x) : x \in [a; b]\}$$

э.н.п. с ограничениями $(K^-; g; [a; b])$, $(K^-; g; G_0)$, где G_0 — множество, построенное в теореме об очистке, один и тот же и единствен.

Аналогично получается следующая

Теорема 2.4.4. Для всякой функции $f \in C[a; b]$ при выполнении условия

$$E_g^-(f; K; G) > \max\{f(x) - g(x) : x \in G\}$$

э.н.п. с ограничениями $(K^-; g; G)$ единствен.

Для задачи отыскания величины

$$E_g^+(f; H; G) = \inf\{\|f - h\| : h \in H, h \geq g \text{ на } G\}$$

при аппроксимации непрерывных на отрезке функций посредством элементов из конуса H , не меньших некоторой заданной функции $g \in C[a; b]$ на произвольном замкнутом множестве $G \subset [a; b]$, теоремы о единственности э.н.п. формулируются и доказываются аналогично.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков В. И. *Об одном обобщении теоремы С. Н. Бернштейна* // Ученые записки. Калинин, 1969. т.69. с. 32 - 38.
2. Даугавет И. К. *Введение в теорию приближения функций*. Л.: ЛГУ, 1977. 184 с.
3. Дрожжин И. А. *Наилучшие приближения непрерывных функций элементами конуса Хаара с ограничениями* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2014. с. 36 - 54.
4. Дрожжин И. А. *О наилучшем приближении непрерывных функций с ограничениями* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1998. с. 96 - 104.
5. Дрожжин И. А. *Аналог теоремы Колмогорова* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1996. с. 66 - 69.
6. Дрожжин И. А. *Характеризация элемента наилучшего приближения при аппроксимации с ограничениями* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1993. с. 39 - 45.
7. Каминский В. А. *О наилучшем приближении непрерывной функции посредством полиномов, не превышающих некоторой заданной функции* // Ученые записки. Калинин, 1969. т.69. с. 57 - 69.
8. Карлин С., Стаден В. *Чебышевские системы и их приложения в анализе и статистике*. М.: Наука, 1976. 568 с.
9. Корнейчук Н. П. *Экстремальные задачи теории приближений*. М.: Наука, 1976. 320 с.
10. Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г. *Аппроксимация с ограничениями*. Киев: Наукова думка, 1982. 250 с.
11. Крейн М. Г., Нудельман А. А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*. М.: Наука, 1973. 551 с.
12. Peisker P. *An Alternant Criterion for Haar Cones* // Approxim. theory. 1983. v.37, n3, p. 262 - 268.

И. А. ДРОЖЖИН

**АППРОКСИМАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

Монография

Подписано в печать 17.11.2014. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. 5,5. Тираж 10 экз. Заказ № 476.

Тверской государственный университет

Редакционно-издательское управление

Адрес: 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.

Тел. РИУ: (4822) 35-60-63