

И. А. ДРОЖЖИН

**АППРОКСИМАЦИЯ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

ТВЕРЬ 2014

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тверской государственный университет»

И. А. ДРОЖЖИН

АППРОКСИМАЦИЯ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Монография

ТВЕРЬ 2014

УДК 517.518.8

ББК В161.547

Д75

Научный редактор

кандидат физико-математических наук, профессор

А. И. Гусев

Дрожжин И. А.

Д75 **Аппроксимация суммируемых функций с ограничениями:**
монография. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2014. – 88 с.

ISBN 978–5–7609–0966–4

Монография посвящена экстремальным задачам теории приближений в пространствах суммируемых функций при аппроксимации элементами замкнутого выпуклого множества, в частности, элементами конуса с конечным числом образующих. В терминах двойственных соотношений приводятся критерии элемента наилучшего приближения с ограничениями для суммируемых функций и условия единственности элемента наилучшего одностороннего приближения для непрерывной.

Монографии предназначена для студентов старших курсов и аспирантов математических специальностей университетов, она будет полезна научным работникам в области теоретической и прикладной математики.

УДК 517.518.8

ББК В161.547

© Дрожжин И. А., 2014

© Тверской государственный
университет, 2014

ISBN 978–5–7609–0966–4

Оглавление

Введение	4
§1. Основные понятия. Общие теоремы существования и единственности элемента наилучшего приближения	6
§2. Соотношения двойственности в задаче наилучшего приближения с ограничениями	18
§3. Критерии элемента наилучшего приближения при аппроксимации конусом с конечным числом образующих, вытекающие из соотношений двойственности	23
§4. Критерии наилучшего приближения в пространстве суммируемых на промежутке функций	27
§5. Критерии наилучшего приближения в пространствах $L^p[a; b]$ ($1 < p < \infty$)	38
§6. Аппроксимация с ограничениями в пространствах $L^p[a; b]$ ($1 \leq p < \infty$)	41
§7. Критерии наилучшего одностороннего приближения в пространствах $L^p[a; b]$ ($1 \leq p < \infty$)	46
§8. Системы Чебышева. Конусы Хаара	50
§9. Одно характеристическое свойство элемента наилучшего верхнего приближения при аппроксимации конусом конечной размерности ...	61
§10. Единственность элемента наилучшего приближения с ограничениями в пространствах суммируемых функций	72
§11. Связь наилучших односторонних приближений непрерывных функций в метрике пространства $L[a; b]$ с квадратурными формулами .	80
Список литературы.	87

Введение

Во второй половине двадцатого столетия теория аппроксимации являлась одной из наиболее интенсивно развивающейся областью математической теории. Идеи и методы этой теории нашли свое применение в различных разделах математики, особенно в задачах прикладного характера.

Применение функционального анализа в теории приближений позволяет получить признаки наилучшего приближения в терминах двойственных соотношений в произвольных нормированных пространствах при аппроксимации замкнутыми выпуклыми множествами и показать единый подход в решении экстремальных задач при аппроксимации с ограничениями.

Особое место в теории приближений занимают экстремальные задачи в линейных нормированных пространствах непрерывных и суммируемых функций.

В монографии для суммируемых на промежутке функций приводятся критерии наилучшего приближения при аппроксимации замкнутым выпуклым множеством. Установлены характеристические признаки элемента наилучшего приближения в терминах расширенного конуса при аппроксимации конечномерным конусом.

В экстремальной задаче аппроксимации суммируемых функций элементами замкнутого выпуклого множества, не превышающими некоторой заданной функции, получены характеристические признаки элемента наилучшего приближения с ограничениями, в частности элемента наилучшего одностороннего приближения.

В линейном нормированном пространстве $L[a; b]$ для непрерывных функций приводятся необходимые условия элемента наилучшего одностороннего приближения при аппроксимации квазичебышевским конусом, в частности конусом Хаара, с использованием понятия правого знака конуса.

Доказываются достаточные условия единственности элемента наилучшего одностороннего приближения для непрерывно дифференцируемых функций при аппроксимации элементами конуса конечной размерности в метрике пространства $L[a; b]$, и показана существенность полученных условий.

Установленная связь /7/ между наилучшим односторонним приближением непрерывных функций при аппроксимации чебышевскими подпространствами в метрике пространства $L[a; b]$ и квадратурными формулами находит свое продолжение в экстремальной задаче при аппроксимации конечномерным конусом.

1. Основные понятия. Общие теоремы существования и единственности элемента наилучшего приближения

Пусть X — некоторое банахово пространство, F — выпуклое замкнутое множество в X . Под задачей наилучшего приближения элемента $x \in X$ элементами множества F будем понимать задачу отыскания величины

$$E(x, F) = \inf \{ \|x - h\| : h \in F \}.$$

Число $E(x, F)$ назовем величиной наилучшего приближения элемента $x \in X$ элементами множества F , а элемент $u \in F$, для которого

$$E(x, F) = \|x - u\|,$$

назовем элементом наилучшего приближения (э.н.п.) для x в F .

Геометрически наилучшее приближение элемента x трактуется как его расстояние до множества F , а элемент наилучшего приближения — как точка множества F , ближайшая к x .

Предложение 1.1. Пусть F — замкнутое выпуклое множество в X , $x \in X$. Величина наилучшего приближения $E(x, F) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in F$.

Доказательство. Очевидно, что если $x \in F$, то $E(x, F) = 0$. Предположим, что $E(x, F) = 0$. Используя свойство нижней грани числового множества, для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ найдем $u_n \in F$, для которого выполняется неравенство

$$\|x - u_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Переходя к пределу в неравенстве при $n \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x\| = 0 \text{ или } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x.$$

В силу замкнутости множества F элемент $x \in F$. Предложение доказано.

В связи с этим результатом, как правило, в характеристических признаках наилучшего приближения требуют чтобы элемент x пространства X не принадлежал аппроксимирующему множеству F .

Множество $G \subset X$ называется локально компактным, если компактно в X любое ограниченное подмножество из G , т.е. любая ограниченная последовательность элементов из G содержит сходящуюся подпоследовательность.

Примером локально компактного множества в X может служить любое его конечномерное подпространство.

Теорема 1.1. *Если F — замкнутое выпуклое локально компактное множество в X , то для любого элемента $x \in X$ существует э.н.п. в F .*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Используя свойство нижней грани числового множества, для любого натурального $n \in \mathbb{N}$ найдем элемент $u_n \in F$, для которого выполняется неравенство

$$\|x - u_n\| \leq E(x, F) + \frac{1}{n}.$$

Заметим, что для любого натурального n

$$\|u_n\| \leq \|u_n - x\| + \|x\| \leq E(x, F) + \frac{1}{n} + \|x\| \leq \|x\| + E(x, F) + 1.$$

Таким образом, последовательность $\{u_n\}$ ограничена. Из локальной компактности множества F следует, что она содержит сходящуюся подпоследовательность. Ради простоты, будем считать, что сама последовательность $\{u_n\}$ сходится к некоторому элементу u , который принадлежит F в силу замкнутости этого множества. Тогда, переходя к пределу в неравенствах

$$E(x, F) \leq \|x - u_n\| \leq E(x, F) + \frac{1}{n}$$

при $n \rightarrow \infty$, получим $E(x, F) = \|x - u\|$. По определению элемент u является э.н.п. для $x \in X$ во множестве F . Теорема доказана.

Нетрудно указать довольно широкий класс банаховых пространств, в которых для любого элемента $x \in X$ э.н.п. во множестве F всегда единствен.

Говорят, что пространство X имеет выпуклую сферу, если из равенства $\|x\| = \|y\|$ и неравенства $x \neq y$ следует, что

$$\|x + y\| < \|x\| + \|y\|.$$

Геометрически это означает, в частности, что если точки x, y принадлежат одной и той же сфере $S(\Theta, R)$ с центром в нуле и радиуса R , то

середина отрезка, их соединяющего, лежит внутри этой сферы, т.е.

$$\left\| \frac{1}{2}(x + y) \right\| < R.$$

Теорема 1.2. *Если пространство X имеет выпуклую сферу, а множество F — замкнуто выпукло и локально компактно, то для любого элемента $x \in X$ э.н.п. в F единствен.*

Доказательство. Пусть для некоторого $x \in X$ существуют два различных элемента наилучшего приближения в F . Обозначим их через u_1, u_2 . Тогда, учитывая, что

$$E(x, F) = \|x - u_1\| = \|x - u_2\|,$$

получим

$$\left\| x - \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \right\| = \frac{1}{2} \|(x - u_1) + (x - u_2)\| < \frac{1}{2}(\|x - u_1\| + \|x - u_2\|) = E(x, F).$$

Таким образом, элемент $\frac{1}{2}(u_1 + u_2) \in F$ приближает x лучше, чем u_1, u_2 . Полученное противоречие доказывает справедливость данной теоремы.

Из известных функциональных пространств выпуклую сферу имеют пространства функций, суммируемых в p -й степени на промежутке $< a; b >$ при $p > 1$. Поэтому в этих пространствах для любого элемента x элемент наилучшего приближения всегда единствен при аппроксимации элементами замкнутого выпуклого локально компактного множества. Однако пространство непрерывных на отрезке функций, наделенное чебышевской нормой, а также пространство функций, суммируемых на промежутке $< a; b >$, выпуклой сферой не обладают. Можно привести соответствующие примеры, доказывающие этот факт.

Теорема 1.3. *Если множество F — замкнуто выпукло локально компактно, то для любого элемента $x \in X$ множество элементов наилучшего приближения в F выпукло.*

Доказательство. Пусть $x \in X$. Обозначим через F_x — множество элементов наилучшего приближения для x в F . Рассмотрим $u, v \in F_x$, $\alpha \in [0; 1]$. Тогда

$$E(x, F) \leq \|x - (\alpha u + (1 - \alpha)v)\| \leq \alpha \|x - u\| + (1 - \alpha) \|x - v\| = E(x, F).$$

Последние соотношения означают, что $\alpha u + (1 - \alpha)v \in F_x$ и следовательно F_x — выпукло. Теорема доказана.

Непустое выпуклое множество $H \subset X$ назовем конусом, если с каждым элементом $x \in H$ оно содержит элемент λx для любого $\lambda \geq 0$. Нетрудно видеть, что любой конус замкнут относительно операций сложения и умножения на неотрицательное число.

Остановимся теперь на основных свойствах величины и элементов наилучшего приближения при аппроксимации замкнутым локально компактным конусом.

Пусть H — замкнутый локально компактный конус в X .

1⁰. Величина $E(f; H) \leq \|f\|$, т.к. нулевой элемент $\Theta \in H$.

2⁰. Если $h_0 \in H$ есть э.н.п. для f в H , то для любого числа $\lambda \geq 0$ элемент λh_0 является э.н.п. для λf в H , при этом

$$\lambda E(f; H) = E(\lambda f; H).$$

Действительно, при $\lambda = 0$ свойство очевидно. Пусть $\lambda > 0$. Обозначим соответственно через h_0, ψ — элементы наилучшего приближения для $f, \lambda f$. Из очевидных неравенств:

$$E(f; H) = \|f - h_0\| = \frac{1}{\lambda} \|\lambda f - \lambda h_0\| \geq \frac{1}{\lambda} E(\lambda f; H);$$

$$E(\lambda f; H) = \|\lambda f - \psi\| = \lambda \|f - \frac{\psi}{\lambda}\| \geq \lambda E(f; H)$$

следует, что $\lambda E(f; H) = E(\lambda f; H)$. Из равенств

$$\lambda E(f; H) = \lambda \|f - h_0\| = \|\lambda f - \lambda h_0\| = E(\lambda f; H)$$

получаем, что элемент λh_0 — э.н.п. для λf в H .

3⁰. Для любого элемента $f \in X$ и произвольного $\psi \in H$ справедливы неравенства

$$E(f + \psi; H) \leq E(f; H) \leq E(f - \psi; H). \quad (1)$$

Действительно, обозначая через h_0, h соответственно элементы наилучшего приближения для $f, f - \psi$ в H , получим справедливость неравенств:

$$E(f; H) = \|f - h_0\| = \|f + \psi - (h_0 + \psi)\| \geq E(f + \psi; H);$$

$$E(f - \psi; H) = \|f - \psi - h\| = \|f - (\psi + h)\| \geq E(f; H).$$

Ясно, что если элементы $\psi, -\psi \in H$, то имеют место равенства

$$E(f + \psi; H) = E(f; H) = E(f - \psi; H).$$

Если ψ — э.н.п. для $f \in X$ в H , то $E(f; H) = E(f - \psi; H)$, т.к.

$$E(f - \psi; H) \leq \|f - \psi\| = E(f; H) \leq E(f - \psi, H).$$

Приведем примеры показывающие, что в неравенствах (1) имеет место и знак строго неравенства.

Пусть $C[0; 1]$ — пространство вещественных непрерывных на $[0; 1]$ функций, наделенное чебышевской нормой, конус $H \subset C[0; 1]$ имеет вид

$$H = \{h : h = \alpha h_1 + \beta h_2 + \gamma h_3, \alpha, \beta, \gamma \geq 0\},$$

где

$$h_1(x) = 1, h_2(x) = x, h_3(x) = x^2, x \in [0; 1].$$

Функции h_1, h_2, h_3 называются образующими конуса H . Конус H является замкнутым локально компактным множеством. Рассмотрим функцию $f(x) = x - 1, x \in [0; 1]$ и элемент $\psi = 1 \in H$. Нетрудно видеть справедливость следующих соотношений

$$0 = E(f + \psi; H) < E(f; H) = 1 < E(f - \psi, H) = 2.$$

4⁰. Для любых элементов $f, g \in X$ верно неравенство

$$E(f + g; H) \leq E(f; H) + E(g; H).$$

Приведем доказательство данного свойства. Обозначим через φ, ψ соответственно элементы наилучшего приближения для $f, g \in X$ в H . Тогда

$$\begin{aligned} E(f + g; H) &\leq \|f + g - (\varphi + \psi)\| = \|(f - \varphi) + (g - \psi)\| \leq \\ &\leq \|f - \varphi\| + \|g - \psi\| = E(f; H) + E(g; H). \end{aligned}$$

5⁰. Для любых элементов $f, g \in X$ верно неравенство

$$|E(f; H) - E(g; H)| \leq \|f - g\|.$$

Из свойств 1⁰, 4⁰ следует, что

$$E(f; H) \leq E(f - g; H) + E(g; H) \leq \|f - g\| + E(g; H),$$

$$E(g; H) \leq E(g - f; H) + E(f; H) \leq \|f - g\| + E(f; H),$$

и свойство доказано.

Если $\varphi, \psi \in H$ соответственно являются элементами наилучшего приближения для $f, g \in X$ в H , то элемент $\varphi + \psi \in H$, вообще говоря, не есть э.н.п. для $f + g$ в H .

Для доказательства этого утверждения достаточно привести пример.

Пусть конус $H = \{h : h = ah_1 + bh_2, a \in R, b \geq 0\} \subset C[0; 1]$, где

$$h_1(x) = 1, h_2(x) = x, x \in [0; 1].$$

Ясно, что каждый элемент $h \in H$ является возрастающей функцией на $[0; 1]$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} -1 + 4x, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,5, \\ 3 - 4x, & \text{если } 0,5 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,25, \\ 3 - 8x, & \text{если } 0,25 \leq x \leq 0,5, \\ -5 + 8x, & \text{если } 0,5 \leq x \leq 0,75, \\ 1, & \text{если } 0,75 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 4x, & \text{если } 0 \leq x \leq 0,25, \\ 2 - 4x, & \text{если } 0,25 \leq x \leq 0,5, \\ -2 + 4x, & \text{если } 0,5 \leq x \leq 0,75, \\ 4 - 4x, & \text{если } 0,75 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Заметим, что нулевой элемент $\Theta \in H$ есть э.н.п. для f, g в H . Однако, элемент $h(x) = \frac{1}{2}, x \in [0; 1]$ является э.н.п. для $f + g$ в H .

6⁰. Пусть даны последовательности $\{f_n\}$ элементов из X и $\{\psi_n\}$ элементов из H , причем ψ_n — э.н.п. элемента f_n в H для каждого $n \in N$. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n; H) = E(f; H),$$

при этом, если элемент $\psi \in H$ есть единственный э.н.п. для f в H , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n = \psi.$$

Докажем это свойство. Соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f_n; H) = E(f; H)$$

следует из свойства 5⁰. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0,$$

то последовательности $\{\|f_n - f\|\}$, $\{E(f_n; H)\}$ ограничены. Считаем, что

$$E(f_n; H) \leq c_1, \|f_n - f\| \leq c_2,$$

для любого $n \in N$. Тогда

$$\|\psi_n\| \leq \|\psi_n - f_n\| + \|f_n - f\| + \|f\| \leq c_1 + c_2 + \|f\|.$$

Из ограниченности этой последовательности следует, что она содержит сходящуюся подпоследовательность. Пусть подпоследовательность $\{\psi_{n_k}\}$ сходится и в силу замкнутости конуса

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{n_k} = \varphi \in H.$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в равенстве

$$E(f_{n_k}; H) = \|f_{n_k} - \psi_{n_k}\|,$$

получим $E(f; H) = \|f - \varphi\|$, т.е. φ — э.н.п. для f в H .

Если э.н.п. для f единствен, то $\psi = \varphi$. Из локальной компактности последовательности $\{\psi_n\}$ и единственности предельного элемента следует ее сходимость к ψ .

Пусть дана последовательность замкнутых локально компактных конусов $\{H_n\}$. Считаем, что $H_n \subset H_{n+1}$ для каждого $n \in N$.

7⁰. Для любого элемента $f \in X$ и каждого натурального n верно неравенство

$$E(f; H_{n+1}) \leq E(f; H_n).$$

8⁰ Для того чтобы для любого $f \in X$ выполнялось соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f; H_n) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы множество $\bigcup_{n \in N} H_n$ было плотно в X .

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in X$ и $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} E(f; H_n) = 0$, то $E(f; H_n) = \|f - \psi_n\| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$, где

ψ_n — э.н.п. для f в конусе H_n . Последнее означает, что $\bigcup_n H_n$ плотно в X .

Достаточность. Пусть $\bigcup_n H_n$ плотно в X и $f \in X$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем элемент $h \in \bigcup_n H_n$, для которого $\|f - h\| < \varepsilon$. Считаем, что $h \in H_{n_0}$. Тогда

$$E(f; H_n) \leq E(f; H_{n_0}) \leq \|f - h\| < \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f; H_n) = 0.$$

В [3] была доказана следующая

Теорема 1.4. Если $\{H_k\}$ последовательность подпространств конечной размерности пространства X , причем

$$H_k \subset H_{k+1} \text{ для всех } k \in N$$

и множество $\bigcup_k H_k$ плотно в X , то для любой последовательности положительных чисел $\{\mu_k\}$, монотонно стремящейся к 0, существует элемент $f \in X$, для которого

$$E(f; H_k) = \mu_k \text{ для всех } k \in N.$$

Необходимо отметить, что идея и первое доказательство теоремы 1.4 в банаховом пространстве $C[a; b]$ принадлежит С. Н. Бернштейну. Докажем теорему, которая является аналогом теоремы 1.4.

Лемма 1.1. Пусть H — замкнутый локально компактный конус в X , элементы $f_1, f_2 \in X$ и $f_2 \notin H$. Тогда для любого числа $\mu \geq E(f_1; H)$ найдется число $\nu \geq 0$ такое, что $E(f_1 + \nu f_2; H) = \mu$.

Доказательство. Действительно, используя свойство 5⁰, получим непрерывность функции $E(f_1 + \nu f_2; H)$ по ν на промежутке $[0; +\infty)$, причем при $\nu = 0$ она обращается в $E(f_1; H)$ и

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} E(f_1 + \nu f_2; H) = +\infty,$$

т.к.

$$E(f_1 + \nu f_2; H) = \|f_1 + \nu f_2 - h_0\| \geq \nu \|f_2\| - \|f_1 - h_0\|,$$

где $h_0 \in H$ — э.н.п. для $f_1 + \nu f_2$. Следовательно утверждение леммы верно.

Теорема 1.5. Пусть $\{H_k\}$ — последовательность замкнутых локально компактных конусов пространства X , причем

$$H_k \neq H_{k+1}, \text{ lin } H_k \subset H_{k+1} \text{ для всех } k \in N,$$

где $\text{lin } H_k$ — линейная оболочка конуса H_k , и $\bigcup_k H_k$ плотно в X . Тогда для любой последовательности положительных чисел $\{\mu_k\}$, монотонно стремящейся к 0, существует элемент $f \in X$, для которого

$$E(f; H_k) \leq \mu_k \text{ для всех } k \in N.$$

Доказательство. Пусть m — натуральное число, $m > 1$. Покажем сначала существование такого элемента $f_m \in H_m$, что

$$E(f_m; H_n) \leq \mu_n, \quad n = 1, 2, \dots, m-1.$$

Для этого в каждом конусе H_n найдем элемент h_n , не принадлежащий H_{n-1} . Применяя лемму 1.1, подберем $\alpha_m \geq 0$ так, чтобы для элемента $g_m = \alpha_m h_m$ будет $E(g_m; H_{m-1}) = \mu_{m-1}$. Рассмотрим

$$g_{m-1} = g_m - \varphi_{m-1} + \alpha_{m-1} h_{m-1} \in H_m,$$

где φ_{m-1} — э.н.п. для g_m при аппроксимации элементами конуса H_{m-1} . Так как

$$\mu_{m-2} \geq \mu_{m-1} = \|g_m - \varphi_{m-1}\| = E(g_m; H_{m-1}),$$

то применяя вновь лемму 1.1, найдем $\alpha_{m-1} \geq 0$ такое, что

$$E(g_{m-1}; H_{m-2}) = \mu_{m-2}.$$

Применяя свойство 3^0 , получим следующие неравенства

$$\begin{aligned} E(g_{m-1}; H_{m-1}) &= E(g_m - \varphi_{m-1} + \alpha_{m-1} h_{m-1}; H_{m-1}) \leq \\ &\leq E(g_m - \varphi_{m-1}; H_{m-1}) = E(g_m; H_{m-1}). \end{aligned}$$

Итак, имеем $E(g_{m-1}; H_n) \leq \mu_n$, $n = m-2, m-1$.

Докажем теперь индукцией по j существование такого элемента $g_{m-j} \in H_m$, $j \leq m-2$, для которого

$$E(g_{m-j}; H_n) \leq \mu_n, \quad n = m-j-1, m-j, \dots, m-1.$$

Уже рассмотренный случай $j = 1$ представляет базу индукции, остается установить возможность индукционного перехода.

Пусть элемент $g_{m-(j-1)} \in H_m$ уже построен и

$$E(g_{m-(j-1)}; H_n) \leq \mu_n, \quad n = m - j, \quad m - j + 1, \quad \dots, \quad m - 1.$$

Обозначим через φ_{m-j} — э.н.п. для $g_{m-(j-1)}$ при аппроксимации элементами конуса H_{m-j} , так что

$$\|g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j}\| = E(g_{m-(j-1)}; H_{m-j}) \leq \mu_{m-j}.$$

Будем искать следующий элемент $g_{m-j} \in H_m$ в виде

$$g_{m-j} = g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j} + \alpha_{m-j} h_{m-j}.$$

Учитывая, что

$$E(g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j}; H_{m-j-1}) \leq \|g_{m-(j-1)} - \varphi_{m-j}\| \leq \mu_{m-j} \leq \mu_{m-j-1}$$

и применяя лемму 1.1, выберем $\alpha_{m-j} \geq 0$ таким, чтобы

$$E(g_{m-j}; H_{m-j-1}) = \mu_{m-j-1}.$$

По свойству 3^0 получим

$$\begin{aligned} E(g_{m-j}; H_{m-j}) &= E(g_{m-j+1} - \varphi_{m-j} + \alpha_{m-j} h_{m-j}; H_{m-j}) \leq \\ &\leq E(g_{m-j+1} - \varphi_{m-j}; H_{m-j}) = E(g_{m-j+1}; H_{m-j}) \leq \mu_{m-j}. \end{aligned}$$

Если $n > m - j$, то из включений $-\varphi_{m-j} + \alpha_{m-j} h_{m-j} \in \text{lin } H_{m-j} \subset H_n$ по свойству 3^0 имеем

$$\begin{aligned} E(g_{m-j}; H_n) &= E(g_{m-j+1} - \varphi_{m-j} + \alpha_{m-j} h_{m-j}; H_n) = \\ &= E(g_{m-j+1}; H_n) \leq \mu_n. \end{aligned}$$

Этим доказана возможность индукционного перехода, следовательно и существование всех $g_{m-j} \in H_m$. Если положим теперь $f_m = g_2$, то получим элемент с требуемыми свойствами.

Обозначим через χ_m — э.н.п. для f_m при аппроксимации элементами конуса H_1 . Положим $\psi_m = f_m - \chi_m \in H_m$. Тогда

$$\begin{aligned} E(f_m - \chi_m; H_n) &= E(f_m; H_n) \leq \mu_n, \quad n = 1, 2, \dots, m - 1, \\ E(f_m - \chi_m; H_n) &= 0, \quad n \geq m, \\ \|\psi_m\| &= \|f_m - \chi_m\| \leq \mu_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Все элементы последовательности $\{\psi_m\}$ принадлежат множеству

$$M = \{f \in C(T) : \|f\| \leq \mu_1, E(f; H_n) \leq \mu_n, n \in N\}.$$

Покажем, что множество M компактно. Для этого по произвольному $\varepsilon > 0$ найдем такой номер K , что $\mu_K < \varepsilon$. Положим

$$M_\varepsilon = \{\psi \in H_K : \|\psi\| \leq \mu_1 + \varepsilon\}.$$

Множество M_ε компактно, так как ограничено и содержится в локально компактном конусе H_K , и в то же время является ε — сетью для M . Действительно, для любого $f \in M$ его э.н.п. $\varphi \in H_K$ таков, что

$$\|f - \varphi\| \leq \mu_K < \varepsilon,$$

$$\|\varphi\| \leq \|f\| + \|f - \varphi\| \leq \mu_1 + \varepsilon,$$

т.е. $\varphi \in M_\varepsilon$. Обладая при каждом ε компактной ε — сетью, само множество M также компактно. Итак, из последовательности $\{\psi_m\}$ можно выделить сходящуюся к некоторому $f \in X$ подпоследовательность. Переходя к пределу по соответствующей подпоследовательности индексов в неравенствах (2) получим

$$E(f; H_n) \leq \mu_n.$$

Теорема доказана.

Приведем пример построения последовательности конусов с указанными свойствами.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — линейно независимая система в X , m — целое неотрицательное число. Докажем, что конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0 \text{ при } j > m \right\}$$

является замкнутым множеством.

Рассмотрим n — мерное подпространство

$$H_n = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k x_k; a_k \in R, k = 1, 2, \dots, n \right\}$$

пространства X . Подпространство H_n является банаховым пространством. Оператор $A : R^n \rightarrow H_n$, заданный формулой

$$A(a) = \left\{ \sum_{k=1}^n a_k x_k : a_k \in R, k = 1, 2, \dots, n \right\}, a = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

осуществляет биективное отображение R^n на H_n . Норму в R^n введем следующим образом

$$\|a\| = \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n.$$

Нетрудно видеть, что оператор A линеен и ограничен. Покажем ограниченность оператора A . Действительно, для любого $a \in R^n$ имеем

$$\begin{aligned} \|A(a)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \|x_k\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| \sum_{k=1}^n \|x_k\| = \sum_{k=1}^n \|x_k\| \|a\| \end{aligned}$$

и ограниченность доказана. Так как обратный оператор A^{-1} , который определяется формулой

$$A^{-1}(x) = A^{-1}\left(\sum_{k=1}^n a_k x_k\right) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in R^n, \quad x \in H_n,$$

также линеен, то по теореме Банаха об обратном операторе он ограничен, при этом

$$\|A^{-1}(x)\| = \|a\| \leq \|A^{-1}\| \|x\|, \quad x \in H_n.$$

Пусть h — предельная точка конуса H . Тогда существует последовательность $\{h_p\}$ элементов из H , сходящаяся к h , при этом $h \in H_n$. Будем считать, что

$$\begin{aligned} h &= \sum_{k=1}^n a_k x_k, \quad h_p = \sum_{k=1}^n a_k^p x_k, \quad p \in N, \\ a &= (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad a^p = (a_1^p, a_2^p, \dots, a_n^p). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|a^p - a\| &= \sum_{k=1}^n |a_k^p - a_k| \leq \|A^{-1}\| \left\| \sum_{k=1}^n a_k^p x_k - \sum_{k=1}^n a_k x_k \right\| = \\ &= \|A^{-1}\| \|h_p - h\|. \end{aligned}$$

Из сходимости последовательности $\{h_p\}$ к h при $p \rightarrow \infty$ вытекает сходимость последовательности $\{a^p\}$ к a при $p \rightarrow \infty$. Следовательно для любого $k \in \{1; 2; \dots; n\}$ числовая последовательность $\{a_k^p\}$ сходится

к a_k при $p \rightarrow \infty$ в силу покоординатной сходимости в конечномерном арифметическом пространстве. Так как при $k > m$ числа $a_k^p \geq 0$ для каждого $p \in N$, то $a_k \geq 0$. Поэтому $h \in H$ и замкнутость конуса H доказана.

Из ограниченности рассмотренных операторов A, A^{-1} , в частности, получим, что множество $E \subset R^n$ ограничено тогда и только тогда, когда его образ $A(E) \subset H_n$ при отображении A ограничен. Отсюда следует локальная компактность конуса H .

Линейно независимую систему $\{h_n\}$ элементов из X будем называть полной, если для каждого элемента $f \in X$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется элемент $h = \sum_{j=1}^k a_j h_j$ ($a_j \in R$) такой, что $\|f - h\| < \varepsilon$.

Рассмотрим произвольную строго возрастающую последовательность $\{n_k\}$ натуральных чисел и систему $\{h_k\}$ полную в X .

Положим

$$H_1 = \left\{ \sum_{j=1}^{n_1} a_j h_j : a_j \geq 0, j = 1, \dots, n_1 \right\},$$

$$H_{k+1} = \left\{ \sum_{j=1}^{n_{k+1}} b_j h_j : b_j \geq 0, j > n_k \right\},$$

для каждого $k = 1, 2, \dots$, где n_k — размерность конуса H_k , $k \in N$. Из указанного построения конусов следует, что $\text{lin } H_k \subset H_{k+1}$ для всех $k \in N$ и $\bigcup_k H_k$ плотно в X .

2. Соотношения двойственности в задаче наилучшего приближения

В этом параграфе будет приведена теорема, которая устанавливает соотношения двойственности в задаче наилучшего приближения.

Пусть X — банахово пространство, X^* — пространство, сопряженное с X , F — замкнутое выпуклое множество в X , $B^*(\Theta, 1)$ — замкнутый шар с центром в нуле, единичного радиуса в пространстве X^* .

В [7] приведена

Теорема 2.1. Для любого элемента $x \in X$ справедливо соотношение

$$\inf \{ \|x - h\| : h \in F \} = \sup_{f \in B^*} \{ f(x) - \sup_{h \in F} f(h) \},$$

при этом для каждого $x \in X \setminus F$ существует функционал $f_0 \in X^*$ с единичной нормой такой, что

$$\inf\{\|x - h\| : h \in F\} = f_0(x) - \sup_{h \in F} f_0(h).$$

Доказательство. Введем обозначения

$$E(x) = \inf\{\|x - h\| : h \in F\},$$

$$N(x) = \sup_{f \in B^*} \{f(x) - \sup_{h \in F} f(h)\}.$$

Заметим, что $E(x)$ и $N(x)$ являются неотрицательными функциями, заданными на пространстве X . Покажем, что $E(x) = N(x)$ для каждого $x \in X$. Так как

$$f(x) - \sup_{h \in F} f(h) = \inf_{h \in F} \{f(x) - f(h)\} = \inf_{h \in F} f(x - h),$$

то функции E , N на множестве F обращаются в нуль. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $x \in X \setminus F$.

Неравенство $N(x) \leq E(x)$ почти очевидно. Действительно, если $u_0 \in F$ есть э.н.п. для x во множестве F , т.е. $E(x) = \|x - u_0\|$, то

$$\begin{aligned} N(x) &\leq \sup_{f \in B^*} (f(x) - f(u_0)) = \sup_{f \in B^*} f(x - u_0) \leq \\ &\leq \sup_{f \in B^*} \|f\| \|x - u_0\| \leq \|x - u_0\| = E(x). \end{aligned}$$

Если же элемент наилучшего приближения для x во множестве F отсутствует, то для любого $\epsilon > 0$ найдется элемент $u_1 \in F$ такой, что

$$\|x - u_1\| < E(x) + \epsilon.$$

Проводя аналогичные оценки, получим

$$N(x) \leq \|x - u_1\| < E(x) + \epsilon.$$

Таким образом, $N(x) \leq E(x)$ в силу произвольности $\epsilon > 0$.

Прежде, чем доказывать противоположное неравенство, отметим полезный факт, вытекающий из определения нормы функционала.

Лемма 2.1. Если $f \in X^*$ и $\eta > 0$, то

$$\sup_{\|x\| < \eta} f(x) = \eta \|f\|.$$

Доказательство. В самом деле, для всех элементов $x \in X$ с нормой $\|x\| < \eta$ справедлива оценка

$$f(x) \leq |f(x)| \leq \|f\| \|x\| < \eta \|f\|.$$

Сдругой стороны, в силу равенств

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| < 1} f(x)$$

для любого $\epsilon > 0$ существует элемент x_ϵ , $\|x_\epsilon\| < 1$, такой, что

$$f(x_\epsilon) > \|f\| - \frac{\epsilon}{\eta}.$$

Положив $z = \eta x_\epsilon$, будем иметь $f(z) > \|f\| \eta - \epsilon$, причем $\|z\| < \eta$. Лемма доказана.

Теперь, считая x фиксированным, $x \in X \setminus F$, и заметив, что $E(x) > 0$ в силу замкнутости множества F , рассмотрим в X открытый шар

$$U(x, E(x)) = \{y \in X : \|y - x\| < E(x)\}$$

с центром в точке x и радиуса $E(x)$. Очевидно, что шар $U(x, E(x))$ не пересекается со множеством F , т.к. в противном случае существует $u_1 \in F \cap U(x, E(x))$, для которого справедливы неравенства

$$E(x) \leq \|x - u_1\| < E(x),$$

что противоречиво.

Таким образом, к множествам F и $U(x, E(x))$ можно применить теорему отделимости, в силу которой существует ненулевой функционал $f \in X^*$ такой, что $f(u) \leq f(y)$ для любых $u \in F$ и $y \in U(x, E(x))$. Разделив f на норму $\|f\|$, получим функционал $f_1 = \frac{f}{\|f\|}$ с нормой $\|f_1\| = 1$, который также отделяет множества F и $U(x, E(x))$, т.е. $f_1(u) \leq f_1(y)$ для любых $u \in F$ и $y \in U(x, E(x))$. Из последнего соотношения следует, что

$$\sup_{u \in F} f_1(u) \leq \inf_{y \in U(x, E(x))} f_1(y).$$

Далее, любой элемент $y \in U(x, E(x))$ можно представить в виде $y = x + z$, при этом для элемента z верны соотношения

$$\|z\| = \|y - x\| < E(x).$$

В обратную сторону, если $\|z\| < E(x)$, то элемент $y = x + z$, очевидно, принадлежит шару $U(x, E(x))$. Поэтому

$$\begin{aligned} \inf_{y \in U(x, E(x))} f_1(y) &= \inf_{\|z\| < E(x)} f_1(x + z) = \\ &= \inf_{\|z\| < E(x)} f_1(x - z) = f_1(x) - \sup_{\|z\| < E(x)} f_1(z). \end{aligned}$$

Тогда

$$\sup_{u \in F} f_1(u) \leq f_1(x) - \sup_{\|z\| < E(x)} f_1(z). \quad (3)$$

Однако, в силу леммы 2.1 получим

$$\sup_{\|z\| < E(x)} f_1(z) = E(x)\|f_1\| = E(x). \quad (4)$$

Следовательно из (3) и (4) получим справедливость соотношений

$$E(x) \leq f_1(x) - \sup_{u \in F} f_1(u) \leq \sup_{f \in B^*} \{f(x) - \sup_{u \in F} f(u)\} = N(x).$$

Итак, первая часть теоремы 2.1 доказана.

Остается убедиться, что при каждом фиксированном $x \in X \setminus F$ найдется функционал $f_0 \in X^*$ с нормой $\|f_0\| = 1$, для которого

$$N(x) = f_0(x) - \sup_{u \in F} f_0(u).$$

Из определения верхней грани числового множества следует, что для каждого $n \in N$ существует функционал $f_n \in B^*$, для которого справедливы неравенства

$$N(x) - \frac{1}{n} < f_n(x) - \sup_{u \in F} f_n(u) \leq N(x)$$

и значит

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x) - \sup_{u \in F} f_n(u)) = N(x). \quad (5)$$

Так как последовательность $\{f_n\}$ из B^* ограничена, то она содержит слабо сходящуюся подпоследовательность [2]. Ради простоты, будем считать, что сама последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится. Тогда для каждого $x \in X$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет предел. Положив

$$f_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in X, \quad (6)$$

получим функционал заданный на X , причем легко проверить, что $f_0 \in B^*$. Сопоставив (3) и (4), приходим к соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in F} f_n(u) = f_0(x) - N(x).$$

Докажем равенство

$$N(x) = f_0(x) - \sup_{u \in F} f_0(u), \quad x \in X \setminus F.$$

Очевидно, что

$$N(x) \geq f_0(x) - \sup_{u \in F} f_0(u), \quad x \in X \setminus F.$$

Установим теперь невозможность неравенства

$$\sup_{u \in F} f_0(u) > f_0(x) - N(x) = \gamma, \quad x \in X \setminus F.$$

Предположим, что

$$\sup_{u \in F} f_0(u) = \gamma_1 > \gamma,$$

а числа $\epsilon, \epsilon_1 > 0$ выбраны из условия $\gamma_1 - \epsilon_1 > \gamma + \epsilon$. Тогда найдется элемент $u_0 \in F$, для которого

$$f_0(u_0) > \gamma_1 - \epsilon_1 > \gamma + \epsilon.$$

С другой стороны, т.к.

$$f_0(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u_0),$$

то для каждого $n \geq n_\epsilon$ будет $f_n(u_0) < \gamma + \epsilon$. Следовательно, для $n \geq n_\epsilon$ имеют место неравенства

$$f_0(u_0) - f_n(u_0) > \gamma_1 - \epsilon_1 - (\gamma + \epsilon) > 0.$$

Последнее противоречит равенству

$$f_0(u_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u_0).$$

Норма функционала f_0 не может быть меньше 1. В самом деле, если $\|f_0\| < 1$, то функционал $f_1 = \lambda f_0$, где $\lambda = 1/\|f_0\|$ очевидно, принадлежит шару B^* и

$$f_1(x) - \sup_{u \in F} f_1(x) = \lambda(f_0(x) - \sup_{u \in F} f_0(x)) = \lambda N(x) > N(x),$$

что невозможно. Теорема доказана полностью.

Пусть H есть замкнутый конус в X . Обозначим

$$H_-^* = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1, f(h) \leq 0 \forall h \in H\},$$

$$B^* = \{f \in X^* : \|f\| \leq 1\}.$$

Заметим, что если $f \in B^*$ не принадлежит множеству H_-^* , то

$$f(x) - \sup_{h \in H} f(h) = -\infty.$$

Действительно, для линейного ограниченного функционала $f \notin H_-^*$, $\|f\| \leq 1$, найдется $h_1 \in H$ такой, что $f(h_1) > 0$. Тогда для любого $\lambda \geq 0$ значение $f(\lambda h_1) = \lambda f(h_1) \geq 0$, при этом

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda h_1) = +\infty,$$

а элемент $\lambda h_1 \in H$. Поэтому для каждого $x \in X \setminus H$ разность

$$f(x) - \sup_{h \in H} f(h) = -\infty.$$

Выше изложенные рассуждения означают, что при вычислении верхней грани по f в правой части равенства

$$\inf\{\|x - h\| : h \in H\} = \sup_{f \in B^*} \{f(x) - \sup_{h \in H} f(h)\}$$

можно рассматривать только те функционалы из B^* , которые принадлежат множеству H_-^* . Поэтому, для любого $x \in X \setminus H$ имеем

$$E(x, H) = \sup_{f \in H_-^*} \{f(x) - \sup_{h \in H} f(h)\} = f_0(x) - \sup_{h \in H} f_0(h),$$

где $f_0 \in H_-^*$ и $\|f_0\| = 1$.

3. Критерии элемента наилучшего приближения при аппроксимации конечномерным конусом, вытекающие из соотношений двойственности

В этом параграфе приводятся критерии наилучшего приближения, вытекающие из соотношений двойственности, в терминах расширенного конуса при аппроксимации конусом с конечным числом образующих.

Пусть X — линейное нормированное пространство, F — замкнутое выпуклое множество в X .

В работе /7/ получен критерий наилучшего приближения при аппроксимации замкнутым выпуклым множеством, вытекающий из соотношений двойственности.

Теорема 3.1. Пусть $x \in X \setminus F$. Элемент $h_0 \in F$ является э.н.п. для x в F тогда и только тогда, когда существует ненулевой функционал $f_0 \in X^*$, обладающий следующими свойствами:

1. $\|f_0\| = 1$;
2. $f_0(h) \leq f_0(h_0)$ для любого $h \in F$;
3. $\|x - h_0\| = f_0(x - h_0)$.

Необходимость. Пусть h_0 — э.н.п. для x во множестве F . По теореме 2.1 существует функционал $f_0 \in X^*$ с единичной нормой, для которого имеют место равенства

$$E(x, H) = \|x - h_0\| = f_0(x) - \sup_{h \in F} f_0(h).$$

Имеем,

$$\begin{aligned} \|x - h_0\| &= f_0(x) - \sup_{h \in F} f_0(h) \leq f_0(x) - f_0(h_0) = \\ &= f_0(x - h_0) \leq \|f_0\| \|x - h_0\| = \|x - h_0\|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|x - h_0\| = f_0(x - h_0), \quad f_0(h_0) = \sup_{h \in F} f_0(h)$$

и необходимость доказана.

Достаточность. Для произвольного $h \in F$ верны соотношения

$$\begin{aligned} \|x - h_0\| &= f_0(x - h_0) = f_0(x - h) + f_0(h - h_0) \leq \\ &\leq f_0(x - h) \leq \|f_0\| \|x - h\| = \|x - h\|. \end{aligned}$$

Последние соотношения означают, что h_0 — э.н.п. для x в F . Достаточность доказана.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — линейно независимая система элементов в X , m — целое неотрицательное число. Положим

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0 \text{ при } j > m \right\},$$

$$h_0 = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \in H,$$

$$J(h_0) = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{k > m : \lambda_k > 0\},$$

$$H_{J(h_0)} = \left\{ \sum_{k=1}^n \beta_k x_k : \beta_k \in R, \beta_j \geq 0 \text{ при } j \notin J(h_0) \right\}.$$

Множества $H, H_{J(h_0)}$ являются конусами, при этом $H \subset H_{J(h_0)}$. Конус $H_{J(h_0)}$ в дальнейшем будем называть расширенным относительно элемента $h_0 \in H$.

Лемма 3.1. *Для любого $h_0 \in H$ имеет место равенство*

$$H_{J(h_0)} = \{u \in X : u = \alpha(h - h_0), \alpha \geq 0, h \in H\}.$$

Доказательство. Включение

$$\{u \in X : u = \alpha(h - h_0), \alpha \geq 0, h \in H\} \subset H_{J(h_0)}$$

очевидно, т.к. элемент $h - h_0 \in H_{J(h_0)}$ для любого $h \in H$ и следовательно

$$\alpha(h - h_0) \in H_{J(h_0)}$$

при $\alpha \geq 0$. Покажем, что

$$H_{J(h_0)} \subset \{u \in X : u = \alpha(h - h_0), \alpha \geq 0, h \in H\}.$$

Пусть $w \in H_{J(h_0)}$. Элемент w можно представить в виде

$$w = w + h_0 - h_0.$$

Подберем $m_0 \in N$ таким образом, чтобы

$$\frac{1}{m_0} w + h_0 \in H.$$

Поэтому

$$w = m_0 \left(\frac{1}{m_0} w + h_0 - h_0 \right) = m_0(v - h_0),$$

где $v = \frac{1}{m_0} w + h_0 \in H$ и включение доказано. Лемма верна.

Так как конус H является замкнутым выпуклым локально компактным множеством, то из теорем 1.2, 1.3 следует

Следствие 3.1. *Для каждого $x \in X$ существует э.н.п. в конусе H , а множество его элементов наилучшего приближения выпукло.*

Приведем критерий наилучшего приближения при аппроксимации элементами из конуса H , вытекающий из соотношений двойственности.

Теорема 3.2 Пусть $x \in X \setminus H$. Элемент $h_0 \in H$ является э.н.п. для x в конусе H тогда и только тогда, когда существует ненулевой функционал $f_0 \in X^*$, обладающий следующими свойствами:

1. $\|f_0\| = 1$;
2. $\|x - h_0\| = f_0(x - h_0)$;
3. $f_0(h_0) = 0$, $f_0(h) \leq 0$ для любого $h \in H$.

Доказательство. Необходимость. Пусть h_0 — э.н.п. для x в конусе H . По теореме 3.1 существует функционал $f_0 \in X^*$ с единичной нормой, обладающий свойствами:

$$\|x - h_0\| = f_0(x - h_0); \quad f_0(h - h_0) \leq 0 \text{ для любого } h \in H.$$

Далее, используя лемму 3.1, получим, что $f_0(u) \leq 0$ для каждого $u \in H_{J(h_0)}$, а т.к. $h_0, -h_0 \in H_{J(h_0)}$, то $f_0(h_0) = 0$ и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнены условия (1) — (3). Тогда для произвольного $h \in H$ имеем

$$\begin{aligned} \|x - h_0\| &= f_0(x - h_0) = f_0(x - h) + f_0(h - h_0) \leq \\ &\leq f_0(x - h) \leq \|f_0\| \|x - h\| = \|x - h\|. \end{aligned}$$

Следовательно h_0 — э.н.п. для x в конусе H . Достаточность доказана.

Следствие 3.2. Пусть H — конечномерное подпространство в X , $x \in X \setminus H$. Элемент $h_0 \in H$ является э.н.п. для x в H тогда и только тогда, когда существует ненулевой функционал $f_0 \in X^*$, обладающий следующими свойствами:

1. $\|f_0\| = 1$;
2. $f_0(h) = 0$ для любого $h \in H$;
3. $\|x - h_0\| = f_0(x)$.

Справедливость следствия очевидна.

Сформулируем и докажем критерий наилучшего приближения в терминах расширенного конуса.

Теорема 3.3. Пусть $x \in X$. Элемент h_0 есть э.н.п. для x в конусе H тогда и только тогда, когда h_0 — э.н.п. для x в расширенном конусе $H_{J(h_0)}$.

Доказательство. Необходимость. Случай, когда $x \in H$ очевиден. Пусть $x \notin H$. Предположим, что h_0 — э.н.п. для x в конусе H , а y — э.н.п. для x в конусе $H_{J(h_0)}$, причем

$$\|x - h_0\| > \|x - y\|.$$

Применяя теорему 3.2, найдем функционал $f_0 \in X^*$, обладающий свойствами:

$$\|f_0\| = 1; f_0(x - h_0) = \|x - h_0\|; f_0(u) \leq 0$$

для любого $u \in H_{J(h_0)}$. Так как $y - h_0 \in H_{J(h_0)}$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \|x - y\| &< \|x - h_0\| = f_0(x - h_0) = f_0(x - y) + f_0(y - h_0) \leq \\ &\leq f_0(x - y) \leq \|f_0\| \|x - y\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает необходимость.

Достаточность вытекает из следующей цепочке соотношений

$$\|x - h_0\| \geq E(x, H) \geq E(x, H_{J(h_0)}) = \|x - h_0\|.$$

Следствие 3.3. Элемент h_0 есть э.н.п. для $x \in X$ в конусе H тогда и только тогда, когда нулевой элемент Θ есть э.н.п. для $x - h_0$ в расширенном конусе $H_{J(h_0)}$.

Доказательство. Пусть h_0 — э.н.п. для x в конусе H . Для каждого $v \in H_{J(h_0)}$ в силу теоремы 3.3 и принадлежности $h_0 + v$ расширенному конусу $H_{J(h_0)}$ получим

$$\|x - h_0 - v\| = \|x - (h_0 + v)\| \geq \|x - h_0\|.$$

Поэтому нулевой элемент является э.н.п. для $x - h_0$ в расширенном конусе. Необходимость доказана.

Пусть теперь нулевой элемент Θ — э.н.п. для $x - h_0$ в расширенном конусе $H_{J(h_0)}$. Так как $h - h_0 \in H_{J(h_0)}$, то для любого $h \in H$ имеем

$$\|x - h\| = \|x - h_0 - (h - h_0)\| \geq \|x - h_0\|.$$

Полученное неравенство означает, что h_0 — э.н.п. для x в конусе H . Теорема доказана.

4. Критерии наилучшего приближения в пространстве суммируемых на промежутке функций

В пространстве суммируемых функций будут приведены критерии элемента наилучшего приближения в терминах двойственных соотношений с использованием общего вида линейного функционала, заданного на этом пространстве, при аппроксимации замкнутым выпуклым множеством или конечномерным конусом. Данные результаты обобщают известную теорему /7/ в случае приближения элементами некоторого подпространства, а также теорему А. А. Маркова /3/.

В качестве пространства X рассмотрим банахово пространство $L[a; b]$ вещественных функций, суммируемых на отрезке $[a; b]$, с нормой

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt, \quad x \in L[a; b].$$

Через $M[a; b]$ обозначим пространство измеримых, существенно ограниченных на отрезке $[a; b]$ функций, наделенное нормой

$$\|x\| = \sup_{[a; b]} |x(t)|,$$

где $\sup_{[a; b]} |x(t)|$ есть существенная верхняя грань функции $|x|$ на отрезке $[a; b]$, т.е. наименьшее из чисел $c \geq 0$, для которых неравенство $|x(t)| \geq c$ выполняется на множестве меры нуль.

Напомним /5/, что всякий линейный ограниченный функционал $f \in L^*[a; b]$ из сопряженного с $L[a; b]$ пространства имеет следующее аналитическое представление

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) dt, \quad x \in L[a; b],$$

где y — некоторая измеримая существенно ограниченная на отрезке $[a; b]$ функция, при этом $\|f\| = \|y\|$.

Пусть теперь F — замкнутое выпуклое множество в $L[a; b]$. В частности, из теоремы 2.1 следует, что для любой функции $x \in L[a; b]$ справедливо следующее двойственное соотношение

$$E(x, H) = \sup_{y \in B^*} \left\{ \int_a^b x(t) y(t) dt - \sup_{h \in F} \int_a^b h(t) y(t) dt \right\},$$

при этом $B^* = \{y \in M[a; b] : \|y\| \leq 1\}$ и для всякой функции $x \in L[a; b] \setminus F$ существует элемент $y_0 \in M[a; b]$, $\|y_0\| = 1$, такой, что

$$E(x, F) = \int_a^b x(t) y_0(t) dt - \sup_{h \in F} \int_a^b h(t) y_0(t) dt.$$

Используя этот факт, сформулируем и докажем теперь необходимые и достаточные условия элемента наилучшего приближения.

Теорема 4.1. *Для того чтобы элемент $h_0 \in F$ являлся э.н.п. для $x \in L[a; b] \setminus F$ во множестве F достаточно, а если*

$$mes\{t \in [a; b] : x(t) = h_0(t)\} = 0,$$

то и необходимо, выполнение следующего условия

$$\int_a^b (h(t) - h_0(t)) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0 \text{ для любого } h \in F.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть h_0 есть э.н.п. для x во множестве F . Тогда найдется функция $y_0 \in M[a; b]$ с единичной нормой, для которой

$$\|x - h_0\| = \int_a^b x(t) y_0(t) dt - \sup_{h \in F} \int_a^b h(t) y_0(t) dt.$$

Отметим справедливость цепочки неравенств

$$\begin{aligned} \|x - h_0\| &\leq \int_a^b x(t) y_0(t) dt - \int_a^b h_0(t) y_0(t) dt = \\ &= \int_a^b (x(t) - h_0(t)) y_0(t) dt \leq \int_a^b |x(t) - h_0(t)| |y_0(t)| dt \leq \\ &\leq \int_a^b |x(t) - h_0(t)| dt = \|x - h_0\|. \end{aligned}$$

Следовательно, здесь везде имеет место знак равенства. Отсюда, в частности,

$$\begin{aligned} \int_a^b h_0(t) y_0(t) dt &= \sup_{h \in F} \int_a^b h(t) y_0(t) dt, \\ \int_a^b |x(t) - h_0(t)| dt &= \int_a^b (x(t) - h_0(t)) y_0(t) dt. \end{aligned}$$

Из первого равенства вытекает неравенство

$$\int_a^b h_0(t) y_0(t) dt \geq \int_a^b h(t) y_0(t) dt \quad (7)$$

для любого $h \in F$. Так как множество $\{t \in [a; b] : x(t) = h_0(t)\}$ имеет нулевую меру, то равенство

$$\int_a^b |x(t) - h_0(t)| dt = \int_a^b (x(t) - h_0(t)) y_0(t) dt$$

возможно тогда и только тогда, когда

$$\text{sign}(x(t) - h_0(t)) = y_0(t) \text{ п.в. на } [a; b]. \quad (8)$$

Таким образом, из (7) и (8) следует, что для любого $h \in F$ верно неравенство

$$\int_a^b (h(t) - h_0(t)) \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$$

и необходимость доказана.

Достаточность. Отметим, что для каждого $h \in F$ имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} \|x - h_0\| &= \int_a^b |x(t) - h_0(t)| dt = \int_a^b (x(t) - h_0(t)) \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt = \\ &= \int_a^b (x(t) - h(t)) \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt + \int_a^b (h(t) - h_0(t)) \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq \\ &\leq \int_a^b (x(t) - h(t)) \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq \int_a^b |x(t) - h(t)| dt = \|x - h\|. \end{aligned}$$

Следовательно, элемент h_0 есть э.н.п. функции $x \in L[a; b] \setminus H$ при аппроксимации элементами замкнутого выпуклого множества F . Теорема доказана.

Если множество F есть произвольное подпространство пространства $L[a; b]$, то с каждым элементом $h \in F$ элемент $-h \in F$. Таким образом, справедлива

Теорема 4.2. /6/ Для того чтобы элемент $h_0 \in H$ являлся э.н.п. для $x \in L[a; b] \setminus F$ в подпространстве F достаточно, а если

$$\text{mes}\{t \in [a; b] : x(t) = h_0(t)\} = 0,$$

то и необходимо, выполнение следующего условия

$$\int_a^b h(t) \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt = 0 \text{ для любого } h \in F.$$

Рассмотрим случай, когда замкнутое выпуклое множество F является конечномерным конусом.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — линейно независимая система в $L[a; b]$, m — целое неотрицательное число, конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, k > m \right\}.$$

Следствие 4.1 Пусть $x \in L[a; b] \setminus H$, $h_0 \in H$. Для того чтобы h_0 был э.н.п. для x при аппроксимации элементами конуса H , достаточно, а в случае, когда множество

$$\{t \in [a; b] : x(t) = h_0(t)\}$$

имеет меру нуль и необходимо, выполнение условия

$$\int_a^b \varphi(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$$

для любого $\varphi \in H_{J(h_0)}$.

Для установления справедливости следствия достаточно применить лемму 3.1 о структуре расширенного конуса.

Лемма 4.1 Пусть $x \in L[a; b]$ и $h_0 \in H$. Следующие условия эквивалентны:

1. $\int_a^b (h(t) - h_0(t)) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$ для любого $h \in H$;
2. $\int_a^b \varphi(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$ для любого $\varphi \in H_{J(h_0)}$;
3. $\int_a^b h_0(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt = \sup_{h \in H} \int_a^b h(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt$;
4. $\int_a^b h_0(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt = 0$,
 $\int_a^b h(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$ для любого $h \in H$.

Доказательство. Импликации $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$ очевидны. Покажем, что $(2) \Leftrightarrow (4)$. Предположим в начале, что

$$\int_a^b \varphi(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0 \text{ для любого } \varphi \in H_{J(h_0)}.$$

Тогда из условия $h_0, -h_0 \in H_{J(h_0)}$ следует

$$\int_a^b h_0(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt = 0.$$

Далее, для каждого $h \in H$ элемент $h - h_0 \in H_{J(h_0)}$ и поэтому

$$\int_a^b h(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt = \int_a^b (h(t) - h_0(t)) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0.$$

Таким образом, импликация (2) $\Rightarrow$ (4) верна.

Покажем теперь справедливость импликации (4) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\varphi \in H_{J(h_0)}$. Тогда по лемме 3.1 найдутся $\alpha \geq 0$ и $h \in H$ такие, что $\varphi = \alpha(h - h_0)$. Следовательно

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt &= \\ &= \int_a^b \alpha(h(t) - h_0(t)) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt = \\ &= \alpha \int_a^b h(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0. \end{aligned}$$

Итак, лемма доказана полностью.

В силу следствия 4.1 каждое из условий (1) — (4) леммы 4.1 является достаточным, а в случае, когда множество

$$\{t \in [a; b] : x(t) = h_0(t)\}$$

имеет меру нуль и необходимо, для того чтобы элемент h_0 был э.н.п. для функции $x \in L[a; b] \setminus H$ в конусе H , при этом

$$E(x, H) = \|x - h_0\| = \int_a^b x(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt.$$

Подводя итог вышесказанному, сформулируем следующую теорему.

Теорема 4.3. Пусть конус H имеет вид

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, k > m \right\},$$

$h_0 \in H$, H_1 — подпространство, содержащееся в конусе H , базисом которого являются функции множества $\{x_k : k \in J(h_0)\}$, т.е.

$$H_1 = \left\{ \sum_{k \in J(h_0)} \alpha_k x_k : \alpha_k \in R \right\}.$$

Для того чтобы h_0 являлся э.н.п. для $x \in L[a; b] \setminus H$ при аппроксимации конусом H , достаточно, а в случае, когда множество

$$\{t \in [a; b] : x(t) = h_0(t)\}$$

имеет нулевую меру и необходимо, выполнение следующих условий:

- 1) $\int_a^b \varphi(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt = 0$ для любого $\varphi \in H_1$;
- 2) $\int_a^b h(t) \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$ для любого $h \in H$,

при этом

$$\|x - h_0\| = E(x, H) = E(x, H_1) = E(x, H_{J(h_0)}).$$

Доказательство. Достаточность очевидна, т.к. $h_0 \in H_1$. Необходимость вытекает из следствия 4.1 и леммы 4.1.

Так как

$$h_0 \in H_1, \quad H_1 \subset H_{J(h_0)},$$

то в случае, когда h_0 является э.н.п. для x в конусе H , получим

$$\|x - h_0\| = E(x, H) \geq E(x, H_1) \geq E(x, H_{J(h_0)}) = \|x - h_0\|,$$

при этом равенство $E(x, H_{J(h_0)}) = \|x - h_0\|$ следует из теоремы 3.2. Итак, теорема верна.

Пусть $t_1, t_2, \dots, t_r$ есть различные точки отрезка $[a; b]$, функция $\omega(t) = (t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_r)$, $t \in [a; b]$.

Будем говорить, что точки $t_1, t_2, \dots, t_r$ — все точки перемены знака функции $\varphi \in L[a; b]$ на отрезке $[a; b]$, если, либо почти всюду на $[a; b]$ выполняется равенство

$$\operatorname{sign} \varphi(t) = \operatorname{sign} \omega(t),$$

либо почти всюду на $[a; b]$ имеет место

$$\text{sign } \varphi(t) = -\text{sign } \omega(t).$$

Теорема 4.4. Пусть конус H имеет вид

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, k > m \right\},$$

функция $g \in L[a; b]$ такова, что:

- a) $t_1, t_2, \dots, t_r$ — все точки перемены знака функции g ;
- b) $\int_a^b h(t) \text{sign } g(t) dt \leq 0$ для любого $h \in H$.

Если $x \in L[a; b] \setminus H$ и $h_0 \in H$ обладают свойствами:

- 1) $t_1, t_2, \dots, t_r$ — все точки перемены знака для $x - h_0$;
- 2) $\int_a^b h_0(t) \text{sign } g(t) dt = 0$;
- 3) $\text{sign}(x(t) - h_0(t)) = \text{sign } g(t)$ п.в. на $]a; b]$,

то h_0 — э.н.п. для функции x в конусе H и

$$E(x, H) = \int_a^b x(t) \text{sign } g(t) dt.$$

Доказательство. В силу следствия 4.1 и леммы 4.1 получаем, что h_0 есть э.н.п. для x в конусе H . Тогда

$$E(x, H) = \int_a^b x(t) \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt = \int_a^b x(t) \text{sign } g(t) dt$$

и теорема верна.

Если конус H является подпространством конечной размерности, то получим известный результат А. А. Маркова [3].

Теорема (Марков А. А.) Пусть функция $g \in L[a; b]$ такова, что

- a) $t_1, t_2, \dots, t_r$ — все точки перемены знака функции g ;
- b) $\int_a^b h(t) \text{sign } g(t) dt = 0$ для любого $h \in H$.

Если функция $x \in L[a; b] \setminus H$ и элемент $h_0 \in H$ таковы, что $t_1, t_2, \dots, t_r$ — все точки перемены знака $x - h_0$, то h_0 есть э.н.п. функции x в конечномерном подпространстве H и

$$E(x, H) = \left| \int_a^b x(t) \operatorname{sign} g(t) dt \right|.$$

Особенностью теоремы Маркова А. А. является то, что функция g , удовлетворяющая соотношениям (а), (б) строится независимо от приближаемой функции x . Она зависит лишь от выбранного подпространства H .

Ниже будут указаны соответствующие функции g для случаев приближения тригонометрическими и алгебраическими полиномами /3/.

Лемма 4.2. При любом α и при всяком вещественным ν , отличном от $(2k+1)(n+1)$, где k — целое, а n — натуральное число, выполняются равенства

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \nu x \operatorname{sign} \sin[(n+1)(x-\alpha)] dx &= 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin \nu x \operatorname{sign} \sin[(n+1)(x-\alpha)] dx &= 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Достаточно показать при ν отличном от $(2k+1)(n+1)$ равенство нулю интеграла

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu x} \operatorname{sign} \sin[(n+1)(x-\alpha)] dx,$$

т.к. левые части доказываемых равенств являются соответственно вещественной и мнимой частями интеграла J . Делая подстановку $x = y + \frac{\pi}{(n+1)}$ и учитывая 2π —периодичность подинтегральной функции, получим

$$J = e^{i\frac{\nu\pi}{n+1}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\nu y} \operatorname{sign} \sin[(n+1)(y-\alpha) + \pi] dy = -e^{i\frac{\nu\pi}{n+1}} J.$$

Итак, $(1 + e^{i\frac{\nu\pi}{n+1}})J = 0$. При ν отличном от $(2k+1)(n+1)$ первый множитель не равен нулю и поэтому $J = 0$. Лемма доказана.

Следствие 4.2. При любых α и $a \in R$ для тригонометрического полинома T_n порядка не выше n выполняется равенство

$$\int_a^{a+\pi} T_n(x) \operatorname{sign} \sin[(n+1)(x-\alpha)] dx = 0.$$

Обозначим через $L_{2\pi}$ пространство 2π – периодических функций, суммируемых на каждом конечном промежутке $[a; a+2\pi]$, с нормой

$$\|f\| = \int_a^{a+2\pi} |f(x)| dx = \int_0^{2\pi} |f(x)| dx.$$

Если рассмотреть функции из $L_{2\pi}$ лишь на промежутке $[a; a+2\pi]$, то сразу получим, что это пространство линейно изометрично $L[a; a+2\pi]$. Через L_n обозначим подпространство, тригонометрических полиномов порядка не выше n . Из приведенного следствия 4.2 и теоремы Маркова А. А. немедленно вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.5. Пусть $f \in L_{2\pi}$, T_n — тригонометрический полином порядка не выше n . Если $x_k = \alpha + \frac{k\pi}{(n+1)}$, $k = 0, 1, \dots, 2n+1$, суть все точки перемены знака разности $f - T_n$ на некотором промежутке $(a; a+2\pi)$, то T_n — э.н.п. функции f и

$$E(f; L_n) = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sign} \sin[(n+1)(x-\alpha)] dx \right|.$$

Доказательство. Используя линейную изометрию указанных пространств и полагая $g(x) = \sin[(n+1)(x-\alpha)]$, получим, что точки

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$$

— все точки перемены знака функций g и $f - T_n$ на любом открытом промежутке длиной 2π , который их содержит. Из теоремы Маркова А. А. получим требуемое.

Лемма 4.3. Для любого алгебраического полинома P_n степени не выше n выполняется равенство

$$J = \int_{-1}^1 P_n(x) \operatorname{sign} \sin[(n+2)\arccos x] dx = 0.$$

Доказательство. Сделаем в интеграле J замену переменной $x = \cos\psi$. Тогда

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi P_n(\cos\psi) \sin\psi \operatorname{sign} \sin[(n+2)\psi] d\psi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi P_n(\cos\psi) \sin\psi \operatorname{sign} \sin[(n+2)\psi] d\psi. \end{aligned}$$

При последнем переходе использована четность подынтегральной функции. Очевидно, что $P_n(\cos\psi) \sin\psi = T_{n+1}(\psi)$ — тригонометрический полином порядка не выше $n+1$, и равенство $J = 0$ следует из следствия 4.2. Лемма верна.

Если рассмотреть пространство $L[-1; 1]$ и его подпространство L_n , состоящее из всех полиномов степени не выше n , то условие (b) теоремы Маркова А. А. будет выполнено для функции $g(x) = \sin[(n+2)\arccos x]$. Так как все точки перемены знака этой функции на $(-1; 1)$ исчерпываются точками

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+2}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1,$$

то справедлива следующая

Теорема 4.6 Пусть $f \in L[-1; 1]$ и P_n — полином степени не выше n . Если точки

$$x_k = \cos \frac{k\pi}{n+2}, \quad k = 1, 2, \dots, n+1,$$

— это все точки перемены знака разности $f - P_n$ на $(-1; 1)$, то P_n есть э.н.п. функции f в L_n .

Теорема 4.6 допускает следующее применение. Пусть $f \in C[-1; 1]$ и требуется построить ее полином наилучшего приближения (в метрике $L[-1; 1]$) степени не выше n . По узлам x_k , указанным в теореме, построим интерполяционный полином P_n для функции f . Если окажется, что они являются точками перемены знака $f - P_n$ и других точек перемены знака нет, то P_n — э.н.п. функции f .

В периодическом случае подобное применение теоремы несколько сложнее, поскольку число точек x_k равно $(2n+2)$ и на единицу больше, чем требуется для разрешимости интерполяционной задачи. Однако здесь в нашем распоряжении имеется еще один дополнительный параметр — число α .

5. Критерии наилучшего приближения в пространствах $L^p[a; b]$ ($1 < p < \infty$)

Рассмотрим банахово пространство $L^p[a; b]$, $1 < p < \infty$, элементами которого являются функции, суммируемые в p -й степени на отрезке $[a; b]$. Норму определим равенством

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad x \in L^p[a; b].$$

Всякий линейный ограниченный функционал $f \in (L^p[a; b])^*$ из сопряженного с $L^p[a; b]$ пространства имеет следующее аналитическое представление /5/

$$f(x) = \int_a^b x(t) y(t) dt, \quad x \in L^p[a; b],$$

где y — некоторая функция, суммируемая в q -й степени, т.е. $y \in L^q[a; b]$, при этом $\|f\| = \|y\|_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Пусть F — замкнутое выпуклое множество в $L^p[a; b]$. Из теоремы 2.1 следует, что для каждого $x \in L^p[a; b]$ справедливо следующее двойственное соотношение

$$E(x, F) = \sup_{y \in B_q^*} \left\{ \int_a^b x(t) y(t) dt - \sup_{h \in F} \int_a^b h(t) y(t) dt \right\},$$

где $B_q^* = \{y \in L^q[a; b] : \|y\| \leq 1\}$, причем для всякой функции $x \in L^p[a; b] \setminus F$ существует элемент $y_0 \in L^q[a; b]$ с единичной нормой, для которого

$$E(x, F) = \int_a^b x(t) y_0(t) dt - \sup_{h \in F} \int_a^b h(t) y_0(t) dt.$$

Теорема 5.1 Пусть $1 < p < \infty$. Для того чтобы функция $h_0 \in F$ являлась э.н.п. для $x \in L^p[a; b] \setminus F$ во множестве F , необходимо и достаточно, выполнения соотношения

$$\int_a^b (h(t) - h_0(t)) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$$

для любого $h \in F$.

Доказательство. Необходимость. Пусть h_0 — э.н.п. для $x \in L^p[a; b] \setminus F$ в F . Тогда существует функция $y \in L^q[a; b]$, норма которой $\|y\|_q = 1$, и

$$\begin{aligned} \|x - h_0\|_p &= \int_a^b x(t) y(t) dt - \sup_{h \in F} \int_a^b h(t) y(t) dt \leq \\ &\leq \int_a^b x(t) (y(t) dt - \int_a^b h_0(t) y(t) dt) = \int_a^b (x(t) - h_0(t)) y(t) dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Применяя свойства интеграла Лебега и неравенство Гельдера, получим

$$\begin{aligned} \int_a^b (x(t) - h_0(t)) y(t) dt &\leq \int_a^b |x(t) - h_0(t)| |y(t)| dt \leq \\ &\leq \|x - h_0\|_p \|y\|_q = \|x - h_0\|_p. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу (9), (10) неравенства становятся равенствами. Из равенства

$$\int_a^b |x(t) - h_0(t)| |y(t)| dt = \|x - h_0\|_p \|y\|_q$$

следует, что в неравенстве Гельдера имеем знак равенства, которое возможно лишь в случае, когда

$$|y(t)| = \alpha |x(t) - h_0(t)|^{p-1}, \text{ при этом } \alpha > 0. \quad (11)$$

Кроме того, из равенства

$$\int_a^b (x(t) - h_0(t)) y(t) dt = \int_a^b |x(t) - h_0(t)| |y(t)| dt$$

следует, что

$$(x(t) - h_0(t)) y(t) \geq 0. \quad (12)$$

В силу (11) множество точек, в которых обращается в нуль только один из сомножителей в левой части (12), имеет меру нуль, и потому из (12) вытекает соотношение

$$\text{sign } y(t) = \text{sign } (x(t) - h_0(t)). \quad (13)$$

Теперь с учетом (11) и (13) будем иметь

$$y(t) = |y(t)| \text{sign } y(t) = \alpha |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)). \quad (14)$$

Далее, из равенства

$$\int_a^b h_0(t) y(t) dt = \sup_{h \in F} \int_a^b h(t) y(t) dt$$

вытекает, что

$$\int_a^b (h(t) - h_0(t)) y(t) dt \leq 0 \quad (15)$$

для любого $h \in F$. Подставляя (14) в (15), получим требуемое. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть

$$\int_a^b (h(t) - h_0(t)) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$$

для любого $h \in F$. Тогда для каждого $h \in F$ имеем

$$\begin{aligned} (\|x - h_0\|_p)^p &= \int_a^b (x(t) - h_0(t)) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq \\ &\leq \int_a^b (x(t) - h(t)) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt + \\ &+ \int_a^b (h(t) - h_0(t)) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq \\ &\leq \int_a^b (x(t) - h(t)) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq \\ &\leq \int_a^b |x(t) - h(t)| |x(t) - h_0(t)|^{p-1} dt. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая, что $(p-1)q = p$, получим

$$\begin{aligned} \int_a^b |x(t) - h(t)| |x(t) - h_0(t)|^{p-1} dt &\leq \|x - h\|_p \|(x - h_0)^{p-1}\|_q = \\ &= \|x - h\|_p \left(\int_a^b |x(t) - h_0(t)|^{(p-1)q} dt \right)^{1/q} = \|x - h\|_p (\|x - h_0\|_p)^{p/q} = \\ &= \|x - h\|_p (\|x - h_0\|_p)^{p-1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\|x - h\|_p \geq \|x - h_0\|_p$ для каждого $h \in F$. Поэтому h_0 — э.н.п. для x в F и достаточность доказана. Теорема верна.

Из теоремы 5.1 вытекает /7/

Теорема 5.2. Пусть F — произвольное подпространство пространства $L^p[a; b]$. Для того чтобы функция $h_0 \in F$ являлась э.н.п. для $x \in L^p[a; b] \setminus F$ в F , необходимо и достаточно, выполнения соотношения

$$\int_a^b h(t) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt = 0$$

для любого $h \in F$.

Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — линейно независимая система в $L^p[a; b]$, m — целое неотрицательное число.

Теорема 5.3. Пусть конечномерный конус H имеет вид

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k; \alpha_k \in R, \alpha_i \geq 0 \text{ при } i > m \right\},$$

$x \in L^p[a; b] \setminus H$. Для того чтобы функция $h_0 \in H$ являлась э.н.п. для x в H , необходимо и достаточно, выполнения условий

$$\int_a^b \varphi(t) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0 \quad (16)$$

для любого $\varphi \in H_{J(h_0)}$, или, что тоже самое:

$$\begin{aligned} \int_a^b h_0(t) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt &= 0; \\ \int_a^b h(t) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt &\leq 0 \quad \forall h \in H. \end{aligned} \quad (17)$$

для любого $h \in H$.

Доказательство. Справедливость теоремы следует из теоремы 5.1 и леммы 3.1 о структуре расширенного конуса в силу выпуклости и замкнутости конечномерного конуса. Так как расширенный конус $H_{J(h_0)}$ содержит элементы $h_0, -h_0$, то эквивалентность условий (16), (17) очевидна.

6. Аппроксимация с ограничениями в пространствах $L^p[a; b]$ ($1 \leq p < \infty$)

Пусть F — замкнутое выпуклое множество в банаховом пространстве $L^p[a; b]$ ($1 \leq p < \infty$, $L^1[a; b] = L[a; b]$), функция $g \in L^p[a; b]$, G — подмножество отрезка $[a; b]$. Считаем, что множество

$$F_g^- = \{h \in F : h \leq g \text{ на } G \text{ п.в.}\} \neq \emptyset.$$

Под задачей наилучшего приближения функции $x \in L^p[a; b]$ с ограничениями (F^-, g, G) будем понимать задачу отыскания величины

$$E_g^-(x, F, G) = \inf \{ \|x - h\| : h \in F_g^- \}.$$

Число $E_g^-(x, F, G)$ назовем величиной наилучшего приближения функции x элементами множества F с ограничениями (F^-, g, G) . Элемент $h_0 \in F_g^-$, для которого

$$E_g^-(x, F, G) = \|x - h_0\|,$$

назовем элементом наилучшего приближения (э.н.п.) для x в F с ограничениями (F^-, g, G) .

Предположим, что множество

$$F_g^+ = \{h \in F : h \geq g \text{ на } G \text{ п.в.}\} \neq \emptyset.$$

Под задачей наилучшего приближения функции $x \in L^p[a; b]$ с ограничениями (F^+, g, G) будем понимать задачу отыскания величины

$$E_g^+(x, F, G) = \inf\{\|x - h\| : h \in F_g^+\}.$$

Число $E_g^+(x, F, G)$ назовем величиной наилучшего приближения функции x элементами множества F с ограничениями (F^+, g, G) . Элемент $h_0 \in F_g^+$, для которого

$$E_g^+(x, F, G) = \|x - h_0\|,$$

назовем элементом наилучшего приближения (э.н.п.) для x в F с ограничениями (F^+, g, G) .

Аппроксиммирующие множества обычно предполагаются выпуклыми и замкнутыми. Поэтому покажем, например, что непустое множество $F_g^- \subset F$ обладает указанными свойствами. Если выпуклость множества F_g^- не вызывает сомнений, то его замкнутость требует доказательства.

Пусть h — предельная точка множества F_g^- , при этом $h \in F$ в силу замкнутости множества F . Существует последовательность элементов $\{h_n\}$ из множества F_g^- , которая сходится по норме к h при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_a^b |h_n(t) - h(t)|^p dt \right\}^{1/p} = 0.$$

Пусть $\sigma > 0$, $E_\sigma = \{t \in [a; b] : |h_n(t) - h(t)| \geq \sigma\}$. Тогда

$$\int_a^b |h_n(t) - h(t)|^p dt \geq \int_{E_\sigma} |h_n(t) - h(t)|^p dt \geq \sigma^p \text{mes} E_\sigma.$$

Из этого следует, что для любого $\sigma > 0$ верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mes} E_\sigma = 0.$$

Таким образом, последовательность $\{h_n\}$ сходится по мере к элементу h . По теореме Ф. Рисса существует подпоследовательность $\{h_{n_k}\}$ последовательности $\{h_n\}$, которая поточечно п.в. сходится к h при $k \rightarrow \infty$ на $[a; b]$. Переходя к пределу в неравенствах $h_{n_k} \leq g$ на G п.в. при $k \rightarrow \infty$, получим $h \leq g$ на G п.в. Следовательно $h \in F_g^-$ и замкнутость множества F_g^- доказана.

Остановимся на аппроксимационной задаче с ограничениями (F^-, g, G) . Если множество F является локально компактным, то локально компактно и любое его непустое подмножество. Таким образом, в силу теорем 1.1, 1.3 справедлива

Теорема 6.1. Если F — выпуклое замкнутое локально компактное множество в пространстве $L^p[a; b]$ и $F_g^- \neq \emptyset$, то для любого $x \in L^p[a; b]$ э.н.п. в F с ограничениями (F^-, g, G) существует, а множество э.н.п. для x в F с ограничениями (F^-, g, G) выпукло.

Из теоремы 4.1 следует

Теорема 6.2. Пусть F — выпуклое замкнутое множество в пространстве $L[a; b]$ и $F_g^- \neq \emptyset$. Для того чтобы элемент $h_0 \in F_g^-$ являлся э.н.п. для $x \in L[a; b] \setminus F$ с ограничениями (F^-, g, G) достаточно, а в случае когда

$$\text{mes}\{t \in [a; b] : x(t) - h_0(t) \} = 0$$

и необходимо, выполнения условия

$$\int_a^b (h(t) - h_0(t)) \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$$

для любого $h \in F_g^-$.

В пространстве $L^p[a; b]$ при $1 < p < \infty$ критерий вытекает из теоремы 5.1.

Теорема 6.3. Пусть F — выпуклое замкнутое множество в пространстве $L^p[a; b]$ и $F_g^- \neq \emptyset$. Для того чтобы элемент $h_0 \in F_g^-$ являлся э.н.п. для $x \in L^p[a; b] \setminus F$ с ограничениями (F^-, g, G) , необходимо и достаточно, выполнения условия

$$\int_a^b (h(t) - h_0(t)) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \text{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$$

для любого $h \in F_g^-$.

Отмеченные теоремы 6.1 — 6.3 остаются верными в случае, когда множество F является замкнутым конусом, в частности, конечномерным конусом.

Рассмотрим теперь в качестве аппроксимирующего множества конус конечной размерности и докажем критерий наилучшего приближения с ограничениями в терминах расширенного конуса.

Пусть $h_1, h_2, \dots, h_n$ — линейно независимая система функций в $L^p[a; b]$, $1 \leq p < \infty$, конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0 \text{ при } j > m \right\},$$

где m — целое неотрицательное число. Считаем, что множество

$$H_g^- = \{h \in H : h \leq g \text{ на } G \text{ п.в.}\}, H_g^- \neq \emptyset.$$

Теорема 6.4. Элемент $h_0 \in H_g^-$ является э.н.п. для $x \in L^p[a; b]$ с ограничениями (H^-, g, G) в конусе H тогда и только тогда, когда нулевой элемент Θ есть э.н.п. для $x - h_0$ в конусе $H_{J(h_0)}$ с ограничениями $(H_{J(h_0)}^-, g - h_0, G)$.

Доказательство. Если $x \in H_g^-$, то теорема очевидна. Пусть $x \notin H_g^-$.

Необходимость. Если h_0 — э.н.п. для x в H с ограничениями (H^-, g, G) , то по теореме 3.1 существует линейный ограниченный функционал $\Phi \in (L^p[a; b])^*$ с единичной нормой обладающий свойствами:

$$\Phi(x - h_0) = \|x - h_0\|; \quad \Phi(h) \leq \Phi(h_0) \text{ для любого } h \in H_g^-.$$

Покажем, что $\Phi(u) \leq 0$ для каждого $u \in H_{J(h_0)}$, $u \leq g - h_0$ на G п.в.. Действительно, если $u \in H_{J(h_0)}$, то по лемме о структуре расширенного конуса существует число $\alpha \geq 0$ и элемент $h \in H$ такие, что $u = \alpha(h - h_0)$.

При $0 \leq \alpha \leq 1$ из условия $u \leq g - h_0$ на G п.в. следует, что $\alpha(h - h_0) + h_0 \leq g$ на G п.в.. Поэтому $\alpha h + (1 - \alpha)h_0 \leq g$ на G п.в., причем $\alpha h + (1 - \alpha)h_0 \in H$. Следовательно

$$\Phi(u) = \Phi(\alpha h + (1 - \alpha)h_0 - h_0) \leq 0.$$

Если же $\alpha > 1$, то из условия $u = \alpha(h - h_0) \leq g - h_0$ на G п.в. вытекает

$$h - h_0 \leq \frac{1}{\alpha}(g - h_0) \leq g - h_0 \text{ на } G \text{ п.в.}$$

Из равенств $\Phi(u) = \Phi(\alpha(h - h_0)) = \alpha\Phi(h - h_0)$ следует

$\Phi(u) \leq 0 = \Phi(\Theta)$ для любого $u \in H_{J(h_0)}$, при этом $u \leq g - h_0$ на G п.в..

Так как

$$\Theta \in (H_{J(h_0)})_{g-h_0}^- = \{h \in H_{J(h_0)} : h \leq g - h_0 \text{ на } G \text{ п.в.}\},$$

то по теореме 3.1 нулевой элемент Θ — есть э.н.п. для $x - h_0$ в конусе $H_{J(h_0)}$ с ограничениями $(H_{J(h_0)}^-, g - h_0, G)$ и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть Θ — э.н.п. для $x - h_0$ в $H_{J(h_0)}$ с ограничениями $(H_{J(h_0)}^-, g - h_0, G)$. Отметим, что условие $x \notin H_g^-$ влечет

$$x - h_0 \notin (H_{J(h_0)})_{g-h_0}^-,$$

т.к.

$$E_{g-h_0}^-(x - h_0, H_{J(h_0)}, G) = \|x - h_0\| > 0.$$

Тогда по теореме 3.1 существует линейный ограниченный функционал Φ_0 из сопряженного пространства $(L^p[a; b])^*$ с единичной нормой, обладающий свойствами:

$$\Phi_0(x - h_0) = \|x - h_0\|, \quad \Phi_0(u) \leq 0 \text{ для любого } u \in (H_{J(h_0)})_{g-h_0}^-.$$

Пусть $h \in H_g^-$. Тогда

$$u = h - h_0 \leq g - h_0 \text{ на } G \text{ п.в. и } u \in H_{J(h_0)}.$$

Поэтому

$$\Phi_0(u) = \Phi_0(h - h_0) = \Phi_0(h) - \Phi_0(h_0) \leq 0.$$

Таким образом, $\Phi_0(h) \leq \Phi_0(h_0)$ для каждого $h \in H_g^-$. По теореме 3.1 элемент h_0 есть э.н.п. для x в H с ограничениями (H^-, g, G) . Теорема доказана.

Теорема 6.5. Пусть $x \in L^p[a; b]$. Функция $h_0 \in H_g^-$ является э.н.п. для x в H с ограничениями (H^-, g, G) тогда и только тогда, когда h_0 — э.н.п. для x в $H_{J(h_0)}$ с ограничениями $(H_{J(h_0)}^-, g, G)$.

Доказательство. Достаточность следует из цепочки неравенств

$$\|x - h_0\| = E_g^-(x, H_{J(h_0)}, G) \leq E_g^-(x, H, G) \leq \|x - h_0\|,$$

т.к. множество $H_g^- \subset (H_{J(h_0)})_g^-$.

Необходимость. Пусть y — э.н.п. для x в $H_{J(h_0)}$ с ограничениями $(H_{J(h_0)}^-, g, G)$. Так как $h_0 \in (H_{J(h_0)})_g^-$, то

$$\|x - y\| = E_g^-(x, H_{J(h_0)}, G) \leq \|x - h_0\|.$$

С другой стороны, Θ — э.н.п. для $x - h_0$ в $H_{J(h_0)}$ с ограничениями $(H_{J(h_0)}^-, g - h_0, G)$ и следовательно

$$\|x - h_0\| \leq \|(x - h_0) - (y - h_0)\| = \|x - y\|$$

в силу того, что $y - h_0 \in H_{J(h_0)}$ и $y - h_0 \leq g - h_0$ на G п.в.. Таким образом,

$$\|x - y\| = \|x - h_0\|$$

и h_0 — э.н.п. для x в $H_{J(h_0)}$ с ограничениями $(H_{J(h_0)}^-, g, G)$.

Следствие 6.1. Пусть $x \in L^p[a; b]$, $1 \leq p < \infty$, $h_0 \in H_g^-$, H_1 — подпространство из $H_{J(h_0)}$, базисом которого являются функции принадлежащие множеству $\{h_k : k \in J(h_0)\}$.

Если h_0 — э.н.п. для x в H с ограничениями (H^-, g, G) , то h_0 — э.н.п. для x в H_1 с ограничениями (H_1^-, g, G) .

Доказательство. Если h_0 — э.н.п. для x в H с ограничениями (H^-, g, G) , то

$$E_g^-(x, H, G) = \|x - h_0\| \geq E_g^-(x, H_1, G) \geq E_g^-(x, H_{J(h_0)}, G) = \|x - h_0\|.$$

Таким образом, h_0 — э.н.п. для x в H_1 с ограничениями (H_1^-, g, G) .

Соответствующие теоремы для задачи наилучшей аппроксимации с ограничениями (F^+, g, G) формулируются и доказываются аналогичным образом.

7. Критерии наилучшего одностороннего приближения в пространствах $L^p[a; b]$ ($1 \leq p < \infty$)

Пусть F — замкнутое выпуклое множество в $L^p[a; b]$, функция $x \in L^p[a; b]$ и множество

$$F_x^- = \{h \in F : h \leq x \text{ п.в. на } [a; b]\} \neq \emptyset.$$

Под задачей наилучшего нижнего приближения функции $x \in L^p[a; b]$ элементами множества F будем понимать задачу отыскания величины

$$E^-(x, F) = \inf\{\|x - h\| : h \in F, h \leq x \text{ п.в.}\}$$

Число $E^-(x, F)$ назовем величиной наилучшего нижнего приближения для x элементами множества F , а функцию $h_0 \in F_x^-$, для которой

$$E^-(x, F) = \|x - h_0\|,$$

назовем элементом наилучшего нижнего приближения (э.н.н.п.) для x во множестве F .

Предположим, что множество

$$F_x^+ = \{h \in F : h \geq x \text{ п.в. на } [a; b]\} \neq \emptyset.$$

Под задачей наилучшего верхнего приближения функции $x \in L^p[a; b]$ элементами множества F будем понимать задачу отыскания величины

$$E^+(x, F) = \inf\{\|x - h\| : h \in F, h \geq x \text{ п.в.}\}$$

Число $E^+(x, F)$ назовем величиной наилучшего верхнего приближения для x элементами множества F , а функцию $h_0 \in F_x^+$, для которой

$$E^+(x, F) = \|x - h_0\|,$$

назовем элементом наилучшего верхнего приближения (э.н.в.п.) для x во множестве F .

Ясно, что задачи о наилучших односторонних приближениях элемента $x \in L^p[a; b]$ являются частными случаями задач о наилучших приближениях с ограничениями типа (F^-, g, G) и (F^+, g, G) , где роль функции $g \in L^p[a; b]$ играет элемент $x \in L^p[a; b]$, а в качестве множества G берется весь отрезок $[a; b]$.

В связи с этим, существование и характеристические признаки наилучших односторонних приближений в пространствах $L^p[a; b]$ при аппроксимации замкнутым выпуклым множеством следуют из теорем предыдущего параграфа. Справедливы и критерии наилучших односторонних приближений в терминах расширенного конуса при аппроксимации конечномерным конусом.

Пусть $p = 1$. Если $F_x^- \neq \emptyset$, то из свойств нижней грани числовых множеств следует

$$\begin{aligned} E^-(x, F) &= \inf\{\|x - h\| : h \in F, h \leq x \text{ п.в.}\} = \\ &= \inf\left\{\int_a^b x(t) dt - \int_a^b h(t) dt : h \in F_x^-\right\} = \end{aligned}$$

$$= \int_a^b x(t) dt - \sup \left\{ \int_a^b h(t) dt : h \in F_x^- \right\},$$

т.к.

$$\|x - h\| = \int_a^b (x(t) - h(t)) dt = \int_a^b x(t) dt - \int_a^b h(t) dt$$

для любого $h \in F_x^-$. Поэтому справедливо

Предложение 7.1. Элемент $h_0 \in F_x^-$ является э.н.н.п. для $x \in L[a; b]$ в множестве F тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b h_0(t) dt = \sup_{h \in F_x^-} \int_a^b h(t) dt.$$

Если предположить, что множество $F_x^+ \neq \emptyset$, то аналогичным образом можно показать

$$\begin{aligned} E^+(x, F) &= \inf \{ \|x - h\| : h \in F_x^+ \} = \\ &= \inf \left\{ \int_a^b h(t) dt : h \in F_x^+ \right\} - \int_a^b x(t) dt, \end{aligned}$$

т.к. для любого $h \in F_x^+$ норма

$$\|x - h\| = \int_a^b (h(t) - x(t)) dt = \int_a^b h(t) dt - \int_a^b x(t) dt$$

Предложение 7.2. Элемент $h_0 \in F_x^+$ является э.н.в.п. для $x \in L[a; b]$ в множестве F тогда и только тогда, когда

$$\int_a^b h_0(t) dt = \inf_{h \in F_x^+} \int_a^b h(t) dt.$$

Предложения 7.1, 7.2 также можно получить из критерия наилучшего приближения в терминах двойственных соотношений. Покажем это, например, для задачи наилучшего нижнего приближения в $L[a; b]$.

Пусть $x \in L[a; b]$, $h_0 \in F_x^-$, функция $y(t) = 1$ на $[a; b]$. Ясно, что $y \in M[a; b]$. Линейный ограниченный функционал

$$\Phi(z) = \int_a^b z(t) y(t) dt, \quad z \in L[a; b]$$

обладает следующими свойствами:

$$\|\Phi\| = \|y\| = 1, \quad \|x - h_0\| = \int_a^b (x(t) - h_0(t)) dt = \Phi(x - h_0).$$

Условие $\Phi(h_0) = \sup_{h \in F_x^-} \Phi(h)$ означает, что

$$\int_a^b h_0(t) dt = \sup_{h \in F_x^-} \int_a^b h(t) dt.$$

Поэтому из теоремы 3.1 вытекает предложение 7.1.

Пусть $x \in L^p[a; b]$, $p > 1$, $h_0 \in F_x^-$, $T = \{t \in [a; b] : h_0(t) < x(t)\}$. Отметим, что неравенства

$$\int_a^b (h(t) - h_0(t)) |x(t) - h_0(t)|^{p-1} \operatorname{sign}(x(t) - h_0(t)) dt \leq 0$$

для любого $h \in F_x^-$ равносильны тому, что

$$\int_T (h(t) - h_0(t)) (x(t) - h_0(t))^{p-1} dt \leq 0$$

для каждого $h \in F_x^-$. Последнее соотношение эквивалентно условию

$$\int_T h_0(t) (x(t) - h_0(t))^{p-1} dt = \sup_{h \in F_x^-} \int_T h(t) (x(t) - h_0(t))^{p-1} dt$$

Тогда из теоремы 6.3 следует

Предложение 7.3. Для того чтобы функция $h_0 \in F_x^-$ являлась э.н.н.п. для $x \in L^p[a; b] \setminus F_x^-$ в F , необходимо и достаточно, выполнения условия

$$\int_T h_0(t) (x(t) - h_0(t))^{p-1} dt = \sup_{h \in F_x^-} \int_T h(t) (x(t) - h_0(t))^{p-1} dt$$

Аналогичными рассуждениями можно получить

Предложение 7.4. Для того чтобы функция $h_0 \in F_x^+$ являлась э.н.в.п. для $x \in L^p[a; b] \setminus F_x^+$ в F , необходимо и достаточно, выполнения условия

$$\int_{T_1} h_0(t) (h_0(t) - x(t))^{p-1} dt = \inf_{h \in F_x^+} \int_{T_1} h(t) (h_0(t) - x(t))^{p-1} dt,$$

где $T_1 = \{t \in [a; b] : h_0(t) > x(t)\}$.

Полученные результаты являются аналогами теорем предыдущего параграфа для задач наилучшего одностороннего приближения при аппроксимации элементами замкнутого выпуклого множества в пространствах $L^p[a; b]$ ($1 \leq p < \infty$).

8. Системы Чебышева. Конусы Хаара

Для получения необходимых условий элемента наилучшего верхнего одностороннего приближения непрерывной функции при аппроксимации конечномерным конусом, принадлежащим пространству $C[a; b]$ в метрике пространства $L[a; b]$, потребуются понятие чебышевской системы и ее основные свойства, а для достаточных условий единственности элемента наилучшего верхнего одностороннего приближения — конусы специального вида, обладающие нужными свойствами.

Пусть T — метрический компакт, $C(T)$ — пространство непрерывных на T функций, наделенное чебышевской нормой.

Следуя П. Л. Чебышеву, подпространство $H_n \subset C(T)$ размерности n будем называть чебышевским, если для любой функции $f \in C(T)$ элемент наилучшего приближения единствен в подпространстве H_n .

Базис чебышевского подпространства H_n назовем системой Чебышева порядка n .

А. Хаар доказал, что подпространство $H_n \subset C(T)$ является чебышевским тогда и только тогда, когда всякий ненулевой элемент $h \in H_n$ обращается в нуль не более, чем в $(n - 1)$ точке компакта T .

В связи с этим, в дальнейшем под системой Чебышева порядка n на компакте T будем понимать линейно независимую систему $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ непрерывных на T функций, для которой любой ненулевой обобщенный полином

$$h = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k, \mu_k \in R, k = 1, 2, \dots, n$$

имеет на T не более, чем $(n - 1)$ нулей.

Примером чебышевской системы порядка n на произвольном промежутке $[a; b]$ может служить система степенных функций $\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$.

Из определения чебышевской системы немедленно следует, что если два обобщенных полинома по системе Чебышева порядка n совпадают в n точках компакта T , то они совпадают всюду на T .

Оказывается, что существование на компакте T чебышевской системы порядка $n \geq 2$ накладывает на T сильное топологическое ограничение. Дж. Мэрхьюбер [9] показал, что в этом случае компакт T гомеоморфен либо окружности, либо ее части. Таким образом, если компакт T является связным множеством, то он гомеоморфен либо окружности, либо $[a; b]$.

В последнем случае окружность можно мыслить как отрезок $[a; b]$ с отождествленными концами, и по определению чебышевская система на окружности есть система Чебышева на $[a; b]$ при условии, что $h_k(a) = h_k(b)$, $k = 1, \dots, n$. При этом образующие h_k можно периодически (с периодом $b - a$) продолжить с полуинтервала $[a; b]$ на всю числовую ось и говорить о периодической системе Чебышева на R .

Приведем некоторые хорошо известные свойства чебышевских систем.

Теорема 8.1. *Линейно независимая система $\{h_k\}_{k=1}^n$ непрерывных на T функций является системой Чебышева порядка n , тогда и только тогда, когда определитель*

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \dots & h_n(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \dots & h_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1(x_{n-1}) & h_2(x_{n-1}) & \dots & h_n(x_{n-1}) \\ h_1(x_n) & h_2(x_n) & \dots & h_n(x_n) \end{pmatrix}$$

отличен от нуля, каковы бы ни были различные точки $x_1, x_2, \dots, x_n$ компакта T .

Доказательство. Если нашлись такие точки $x_1, x_2, \dots, x_n \in T$, что $\Delta = 0$, то система линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n c_j h_j(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (19)$$

относительно неизвестных c_j имеет ненулевое решение. Соответствующий этому решению обобщенный полином

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^n c_j h_j(x), \quad x \in T,$$

обращается в нуль во всех точках x_j ($j = 1, 2, \dots, n$) и поэтому система $\{h_k\}_{k=1}^n$ не чебышевская.

Обратно, если система $\{h_k\}_{k=1}^n$ не чебышевская, то найдется отличный от тождественного нуля обобщенный полином ψ , который имеет не менее n нулей на T . Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — его корни. Тогда Δ , определитель системы (19), равен нулю, т.к. коэффициенты полинома ψ дают ненулевое решение этой системы. Теорема доказана.

Так как определитель

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \dots & h_n(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \dots & h_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1(x_{n-1}) & h_2(x_{n-1}) & \dots & h_n(x_{n-1}) \\ h_1(x_n) & h_2(x_n) & \dots & h_n(x_n) \end{pmatrix}$$

есть непрерывная функция аргументов $x_1, x_2, \dots, x_n$, то для чебышевских систем на отрезке $[a; b]$ он должен сохранять определенный знак при всех значениях $x_1, x_2, \dots, x_n$ таких, что

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b.$$

В дальнейшем без ограничения общности можно предположить, что определитель Δ для чебышевской системы $\{h_k\}_{k=1}^n$ в $C[a; b]$ сохраняет знак $(+)$ при всех значениях $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих неравенствам

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b.$$

Следствие 8.1. Для любых $(n - 1)$ различных точек $x_1, x_2, \dots, x_n$, принадлежащих компакту T , существует нетривиальный обобщенный полином ψ по данной чебышевской системе $\{h_k\}_{k=1}^n$, имеющий x_k ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) своими нулями. Этот многочлен находится с точностью до постоянного множителя и

$$\begin{aligned} \psi(x) &= c \Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x \end{pmatrix} = \\ &= c \det \begin{pmatrix} h_1(x_1) & h_2(x_1) & \dots & h_n(x_1) \\ h_1(x_2) & h_2(x_2) & \dots & h_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1(x_{n-1}) & h_2(x_{n-1}) & \dots & h_n(x_{n-1}) \\ h_1(x) & h_2(x) & \dots & h_n(x) \end{pmatrix}, \text{ где } c \neq 0. \end{aligned}$$

Следствие 8.2. Пусть $\{h_k\}_{k=1}^n$ — система Чебышева. В классе обобщенных полиномов по данной системе однозначно разрешима любая интерполяционная задача, т.е. каковы бы ни были различные точки

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in T \text{ и числа } a_1, a_2, \dots, a_n \in R$$

найдется единственный обобщенный полином $\varphi = \sum_{k=1}^n \nu_k h_k$ такой, что $\varphi(x_k) = a_k$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Доказательство. Задача построения интерполяционного полинома сводится к решению системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^n c_j h_j(x_k) = a_k, \quad k = 1, \dots, n$$

относительно c_j , которая однозначно разрешима и силу доказанной теоремы 8.1.

Считаем, что $\{h_k\}_{k=1}^n$ — система Чебышева порядка n на отрезке $[a; b]$, при этом $h_k(a) = h_k(b)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Следствие 8.3. Порядок n периодической системы Чебышева $\{h_k\}_{k=1}^n$ может быть только нечетным.

Доказательство. В самом деле, при четном n имеем

$$\Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ a & x_1 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1} \end{pmatrix} = -\Delta \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_{n-1} & h_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & b \end{pmatrix},$$

что невозможно для системы Чебышева при условии, что

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b.$$

Ноль обобщенного полинома ψ по системе $\{h_k\}_{k=1}^n$ непрерывных на $[a; b]$ функций, лежащий на $(a; b)$, называется простым, если при переходе через этот ноль полином ψ меняет знак, и двойным, если при переходе через этот ноль полином ψ не меняет знака.

Концы отрезка $[a; b]$, если они являются нулями полинома, будем считать простыми.

Теорема 8.2. Если обобщенный полином p^* по данной чебышевской системе $\{h_j\}_{j=1}^n$ порядка n имеет на $[a; b]$ k двойных и l простых нулей, то

$$2k + l \leq n - 1.$$

Доказательство. При $k = 0$ теорема верна. Пусть $k > 0$ и p^* имеет нули

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{k+l}.$$

Обозначим

$$M_i = \max\{|p^*(t)| : t \in [t_{i-1}; t_i]\},$$

$$i = 1, 2, \dots, k + l + 1; t_0 = a, t_{k+l+1} = b.$$

Выберем $\mu > 0$, меньшее всех M_i , $i = 1, 2, \dots, k + l + 1$. Построим обобщенный полином p по данной системе, который принимает значения $+\mu$ в двойных нулях полинома p^* , в окрестности которых $p^*(t) \geq 0$, и значение $-\mu$ в двойных нулях, в окрестности которых $p^*(t) \leq 0$ и, кроме того, обращается в нуль во всех простых нулях полинома p^* .

Подберем δ ($0 < \delta \leq 1$) так, чтобы

$$\max\{|\delta p(t)| : t \in [a; b]\} < \mu,$$

и рассмотрим полином

$$p_1(t) = p^*(t) - \delta p(t), t \in [a; b].$$

Заметим, что каждому двойному нулю полинома p^* соответствует два нуля полинома p_1 . В самом деле, пусть t_i — двойной нуль полинома p^* , в окрестности которого, например, $p^*(t) \geq 0$. В некоторой точке $x_i \in (t_{i-1}; t_i)$ и точке $x_{i+1} \in (t_i; t_{i+1})$ имеем

$$p^*(x_i) = M_i > \mu, p^*(x_{i+1}) = M_{i+1} > \mu.$$

Поэтому

$$p_1(x_i) > 0 \text{ и } p_1(x_{i+1}) > 0,$$

и так как $p_1(t_i) = -\delta\mu < 0$, то p_1 имеет простой нуль как в $(x_i; t_i)$, так и в $(t_i; x_{i+1})$.

Кроме того, полином p_1 обращается в нуль во всех простых нулях многочлена p^* . Поэтому он имеет по крайней мере $2k + l$ различных нулей. Тогда

$$2k + l \leq n - 1$$

и теорема доказана.

С. Н. Бернштейн показал, что какие бы ни были точки

$$x_1, x_2, \dots, x_p, a \leq x_1 < x_2 < \dots, < x_p \leq b,$$

и отличные от них точки

$$y_1, y_2, \dots, y_q, a < y_1 < y_2 < \dots < y_q < b,$$

при условии, что $p + 2q = n - 1$, существует обобщенный полином по системе Чебышева $\{h_k\}_{k=1}^n$, имеющий в точках $x_1, x_2, \dots, x_p$ простые нули, а в точках $y_1, y_2, \dots, y_q$ — двойные и не имеющий на отрезке других нулей.

Эта теорема выражает основное свойство чебышевских систем.

При выяснении условий сходимости последовательности линейных положительных операторов, необходимо знать, существует ли обобщенный полином по системе Чебышева порядка n с числом нулей, равным $p + 2q < n - 1$.

В. И. Волков в [1] доказал, что если $(n - 1) - (p + 2q) = 2k + 1$, то для любых различных точек

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_p < b, \quad a < y_1 < y_2 < \dots < y_q < b,$$

а, если $(n - 1) - (p + 2q) = 2k$, то для любых различных точек

$$a \leq x_1 < x_2 < \dots, < x_p \leq b, \quad a < y_1 < y_2 < \dots, < y_q < b$$

существуют обобщенные полиномы по системе Чебышева порядка n , имеющие простые нули в точках $x_1, x_2, \dots, x_p$ и двойные нули в точках $y_1, y_2, \dots, y_q$ и не имеющие других нулей на отрезке $[a; b]$

Для продолжаемых за границы отрезка $[a; b]$ систем Чебышева результат С. Н. Бернштейна остается верным и при условии $p + 2q \leq n - 1$. Однако условие продолжаемости систем не является здесь необходимым, т.к. можно указать непродолжаемые системы Чебышева, обладающие полиномами с произвольным расположением нулей при $p + 2q < n - 1$.

Рассмотрим теперь конусы конечной размерности в пространстве $C[a; b]$ со специальными свойствами.

Пусть функции $h_1, h_2, \dots, h_n \in C[a; b]$ образуют линейно независимую систему на отрезке $[a; b]$, m — целое неотрицательное число, конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \mu_k h_k : \mu_k \in R, \mu_i \geq 0 \text{ при } i > m \right\}.$$

Конус H назовем квазичебышевским порядка r ($r \leq n$), если всякий его ненулевой элемент имеет на $[a; b]$ не более $(r - 1)$ нулей и существует ненулевой элемент конуса, обращающийся в нуль в $(r - 1)$ точке $[a; b]$.

Если система функций $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ является чебышевской, то H является квазичебышевским конусом. Поэтому в дальнейшем конусы, базисные функции которых образуют чебышевскую систему, будем называть конусами Чебышева.

Число $\delta \in \{-1, +1\}$ назовем правым знаком квазичебышевского конуса H порядка r , если все его элементы, которые обращаются в нуль в $(r - 1)$ точке $[a; b]$, справа от последнего нуля принимают значения со знаком равным $\delta / 10$.

Конус $H \subset C[a; b]$ называется конусом Хаара, если для каждого множества индексов L такого, что

$$\{1, 2, \dots, m\} \subset L \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

система функций $\{h_j : j \in L\}$ является чебышевской.

Если $m < n$, то конус Хаара будем называть правильным.

Необходимо отметить, что если $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ — система Декарта/9/, то H — конус Хаара.

Очевидно, что каждый конус Хаара размерности n является квазичебышевским некоторого порядка. Поэтому в дальнейшем для всякого конуса Хаара будем указывать порядок.

Каждой функции $h = \sum_{k=1}^n \mu_k h_k \in H$ поставим в соответствии множество индексов

$$J(h) = \{1, 2, \dots, m\} \cup \{i \geq m + 1 : \mu_i > 0\},$$

и натуральное число $k(h)$ равное количеству элементов во множестве $J(h)$.

Из определения конуса Хаара и основных свойств чебышевских систем следует, что для любого набора индексов $l_1, l_2, \dots, l_k$ таких, что

$$\{1, 2, \dots, m\} \subset \{l_1, l_2, \dots, l_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

определители

$$\Delta \begin{pmatrix} h_{l_1} & h_{l_2} & \dots & h_{l_{k-1}} & h_{l_k} \\ l_1 & l_2 & \dots & l_{k-1} & l_k \end{pmatrix}$$

имеют один и тот же знак для произвольных точек

$$a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b.$$

Остановимся теперь на основных свойствах конусов Хаара.

Пусть $H \subset C[a; b]$ есть конус Хаара размерности n с порядком r , $h_1, h_2, \dots, h_n$ — его базисные функции и m — натуральное число. Через H_m обозначим m — мерное чебышевское подпространство, базисом которого являются функции $h_1, h_2, \dots, h_m$. Ясно, что $H_m \subset H$.

Предложение 8.1. Пусть $l \in N$, $m + 1 \leq l \leq r$. Тогда существует l -мерный конус Хаара H_l такой, что $H_m \subset H_l \subset H$, и функция $v \in H_l$, имеющая в точности $l - 1$ различных нулей на отрезке $[a; b]$.

Доказательство. Так как порядок конуса Хаара H равен r , то множество

$$M_l = \{v \in H : v \neq \Theta, v \text{ имеет по крайней мере } l - 1 \text{ нулей}\} \neq \emptyset.$$

Выберем функцию $v_0 \in M_l$ с минимальным значением величины $k(v_0)$ и обозначим через $s_1, s_2, \dots, s_{l-1}$ ($s_1 < s_2 < \dots < s_{l-1}$) первые ее $l - 1$ нулей.

Ясно, что $k(v_0) \geq l$. Покажем, что $k(v_0) = l$. Пусть $k(v_0) > l$ и множество индексов L , состоящее из l элементов, удовлетворяет включениям

$$\{1, 2, \dots, m\} \subset L \subset J(v_0).$$

Обозначим $H_L = \text{lin}\{h_i : i \in L\}$. Пространство H_L является чебышевским и имеет размерность равную l . Поэтому существует ненулевая функция $h \in H_L$, обращающаяся в нуль в точках $s_1, s_2, \dots, s_{l-1}$. Обозначив $I = \{1, 2, \dots, m\}$, запишем

$$\begin{aligned} h &= \sum_{i \in I} \mu_i h_i + \sum_{j \in L \setminus I} \mu_j h_j, \\ v_0 &= \sum_{i \in I} \nu_i h_i + \sum_{j \in L \setminus I} \nu_j h_j + \sum_{k \in J(v_0) \setminus L} \nu_k h_k. \end{aligned}$$

Если $\mu_j \geq 0$ для всех $j \in L \setminus I$, то элемент $h \in H$ и $k(h) < k(v_0)$, что противоречит выбору элемента v_0 . Обозначим через

$$K = \{j \in L \setminus I : \mu_j < 0\}.$$

Вспоминая, что $\nu_j > 0$, $j \in L \setminus I$, подберем положительные числа a_j так, чтобы $\nu_j + a_j \mu_j = 0$, $j \in K$. Положим

$$a_{j_0} = \min\{a_j : j \in K\}.$$

Тогда

$$\nu_j + a_{j_0} \mu_j \geq 0, \quad j \in K \text{ и } \nu_{j_0} + a_{j_0} \mu_{j_0} = 0.$$

Таким образом, функция $w = v_0 + a_{j_0} h \in M_l$ и $k(v_0) > k(w)$, что противоречит выбору элемента v_0 . Следовательно $k(v_0) = l$ и

$$H_l = \left\{ \sum_{i \in J(v_0)} a_i h_i : a_i \geq 0 \text{ для } i \geq m + 1 \right\}$$

искомый конус Хаара размерности l , причем $v_0 \in H_l$. Предложение доказано.

Предложение 8.2. Пусть $m + 1 \leq l \leq r$, H_l — конус Хаара размерности l и $H_m \subset H_l \subset H$. Если H_l содержит функцию, имеющую ровно $l - 1$ различных нулей, то в H_l существуют ненулевые функции, обращающиеся в нуль в произвольных $l - 1$ точках отрезка $[a; b]$. Кроме того, функции из H_l , имеющие $l - 1$ различных нулей на $[a; b]$, справа от последнего нуля принимают значения одного фиксированного знака, т.е. конус H_l имеет правый знак.

Доказательство. Пусть функции $h_1, \dots, h_m, h_{i_{m+1}}, \dots, h_{i_l}$ являются базисными для конуса Хаара H_l и $v_0 \in H_l$ обращается в нуль в $l - 1$ точках $s_1 < s_2 < \dots < s_{l-1}$ отрезка $[a; b]$. Так как в l — мерном пространстве Чебышева функции с $l - 1$ заранее заданными нулями определены с точностью до постоянных множителей, то существует число $c_0 \in R$ такое, что

$$v_0(t) = c_0 \det \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_m & h_{i_{m+1}} & \dots & h_{i_{l-1}} & h_{i_l} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_m & s_{m+1} & \dots & s_{l-1} & t \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что функция

$$w(t) = c_0 \det \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_m & h_{i_{m+1}} & \dots & h_{i_{l-1}} & h_{i_l} \\ t_1 & t_2 & \dots & t_m & t_{m+1} & \dots & t_{l-1} & t \end{pmatrix}$$

при любых t_k ($a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{l-1} \leq b$) принадлежит конусу H_l . Действительно, раскладывая последний определитель по элементам последней строки получим, что для функции w коэффициенты при $h_{i_{m+1}}, \dots, h_{i_l}$ имеют те же знаки, что и соответствующие коэффициенты функции v_0 . Поэтому $w \in H_l$. Поскольку в l — мерном правильном конусе Хаара функции, имеющие заданные $l - 1$ нулей, отличаются друг от друга лишь положительными множителями, то функции конуса H_l , обращающиеся в нуль в $l - 1$ точке $[a; b]$, справа от последнего нуля принимают значения одного фиксированного знака. Следовательно конус H_l имеет правый знак. Предложение доказано.

Предложение 8.3. Правильный конус Хаара H имеет правый знак.

Доказательство. Сначала покажем, что любые два конуса $H_r, G_r \subset H$ размерности r , удовлетворяющие условиям предложения 8.2, имеют один и тот же правый знак.

Пусть функции $v \in H_r$, $w \in G_r$ обращаются в нуль в точках

$$a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1} < b$$

и принимают справа от последнего нуля значения разных знаков. Тогда нетрудно подобрать положительные числа c , d , такие, что функция $cv + dw \in H$ имеет дополнительный нуль справа от точки t_{r-1} , что противоречиво, т.к. порядок конуса H равен r .

Далее, если предположить, что функции $v \in H_r$, $w \in G_r$ обращаются в нуль соответственно в точках

$$a \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{r-1} < b, a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1} < b$$

и принимают справа от последнего нуля значения разных знаков, то построим функцию $v_0 \in H_r$, которая в точках $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{r-1} < b$ равна нулю и принимает справа от последнего нуля значения со знаком равным $\sigma(H_r)$, где $\sigma(H_r)$ — правый знак конуса H_r . Повторяя изложенные выше рассуждения, получим существование в конусе H функции, которая имеет более r нулей на $[a; b]$. Вновь имеем противоречие.

Рассмотрим теперь случай, когда произвольные функции из H , не обязательно принадлежащие r -мерному подконусу конуса H , имеют ровно $r - 1$ нулей на отрезке $[a; b]$.

Предположим вначале, что существуют две функции $f, g \in H$, которые имеют своими нулями точки $z_1 < z_2 < \dots < z_{r-1}$, принадлежащие $[a; b)$, и справа от последнего нуля принимают значения разных знаков. Пусть $z_0 \in (z_{r-1}; b)$. Положим

$$\psi = \frac{f}{|f(z_0)|} + \frac{g}{|g(z_0)|} \in H.$$

Тогда $\psi(z_k) = 0$, $k = 0, 1, \dots, r - 1$. Из последнего равенства следует, что $\psi = \Theta$ и

$$f = -\frac{|f(z_0)|}{|g(z_0)|}g.$$

Таким образом, функции $f, -f$ принадлежат конусу H . Поэтому функция $f \in H_m$ и следовательно должна иметь не более, чем $m - 1$ нулей. Полученное противоречие показывает, что функции f, g справа от последнего нуля принимают значения одного знака.

Предположим теперь, что нашлись точки

$$z_1 < z_2 < \dots < z_{r-1}, s_1 < s_2 < \dots < s_{r-1},$$

принадлежащие $[a; b)$, и функции $f, g \in H$, которые соответственно обращаются в нуль в этих точках и справа от последнего нуля принимают значения разных знаков.

Положим $I = \{1, 2, \dots, m\}$ и

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^n \alpha_j h_j = \sum_{j=1}^m \alpha_j h_j + \sum_{j \in J(f) \setminus I} \alpha_j h_j, \\ g &= \sum_{j=1}^n \beta_j h_j = \sum_{j=1}^m \beta_j h_j + \sum_{j \in J(g) \setminus I} \beta_j h_j. \end{aligned}$$

Построим два конуса Хаара

$$\begin{aligned} H_f &= \left\{ \Phi = \sum_{j=1}^m \mu_j h_j + \sum_{j \in J(f) \setminus I} \mu_j h_j : \mu_j \geq 0, j > m \right\}, \\ H_g &= \left\{ \Phi = \sum_{j=1}^m \nu_j h_j + \sum_{j \in J(g) \setminus I} \nu_j h_j : \nu_j \geq 0, j > m \right\}, \end{aligned}$$

содержащиеся в конусе H и имеющие порядок равный r . Введем обозначения

$$\delta = \text{sign}\{f(z) : z > z_{r-1}\}, \quad \sigma = \text{sign}\{g(s) : s > s_{r-1}\}.$$

Выделим в конусе H_f подконус $H_r(f)$ размерности r . Докажем, что $H_r(f)$ имеет правый знак равный δ . Если предположить, что подконус $H_r(f)$ имеет правый знак равный σ , то существует элемент $h \in H_r(f)$ такой, что

$$h(z_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, r-1, \quad h(z)\sigma > 0, \quad \text{для всех } z > z_{r-1}.$$

Тогда функция

$$\varphi = \frac{f}{|f(z_0)|} + \frac{h}{|h(z_0)|} \in H, \quad z_0 > z_{r-1},$$

имеет не менее r нулей на $[a; b]$.

Аналогично можно выделить в конусе H_g подконус $H_r(g)$ размерности r , который имеет правый знак равный σ . Однако в силу первой части доказательства такого быть не может. Итак, функции f, g справа от последнего нуля принимают значения одного знака. Таким образом, конус H имеет правый знак. Предложение доказано.

В дальнейшем, правый знак конуса H будем обозначать $\sigma(H)$. Кроме того, через $H_{l,\varepsilon}$, для которого

$$H_m \subset H_{l,\varepsilon} \subset H,$$

обозначим конус Хаара размерности l , содержащий функцию с различными $l - 1$ нулями, и правым знаком равным ε . Отметим, что при $l = r$ возможен только знак $\sigma(H)$. В случае, когда $l < r$, конус $H_{l,\varepsilon}$ может иметь правый знак равный как 1, так и -1.

Предложение 8.4. Для любых $m + 1 \leq l < r$ и $\varepsilon \in \{-1; 1\}$ существует конус Хаара $H_{l,\varepsilon}$.

Доказательство. Согласно предложению 8.1 существует $l+1$ — мерный конус Хаара H_{l+1} , содержащий функцию v с l различными нулями

$$s_1, s_2, \dots, s_l, \text{ при этом } a \leq s_1 < s_2 < \dots < s_l < b.$$

Так как все нули функции v простые, то существуют точки $t_1, t_2 \in (s_{l-1}; b)$ такие, что $v(t_1) < 0$, $v(t_2) > 0$.

Таким образом, подмножество $M_{l,\varepsilon}$ конуса H , ненулевые элементы которого имеют по крайней мере $l - 1$ нулей на $[a; b]$ и в некоторой точке с права от последнего нуля принимают значения со знаком равным ε , является непустым множеством.

Выберем $v_0 \in M_{l,\varepsilon}$ с минимальным значением $k(v_0)$. Как и в доказательстве предложения 8.1 приходим к заключению, что $k(v_0) = l$. Таким образом, функция v_0 имеет в точности $l - 1$ нулей на $[a; b]$ и принимает справа от последнего нуля значения со знаком равным ε . Следовательно, конус

$$H_{l,\varepsilon} = \left\{ \sum_{i \in J(v_0)} \mu_i h_i : \mu_i \geq 0 \ i \geq m + 1 \right\}$$

искомый. Предложение доказано.

9. Одно характеристическое свойство элемента наилучшего верхнего приближения при аппроксимации элементами конуса конечной размерности

В этом параграфе, считая, что приближаемая функция f и образующие конуса H непрерывны, получим характеристическое свойство элемента наилучшего верхнего приближения при аппроксимации элементом конечномерного конуса в метрике пространства $L[a, b]$.

Нуль функции $\varphi \in C[a; b]$, принадлежащий интервалу $(a; b)$, называется простым, если при переходе через нуль функция меняет знак и двойным, если функция при переходе через нуль знака не меняет. Нули функции на концах отрезка по определению считаются простыми. Если t — нуль функции φ , то четностью этого нуля называется число

$$\mu(\varphi, t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \text{ — простой нуль функции } \varphi, \\ 2, & \text{если } t \text{ — двойной нуль функции } \varphi. \end{cases}$$

Индексом точки $t \in [a, b]$ назовем число

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in \{a, b\}, \\ 2, & \text{если } t \in (a, b). \end{cases}$$

В [8] доказано следующее характеристическое свойство элемента наилучшего верхнего приближения (э.н.в.п.) непрерывной функции в случае приближения элементами n — мерного чебышевского подпространства.

Теорема 9.1. Пусть $\{h_1, h_2, \dots, h_n\} \subset C[a, b]$ — чебышевская система на $[a, b]$,

$$H_n = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i h_i : \alpha_i \in R \right\},$$

$f \in C[a, b]$ и функция h является элементом наилучшего верхнего приближения для функции f в H_n в метрике пространства $L[a, b]$.

Если точки $t_1, t_2, \dots, t_k$, удовлетворяющие неравенствам $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b$, суть все нули функции $h - f$, то

$$\sum_{i=1}^k \mu(h - f, t_i) \geq n,$$

т.е. разность $h - f$ имеет на $[a, b]$ не менее n нулей с учетом их четностей.

В случае, когда вместо чебышевского подпространства рассматривается конус той же размерности, число нулей разности $h - f$ с учетом четностей может быть меньше n .

На протяжении этого параграфа считаем, что $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ — линейно независимая система функций в пространстве $C[a, b]$, m — целое неотрицательное число,

$$H = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i : \alpha_i \in R \text{ при } 1 \leq i \leq m, \alpha_i \geq 0 \text{ при } i > m \right\}.$$

Лемма 9.1. Пусть H — квазичебышевский конус порядка r с правым знаком равным δ , для любых различных точек $z_1, z_2, \dots, z_{r-1} \in (a, b)$ в H существует ненулевой элемент, для которого точки $z_i, i = 1, 2, \dots, r-1$, являются простыми нулями, и

$$a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k \leq b.$$

Тогда верны следующие утверждения:

1. Если $\sum_{i=1}^k \xi(t_i) < r-1$, то конус H содержит неотрицательную и неположительную функции, отличные от нулевой, которые обращаются в нуль в точках $t_1, t_2, \dots, t_k$;

2. Если $\sum_{i=1}^k \xi(t_i) = r-1$, то при $t_k < b$ конус H содержит ненулевую функцию h , обладающую свойствами

$$h(t) \delta \geq 0 \text{ для любого } t \in [a, b] \text{ и } h(t_i) = 0, i = 1, 2, \dots, k,$$

а при $t_k = b$ конус H содержит ненулевую функцию h , для которой

$$h(t) \delta \leq 0 \text{ для любого } t \in [a, b] \text{ и } h(t_i) = 0, i = 1, 2, \dots, k.$$

Доказательство. Пусть $t_0 = a, t_{k+1} = b$. Среди всех положительных длин отрезков $[t_i, t_{i+1}], i = 0, 1, \dots, k$, выберем наименьшую и обозначим ее через ε_0 . Подберем $n_1 \in N$ так, чтобы $\frac{1}{n_1} < \frac{\varepsilon_0}{2}$. Для каждого натурального $p \geq n_1$ рассмотрим точки

$$t_i - \frac{1}{p}, \quad t_i + \frac{1}{p}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Обозначим через $\theta_i^{(p)}, i = 1, 2, \dots, \ell$, те из них, которые принадлежат отрезку $[a, b]$. При этом ясно, что

$$\ell = \sum_{i=1}^k \xi(t_i) \text{ и } \theta_1^{(p)} \neq a, \theta_\ell^{(p)} \neq b \text{ при всяком } p \geq n_1.$$

Докажем справедливость первого утверждения леммы.

Пусть $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k \leq b$ и $\sum_{i=1}^k \xi(t_i) < r-1$. Добавим к семейству точек $\theta_i^{(p)}, i = 1, 2, \dots, \ell$, различные точки так, чтобы количество точек стало равным $(r-1)$.

Предположим вначале, что $t_k = b$. Точки $\theta_i^{(p)}$, $i = \ell + 1, \dots, r - 1$ расположим на интервале $(a, a + \frac{1}{p})$, при этом они лежат строго левее любой из точек $\theta_i^{(p)}$, $i = 1, 2, \dots, \ell$. Для каждого натурального $p \geq n_1$ построим ненулевой обобщенный полином $h_p \in H$, для которого точки $\theta_i^{(p)}$, $i = 1, 2, \dots, r - 1$, являются простыми нулями. Поскольку правый знак конуса H равен δ , то $\text{sign } h_p(b) = \delta$. Без ограничения общности можно считать, что $\|h_p\|_c = 1$, иначе вместо h_p рассмотрим бы полином $\frac{h_p}{\|h_p\|_c}$.

Линейная оболочка конуса H является конечномерным подпространством пространства $C[a, b]$. Поэтому последовательность $\{h_p\}$ элементов замкнутого ограниченного множества $H \cap \{\varphi \in C[a, b] : \|\varphi\| = 1\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, причем ее предел h принадлежит конусу H и норма в $C[a, b]$ равна единице (отсюда, в частности, следует, что $h \neq \Theta$). Будем считать, что последовательность $\{h_p\}$ сходится. Поскольку сходимость в $C[a, b]$ влечет поточечную сходимость, то

$$h(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} h_p(t) \text{ для каждого } t \in [a, b].$$

Согласно построению обобщенных полиномов при всяком $p \geq n_1$ имеем

$$h_p(t) \delta \leq 0 \text{ для любого } t \in \left[a + \frac{1}{p}, b\right] \setminus \bigcup_{i=1}^k \left[t_i - \frac{1}{p}, t_i + \frac{1}{p}\right] \text{ и}$$

$$h_p(t_i) \delta > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Ввиду поточечной сходимости $\{h_p\}$ к h при $p \rightarrow \infty$ получим

$$h(t) \delta \leq 0 \text{ для любого } t \in [a, b] \setminus \{t_1, \dots, t_k\} \text{ и}$$

$$h(t_i) \delta \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Так как функция h непрерывна, то $h(t_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. Таким образом,

$$h(t) \delta \leq 0, \quad t \in [a, b] \text{ и } h(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Теперь, для каждого натурального $p \geq n_1$ построим полином $h'_p \in H$, для которого точки $\theta_i^{(p)}$, $i = 1, 2, \dots, r - 1$ являются простыми нулями, следующим образом. Пусть точка $\theta_{\ell+1}^{(p)}$ принадлежит интервалу $(\theta_\ell^{(p)}, b)$,

а точки $\theta_i^{(p)}$, $i = \ell + 2, \dots, r - 1$, содержатся в интервале $\left(a, a + \frac{1}{p}\right)$. В этом случае при всяком $p \geq n_1$ имеем

$$h'_p(t) \delta \geq 0 \text{ для всех } t \in \left[a + \frac{1}{p}, b\right] \setminus \bigcup_{i=1}^k \left[t_i - \frac{1}{p}, t_i + \frac{1}{p}\right] \text{ и}$$

$$h'_p(t_i) \delta < 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k.$$

Без ограничения общности, считаем, что норма полинома h'_p равна единице и последовательность полиномов $\{h'_p\}$ сходится. Переходя к поточечному пределу получим, что предельная функция $h' \in H$ удовлетворяет следующим условиям:

$$h'(t) \delta \geq 0 \text{ для всех } t \in [a, b] \text{ и } h'(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Итак, мы получили две предельные функции h и h' , одна из которых неположительна, другая неотрицательна и которые обращаются в нуль в точках t_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Таким образом, при $t_k = b$ первое утверждение леммы доказано.

Пусть теперь $t_k < b$. Вновь строим две последовательности полиномов $\{h_p\}$ и $\{h'_p\}$, для элементов которых точки $\theta_i^{(p)}$, $i = 1, 2, \dots, r - 1$ являются простыми нулями. Для построения элементов первой последовательности точки $\theta_i^{(p)}$, $i = \ell + 1, \dots, r - 1$, помещаем в интервал $\left(a, a + \frac{1}{p}\right)$. Для построения элементов второй последовательности точка $\theta_{\ell+1}^{(p)}$ принадлежит интервалу $\left(b - \frac{1}{p}, b\right)$, а точки $\theta_i^{(p)}$, $i = \ell + 2, \dots, r - 1$ содержатся в интервале $\left(a, a + \frac{1}{p}\right)$. В этом случае при всяком $p \geq n_1$ имеем:

$$h_p(t) \delta \geq 0 \text{ для всех } t \in \left[a + \frac{1}{p}, b\right] \setminus \bigcup_{i=1}^k \left[t_i - \frac{1}{p}, t_i + \frac{1}{p}\right],$$

$$h'_p(t) \delta \leq 0 \text{ для всех } t \in \left[a + \frac{1}{p}, b - \frac{1}{p}\right] \setminus \bigcup_{i=1}^k \left[t_i - \frac{1}{p}, t_i + \frac{1}{p}\right] \text{ и}$$

$$h_p(t_i) \delta < 0, \quad h'_p(t_i) \delta > 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Считая, что обе последовательности сходятся, получим, что предельные функции $h, h' \in H$ удовлетворяют условиям:

$$h(t) \delta \geq 0, \quad h'(t) \delta \leq 0 \text{ для всех } t \in [a, b] \text{ и}$$

$$h(t_i) = h'(t_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Таким образом, первая часть леммы доказана и при $t_k < b$.

Докажем справедливость второго утверждения леммы.

Пусть $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k < b$ и $\sum_{i=1}^k \xi(t_i) = r - 1$. Для каждого натурального $p \geq n_1$ рассмотрим точки

$$t_i - \frac{1}{p}, \quad t_i + \frac{1}{p}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Обозначим через $\theta_i^{(p)}$, $i = 1, 2, \dots, \ell$, те из них, которые принадлежат отрезку $[a, b]$. Количество полученных точек равно $r - 1$. Построим ненулевой полином $h_p \in H$, который в точках $\theta_i^{(p)}$, $i = 1, 2, \dots, r - 1$, имеет простые нули. В этом случае полином h_p удовлетворяет условиям:

$$h_p(t) \delta \geq 0 \text{ для всех } t \in [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^k \left[t_i - \frac{1}{p}, t_i + \frac{1}{p} \right];$$

$$h_p(t_i) \delta < 0 \text{ при } i = 1, 2, \dots, k.$$

В силу вышеизложенного считаем, что последовательность полиномов $\{h_p\}$ сходится. Поэтому предельная функция $h \in H$ такова, что

$$h(t) \delta \geq 0 \text{ для всех } t \in [a, b] \text{ и } h(t_i) = 0 \text{ при } i = 1, 2, \dots, k.$$

Пусть, наконец, $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ и

$$\sum_{i=1}^k \xi(t_i) = r - 1.$$

Для каждого натурального $p \geq n_1$ построим полином h_p , который удовлетворяет условиям:

$$h_p(t) \delta \leq 0 \text{ для всех } t \in [a, b] \setminus \bigcup_{i=1}^k \left[t_i - \frac{1}{p}, t_i + \frac{1}{p} \right] \quad \text{и}$$

$$h_p(t_i) \delta > 0 \text{ при } i = 1, 2, \dots, k.$$

Предельный переход даст функцию h со следующими свойствами:

$$h(t) \delta \leq 0 \text{ для всех } t \in [a, b] \text{ и } h(t_i) = 0 \text{ при } i = 1, 2, \dots, k.$$

Лемма доказана.

Теорема 9.2. Пусть $f \in C[a, b]$ и h_0 — э.н.в.п. в конусе H в метрике пространства $L[a, b]$, расширенный конус $H_{J(h_0)}$ является квазичебышевским порядка r с правым знаком равным δ , содержит положительный элемент и для любых различных точек $z_1, \dots, z_{r-1} \in (a, b)$ в $H_{J(h_0)}$ существует ненулевой элемент, для которого эти точки являются простыми нулями.

Если точки $t_1, t_2, \dots, t_k, a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b$ — все нули разности $h_0 - f$, причем при $\delta = 1$ точка $t_k = b$, а при $\delta = -1$ точка $t_k < b$, то

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) \geq r.$$

Доказательство. Отметим, что h_0 — э.н.в.п. функции f в расширенном конусе $H_{J(h_0)}$. Предположим, утверждение теоремы не выполняется и

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) < r.$$

Тогда в силу неравенства $h_0 - f \geq 0$ имеем

$$\sum_{i=1}^k \xi(t_i) = \sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) \leq r - 1.$$

Из леммы 9.1 следует существование ненулевого элемента $h \in H_{J(h_0)}$ такого, что $h \leq 0$ и $h(t_i) = 0, i = 1, 2, \dots, k$. Так как $\int_a^b h(t) dt < 0$ и в $H_{J(h_0)}$ присутствует положительная функция h^+ , то можно подобрать положительное число λ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_a^b (h + \lambda h^+)(t) dt < 0.$$

Множество

$$F = \{t \in [a, b] : (h + \lambda h^+)(t) \leq 0\}$$

замкнуто и функция $h_0 - f$ не имеет на F нулей. Поэтому существует $\varepsilon > 0$, для которого выполняется неравенство $h_0 - f \geq \varepsilon$ на F . Положим

$$w = \frac{\varepsilon}{\|h + \lambda h^+\|_c} (h + \lambda h^+).$$

Имеем

$$h_0 - f \geq \varepsilon \geq -w \text{ на } F \text{ и } h_0 - f \geq 0 > -w \text{ на } [a, b] \setminus F,$$

следовательно, $h_0 + w \geq f$ на всем $[a, b]$. Таким образом,

$$h_0 + w \in H_{J(h_0)} \quad \text{и} \quad h_0 + w \geq f.$$

С другой стороны

$$\|f - (h_0 + w)\|_L = \int_a^b (h_0 - f) dt + \int_a^b w dt < \int_a^b (h_0 - f) dt = \|f - h_0\|_L,$$

а это противоречит тому, что элементом наилучшего верхнего приближения для f в конусе $H_{J(h_0)}$ в метрике пространства $L[a, b]$ является h_0 . Полученное противоречие доказывает неравенство

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) \geq r.$$

Из доказанной теоремы 9.2, в частности, следует справедливость теоремы 9.1.

Следствие 9.1. Пусть $f \in C[a, b]$ и h_0 — э.н.в.п. для f в конусе Хаара H в метрике пространства $L[a, b]$, расширенный конус $H_{J(h_0)}$ порядка r имеет правый знак равный δ и содержит положительную функцию.

Если точки $t_1, t_2, \dots, t_k, a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b$ — все нули разности $h_0 - f$, причем при $\delta = 1$ точка $t_k = b$, а при $\delta = -1$ точка $t_k < b$, то

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) \geq r.$$

Следствие 9.2. Пусть $f \in C[a, b]$ и h_0 — э.н.в.п. в конусе Чебышева H в метрике пространства $L[a, b]$, конус H порядка n имеет правый знак равный δ , содержит положительную функцию и для любых различных точек $z_1, \dots, z_{n-1} \in (a, b)$ в $H_{J(h_0)}$ существует ненулевой элемент, который в этих точках обращается в нуль.

Если точки $t_1, t_2, \dots, t_k, a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b$ — все нули разности $h_0 - f$, причем при $\delta = 1$ точка $t_k = b$, а при $\delta = -1$ точка $t_k < b$, то

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) \geq r.$$

Теорема 9.3. Пусть функция $f \in C[a, b]$ и h_0 — э.н.в.п. в конусе H в метрике пространства $L[a, b]$, расширенный конус $H_{J(h_0)}$ является квази-чебышевским порядка r с правым знаком равным δ , содержит положительную функцию и для любых различных точек $z_1, \dots, z_{r-1} \in (a, b)$ в $H_{J(h_0)}$ существует ненулевой элемент, для которого эти точки являются простыми нулями.

Если точки $t_1, t_2, \dots < t_k, a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b$ — все нули разности $h_0 - f$, то

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) \geq r - 1.$$

Доказательство. Предположим, что

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) = \sum_{i=1}^k \xi(t_i) < r - 1.$$

Используя первый пункт леммы 9.1, найдем ненулевой элемент h из расширенного конуса такой, что $h \leq 0$ и $h(t_i) = 0, i = 1, 2, \dots, k$. Повторяя доказательство теоремы 9.2, мы вновь приходим к противоречию с тем, что h_0 — э.н.в.п. для f в конусе H , которое и доказывает неравенство

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) \geq r - 1.$$

Следствие 9.3. Пусть $f \in C[a, b]$ и h_0 — э.н.в.п. в конусе Хаара H в метрике пространства $L[a, b]$, расширенный конус $H_{J(h_0)}$ порядка r имеет правый знак равный δ и содержит положительную функцию.

Если точки $t_1, t_2, \dots < t_k, a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b$ — все нули разности $h_0 - f$, то

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) \geq r - 1.$$

Следствие 9.4. Пусть функция $f \in C[a, b]$ и h_0 — э.н.в.п. в конусе Чебышева H в метрике пространства $L[a, b]$, конус H порядка n имеет правый знак равный δ , содержит положительный элемент и для любых различных точек $z_1, \dots, z_{n-1} \in (a, b)$ в $H_{J(h_0)}$ существует ненулевой элемент, который в этих точках обращается в нуль.

Если точки $t_1, t_2, \dots < t_k$, $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b$ — все нули разности $h_0 - f$, то

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) \geq n - 1.$$

Теорема 9.2 утверждает, что если выполнено одно из условий:

1. Знак конуса $\delta = 1$ и точка $t_k = b$;
2. Знак конуса $\delta = -1$ и точка $t_k < b$, то

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) \geq r.$$

Используя теорему 9.3, можно показать, что если

$$\sum_{i=1}^k \mu(h_0 - f, t_i) = r - 1,$$

то выполнено одно из условий:

1. Знак конуса $\delta = 1$ и точка $t_k < b$;
2. Знак конуса $\delta = -1$ и точка $t_k = b$.

Если расширенный конус $H_{J(h_0)}$ оказывается чебышёвским подпространством, то применяя теорему 9.1, получим характеристическое свойство элемента наилучшего верхнего приближения непрерывной функции.

На примерах покажем, что оценку числа нулей улучшить нельзя. Даже в случае, когда расширенный конус является чебышёвским порядком, совпадающего с числом базисных функций, и содержит постоянные функции.

Пример 1. В пространстве $C[0; 1]$ рассмотрим конус

$$H = \{\alpha t + \beta : \alpha \geq 0, \beta \in R\}$$

и функцию $f(t) = -t$. Ясно, что H — является чебышевским конусом порядка $r = 2$ с правым знаком $\delta = 1$ и содержит полиномы с произвольным расположением нуля на $(0, 1)$. Из равенства $f(0) = 0$ следует, что $h \geq f$ тогда и только тогда, когда $h(0) \geq 0$, что равносильно неравенству $\beta \geq 0$. Поэтому нулевой элемент $h_0 = \Theta$ — э.н.в.п. функции f в конусе H . Расширенный конус $H_{J(\Theta)}$ совпадает с H , а разность $h_0 - f = -f$

имеет на $[0,1]$ единственный нуль в точке 0 и его четность равна 1. Таким образом число нулей с учетом их четностей равно $r - 1$.

Пример 2 Рассмотрим в пространстве $C[0; 1]$ чебышевский конус

$$H = \{-\alpha t + \beta : \alpha \geq 0, \beta \in R\},$$

порядок которого равен $r = 2$ и функцию $f(t) = t - 1$. Отметим, что правый знак конуса $\delta = -1$. Так как $h(1) = -\alpha + \beta$ для каждого $h \in H$ и $f(1) = 0$, то $h \geq f$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leq \beta$. Поэтому $\beta \geq 0$.

Для любого $h \geq f$ имеем

$$\int_0^1 (h(t) - f(t)) dt = \beta - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2},$$

при этом

$$\int_0^1 (-f(t)) dt = \frac{1}{2}.$$

Элемент $h_0 = \Theta$ — э.н.в.п. для f в H и $H_{J(h_0)} = H$. Функция $h_0 - f$ имеет $r - 1$ нулей с учетом четностей.

В примере 1 рассмотрен случай, когда разность $h_0 - f$ имеет ровно $r - 1$ нулей, причем $\delta = 1$ и $(h_0 - f)(b) > 0$, а в примере 2 разность $h_0 - f$ имеет ровно $r - 1$ нулей, а при этом $\delta = -1$ и $(h_0 - f)(b) = 0$.

Пример 3 Отсутствие в конусе полиномов с произвольным расположением нулей на интервале может привести к тому, что утверждение теоремы 9.3 не будет выполняться.

Рассмотрим в пространстве $C[-1; 1]$ конус

$$H = \{\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \zeta : \alpha, \beta, \gamma, \zeta \geq 0\},$$

и функцию $f(t) = -|t|$. Поскольку многочлен третьей степени имеет на R не более трех нулей, то ровно три нуля на $[-1, +1]$ имеет многочлен

$$t(t + \frac{3}{4})(t + \frac{1}{4}) = t^3 + t^2 + \frac{3}{16}t \in H.$$

Поэтому конус H имеет порядок $r = 4$. Далее, каждый полином из конуса, имеющий на полуинтервале $[-1; 1)$ три нуля, справа от последнего

нуля принимает положительные значения. Следовательно конус H имеет правый знак $\delta = 1$. В то же время, многочленов с произвольным расположением нулей на $(-1, +1)$ конус не содержит. Действительно, все ненулевые многочлены третьей степени, обращающиеся в нуль в точках $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, имеют вид

$$ct(t - \frac{1}{3})(t - \frac{2}{3}), \quad c \in R$$

и, очевидно, не принадлежат H . Для любых коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \zeta \geq 0$ имеем

$$\int_{-1}^{+1} (\alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \zeta + |t|) dt = \frac{2}{3}\beta + 2\zeta + 1 \geq 1, \quad \text{а} \quad \int_{-1}^{+1} |t| dt = 1.$$

Таким образом, элемент $h_0 = \Theta$ — э.н.в.п. для f в конусе H , причем $H_{J(h_0)} = H$. Однако разность $\Theta - f$ имеет всего один нуль в точке $t = 0$ и его четность равна 2, при этом $2 < r - 1 = 3$.

Тем не менее, элемент наилучшего верхнего приближения, удовлетворяющий утверждению теоремы 9.3, в конусе H имеется. Таковым является полином $h(t) = t^3$. Для него $\int_{-1}^1 (t^3 - |t|) dt = 1$. Поэтому h — э.н.в.п. для f в конусе H и разность $h(t) - f(t)$ на $[-1, +1]$ имеет нули в точках -1 и 0 . Число нулей с учетом их четностей равно трем.

10. Единственность элемента наилучшего приближения с ограничениями в пространствах суммируемых функций

Как отмечалось ранее, банахово пространство $L^p[a; b]$ при $1 < p < \infty$ имеет выпуклую сферу. Поэтому единственность элемента наилучшего приближения в аппроксимационных задачах с ограничениями типа (F^+, g, G) или (F^-, g, G) вытекает из теоремы 1.2.

В банаховом пространстве $L[a; b]$ приведем некоторые достаточные условия единственности элемента наилучшего одностороннего приближения для непрерывно дифференцируемых функций при аппроксимации конусом или подпространством конечной размерности в метрике пространства $L[a; b]$.

Лемма 10.1. Пусть $x \in C[a; b]$, $H \subset C[a; b]$ — конечномерный конус, содержащий положительную и отрицательную функции φ, ψ .

Если $h_0 \in H$ — э.н.в.п. для x в конусе H в метрике $L[a; b]$, то разность $h_0 - x$ имеет на отрезке $[a; b]$ хотя бы один нуль.

Доказательство. Предположим, что разность $h_0 - x$ на отрезке $[a; b]$ не имеет нулей, т.е. $h_0 - x > 0$ на $[a; b]$. Подберем $\lambda > 0$ таким образом, чтобы $h_0 + \lambda \psi \geq x$ на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\begin{aligned} \|x - (h_0 + \lambda \psi)\|_L &= \int_a^b (h_0(t) - x(t)) dt + \lambda \int_a^b \psi(t) dt = \\ &= \|x - h_0\|_L + \lambda \int_a^b \psi(t) dt < \|x - h_0\|_L, \end{aligned}$$

что противоречит тому, что h_0 — э.н.в.п. для x в конусе H в метрике $L[a; b]$. Лемма доказана.

Пусть функции $h_1, h_2, \dots, h_n$ имеют на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные до порядка n включительно.

Система Чебышева $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ называется ЕТ — системой /9/ порядка n , если всякий ненулевой обобщенный полином

$$P = \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k, \quad \alpha_k \in R, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

имеет на $[a; b]$ не более $n - 1$ нулей с учетом их алгебраической кратности, т.е. каждый нуль полинома считается столько раз какова его алгебраическая кратность.

Будем говорить, что конус Хаара

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\},$$

где $m \in N$, обладает ЕТ — свойством, если для любого множества индексов L ,

$$\{1, 2, \dots, m\} \subset L \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

система Чебышева $\{h_k : k \in L\}$ является и ЕТ — системой на отрезке $[a; b]$ порядка, равного количеству элементов во множестве L .

Теорема 10.1. Пусть $m \in N$. Если

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\}, \quad h_1(t) = 1 \text{ для всех } t \in [a; b],$$

есть конус Хаара, обладающий ЕТ — свойством, то для любой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ функции x э.н.в.п. в конусе H в метрике пространства $L[a; b]$ единствен.

Доказательство. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция f , для которой элементы $v_1, v_2 \in H$ суть элементы наилучшего верхнего приближения в конусе H в метрике пространства $L[a; b]$. Тогда $v = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$ — э.н.в.п. для f в конусе H в метрике пространства $L[a; b]$. Очевидно, что множества индексов $J(v_1), J(v_2) \subset J(v)$ и расширенные конусы для элементов v_1, v_2, v удовлетворяют соотношениям

$$H_{J(v_1)}, H_{J(v_2)} \subset H_{J(v)}.$$

Считая, что множество $J(v)$ содержит r элементов, рассмотрим r — мерное подпространство H_r , базисом которого является ЕТ — система функций $\{h_k : k \in J(v)\}$ порядка r на отрезке $[a; b]$.

Ясно, что $v_1, v_2, v \in H_r \subset H_{J(v)}$ и

$$E^+(f, H) = E^+(f, H_{J(v)}) = E^+(f, H_r) = \|f - v\|,$$

т.е. v, v_1, v_2 являются элементами наилучшего верхнего приближения для f при аппроксимации элементами подпространства H_r в метрике $L[a; b]$.

По теореме 9.1 функция

$$\Delta(t) = v(t) - f(t) = \frac{1}{2}(v_1(t) - f(t)) + \frac{1}{2}(v_2(t) - f(t))$$

имеет на отрезке $[a; b]$ не менее r нулей с учетом их четностей.

Каждый нуль функции Δ является нулем функции $v_1 - v_2$, причем каждый нуль функции Δ , являющийся внутренней точкой отрезка $[a; b]$, для разности $v_1 - v_2$ имеет алгебраическую кратность ≥ 2 . Действительно, $\Delta(t) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$v_1(t) - f(t) = 0, v_2(t) - f(t) = 0.$$

Следовательно $v_1(t) - v_2(t) = 0$. Пусть теперь $t_0 \in (a; b)$ — нуль функции Δ . Тогда, во-первых, t_0 — нуль функции $v_1 - v_2$, а во-вторых,

$$\Delta(t_0) = \min_{[a; b]} \Delta(t) = 0,$$

$$\min_{[a; b]} \{v_1(t) - f(t)\} = 0 = \min_{[a; b]} \{v_2(t) - f(t)\}.$$

Поэтому

$$\Delta'(t_0) = 0, \quad v'_1(t_0) - f'(t_0) = 0 = v'_2(t_0) - f'(t_0),$$

и следовательно $v'_1(t_0) - v'_2(t_0) = 0$. Из последнего равенства следует, что кратность нуля t_0 не меньше 2.

Таким образом, функция $v_1 - v_2 \in H_r$ имеет на отрезке $[a; b]$ не менее r нулей с учетом их алгебраической кратности. Так как базисом подпространства H_r является ЕТ — система порядка r , то $v_1 - v_2 = \Theta$. Теорема доказана.

Пусть задана система $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций, при этом будем считать, что $h_1(t) = 1$ на $[a; b]$.

Система Чебышева $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ порядка n называется дифференцируемой, если линейная оболочка системы $\{h_1, h'_2, \dots, h'_n\}$ есть чебышевское подпространство размерности n или $n - 1$. Например, если $h_2(t) = t$ на $[a; b]$, то размерность равна $n - 1$.

Теорема 10.2. /8/ Если система Чебышева $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ порядка n на отрезке $[a; b]$ дифференцируема, то для любой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ функции x э.н.в.п. в подпространстве

$$H_n = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R \right\}$$

в метрике пространства $L[a; b]$ единствен.

Доказательство. Предположим, что для некоторой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ функции x существуют две функции u, v наилучшего верхнего приближения из H_n в метрике $L[a; b]$. Тогда функция $\frac{1}{2}(u + v)$ — э.н.в.п. для x в H_n . Также как и при доказательстве теоремы 10.1 устанавливаем, что всякий нуль разности $\Delta(t) = x(t) - \frac{1}{2}(u(t) + v(t))$ есть нуль разности $\delta(t) = u(t) - v(t)$, причем каждый нуль разности δ , лежащий внутри отрезка $[a; b]$, является ее кратным нулем. Если каждый нуль разности δ , лежащий внутри отрезка $[a; b]$, является точно двукратным, то в силу теоремы 9.1 число нулей функции δ с учетом их четностей на отрезке $[a; b]$ не менее чем n , что противоречит теореме 8.2. В противном случае среди нулей разности δ , лежащих внутри отрезка $[a; b]$, есть по крайней мере один, кратность которого не менее чем 3. Поэтому из теоремы 9.1 и теоремы Ролля следует, что число нулей функции δ' с учетом четностей на отрезке $[a; b]$ не менее чем n , что опять противоречит теореме 8.2. Теорема доказана.

Приведем аналог доказанной теоремы для конуса конечной размерности, натянутого на чебышевскую систему функций.

Теорема 10.3. Пусть $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ — система Чебышева на отрезке $[a; b]$, $h_1(t) = 1$, $h_2(t) = t$ на $[a; b]$, $m \in N$, чебышевский конус

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\}$$

порядка n с правым знаком равным σ обладает свойством :

для любых различных точек $z_1, z_2, \dots, z_{n-1} \in (a; b)$ существует ненулевой элемент $h \in H$, который обращается в нуль в этих точках.

Если данная система Чебышева является дифференцируемой, то для любой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ функции f э.н.в.п. в конусе H в метрике пространства $L[a; b]$ единствен.

Доказательство. Предположим, что для некоторой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ функции f существуют два элемента u, v наилучшего верхнего приближения в H в метрике $L[a; b]$. Тогда функция $w = \frac{1}{2}(u + v)$ — э.н.в.п. для f в H . Также как и при доказательстве теоремы 10.1 устанавливаем, что всякий нуль разности $\Delta = w - f$ есть нуль разности $\delta = u - v$, причем каждый нуль разности Δ , лежащий внутри отрезка $[a; b]$, является нулем и разности $\delta' = u' - v'$.

Пусть $t_1, t_2, \dots, t_k$, $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq b$ — все нули разности Δ , при этом $k < n$, т.к. в противном случае по свойству чебышевских систем $u = v$.

1. Предположим, что на $(a; b)$ есть нуль разности Δ .

1.1. Если $\sum_{i=1}^k \mu(w - f, t_i) \geq n$, то разность $u - v$ имеет на интервале $(a; b)$ хотя бы один простой нуль. Действительно, если все нули разности $u - v$ двойные, то $u - v$ имеет на отрезке $[a; b]$ не менее чем $\sum_{i=1}^k \mu(w - f, t_i) \geq n$ нулей с учетом их четности, что противоречиво.

1.2. Если $\sum_{i=1}^k \mu(w - f, t_i) = n - 1$, то вновь функция $u - v$ имеет на $(a; b)$ хотя бы один простой нуль. Докажем это. Предположим, что все нули $u - v$ являются двойными. Тогда

$$\sum_{i=1}^k \mu(u - v, t_i) = \sum_{i=1}^k \mu(w - f, t_i) = n - 1$$

и либо $u - v \geq 0$, либо $u - v \leq 0$ на отрезке $[a; b]$. Будем считать, что $u - v \geq 0$ на $[a; b]$. Из неравенства $u \neq v$ следует существование интервала

$(c; d) \subset (a; b)$, $c < d$, такого, что $u(t) > v(t)$ для всех $t \in (c; d)$.

Следовательно

$$\begin{aligned} \|f - u\|_L &= \int_a^c (u(t) - f(t)) dt + \int_c^d (u(t) - f(t)) dt + \int_d^b (u(t) - f(t)) dt > \\ &> \int_a^c (v(t) - f(t)) dt + \int_c^d (v(t) - f(t)) dt + \int_d^b (v(t) - f(t)) dt = \|f - v\|_L. \end{aligned}$$

Этим показано, что и при $\sum_{i=1}^k \mu(w - f, t_i) = n - 1$ хотя бы один нуль $t_i \in (a; b)$ для функции $u - v$ является простым.

Итак, если на интервале $(a; b)$ есть нули разности $w - f$, то по меньшей мере один из нулей простой для $u - v$ на $(a; b)$.

Если $t_i \in (a; b)$ — простой нуль разности $u - v$, то он является двойным нулем для $u' - v'$. Далее, поскольку между нулями дифференцируемой функции есть нуль ее производной, то у функции $u' - v'$ есть по меньшей мере один нуль на каждом из интервалов $(t_j; t_{j+1})$, $j = 1, 2, \dots, k - 1$. Таким образом, число нулей функции $u' - v'$ с учетом их четностей не менее $2k$. Однако, имеем:

если $a < t_1$, $t_k < b$, то $\sum_{i=1}^k \mu(w - f, t_i) = 2k$;

если $a < t_1$, $t_k = b$ или $a = t_1$, $t_k < b$, то $\sum_{i=1}^k \mu(w - f, t_i) = 2k - 1$;

если $a = t_1$, $t_k = b$, то $\sum_{i=1}^k \mu(w - f, t_i) = 2k - 2$.

Поэтому разность $u' - v'$ имеет на $[a; b]$ нулей с учетом их четностей не менее чем $\sum_{i=1}^k \mu(w - f, t_i) \geq n - 1$. Но в силу дифференцируемости системы Чебышева $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ нулей разности $u' - v'$ с учетом их четностей не более чем $n - 2$.

Итак, предположение $u \neq v$ привело нас к противоречию.

2. Пусть теперь на интервале $(a; b)$ нет нулей разности $w - f$. Тогда нулями $w - f$ могут быть лишь концы отрезка $[a; b]$. Таким образом, если у разности $w - f$ один нуль, то $n = 1$ или $n = 2$, а если два нуля, то $n = 3$. Тогда функция $u - v$ имеет хотя бы один нуль на интервале

$(a; b)$, иначе $u - v \leq 0$ или $u - v \geq 0$, чего, как показано выше, быть не может. Тем самым, разность $u - v$ будет иметь не менее 3 нулей с учетом их четностей, что противоречит свойству чебышевских систем и следовательно $u = v$. Теорема доказана.

Пусть $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ — линейно независимая система непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a; b]$ функций, $h_1(t) = 1$, $t \in [a; b]$, $m \in N$,

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\}.$$

Конус H будем называть дифференцируемым конусом Хаара, если при каждом L ,

$$\{1, 2, \dots, m\} \subset L \subset \{1, 2, \dots, n\},$$

линейные оболочки систем функций $\{h_i : i \in L\}$ и $\{h'_i : i \in L\}$ являются чебышевскими подпространствами.

Теорема 10.4 Если H — дифференцируемый конус Хаара, то для любой дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ функции f э.н.в.п. в конусе H в метрике $L[a; b]$ единствен.

Доказательство. Предположим, что для некоторой непрерывно дифференцируемой на отрезке $[a; b]$ функции f существуют два элемента u_1 , u_2 наилучшего верхнего приближения в H в метрике $L[a; b]$. Тогда функция $u = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ — э.н.в.п. для f в H в метрике $L[a; b]$.

Ясно, что $J(u_1)$, $J(u_2) \subset J(u)$ и имеют место включения

$$H_{J(u_1)}, H_{J(u_2)} \subset H_{J(u)}.$$

Пусть множество индексов $J(u)$ содержит p элементов. Положим

$$H_p = \left\{ \sum_{k \in J(u)} \alpha_k h_k : \alpha_k \in R \right\}.$$

Множество H_p есть p —мерное чебышевское подпространство, содержащееся в расширенном конусе $H_{J(u)}$. Как отмечалось ранее, u , а также и u_1 , u_2 — э.н.в.п. для f в H_p в метрике $L[a; b]$. Однако, в силу теоремы 10.2 э.н.в.п. для f в подпространстве H_p единствен. Тем самым, $u_1 = u_2$ и теорема доказана.

Приведем ряд примеров, показывающих существенность условий доказанных теорем.

Пример 1. Пусть $h_1(t) = 1$, $h_2(t) = t$, $t \in [-1; 1]$. Система Чебышева $\{h_1, h_2\}$ является дифференцируемой, а

$$H = \{c_1 h_1 + c_2 h_2 : c_1 \in R, c_2 \geq 0\}$$

— дифференцируемый конус Хаара. Покажем, что для непрерывной, но не дифференцируемой на отрезке $[-1; 1]$ функции $f(t) = -|t|$ э.н.в.п. в H , а также в чебышевском подпространстве

$$H_1 = \{c_1 h_1 + c_2 h_2 : c_1, c_2 \in R\}$$

в метрике пространства $L[-1; 1]$ не единствен.

Действительно, для любого $h = c_1 h_1 + c_2 h_2 \in H_1$ из условия $h \geq f$ следует

$$\|h - f\|_L = \int_{-1}^1 (c_1 + c_2 t + |t|) dt = 2c_1 + 1$$

при этом $c_1 = h(0) \geq f(0) = 0$. Поэтому $E^+(f, H) \geq 1$, $E^+(f, H_1) \geq 1$. Заметим, что функции $\varphi(t) = 0$, $\psi(t) = t$, $t \in [-1; 1]$ принадлежат конусу H и подпространству H_1 , причем $\varphi, \psi \geq f$ и справедливы равенства

$$\|\varphi - f\|_L = \|\psi - f\|_L = 1.$$

Тогда $E^+(f, H) = 1$, $E^+(f, H_1) = 1$ и φ, ψ — э.н.в.п. для f в H и H_1 в метрике пространства $L[-1; 1]$.

Пример 2. Пусть $h_1(t) = 1$, и $h_2(t) = \sin t (1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$. Система функций $\{h_1, h_2\}$ не является чебышевской на отрезке $[0; 2\pi]$. Покажем, что для непрерывно дифференцируемой на отрезке $[0; 2\pi]$ функции $f(t) = \cos t - 1$ элемент наилучшего верхнего приближения в

$$H_1 = \{c_1 h_1 + c_2 h_2 : c_1, c_2 \in R\}$$

в метрике пространства $L[0; 2\pi]$ не единствен.

Заметим, что

$$\int_0^{2\pi} \sin t (1 - \cos t) dt = 0.$$

Для каждой функции $h \in H_1$, удовлетворяющей неравенству $h \geq f$ на $[0; 2\pi]$, справедливы равенства

$$\int_0^{2\pi} (h(t) - f(t)) dt = \int_0^{2\pi} (c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t) - f(t)) dt = c_1 2\pi + 2\pi.$$

Кроме того, $c_1 = h(0) \geq f(0) = 0$. Поэтому $E^+(f, H_1) \geq 2\pi$. Вместе с тем, для всех c_2 таких, что $|c_2| \leq 1$, элемент $c_2 h_2 \geq f$ на $[0; 2\pi]$ и $\|c_2 h_2 - f\|_L = 2\pi$. Следовательно, $E^+(f, H_1) = 2\pi$. Таким образом, для функции f э.н.в.п. в H_1 в метрике $L[0; 2\pi]$ не единствен.

Пример 3. Пусть $h_1(t) = 1$, и $h_2(t) = t(1 - t^2)$, $t \in [-1; 1]$. Система функций $\{h_1, h_2\}$ не является чебышевской на отрезке $[-1; 1]$. Покажем, что для непрерывной, но не дифференцируемой на отрезке $[-1; 1]$ функции $f(t) = -|t|$ э.н.в.п. в

$$H_1 = \{c_1 h_1 + c_2 h_2 : c_1, c_2 \in R\}$$

и метрике пространства $L[-1; 1]$ не единствен.

Отметим, что для каждого элемента $h \in H_1$, удовлетворяющему неравенству $h \geq f$, справедливы равенства

$$\|h - f\|_L = \int_{-1}^1 (c_1 + c_2 t(1 - t^2) + |t|) dt = 2c_1 + 1.$$

Так как $c_1 = h(0) \geq f(0) = 0$, то $E^+(f, H_1) \geq 1$. Для функций $\varphi = \Theta$ и $\psi = h_2$ справедливы неравенства: $\varphi \geq f$; $\psi \geq f$, при этом

$$\|\varphi - f\|_L = \|\psi - f\|_L = 1.$$

Таким образом, $E^+(f, H_1) = 1$ и φ, ψ — э.н.в.п. для f в H_1 в метрике пространства $L[-1; 1]$.

11. Связь наилучших односторонних приближений непрерывных функций в метрике пространства $L[a; b]$ с квадратурными формулами

Связь наилучших односторонних приближений непрерывных функций в метрике пространства $L[a; b]$ с квадратурными формулами при аппроксимации функций элементами чебышевского подпространства устанавливает

Теорема 11.1./8/ Пусть $H_n \subset C[a; b]$ — n -мерное подпространство, базисом которого является чебышевская система $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$, при этом $h_1(t) = 1$ на $[a; b]$, функция $f \in C[a; b]$ и элемент h_0 — э.н.в.п. для f в H_n в метрике пространства $L[a; b]$.

Если точки $t_1, t_2, \dots, t_r$ ($a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq b$) — все нули разности $h_0 - f$, при этом $r < n$, то существует квадратурная формула

$$\int_a^b h(t) dt \approx \sum_{k=1}^r p_k h(t_k)$$

с неотрицательными числами p_k точная на подпространстве H_n , т.е. найдутся числа $p_k \geq 0$ такие, что для любой функции $h \in H_n$ выполняется равенство

$$\int_a^b h(t) dt = \sum_{k=1}^r p_k h(t_k).$$

Доказательство. Пусть $t_1, t_2, \dots, t_r, t_{r+1}, \dots, t_n$ — различные точки отрезка $[a; b]$, при этом точки $t_{r+1}, t_{r+2}, \dots, t_n$, добавленные к данным $t_1, t_2, \dots, t_r$, выбраны произвольным образом. Рассмотрим линейные ограниченные функционалы

$$F_0(h) = \int_a^b h(t) dt, \quad F_k(h) = h(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

заданные на подпространстве H_n . Пространство H_n^* , сопряженное к H_n , имеет размерность равную n . Поэтому каждый его элемент представляется в виде линейной комбинации элементов базиса в H_n^* . А так как функционалы $F_k(h) = h(t_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, линейно независимы, то найдутся числа p_k , $k = 1, 2, \dots, n$, такие, что равенство

$$\int_a^b h(t) dt = \sum_{k=1}^n p_k h(t_k)$$

верно для любого $h \in H_n$.

Покажем теперь, что $p_k = 0$, $k = r + 1, r + 2, \dots, n$. Предположим, что

$$\sum_{k=r+1}^n |p_k| > 0.$$

Используя следствие 8.2 для произвольного $q > 0$ построим интерполяционный полином $u_q \in H_n$, удовлетворяющим условиям:

$$u_q(t_k) = -\frac{1}{q}, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad u_q(t_k) = q \operatorname{sign} p_k, \quad k = r + 1, r + 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\int_a^b u_q(t) dt = -\frac{1}{q} \sum_{k=1}^r p_k + q \sum_{k=r+1}^n |p_k|.$$

Поэтому для достаточно большого $q > 0$ справедливо неравенство

$$\int_a^b u_q(t) dt > 0.$$

Рассмотрим множество $G = \{t \in [a; b] : u_q(t) < 0\}$. Отметим, что множество $D = [a; b] \setminus G$ замкнуто и не содержит нули разности $h_0 - f$. Поэтому существует $\epsilon > 0$, для которого $(h_0 - f)(t) > \epsilon$ для всех $t \in D$. Положим

$$u^* = \frac{\epsilon}{2\|u_q\|_c} u_q \in H_n.$$

Имеем

$$(h_0 - f)(t) > \epsilon > u^*(t) \text{ для всех } t \in D,$$

$$(h_0 - f)(t) \geq 0 > u^*(t) \text{ для всех } t \in G.$$

Таким образом, $(h_0 - f)(t) - u^*(t) \geq 0$ на $[a; b]$. Тогда разность $h_0(t) - u^*(t) \geq f(t)$ на $[a; b]$, при этом $h_0 - u^* \in H_n$. Далее,

$$\begin{aligned} \|f - (h_0 - u^*)\|_L &= \int_a^b (h_0(t) - f(t)) dt - \int_a^b u^*(t) dt = \\ &= \|f - h_0\|_L - \int_a^b \frac{\epsilon}{2\|u_q\|_c} u_q(t) dt < \|f - h_0\|_L. \end{aligned}$$

Последнее неравенство противоречит тому, что элемент h_0 есть э.н.в.п. функции f в H_n в метрике $L[a; b]$. Следовательно, числа $p_k = 0$ при $k = r + 1, r + 2, \dots, n$.

Предположим, что существует $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, для которого $p_i < 0$. Используя следствие 8.2 построим интерполяционный полином $\varphi \in H_n$, удовлетворяющий условиям:

$$\varphi(t_k) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq i, \\ -1 & \text{при } k = i. \end{cases}$$

Учитывая, что $p_{r+1} = \dots = p_n = 0$, $p_i < 0$, получим

$$\int_a^b \varphi(t) dt = |p_i| > 0.$$

Повторяя рассуждения, приведенные выше, докажем существование функции $\varphi^* \in H_n$ такой, что

$$h_0 - \varphi^* \in H_n, \quad h_0 - \varphi^* \geq f \quad \text{и} \quad \|f - (h_0 - \varphi^*)\|_L < \|f - h_0\|_L.$$

Последнее неравенство означает, что элемент h_0 не является э.н.в.п. для f в H_n в метрике $L[a; b]$. Полученное противоречие показывает справедливость теоремы.

Пусть $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ — чебышевская система функций на отрезке $[a; b]$, $h_1(t) = 1$ на $[a; b]$, H_n — подпространство, базисом которого является данная система, m — целое неотрицательное число,

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\}$$

— чебышевский конус порядка s ($s \leq n$). Ясно, что $H \subset H_n$.

Пусть $f \in C[a; b]$, h_0 — э.н.в.п. для f в H и в H_n в метрике пространства $L[a; b]$.

Если точки $t_1, t_2, \dots, t_r$ ($a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq b, r < n$) — все нули разности $h_0 - f$, то из теоремы 11.1 следует существование неотрицательных чисел p_k , для которых равенство

$$\int_a^b h(t) dt = \sum_{k=1}^r p_k h(t_k)$$

верно для любого элемента $h \in H_n$ и следовательно для каждого $h \in H$. Поэтому справедливо

Следствие 11.1 Пусть $f \in C[a; b]$, h_0 — э.н.в.п. для f в H в метрике пространства $L[a; b]$, причем $H_n = H_{J(h_0)}$. Если точки $t_1, t_2, \dots, t_r$ ($a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq b, r < n$) — все нули разности $h_0 - f$, то существует квадратурная формула

$$\int_a^b h(t) dt \approx \sum_{k=1}^r p_k h(t_k)$$

с неотрицательными числами p_k точная на конусе H .

Доказательство. Так как расширенный конус $H_{J(h_0)} = H_n$, то h_0 есть э.н.в.п. для f в H_n в метрике пространства $L[a; b]$. Таким образом, следствие верно.

Следствие 11.2 Пусть m — целое неотрицательное число,

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\}$$

есть конус Хаара в $C[a; b]$, h_0 — э.н.в.п. функции $f \in C[a; b]$ при аппроксимации элементами конуса H в метрике $L[a; b]$, множество $J(h_0)$ содержит p элементов.

Если точки

$$t_1, t_2, \dots, t_r \ (a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq b, r < p)$$

— все нули разности $h_0 - f$, то существует квадратурная формула

$$\int_a^b h(t) dt \approx \sum_{k=1}^r p_k h(t_k)$$

с неотрицательными числами p_k точная на p — мерном подпространстве H_1 , базисом которого является чебышевская система функций $\{h_k : k \in J(h_0)\}$.

Доказательство может быть получено из теоремы 11.1 и следствия 6.1, так как h_0 — э.н.в.п. для f в H_1 в метрике пространства $L[a; b]$.

Пусть чебышевская система функций $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$ — базис n — мерного подпространства H_n в $C[a; b]$,

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\}$$

— чебышевский конус порядка s , m — целое неотрицательное число.

Установленная взаимосвязь между наилучшими односторонними приближениями и квадратурными формулами показывает, что некоторые непрерывные на отрезке функции порождают квадратурные формулы с неотрицательными коэффициентами, которые являются точными на чебышевском подпространстве.

Ясно, что каждая квадратурная формула с неотрицательными коэффициентами точная на чебышевском подпространстве H_n является точной и на конусе H . Отметим, что конус H воспроизводит подпространство H_n , т.е. $H_n = H - H$. Поэтому всякая квадратурная формула с неотрицательными коэффициентами точная на конусе H является точной и на чебышевском подпространстве H_n .

Действительно, пусть равенство

$$\int_a^b h(t) dt = \sum_{k=1}^r p_k h(t_k), \text{ где } p_k \geq 0,$$

верно для любого $h \in H$. Рассмотрим функцию $\varphi \in H_n$. В конусе H существуют элементы u_1, u_2 такие, что $\varphi = u_1 - u_2$. Следовательно

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(t) dt &= \int_a^b u_1(t) dt - \int_a^b u_2(t) dt = \\ &= \sum_{k=1}^r p_k u_1(t_k) - \sum_{k=1}^r p_k u_2(t_k) = \sum_{k=1}^r p_k (u_1(t_k) - u_2(t_k)) = \sum_{k=1}^r p_k \varphi(t_k). \end{aligned}$$

Таким образом, квадратурная формула является точной на чебышевском подпространстве H_n .

Покажем существование квадратурной формулы с неотрицательными коэффициентами точной на чебышевском подпространстве с наименьшим числом узлов $/8/$.

Теорема 11.2 Пусть $\{h_1, h_2, \dots, h_n\}, \{h_1, h_2, \dots, h_n, h_{n+1}\}$ — системы Чебышева на отрезке $[a; b]$. Тогда существуют точки

$$t_1, t_2, \dots, t_r \ (a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq b),$$

для которых $\sum_{k=1}^r \xi(t_k) = n$, и квадратурная формула

$$\int_a^b h(t) dt \approx \sum_{k=1}^r p_k h(t_k)$$

с неотрицательными числами p_k точная на подпространстве H_n .

Доказательство. Пусть $h_0 \in H_n$ есть э.н.в.п. функции h_{n+1} при аппроксимации элементами из H_n в метрике пространства $L[a; b]$. Разность $h_0 - h_{n+1}$ на отрезке $[a; b]$ имеет не более n нулей с учетом их четностей, т.к. система $\{h_1, h_2, \dots, h_n, h_{n+1}\}$ является чебышевской. Однако, в силу теоремы 9.1 функция $h_0 - h_{n+1}$ имеет не менее n нулей с учетом их четностей. Поэтому разность $h_0 - h_{n+1}$ имеет ровно n нулей с учетом их четностей.

Пусть точки

$$t_1, t_2, \dots, t_r \ (a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq b),$$

— нули функции $h_0 - h_{n+1}$, при этом $\sum_{k=1}^r \xi(t_k) = n$. Применяя теорему 11.1, получим требуемое. Теорема доказана.

Используя квадратурные формулы, точные на соответствующих множествах, можно получить оценки величины наилучшего одностороннего приближения.

Теорема 11.3 Пусть

$$H = \left\{ \sum_{k=1}^n \alpha_k h_k : \alpha_k \in R, \alpha_j \geq 0, j > m \right\}$$

— конус Чебышева некоторого порядка s , $h_1(t) = 1$ на $[a; b]$, m — целое неотрицательное число, квадратурная формула

$$\int_a^b h(t) dt \approx \sum_{k=1}^r p_k h(t_k)$$

с неотрицательными числами p_k точная на конусе H . Тогда для каждой функции $f \in C[a; b]$ верно неравенство

$$E^+(f, H) \geq \sum_{k=1}^r p_k f(t_k) - \int_a^b f(t) dt.$$

Доказательство. Для любого $h \in H$ из неравенства $h \geq f$ следует, что

$$\sum_{k=1}^r p_k h(t_k) \geq \sum_{k=1}^r p_k f(t_k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b (h(t) - f(t)) dt &= \int_a^b h(t) dt - \int_a^b f(t) dt = \\ &= \sum_{k=1}^r p_k h(t_k) - \int_a^b f(t) dt \geq \sum_{k=1}^r p_k f(t_k) - \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

Поэтому по определению нижней грани числового множества

$$E^+(f, H) \geq \sum_{k=1}^r p_k f(t_k) - \int_a^b f(t) dt$$

и теорема верна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волков В. И. *Об одном обобщении теоремы С. Н. Бернштейна* // Ученые записки. Калинин. 1969. т. 69. с. 32 - 38.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы. Общая теория*. М.: ИЛ, 1964. 896 с.
3. Даугавет И. К. *Введение в теорию приближения функций*. Л.: ЛГУ, 1977. 184 с.
4. Дрожжин И. А. *Наилучшие приближения суммируемых функций элементами замкнутого выпуклого множества с ограничениями* // Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь. 2014. с. 55 - 62.
5. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Наука, 1968. 496 с.
6. Карлин С., Стаден В. *Чебышевские системы и их применения в анализе и статистике*. М.: Наука, 1976. 568 с.
7. Корнейчук Н. П. *Экстремальные задачи теории приближений*. М.: Наука, 1976. 320 с.
8. Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г. *Аппроксимация с ограничениями*. Киев: Наукова думка, 1982. 250 с.
9. Крейн М. Г., Нудельман А. А. *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи*. М.: Наука, 1973. 551 с.
10. Peisker P. *An Alternant Criterion for Haar Cones* // Approxim. theory. 1983. v. 37, n 3. p. 262 - 268.

И. А. ДРОЖЖИН

**АППРОКСИМАЦИЯ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ**

Монография

Подписано в печать 17.11.2014. Формат 60x84 1/16.

Усл. печ. л. 5,5. Тираж 10 экз. Заказ № 477.

Тверской государственный университет

Редакционно-издательское управление

Адрес: 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.

Тел. РИУ: (4822) 35-60-63