

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В.А. ИЛЬИН, Э.Г. ПОЗНЯК



КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Под редакцией
А.Н. ТИХОНОВА, В.А. ИЛЬИНА,
А.Г. СВЕШНИКОВА

ВЫПУСК 3



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

В.А. ИЛЬИН, Э.Г. ПОЗНЯК

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ИЗДАНИЕ СЕДЬМОЕ, СТЕРЕОТИПНОЕ

*Рекомендовано Министерством образования
Российской Федерации в качестве учебника
для студентов физических специальностей
и специальности "Прикладная математика"*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

Тверской государственный университет



Научная библиотека 00320629

93

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов серии	9
Предисловие	10
Введение	11
Глава 1. Системы координат. Простейшие задачи аналитической геометрии	13
§ 1. Декартовы координаты на прямой	13
1. Направленные отрезки на оси (13). 2. Линейные операции над направленными отрезками. Основное тождество (14). 3. Декартовы координаты на прямой (15).	
§ 2. Декартовы координаты на плоскости и в пространстве	16
1. Декартовы координаты на плоскости (16). 2. Декартовы координаты в пространстве (16).	
§ 3. Простейшие задачи аналитической геометрии	17
1. Понятие направленного отрезка в пространстве. Проекция направленного отрезка на ось (17). 2. Расстояние между двумя точками (18). 3. Деление отрезка в данном отношении (19). 4. Бариецентрические координаты (21).	
§ 4. Полярные, цилиндрические и сферические координаты	22
1. Полярные координаты (22). 2. Цилиндрические координаты (23). 3. Сферические координаты (24).	
Дополнение к главе 1. Определители второго и третьего порядков	24
1. Понятие матрицы и определителя второго порядка (24). 2. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными (25). 3. Определители третьего порядка (28). 4. Свойства определителей (29). 5. Алгебраические дополнения и миноры (31). 6. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными с определителем, отличным от нуля (34). 7. Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными (36). 8. Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными (38). 9. Неоднородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными с определителем, равным нулю (39).	
Глава 2. Векторная алгебра	42
§ 1. Понятие вектора и линейные операции над векторами	42
1. Понятие вектора (42). 2. Линейные операции над векторами (43). 3. Понятие линейной зависимости векторов (48). 4. Линейные комбинации двух векторов (49). 5. Линейные комбинации трех векторов (50). 6. Линейная зависимость четырех векторов (52). 7. Понятие базиса. Аффинные координаты (53). 8. Проекция вектора на ось и ее свойства (55). 9. Декартова прямоугольная система координат как частный случай аффинной системы координат (57).	
§ 2. Скалярное произведение двух векторов	59
1. Определение скалярного произведения (59). 2. Геометрические свойства скалярного произведения (60). 3. Алгебраические свойства скалярного произведения (61). 4. Выражение скалярного произведения в декартовых координатах (62).	
§ 3. Векторное и смешанное произведения векторов	63
1. Правые и левые тройки векторов и системы координат (63). 2. Определение векторного произведения двух векторов (64). 3. Геометрические свойства векторного произведения (65). 4. Смешанное произведение трех векторов (67). 5. Алгебраические свойства векторного произведения (68). 6. Выражение векторного произведения в декартовых координатах (72). 7. Выражение смешанного произведения в декартовых координатах (73). 8. Двойное векторное произведение (74).	

Глава 3. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости и в пространстве	76
§ 1. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости	76
§ 2. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве	79
1. Общие формулы преобразования (79). 2. Выяснение геометрического смысла. Углы Эйлера (81).	
§ 3. Линейные преобразования	83
1. Понятие линейных преобразований плоскости (83). 2. Аффинные преобразования плоскости (84). 3. Основное свойство аффинных преобразований плоскости (86). 4. Основной инвариант аффинного преобразования плоскости (88). 5. Аффинные преобразования пространства (89). 6. Ортогональные преобразования (90).	
§ 4. Проективные преобразования	92
Глава 4. Уравнение линии на плоскости. Уравнения поверхности и линии в пространстве	95
§ 1. Уравнение линии на плоскости	95
1. Понятие об уравнении линии (95). 2. Параметрическое представление линии (96). 3. Уравнение линии в различных системах координат (98). 4. Два типа задач, связанных с аналитическим представлением линии (100). 5. Классификация плоских линий (100). 6. О пересечении двух линий (102).	
§ 2. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве	102
1. Понятие об уравнении поверхности (102). 2. Уравнения линии в пространстве (104). 3. Цилиндрические и конические поверхности (104). 4. Параметрические уравнения линии и поверхности в пространстве (107). 5. Классификация поверхностей (108). 6. О пересечении поверхностей и линий в пространстве (109). 7. Заключительные замечания (110).	
Глава 5. Линейные образы	111
§ 1. Различные виды уравнения прямой на плоскости	111
1. Общее уравнение прямой (111). 2. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках (113). 3. Каноническое уравнение прямой (114). 4. Параметрические уравнения прямой (115). 5. Прямая с угловым коэффициентом (115). 6. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (116). 7. Нормированное уравнение прямой. Отклонение точки от прямой (118). 8. Уравнение пучка прямых (121).	
§ 2. Некоторые задачи на прямую линию на плоскости	123
1. Нахождение прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1)$ и составляющей заданный угол φ с данной прямой $y = k_1x + b_1$ (123). 2. Нахождение биссектрис углов, образованных данными прямыми (124). 3. Условия, при которых данная прямая пересекает данный отрезок AB (124). 4. Определение местоположения данной точки M и начала координат O относительно углов, образованных двумя данными прямыми (124). 5. Условие пересечения трех прямых в одной точке (125). 6. Нахождение прямой, проходящей через точку пересечения двух данных прямых и удовлетворяющей еще одному условию (126).	
§ 3. Различные виды уравнения плоскости	127
1. Общее уравнение плоскости (127). 2. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках (129). 3. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей (130). 4. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой (131). 5. Нормированное уравнение плоскости. Отклонение точки от плоскости (132). 6. Пучки и связки плоскостей (134).	
§ 4. Прямая линия в пространстве	135
1. Канонические уравнения прямой в пространстве (135). 2. Уравнения прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (137). 3. Параметри-	

	ческие уравнения прямой в пространстве (137). 4. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых (137). 5. Условие принадлежности двух прямых к одной плоскости (138). 6. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости (138). 7. Условия принадлежности прямой $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (139). 8. Связка прямых (139).	
§ 5.	Некоторые задачи на прямую и плоскость в пространстве	140
	1. Условие пересечения трех плоскостей в одной и только в одной точке (140). 2. Нахождение биссектральных плоскостей двугранного угла, образованного двумя данными плоскостями (140). 3. Условия, при которых данная плоскость пересекает данный отрезок AB (141). 4. Определение местоположения двух данных точек A и B относительно двугранных углов, образованных данными плоскостями (141). 5. Уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной данной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ (141). 6. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной заданной плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ (141). 7. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной заданной прямой $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ (141). 8. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую $\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ и через заданную не лежащую на этой прямой точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ (142). 9. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$ и параллельной другой данной прямой $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$ (142). 10. Уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую L_1 и перпендикулярной заданной плоскости π (143). 11. Уравнения перпендикуляра, опущенного из заданной точки M_0 на данную прямую L_1 (143). 12. Нахождение расстояния от данной точки M_0 до данной прямой L_1 (143). 13. Нахождение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым L_1 и L_2 (143). 14. Нахождение кратчайшего расстояния между двумя данными скрещивающимися прямыми L_1 и L_2 (143).	
Глава	6. Линии второго порядка	144
§ 1.	Канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы	144
	1. Эллипс (144). 2. Гипербола (147). 3. Парабола (148).	
§ 2.	Исследование формы эллипса, гиперболы и параболы по их каноническим уравнениям	149
	1. Исследование формы эллипса (150). 2. Исследование формы гиперболы (151). 3. Исследование формы параболы (155).	
§ 3.	Директрисы эллипса, гиперболы и параболы	155
	1. Эксцентриситет эллипса и гиперболы (156). 2. Директрисы эллипса и гиперболы (157). 3. Определение эллипса и гиперболы, основанное на их свойстве по отношению к директрисам (161). 4. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения (164). 5. Полярные уравнения эллипса, гиперболы и параболы (165).	
§ 4.	Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе	167
	1. Уравнения касательных к эллипсу, гиперболе и параболе (167). 2. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы (168).	
§ 5.	Кривые второго порядка	169
	1. Преобразование коэффициентов уравнения линии второго порядка при переходе к новой декартовой системе координат (170). 2. Инварианты уравнения линии второго порядка. Понятие типа линии второго порядка (172). 3. Центр линии второго порядка (175). 4. Стандартное упрощение любого уравнения линии второго порядка путем поворота осей (176). 5. Упрощение уравнения центральной линии второго порядка ($I_2 \neq 0$). Классификация центральных линий (177). 6. Упрощение уравнения линии параболического типа ($I_2 = 0$). Классификация линий параболического типа (180). 7. Распадающиеся кривые второго порядка (183).	

Глава 7. Поверхности второго порядка	184
§ 1. Понятие поверхности второго порядка	184
1. Преобразование коэффициентов уравнения поверхности второго порядка при переходе к новой декартовой системе координат (185). 2. Инварианты уравнения поверхности второго порядка (186). 3. Центр поверхности второго порядка (187). 4. Стандартное упрощение любого уравнения поверхности второго порядка путем поворота осей (187).	
§ 2. Классификация поверхностей второго порядка	189
1. Классификация центральных поверхностей (189). 2. Классификация нецентральных поверхностей второго порядка (192).	
§ 3. Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям	194
1. Эллипсоид (194). 2. Гиперболоиды (196). 3. Параболоиды (198). 4. Конус и цилиндры второго порядка (200). 5. Прямолинейные образующие поверхностей второго порядка (202).	
Приложение. Проблемы оснований геометрии и обоснования метода координат	205
§ 1. Аксиомы элементарной геометрии	205
1. Аксиомы принадлежности (205). 2. Аксиомы порядка (207). 3. Аксиомы конгруэнтности (209). 4. Аксиомы непрерывности (211). 5. Обоснование метода координат (211). 6. Аксиома параллельности (216).	
§ 2. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Евклида	217
§ 3. Схема доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского	220
§ 4. Заключительные замечания о проблемах аксиоматики	222