

**УЧЕБНИК
ДЛЯ ВУЗОВ**

ПИТЕР®

Ф. А. НОВИКОВ



ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

3-е издание



Ф. А. Новиков

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

3-е издание

Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки дипломированных
специалистов «Информатика и вычислительная техника»

ПИТЕР®

Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск

2009

Тверской государственный университет



Научная библиотека 00320613

93

Содержание

Предисловие к третьему изданию	12
Предисловие ко второму изданию	13
Вступительное слово к первому изданию	14
Введение	15
Глава 1. Множества и отношения	23
1.1. Множества	23
1.1.1. Элементы и множества	25
1.1.2. Задание множеств	26
1.1.3. Парадокс Рассела	27
1.1.4. Мультимножества	28
1.2. Алгебра подмножеств	28
1.2.1. Сравнение множеств	29
1.2.2. Равномощные множества	31
1.2.3. Конечные и бесконечные множества	32
1.2.4. Добавление и удаление элементов	32
1.2.5. Мощность конечного множества	34
1.2.6. Операции над множествами	35
1.2.7. Разбиения и покрытия	36
1.2.8. Булеан	37
1.2.9. Свойства операций над множествами	38
1.3. Представление множеств в программах	38
1.3.1. Битовые шкалы	39
1.3.2. Генерация всех подмножеств универсума	40
1.3.3. Алгоритм построения бинарного кода Грея	41
1.3.4. Представление множеств упорядоченными списками	42
1.3.5. Проверка включения слиянием	43
1.3.6. Вычисление объединения слиянием	44
1.3.7. Вычисление пересечения слиянием	45
1.3.8. Представление множеств итераторами	48
1.4. Отношения	48
1.4.1. Упорядоченные пары и наборы	49
1.4.2. Прямое произведение множеств	50
1.4.3. Бинарные отношения	52
1.4.4. Композиция отношений	53
1.4.5. Степень отношения	53
1.4.6. Свойства отношений	53

1.4.7. Ядро отношения	55
1.4.8. Представление отношений в программах	56
1.5. Замыкание отношений	57
1.5.1. Транзитивное и рефлексивное замыкание	57
1.5.2. Алгоритм Уоршалла	58
1.6. Функции	59
1.6.1. Функциональные отношения	59
1.6.2. Инъекция, сюръекция и биекция	61
1.6.3. Образы и прообразы	62
1.6.4. Суперпозиция функций	63
1.6.5. Представление функций в программах	63
1.7. Отношения эквивалентности	64
1.7.1. Классы эквивалентности	64
1.7.2. Фактормножества	66
1.7.3. Ядро функционального отношения и множества уровня	66
1.8. Отношения порядка	67
1.8.1. Определения	67
1.8.2. Минимальные элементы	68
1.8.3. Алгоритм топологической сортировки	69
1.8.4. Верхние и нижние границы	70
1.8.5. Монотонные функции	70
1.8.6. Вполне упорядоченные множества	71
1.8.7. Индукция	72
1.8.8. Алфавит, слово и язык	73
Комментарии	73
Упражнения	74
Глава 2. Алгебраические структуры	75
2.1. Алгебры и морфизмы	75
2.1.1. Операции и их носитель	75
2.1.2. Замыкания и подалгебры	76
2.1.3. Система образующих	77
2.1.4. Свойства операций	78
2.1.5. Гомоморфизмы	79
2.1.6. Изоморфизмы	80
2.2. Алгебры с одной операцией	81
2.2.1. Полугруппы	81
2.2.2. Определяющие соотношения	82
2.2.3. Моноиды	84
2.2.4. Группы	85
2.2.5. Группа перестановок	87
2.3. Алгебры с двумя операциями	88
2.3.1. Кольца	88
2.3.2. Области целостности	89
2.3.3. Поля	90
2.4. Векторные пространства и модули	91
2.4.1. Векторное пространство	91
2.4.2. Линейные комбинации	93
2.4.3. Базис и размерность	94
2.4.4. Модули	95
2.5. Решётки	96
2.5.1. Определения	96
2.5.2. Ограниченные решётки	97

2.5.3. Решётка с дополнением	97
2.5.4. Частичный порядок в решётке	98
2.5.5. Булевы алгебры	99
2.6. Матроиды и жадные алгоритмы	100
2.6.1. Матроиды	100
2.6.2. Максимальные независимые подмножества	101
2.6.3. Базисы	101
2.6.4. Жадный алгоритм	102
2.6.5. Примеры матроидов	105
Комментарии	105
Упражнения	106
Глава 3. Булевы функции	107
3.1. Элементарные булевы функции	107
3.1.1. Функции алгебры логики	107
3.1.2. Существенные и несущественные переменные	109
3.1.3. Булевы функции одной переменной	110
3.1.4. Булевы функции двух переменных	110
3.2. Формулы	111
3.2.1. Реализация функций формулами	111
3.2.2. Равносильные формулы	114
3.2.3. Подстановка и замена	115
3.2.4. Алгебра булевых функций	116
3.3. Двойственность	118
3.3.1. Двойственная функция	118
3.3.2. Реализация двойственной функции	118
3.3.3. Принцип двойственности	119
3.4. Нормальные формы	120
3.4.1. Разложение булевых функций по переменным	120
3.4.2. Совершенные нормальные формы	121
3.4.3. Эквивалентные преобразования	123
3.4.4. Минимальные дизъюнктивные формы	124
3.4.5. Геометрическая интерпретация	125
3.4.6. Сокращённые дизъюнктивные формы	126
3.5. Полнота	128
3.5.1. Замкнутые классы	128
3.5.2. Полные системы функций	130
3.5.3. Полнота двойственной системы	131
3.5.4. Теорема Поста	131
3.6. Представление булевых функций в программах	133
3.6.1. Табличные представления	133
3.6.2. Строковые представления	135
3.6.3. Алгоритм вычисления значения булевой функции	136
3.6.4. Деревья решений	137
Комментарии	140
Упражнения	140
Глава 4. Логические исчисления	142
4.1. Логические связи	143
4.1.1. Высказывания	143
4.1.2. Формулы	144
4.1.3. Интерпретация	144
4.1.4. Логическое следование и логическая эквивалентность	145

4.1.5. Подстановка и замена	147
4.2. Формальные теории	147
4.2.1. Определение формальной теории	147
4.2.2. Выводимость	148
4.2.3. Интерпретация	149
4.2.4. Общезначимость и непротиворечивость	149
4.2.5. Полнота, независимость и разрешимость	150
4.3. Исчисление высказываний	150
4.3.1. Классическое определение исчисления высказываний	150
4.3.2. Частный случай формулы	151
4.3.3. Алгоритм унификации	152
4.3.4. Конструктивное определение исчисления высказываний	153
4.3.5. Производные правила вывода	153
4.3.6. Дедукция	154
4.3.7. Некоторые теоремы исчисления высказываний	156
4.3.8. Множество теорем исчисления высказываний	159
4.3.9. Другие аксиоматизации исчисления высказываний	160
4.4. Исчисление предикатов	161
4.4.1. Определения	161
4.4.2. Интерпретация	163
4.4.3. Общезначимость	164
4.4.4. Непротиворечивость и полнота чистого исчисления предикатов	165
4.4.5. Логическое следование и логическая эквивалентность	166
4.4.6. Теория равенства	167
4.4.7. Формальная арифметика	168
4.4.8. Неаксиоматизируемые теории	168
4.4.9. Теоремы Гёделя о неполноте	170
4.5. Автоматическое доказательство теорем	171
4.5.1. Постановка задачи	171
4.5.2. Доказательство от противного	172
4.5.3. Сведение к предложениям	173
4.5.4. Правило резолюции для исчисления высказываний	174
4.5.5. Правило резолюции для исчисления предикатов	175
4.5.6. Опровержение методом резолюций	175
4.5.7. Алгоритм метода резолюций	176
Комментарии	177
Упражнения	178
Глава 5. Комбинаторика	179
5.1. Комбинаторные задачи	180
5.1.1. Комбинаторные конфигурации	180
5.1.2. Размещения	180
5.1.3. Размещения без повторений	181
5.1.4. Перестановки	182
5.1.5. Сочетания	182
5.1.6. Сочетания с повторениями	183
5.2. Перестановки	184
5.2.1. Графическое представление перестановок	184
5.2.2. Инверсии	185
5.2.3. Генерация перестановок	186
5.2.4. Двойные факториалы	188
5.3. Биномиальные коэффициенты	188
5.3.1. Элементарные тождества	188

5.3.2. Бином Ньютона	189
5.3.3. Свойства биномиальных коэффициентов	190
5.3.4. Треугольник Паскаля	191
5.3.5. Генерация подмножеств	192
5.3.6. Мультимножества и последовательности	193
5.3.7. Мультиномиальные коэффициенты	194
5.4. Разбиения	195
5.4.1. Определения	195
5.4.2. Числа Стирлинга второго рода	196
5.4.3. Числа Стирлинга первого рода	197
5.4.4. Число Белла	197
5.5. Включения и исключения	197
5.5.1. Объединение конфигураций	198
5.5.2. Формула включений и исключений	198
5.5.3. Число булевых функций, существенно зависящих от всех своих переменных	200
5.6. Формулы обращения	200
5.6.1. Теорема обращения	200
5.6.2. Формулы обращения для биномиальных коэффициентов	201
5.6.3. Формулы для чисел Стирлинга	202
5.7. Производящие функции	203
5.7.1. Основная идея	203
5.7.2. Метод неопределённых коэффициентов	203
5.7.3. Числа Фибоначчи	204
5.7.4. Числа Каталана	205
Комментарии	207
Упражнения	207
Глава 6. Кодирование	208
6.1. Алфавитное кодирование	210
6.1.1. Таблица кодов	210
6.1.2. Разделимые схемы	210
6.1.3. Префиксные схемы	211
6.1.4. Неравенство Макмиллана	211
6.2. Кодирование с минимальной избыточностью	214
6.2.1. Минимизация длины кода сообщения	214
6.2.2. Цена кодирования	215
6.2.3. Алгоритм Фано	216
6.2.4. Оптимальное кодирование	217
6.2.5. Алгоритм Хаффмена	219
6.3. Помехоустойчивое кодирование	221
6.3.1. Кодирование с исправлением ошибок	221
6.3.2. Возможность исправления всех ошибок	223
6.3.3. Кодовое расстояние	224
6.3.4. Код Хэмминга для исправления одного замещения	225
6.4. Сжатие данных	227
6.4.1. Сжатие текстов	227
6.4.2. Предварительное построение словаря	228
6.4.3. Алгоритм Лемпела–Зива	229
6.5. Шифрование	231
6.5.1. Криптография	231
6.5.2. Шифрование с помощью случайных чисел	232
6.5.3. Криптостойкость	233
6.5.4. Модулярная арифметика	233

6.5.5. Шифрование с открытым ключом	235
6.5.6. Цифровая подпись	237
Комментарии	238
Упражнения	238
Глава 7. Графы	240
7.1. Определения графов	240
7.1.1. История теории графов	240
7.1.2. Основное определение	242
7.1.3. Смежность	243
7.1.4. Диаграммы	243
7.1.5. Орграфы, псевдографы, мультиграфы и гиперграфы	244
7.1.6. Изоморфизм графов	244
7.2. Элементы графов	246
7.2.1. Подграфы	246
7.2.2. Валентность	246
7.2.3. Маршруты, цепи, циклы	247
7.2.4. Связность	249
7.2.5. Расстояние между вершинами, ярусы и диаметр графа	249
7.2.6. Эксцентриситет и центр	249
7.3. Виды графов и операции над графами	250
7.3.1. Виды графов	250
7.3.2. Двудольные графы	250
7.3.3. Направленные орграфы и сети	252
7.3.4. Операции над графами	252
7.4. Представление графов в программах	255
7.4.1. Требования к представлению графов	255
7.4.2. Матрица смежности	255
7.4.3. Матрица инциденций	256
7.4.4. Списки смежности	257
7.4.5. Массив дуг	257
7.4.6. Обходы графов	258
7.5. Орграфы и бинарные отношения	260
7.5.1. Графы и отношения	260
7.5.2. Достижимость и частичное упорядочение	261
7.5.3. Транзитивное замыкание	262
Комментарии	263
Упражнения	263
Глава 8. Связность	265
8.1. Компоненты связности	265
8.1.1. Объединение графов и компоненты связности	265
8.1.2. Точки сочленения, мосты и блоки	266
8.1.3. Вершинная и реберная связность	267
8.1.4. Оценка числа ребер	268
8.2. Теорема Менгера	269
8.2.1. Непересекающиеся цепи и разделяющие множества	270
8.2.2. Теорема Менгера в «вершинной форме»	271
8.2.3. Варианты теоремы Менгера	273
8.3. Теорема Холла	273
8.3.1. Задача о свадьбах	273
8.3.2. Трансверсаль	273
8.3.3. Совершенное паросочетание	274

8.3.4. Теорема Холла — формулировка и доказательство	274
8.4. Потоки в сетях	275
8.4.1. Определение потока	276
8.4.2. Разрезы	277
8.4.3. Теорема Форда–Фалкерсона	277
8.4.4. Алгоритм нахождения максимального потока	279
8.4.5. Связь между теоремой Менгера и теоремой Форда–Фалкерсона	281
8.5. Связность в орграфах	281
8.5.1. Сильная, односторонняя и слабая связность	282
8.5.2. Компоненты сильной связности	282
8.5.3. Выделение компонент сильной связности	283
8.6. Кратчайшие пути	284
8.6.1. Длина дуг	284
8.6.2. Алгоритм Флойда	285
8.6.3. Алгоритм Дейкстры	286
8.6.4. Дерево кратчайших путей	288
8.6.5. Кратчайшие пути в бесконтурном орграфе	289
Комментарии	291
Упражнения	291
Глава 9. Деревья	292
9.1. Свободные деревья	292
9.1.1. Определения	292
9.1.2. Основные свойства деревьев	293
9.1.3. Центр дерева	297
9.2. Ориентированные, упорядоченные и бинарные деревья	297
9.2.1. Ориентированные деревья	297
9.2.2. Эквивалентное определение ордерова	299
9.2.3. Упорядоченные деревья	300
9.2.4. Бинарные деревья	302
9.3. Представление деревьев в программах	303
9.3.1. Представление свободных деревьев	303
9.3.2. Представление упорядоченных ориентированных деревьев	305
9.3.3. Число упорядоченных ориентированных деревьев	307
9.3.4. Проверка правильности скобочной структуры	308
9.3.5. Представление бинарных деревьев	309
9.3.6. Обходы бинарных деревьев	312
9.3.7. Алгоритм симметричного обхода бинарного дерева	313
9.4. Деревья сортировки	313
9.4.1. Ассоциативная память	314
9.4.2. Способы реализации ассоциативной памяти	314
9.4.3. Алгоритм бинарного (двоичного) поиска	315
9.4.4. Алгоритм поиска в дереве сортировки	316
9.4.5. Алгоритм вставки в дерево сортировки	317
9.4.6. Алгоритм удаления из дерева сортировки	318
9.4.7. Вспомогательные алгоритмы для дерева сортировки	320
9.4.8. Сравнение представлений ассоциативной памяти	321
9.4.9. Выровненные и полные деревья	322
9.4.10. Сбалансированные деревья	323
9.4.11. Балансировка деревьев	325
9.5. Кратчайший остов	327
9.5.1. Определения	327
9.5.2. Схема алгоритма построения кратчайшего остова	328

9.5.3. Алгоритм Краскала	329
9.5.4. Алгоритм Прима	330
Комментарии	331
Упражнения	332
Глава 10. Циклы, независимость и раскраска	333
10.1. Фундаментальные циклы и разрезы	333
10.1.1. Циклы и разрезы	333
10.1.2. Фундаментальная система циклов и циклический ранг	335
10.1.3. Фундаментальная система разрезов и коциклический ранг	337
10.1.4. Подпространства циклов и коциклов	338
10.2. Эйлеровы циклы	340
10.2.1. Эйлеровы графы	340
10.2.2. Алгоритм построения эйлерова цикла в эйлеровом графе	341
10.2.3. Оценка числа эйлеровых графов	342
10.3. Гамильтоновы циклы	343
10.3.1. Гамильтоновы графы	343
10.3.2. Задача коммивояжёра	344
10.4. Независимые и покрывающие множества	345
10.4.1. Покрывающие множества вершин и рёбер	345
10.4.2. Независимые множества вершин и рёбер	346
10.4.3. Связь чисел независимости и покрытий	347
10.5. Построение независимых множеств вершин	348
10.5.1. Постановка задачи отыскания наибольшего независимого множества вершин	348
10.5.2. Поиск с возвратами	349
10.5.3. Улучшенный перебор	350
10.5.4. Алгоритм построения максимальных независимых множеств вершин	352
10.6. Доминирующие множества	353
10.6.1. Минимальное и наименьшее доминирующее множество	353
10.6.2. Доминирование и независимость	353
10.6.3. Задача о наименьшем покрытии	354
10.6.4. Связь задачи о наименьшем покрытии с другими задачами	355
10.7. Раскраска графов	355
10.7.1. Оценки хроматического числа	356
10.7.2. Хроматические числа графа и его дополнения	357
10.7.3. Точный алгоритм раскрашивания	358
10.7.4. Приближённый алгоритм последовательного раскрашивания	359
10.7.5. Улучшенный алгоритм последовательного раскрашивания	360
10.8. Планарность	361
10.8.1. Укладка графов	361
10.8.2. Эйлерова характеристика	361
10.8.3. Теорема о пяти красках	363
Комментарии	364
Упражнения	364
Указатель основных обозначений	365
Список литературы	368
Предметный указатель	370