

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
КЛАССИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК



В.А. Ильин, А.В. Куркина

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

3-е издание



В.А. Ильин, А.В. Куркина

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

**3-е издание,
переработанное и дополненное**

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям
521600 «Экономика», 521500 «Менеджмент», 522200 «Статистика»,
521000 «Психология», 521200 «Социология», 510600 «Биология»,
510800 «География», 510500 «Химия», 511000 «Геология», 510700 «Почвоведение»*

**Учебник удостоен
премии Президента Российской Федерации
в области образования**



Издательство Проспект
Издательство Московского университета
2010

Тверской государственный университет



Научная библиотека 00324131

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Вещественные числа. Множества вещественных чисел.	5
§ 1. Вещественные числа	5
1.1. Рациональные числа и их основные свойства (5). 1.2. Вещественные числа и правило их сравнения (7). 1.3. Множества вещественных чисел, ограниченные сверху или снизу (11). 1.4. Приближение вещественного числа рациональными числами (16). 1.5. Операции сложения и умножения и свойства вещественных чисел (17). 1.6. Некоторые часто используемые соотношения (23)	
§ 2. Некоторые конкретные множества вещественных чисел	24
§ 3. Элементы комбинаторики. Формула бинома Ньютона	25
Глава 2. Системы координат и их простейшие применения	29
§ 1. Декартовы координаты на прямой	29
1.1. Направленные отрезки на оси (29). 1.2. Линейные операции над направленными отрезками (29). 1.3. Декартовы координаты на прямой (31)	
§ 2. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве	32
2.1. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости (32). 2.2. Декартовы прямоугольные координаты в пространстве (33)	
§ 3. Простейшие задачи аналитической геометрии	34
3.1. Понятие направленного отрезка в пространстве и его проекции на ось (34). 3.2. Расстояние между двумя точками (35). 3.3. Деление отрезка в данном отношении (35)	
§ 4. Полярные, цилиндрические и сферические координаты	37
4.1. Полярные координаты (37). 4.2. Цилиндрические координаты (38). 4.3. Сферические координаты (39)	
§ 5. Краткие сведения о комплексных числах	40
Глава 3. Определители и системы линейных уравнений	47
§ 1. Определители второго и третьего порядков и их свойства	47
1.1. Понятие матрицы и определителя второго порядка (47). 1.2. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными (48). 1.3. Определители третьего порядка (50). 1.4. Свойства определителей (51). 1.5. Алгебраические дополнения и миноры (53)	
§ 2. Системы линейных уравнений с тремя неизвестными	56
2.1. Системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными с определителем, отличным от нуля (56). 2.2. Однородная система двух линейных уравнений с тремя неизвестными (59). 2.3. Однородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными (61). 2.4. Неоднородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными с определителем, равным нулю (62)	
§ 3. Понятие об определителях любого порядка и о линейных системах с любым числом неизвестных	64
§ 4. Отыскание решения линейной системы методом Гаусса	66
Глава 4. Векторная алгебра	69
§ 1. Понятие вектора и линейные операции над векторами	69
1.1. Понятие вектора (69). 1.2. Линейные операции над векторами (70). 1.3. Проекция вектора на ось и ее свойства (75). 1.4. Декартовы прямоугольные координаты вектора (77)	
§ 2. Скалярное произведение двух векторов	79
2.1. Определение скалярного произведения (79). 2.2. Свойства скалярного произведения (80). 2.3. Выражение скалярного произведения в координатах (82)	

§ 3. Векторное и смешанное произведения векторов	83
3.1. Правые и левые тройки векторов (83). 3.2. Определения и свойства векторного и смешанного произведений (85). 3.3. Выражение векторного и смешанного произведений в координатах (89). 3.4. Двойное векторное произведение трех ненулевых векторов (90)	
Глава 5. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости и в пространстве.	91
§ 1. Преобразование декартовых прямоугольных координат на плоскости.	91
§ 2. Преобразование декартовых прямоугольных координат в пространстве.	93
Глава 6. Основы аналитической геометрии.	98
§ 1. Уравнение линии на плоскости	98
1.1. Понятие об уравнении линии (98). 1.2. Алгебраические линии на плоскости (100). 1.3. О пересечении двух линий (102)	
§ 2. Уравнение поверхности и уравнения линии в пространстве.	102
2.1. Понятие об уравнении поверхности (102). 2.2. Алгебраические поверхности в пространстве (104). 2.3. Уравнения линии в пространстве (105). 2.4. Параметрические уравнения линии и поверхности в пространстве (106)	
§ 3. Прямая линия на плоскости	107
3.1. Общее уравнение прямой (107). 3.2. Неполные уравнения прямой. Уравнение прямой в отрезках (108). 3.3. Каноническое уравнение прямой и уравнение прямой, проходящей через две данные точки (110). 3.4. Параметрические уравнения прямой (110). 3.5. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (111). 3.6. Условия пересечения, коллинеарности и ортогональности двух прямых. Угол между двумя пересекающимися прямыми (113). 3.7. Нормированное уравнение прямой. Расстояние от точки до прямой (117)	
§ 4. Плоскость и прямая в пространстве	118
4.1. Общее уравнение плоскости (118). 4.2. Неполные уравнения плоскости. Уравнение плоскости в отрезках (120). 4.3. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве (121). 4.4. Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки, не лежащие на одной прямой (123). 4.5. Нормированное уравнение плоскости. Расстояние точки от плоскости (123). 4.6. Канонические уравнения прямой линии в пространстве (125). 4.7. Параметрические уравнения прямой в пространстве (126). 4.8. Взаимное расположение двух прямых линий в пространстве (126). 4.9. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве (128)	
§ 5. Линии второго порядка на плоскости	129
5.1. Стандартное упрощение уравнения линии второго порядка на плоскости (129). 5.2. Центральные линии второго порядка (131). 5.3. Фокальные свойства эллипса и гиперболы (134). 5.4. Асимптоты гиперболы. Равнобочная гипербола как график обратной пропорциональности (135). 5.5. Нецентральные линии второго порядка (137). 5.6. График квадратного трехчлена (139)	
§ 6. Поверхности второго порядка в пространстве	140
Глава 7. Предел последовательности	146
§ 1. Понятия последовательности и ее предела	146
1.1. Понятия последовательности и арифметических операций над последовательностями (146). 1.2. Ограниченные, неограниченные, бесконечно большие и бесконечно малые последовательности (147). 1.3. Основные свойства бесконечно малых последовательностей (151). 1.4. Сходящиеся последовательности и их свойства (154)	
§ 2. Монотонные последовательности	159
2.1. Понятие монотонной последовательности (159). 2.2. Теорема о сходимости монотонной ограниченной последовательности (160). 2.3. Число e (161)	

§ 3. Предельные точки последовательности и множества	163
3.1. Предельные точки последовательности (163). 3.2. Предельные точки множества (165)	
§ 4. Верхний и нижний пределы последовательности	166
§ 5. Критерий Коши сходимости последовательности	169
Глава 8. Функция и ее предел	172
§ 1. Понятия переменной величины и функции	172
§ 2. Предел функции по Гейне и по Коши	174
§ 3. Критерий Коши существования предела функции	181
§ 4. Арифметические операции над функциями, имеющими предел.	183
§ 5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	185
Глава 9. Непрерывность функции	188
§ 1. Основные определения	188
§ 2. Локальные свойства непрерывных функций	190
§ 3. Прохождение функции, непрерывной на сегменте, через любое промежуточное значение	193
§ 4. Свойства монотонных функций	195
4.1. Понятия монотонной и строго монотонной функций (195). 4.2. Понятие обратной функции (196). 4.3. Условие существования обратной функции для строго монотонной функции (196). 4.4. Существование односторонних пределов у любой нестрого монотонной функции (197). 4.5. Необходимое и достаточное условие непрерывности на сегменте строго монотонной функции (198). 4.6. Условие существования для данной функции строго монотонной и непрерывной обратной функции (199)	
§ 5. Сложная функция и ее непрерывность	200
§ 6. Простейшие элементарные функции	201
6.1. Рациональные степени положительных вещественных чисел (201). 6.2. Показательная функция (203). 6.3. Логарифмическая функция (206). 6.4. Степенная функция с любым вещественным показателем (207). 6.5. Тригонометрические функции (208). 6.6. Обратные тригонометрические функции (213). 6.7. Гиперболические функции (214). 6.8. Класс элементарных функций (214)	
§ 7. Первый и второй замечательные пределы	215
7.1. Функциональный аналог теоремы 9 из главы 7 (215). 7.2. Первый замечательный предел (215). 7.3. Второй замечательный предел (216)	
§ 8. Классификация точек разрыва функции	219
§ 9. Три глобальных свойства непрерывных на сегменте функций.	221
9.1. Первая теорема Вейерштрасса (221). 9.2. Вторая теорема Вейерштрасса (222). 9.3. Теорема Кантора о равномерной непрерывности (223)	
Глава 10. Основы дифференциального исчисления	226
§ 1. Производная. Ее физическая и геометрическая интерпретации	226
1.1. Приращение аргумента и функции. Разностная форма условия непрерывности (226). 1.2. Определение производной (226). 1.3. Производная с физической и геометрической точек зрения (227). 1.4. Правая и левая производные (229)	
§ 2. Понятие дифференцируемости функции.	230
2.1. Определение дифференцируемости функции (230). 2.2. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности функции (231). 2.3. Понятие дифференциала функции (231)	
§ 3. Дифференцирование сложной функции и обратной функции	233
3.1. Дифференцирование сложной функции (233). 3.2. Дифференцирование обратной функции (234). 3.3. Инвариантность формы первого дифференциала (236)	

§ 4. Дифференцирование суммы, разности, произведения и частного функций	237
§ 5. Производные простейших элементарных функций	240
5.1. Производные тригонометрических функций (240). 5.2. Производная логарифмической функции (242). 5.3. Производные показательной и обратных тригонометрических функций (243). 5.4. Производная степенной функции (245). 5.5. Таблица производных простейших элементарных функций (246). 5.6. Таблица дифференциалов простейших элементарных функций (247). 5.7. Использование дифференциала для установления приближенных формул (247). 5.8. Логарифмическая производная. Производная степенно-показательной функции (248)	
§ 6. Производные и дифференциалы высших порядков	249
6.1. Понятие производной n -го порядка (249). 6.2. n -е производные некоторых функций (250). 6.3. Формула Лейбница для n -й производной произведения двух функций (251). 6.4. Дифференциалы высших порядков (252)	
§ 7. Дифференцирование функции, заданной параметрически	254
§ 8. Производная векторной функции	256
Глава 11. Теоремы о дифференцируемых функциях и их приложения	258
§ 1. Возрастание (убывание) функции в точке. Локальный экстремум	258
1.1. Возрастание (убывание) функции в точке (258). 1.2. Локальный экстремум функции (259)	
§ 2. Теоремы Ролля и Лагранжа и их следствия	259
2.1. Теорема Ролля (259). 2.2. Теорема Лагранжа (260). 2.3. Постоянство функции, имеющей на интервале равную нулю производную (261). 2.4. Условия монотонности функции на интервале (262)	
§ 3. Формула Коши	263
§ 4. Раскрытие неопределенностей (правило Лопиталя)	264
4.1. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ (264). 4.2. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ (266)	
§ 5. Формула Тейлора	267
§ 6. Остаточный член в форме Пеано. Формула Маклорена	271
6.1. Остаточный член в форме Пеано (271). 6.2. Формула Маклорена (272)	
§ 7. Оценка остаточного члена. Разложение некоторых элементарных функций. Примеры применения формулы Маклорена	272
7.1. Оценка остаточного члена для произвольной функции (272). 7.2. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций (273). 7.3. Примеры применения формулы Маклорена (276)	
§ 8. Участки монотонности функции. Отыскание точек экстремума	277
8.1. Отыскание участков монотонности функции и точек возможного экстремума (277). 8.2. Первое достаточное условие экстремума (278). 8.3. Второе достаточное условие экстремума (279). 8.4. Экстремум функции, не дифференцируемой в данной точке. Общая схема отыскания экстремумов (280)	
§ 9. Направление выпуклости графика функции	281
§ 10. Точки перегиба графика функции	283
10.1. Определение точки перегиба. Необходимое условие перегиба (283). 10.2. Первое достаточное условие перегиба (284). 10.3. Второе достаточное условие перегиба (284)	
§ 11. Асимптоты графика функции	285
§ 12. Схема исследования графика функции.	286
§ 13. Глобальные максимум и минимум функции на сегменте. Краевой экстремум	289
13.1. Отыскание максимального и минимального значений функции, определенной на сегменте (289). 13.2. Краевой экстремум (290)	

Глава 12. Неопределенный интеграл	292
§ 1. Понятия первообразной функции и неопределенного интеграла	292
1.1. Понятие первообразной функции (292). 1.2. Неопределенный интеграл (293).	
1.3. Основные свойства неопределенного интеграла (294). 1.4. Таблица основных неопределенных интегралов (295)	
§ 2. Основные методы интегрирования	297
2.1. Интегрирование заменой переменной (подстановкой) (297). 2.2. Метод интегрирования по частям (299)	
§ 3. Классы функций, интегрируемых в элементарных функциях	303
3.1. Краткие сведения из теории алгебраических многочленов (304). 3.2. Разложение алгебраического многочлена с вещественными коэффициентами на произведение неприводимых вещественных множителей (306). 3.3. Разложение правильной рациональной дроби с вещественными коэффициентами на сумму простейших дробей (307). 3.4. Интегрируемость рациональной дроби с вещественными коэффициентами в элементарных функциях (310). 3.5. Другие классы функций, интегрируемых в элементарных функциях (313)	
Глава 13. Определенный интеграл	318
§ 1. Понятие определенного интеграла и условия его существования	318
1.1. Понятие интегральной суммы и ее предела (318). 1.2. Верхние и нижние суммы и их свойства (320). 1.3. Необходимое и достаточное условие существования определенного интеграла (324)	
§ 2. Интегрируемость непрерывных, монотонных и кусочно непрерывных функций .	326
2.1. Интегрируемость непрерывных функций (326). 2.2. Интегрируемость монотонных функций (327). 2.3. Интегрируемость кусочно непрерывных функций (328)	
§ 3. Свойства определенного интеграла	329
§ 4. Существование первообразной у любой непрерывной функции	335
§ 5. Основная формула интегрального исчисления	337
§ 6. Геометрические и физические приложения определенного интеграла	340
6.1. Понятие площади плоской фигуры. Площадь криволинейной трапеции (340).	
6.2. Площадь криволинейного сектора (344). 6.3. Вычисление объема тела вращения (345). 6.4. Длина дуги кривой (346). 6.5. Физические приложения определенного интеграла (351)	
§ 7. Понятие о приближенных методах вычисления определенных интегралов.	351
§ 8. Понятие о несобственных интегралах	355
Глава 14. Криволинейные интегралы	358
§ 1. Определения и физический смысл криволинейных интегралов	358
§ 2. Существование криволинейных интегралов и сведение их к определенным интегралам.	360
§ 3. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования	363
Глава 15. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	366
§ 1. Понятие функции m переменных	366
1.1. Понятия m -мерного координатного и m -мерного евклидова пространств (366).	
1.2. Множества точек m -мерного евклидова пространства (367). 1.3. Понятие функции m переменных (370)	
§ 2. Предел функции m переменных	371
2.1. Последовательности точек пространства R^m (371). 2.2. Свойство ограниченной последовательности точек R^m (374). 2.3. Предел функции m переменных (375). 2.4. Бесконечно малые функции m переменных (377)	

§ 3. Непрерывность функции m переменных	378
3.1. Понятие непрерывности функции m переменных (378). 3.2. Непрерывность функции m переменных по одной переменной (379). 3.3. Основные свойства непрерывных функций нескольких переменных (381)	
§ 4. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных	384
4.1. Частные производные функции нескольких переменных (384). 4.2. Дифференцируемость функции нескольких переменных (385). 4.3. Геометрический смысл условия дифференцируемости функции двух переменных (388). 4.4. Достаточные условия дифференцируемости (390). 5.5. Дифференциал функции нескольких переменных (391). 4.6. Дифференцирование сложной функции (392). 4.7. Инвариантность формы первого дифференциала (394). 4.8. Производная по направлению. Градиент (395)	
§ 5. Частные производные и дифференциалы высших порядков	398
5.1. Частные производные высших порядков (398). 5.2. Дифференциалы высших порядков (403)	
§ 6. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.	408
§ 7. Локальный (безусловный) экстремум функции нескольких переменных	410
7.1. Понятие и необходимые условия локального экстремума (410). 7.2. Краткие сведения из теории симметричных квадратичных форм (411). 7.3. Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных (415). 7.4. Более углубленное рассмотрение случая двух переменных (419). 7.5. Отыскание максимального и минимального значений функции нескольких переменных (420)	
§ 8. Условный экстремум функции.	421
8.1. Понятие условного экстремума функции (421). 8.2. Метод неопределенных множителей Лагранжа (424). 8.3. Достаточные условия условного экстремума (425)	
Глава 16. Двойные и тройные интегралы	427
§ 1. Определение и существование двойного интеграла	427
1.1. Определение двойного интеграла для прямоугольника (427). 1.2. Существование двойного интеграла для прямоугольника (429). 1.3. Определение и существование двойного интеграла для произвольной области (431). 1.4. Определение двойного интеграла при помощи произвольного разбиения области (433)	
§ 2. Основные свойства двойного интеграла	434
§ 3. Сведение двойного интеграла к повторному однократному	435
3.1. Случай прямоугольника (435). 3.2. Случай произвольной области (437)	
§ 4. Замена переменных в двойном интеграле	439
§ 5. Тройные интегралы	441
Глава 17. Ряды	444
§ 1. Понятие числового ряда.	444
1.1. Понятие о сходящихся и расходящихся рядах (444). 1.2. Критерий Коши и следствия из него (446)	
§ 2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами	448
2.1. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами (448). 2.2. Признаки сравнения (448). 2.3. Признаки Даламбера и Коши (451)	
§ 3. Абсолютная и условная сходимость рядов с членами любого знака	454
§ 4. Степенные ряды.	458
4.1. Понятие степенного ряда. Теорема Коши—Адамара (458). 4.2. Радиус сходимости степенного ряда, полученного формальным дифференцированием основного степенного ряда (463). 4.3. Непрерывность суммы степенного ряда внутри промежутка сходимости (465). 4.4. Дифференцируемость суммы степенного ряда внутри	

промежутка сходимости (466). 4.5. Разложение функции в степенной ряд (468). 4.6. Элементарные представления о функциях комплексной переменной (471)	
§ 5. Краткие сведения о рядах Фурье	472
5.1. Понятия ортонормированной системы и ряда Фурье (472). 5.2. Неравенство Бесселя и следствия из него (475). 5.3. Выражение для n -й частичной суммы тригонометрического ряда Фурье (478). 5.4. Принцип локализации Римана (481). 5.5. Условия сходимости тригонометрического ряда Фурье (482). 5.6. Заключительные замечания (489)	
Дополнение к главе 17. Формула Стирлинга	489
Глава 18. Дифференциальные уравнения	495
§ 1. Понятие дифференциального уравнения	495
§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка	496
2.1. Общие сведения (496). 2.2. Уравнение радиоактивного распада вещества (500). 2.3. Уравнение первого порядка с разделяющимися переменными (502). 2.4. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка (504). 2.5. Линейное уравнение первого порядка (506). 2.6. Уравнения Бернулли и Рикатти (508). 2.7. Метод ломаных Эйлера численного решения обыкновенного дифференциального уравнения (509)	
§ 3. Дифференциальные уравнения второго порядка	510
3.1. Об обыкновенных дифференциальных уравнениях выше первого порядка (510). 3.2. Три простейших типа уравнений второго порядка, допускающих интегрирование в квадратурах (512). 3.3. Два типа уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка (514). 3.4. Однородное линейное уравнение второго порядка (515). 3.5. Неоднородное линейное уравнение второго порядка (519). 3.6. Однородное линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (521). 3.7. Интегрирование линейного уравнения с помощью степенного ряда (523)	
§ 4. Постановки основных задач для уравнений с частными производными	525
Глава 19. Основы теории вероятностей	531
§ 1. События. Вероятности событий	531
§ 2. Условная вероятность. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей	537
§ 3. Формула полной вероятности. Формулы Бейеса	540
§ 4. Последовательности независимых испытаний. Биномиальное распределение вероятностей	542
§ 5. Формула Пуассона	544
§ 6. Предельные теоремы Муавра—Лапласа	546
6.1. Локальная теорема Муавра—Лапласа (547). 6.2. Интегральная теорема Муавра—Лапласа (550)	
§ 7. Случайные величины и функции распределения вероятностей	554
§ 8. Математическое ожидание и дисперсия	558
8.1. Определение математического ожидания (558). 8.2. Свойства математического ожидания (560). 8.3. Определение дисперсии случайной величины (561). 8.4. Основные свойства дисперсии (563). 8.5. Среднее квадратичное отклонение случайной величины (564). 8.6. Закон больших чисел в форме Чебышева (565)	
Приложение. Таблица значений стандартного интеграла вероятностей	567
Глава 20. Краткие сведения о задачах линейного программирования	568
§ 1. Постановка задачи линейного программирования	568
1.1. Задача оптимального планирования производства (569). 1.2. Транспортная задача (570). 1.3. Задача об оптимальном использовании посевной площади (570)	
§ 2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования	571
§ 3. О методах решения задач линейного программирования	574
Алфавитно-предметный указатель	577