УДК 330.42:519.83

ИГРОВЫЕ РАВНОВЕСИЯ В СЕТИ С ЭКСТЕРНАЛИЯМИ

В.Д. Матвеенко[1], А.В. Королев[2], М.А. Бахтин[3]
[1]Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН, г. Санкт-Петербург, Россия
[1,2,3]Санкт-Петербургский филиал Национального исследовательского университета "Высшая школа экономики", г. Санкт-Петербург, Россия

Рассматривается модель игрового взаимодействия с экстерналиями на сети, в которой агенты выбирают уровень инвестиций. Сравниваются две концепции равновесия: стандартное определение по Нэшу и «джекобианское» определение равновесия с экстерналиями. Показано, что равновесные инвестиции агента равны его альфа-центральности в сети. Для случая полной сети показано, что увеличение числа участников способствует активному поведению агентов, но уменьшает их полезность.
Ключевые слова: *сеть; структура сети; игра на сети; равновесие Нэша; экстерналия; альфа-центральность.*

Введение

В современном мире процессы, происходящие во всех сферах жизни, включая экономику, характеризуются возрастающей взаимозависимостью агентов. Во многом это обусловлено существованием экстерналий, создаваемых агентами в результате их деятельности. Кроме самого факта наличия экстерналий, важную роль играет то, как они распространяются в сети агентов. Данным вопросом занимается анализ социальных сетей, который начинает активно использоваться в экономическом анализе и моделировании [1, 2].

Данная работа является продолжением исследования [3], где изучается модель с производственными экстерналиями, и где новшеством является использование «джекобианского» определения равновесия (мы применяем этот термин, поскольку Дж. Джекобс принадлежит приоритет в рассмотрении множественных положительных экстерналий в сложных социально-экономических системах – см. [4]). Согласно «джекобианскому» определению [3], каждый агент находится в некоторой влияющей на его выигрыш среде, которая зависит от действий соседей по сети (экстерналий) и от действий самого агента. В момент принятия решения среда воспринимается агентом как экзогенная, то есть он не учитывает, что его решение может изменить среду.

В данной работе, обобщая модель [3], мы допускаем, что влияние инвестиций самого агента на его среду может быть меньше, чем влияние экстерналий, производимых его соседями, а именно, инвестиции самого агента могут входить в среду с понижающим коэффициентом. Мы сравниваем равновесные состояния при использовании стандартного определения равновесия по Нэшу и «джекобианского» определения равновесия с экстерналиями.

Оказывается, что при обеих концепциях равновесия уровень инвестиций активного агента равен величине его альфа-центральности в сети.

Отдельно рассматривается внутреннее равновесие в полной сети. Показано, что при обеих концепциях равновесия увеличение числа агентов в сети ослабляет ограничения, необходимые для активного поведения агентов в равновесии, но приводит к снижению их полезности.

Описание модели

Рассматривается сеть (неориентированный граф) из n вершин; $\mathbf{M}$ - матрица смежности. В каждой вершине находится агент, в первом периоде наделенный запасом блага e, который он может потратить на потребление в текущем периоде и на инвестиции в производство для потребления во втором периоде: $e = c_1^i + k_i$. При этом $c_2^i = F(k_i, K_i)$, где $K = \varphi k + \tilde{K}$ – среда агента, которая определяется как сумма инвестиции самого агента с понижающим коэффициентом $\varphi \in (0,1]$ и экстерналии $\tilde{K}$, равной сумме инвестиций всех ближайших соседей агента по сети. Понижающий коэффициент φ отражает значимость собственных инвестиций агента в формировании его среды. Значение $\varphi = 1$ соответствует рассматривавшемуся в [3] случаю.

Во втором периоде благо производится в соответствии с билинейной производственной функцией: $F(k, K) = BkK$. Предпочтения описываются квадратичной функцией полезности: $U(c_1, c_2) = c_1(e - ac_1) + bc_2$, где $0 < a < 1/2$, $b > 0$. Интуитивно, увеличение каждого из коэффициентов b и B должно способствовать росту инвестиций. Для удобства обозначим $A = bB$ и будем полагать $a < A$.

Введем понятие платежной функция агента (индекс i опущен): $V(k, K) = U(e - k, F(k, K))$. В случае использования стандартного определения равновесия по Нэшу: $V(k, \tilde{K}) = e^2(1-a) - ke(1-2a) - ak^2 + A\varphi k^2 + Ak\tilde{K}$. При «джекобианском» равновесии: $V(k, K) = e^2(1-a) - ke(1-2a) - ak^2 + AkK.$

В матричной форме вектор сред записывается как $\mathbf{K} = (\mathbf{M} + \varphi \mathbf{I})\mathbf{k}$, где $\mathbf{M}$ – матрица смежности, $\mathbf{I}$ – единичная матрица, $\mathbf{k}$ – вектор-столбец инвестиций.

Мы различаем пассивных ($k = 0$), активных ($0 < k < e$) и гиперактивных ($k = e$) агентов. Внутреннее равновесие, т.е. равновесие с активными агентами, находится из системы уравнений:

а) при стандартном определении равновесия: $(2A\varphi - 2a)\mathbf{k} + A\mathbf{M}\mathbf{k} = \bar{\mathbf{e}}$, где $\bar{\mathbf{e}} = (e(1-2a), e(1-2a), \ldots, e(1-2a))^T$;

б) при «джекобианском» определении равновесия: $(A\varphi - 2a)\mathbf{k} + A\mathbf{M}\mathbf{k} = \bar{\mathbf{e}}$.

Возможны также и угловые равновесия: все агенты или часть из них могут быть пассивными ($k = 0$) или гиперактивными ($k = e$).

Связь равновесия с альфа-центральностью

В ряде работ, например [5], показано, что оптимальное поведение агента определяется его положением в сети, описываемым той или иной мере центральности. Это справедливо и для нашей модели, причем в отличие от [5], играет роль не центральность Боначича, а альфа-центральность. Последняя учитывает не только положение агента и его соседей в сети, но и позволяет приписать каждой вершине экзогенно заданную «важность», которая является вторым компонентом альфа-центральности. Вектор альфа-центральностей агентов $\mathbf{x}$ определяется следующим выражением: $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{M})^{-1}\tilde{\mathbf{e}}$, где $\mathbf{I}$ - единичная матрица, $\mathbf{M}$ - симметричная матрица смежности, α - параметр, $\tilde{\mathbf{e}}$ - вектор экзогенных «важностей» вершин.

Стоит отметить, что при положительном параметре α увеличение количества связей вершины увеличивает значение ее альфа-центральности, а при отрицательном – уменьшает. Аналогично, при положительной экзогенной «важности» вершины $\tilde{e}_i$ увеличение ее абсолютного значения увеличивает альфа-центральность вершины, а при отрицательной – уменьшает.

Теорема 1. Уровень инвестиций агента во внутреннем равновесии, при стандартном и «джекобианском» определениях равновесия, равен величине альфа-центральности агента: $\mathbf{k}^* = (\mathbf{I} - \alpha\mathbf{M})^{-1}\tilde{\mathbf{e}}$. При использовании стандартного определения равновесия $\alpha = \dfrac{A}{2(a - A\varphi)}$, $\tilde{\mathbf{e}} = \dfrac{\bar{\mathbf{e}}}{2(A\varphi - a)}$. При использовании «джекобианского» определения равновесия $\alpha = \dfrac{A}{2a - A\varphi}$, $\tilde{\mathbf{e}} = \dfrac{\bar{\mathbf{e}}}{A\varphi - 2a}$.

Данная теорема показывает, что во внутреннем равновесии поведение агента полностью определяется его альфа-центральностью. При использовании каждого из определений равновесия, знаки α и $\tilde{e}_i$ противоположны. Отсюда следует, что два компонента альфа-центральности (положение агента в сети и экзогенная «важность») всегда влияют на равновесный уровень инвестиций в противоположных направлениях. Например, при $\varphi < \dfrac{a}{A}$ инвестиции агента будут тем выше, чем больше количество и уровень инвестиций его соседей, т.е. положительно зависят от получаемой экстерналии, но будут тем ниже, чем выше экзогенный надел, получаемый в начале игры.

Равновесие в полных сетях

Теорема 2. При использовании каждого из определений равновесия в полной сети поведение в равновесии может быть только однородным, то есть уровень инвестиций всех агентов будет одинаковым.

Данная теорема говорит о том, что в полной сети в равновесии могут существовать либо только пассивные, либо только активные, либо только гиперактивные агенты. Поэтому далее рассматриваются только случаи однородного поведения.

Предложение 1. В полной сети при стандартном определении равновесие с пассивными агентами существует всегда в случае $\varphi < \frac{a}{A}$ и при $A\varphi + a < 1$ в случае $\varphi > \frac{a}{A}$. Равновесие с гиперактивными агентами существует при $n > \frac{1}{A} + (1 - 2\varphi)$ в случае $\varphi < \frac{a}{A}$ и при $n > \frac{1-a}{A} + (1-\varphi)$ в случае $\varphi > \frac{a}{A}$.

Предложение 2. В полной сети при «джекобианском» определении равновесие с пассивными агентами существует всегда, а равновесие с гиперактивными агентами существует при $n > \frac{1}{A} + (1-\varphi)$.

Мы видим, что условие пассивности в случае «джекобианского» определения равновесия более мягкое, а условие гиперактивности, наоборот, более жесткое.

Далее перейдем к рассмотрению внутреннего равновесия в полных сетях, а именно к условиям, при которых агенты будут активными, и изучим размер полезности, которую они будут получать. Для начала рассмотрим случай изолированного агента.

Предложение 3. При использовании стандартного определения равновесия изолированный агент никогда не будет активным.

Предложение 4. При использовании «джекобианского» определения равновесия изолированный агент может быть активным лишь при $\varphi > \frac{1}{A}$.

Эти результаты контрастируют между собой. Предложение 4 показывает, что если агент воспринимает среду как заданную, то даже будучи изолированным он может быть активным, если достаточно сильно влияет на свою среду. Это можно объяснить особенностью «джекобианского» равновесия – «привязанностью» агента к своей среде. Благодаря этому при выполнении условия $\varphi > \frac{1}{A}$ изолированный агент может в равновесии быть как пассивным или гиперактивным, так и активным.

Следующие два предложения выявляют условия существования внутреннего равновесия в полной сети с $n \geq 2$ агентами. При этом чем крупнее сеть, тем слабее условия существования внутреннего равновесия, но полезность агентов при этом ниже.

Предложение 5. При использовании стандартного определения равновесия, в полной сети внутреннее равновесие существует при условии $\frac{1-A(n-1)}{2A} < \varphi < \frac{a}{A}$. При этом увеличение числа агентов в сети приводит к уменьшению их полезности.

Предложение 6. При использовании «джекобианского» определения равновесия в полной сети внутреннее равновесие существует при условии $\varphi > \frac{1-A(n-1)}{A}$. При этом увеличение числа агентов в сети приводит к снижению полезности агентов.

Результаты предложений 5 и 6, полученные для двух определений равновесия, схожи между собой: при увеличении числа агентов в полной сети ослабляются требования для достижения внутреннего равновесия, но полезность агентов при этом снижается. Данный эффект можно объяснить тем, что с ростом сети значительно снижаются инвестиции агентов. Это приводит к тому, что, несмотря на появление новых агентов, получаемые экстерналии и среды уменьшаются, из-за чего падает полезность агентов, так как блага для потребления во втором периоде производятся в значительно меньшем количестве. В то же время, при более низких экстерналиях и среде, множество ограничений, при которых агенты будут гиперактивными, сужается, что делает условия активности более мягкими.

Список литературы

1. Jackson M.O. An overview of social networks and economic applications // Handb. Soc. Econ. Citeseer, 2010. Vol. 1. P. 511–585.
2. Jackson M.O., Zenou Y. Games on networks // Handb. game theory. 2014. Vol. 4, December. P. 95–163.
3. Матвеенко В.Д., Королев А.В. Равновесия в сетевой игре с производством и с экстерналиями знаний // Математическая теория игр и ее приложения, т. 8, вып. 1. - 2016. - С. 106-137.
4. Lucas R.E. On the mechanics of economic development // Journal of Monetary Economics. 1988. P. 22. P. 3–42.
5. Ballester C., Calvo-Armengol A., Zenou Y. Who’s who in networks. wanted: the key player // Econometrica. 2006. Vol. 74, № 5. P. 1403–1417.

GAME EQUILIBRIA IN A NETWORK WITH EXTERNALITIES

V.D. Matveenko[1], A.V. Korolev[2], M.A. Bakhtin[3]
[1]SPb EMI RAS, Saint Petersburg, Russia
[1,2,3]NRU HSE, Saint Petersburg, Russia

This paper studies a model of game interaction on a network with externalities, in which agents choose their levels of investment. We compare two concepts of equilibrium: standard Nash definition and "Jacobian" definition of equilibrium with externalities. It is shown that the equilibrium level of investment is equal to the agent's alpha centrality. Also, we study the case of a complete network and show that an increase in its size facilitates active state of agents but reduces their utility.
Keywords: *network; network structure; network game; Nash equilibrium; externality; alpha centrality.*

Об авторах:
МАТВЕЕНКО Владимир Дмитриевич – доктор физико-математических наук, ординарный профессор, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ведущий научный сотрудник, Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН (190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, д. 16), e-mail: vmatveenko@hse.ru

КОРОЛЕВ Алексей Васильевич - кандидат физико-математических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (190008, г. Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, д. 16), e-mail: akorolev@hse.ru

БАХТИН Максим Алексеевич – студент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (190008, Санкт-Петербург, ул. Союза Печатников, д. 16), e-mail: max-bahtin@mail.ru

About the authors:
MATVEENKO Vladimir Dmitrievich – Doctor of Sciences in physics and mathematics, tenured professor, University Higher School of Economics, senior researcher, Institute for Economics and Mathematics – Russian Academy of Sciences (16, Soyuza Pechatnikov st., Saint Petersburg, 190008), e-mail: vmatveenko@hse.ru

KOROLEV Aleksey Vasil'evich – Philosophy Doctor in physics and mathematics, associate professor, University Higher School of Economics (16, Soyuza Pechatnikov st., Saint Petersburg, 190008), e-mail: akorolev@hse.ru

BAKHTIN Maksim Alekseevich – student, University Higher School of Economics (16, Soyuza Pechatnikov st., Saint Petersburg, 190008), e-mail: max-bahtin@mail.ru