УДК 51-77:330.43

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИДЕНТИФИЦИРУЕМЫХ СИСТЕМ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.П. Котенко[1], А.А. Котенко[2]
[1,2]Самарский государственный технический университет,
г. Самара, Россия
[1]Самарский национальный исследовательский университет,
г. Самара, Россия

Системы эконометрических взаимосвязанных уравнений описывают сложные производственные процессы с точки зрения удовлетворения противоречивым критериям. Однозначная идентификация коэффициентов этих систем позволяет находить набор управляющих параметров технологического процесса, обеспечивающий баланс требований стандартов и статистическую надёжность выпуска продукции заданного качества.
Ключевые слова: *многокритериальная оптимизация; системы эконометрических уравнений; идентификация параметров линейной регрессии.*

Введение

Задачи многокритериальной оптимизации могут быть эффективно представлены системами эконометрических уравнений. При этом эндогенные переменные уравнений описывают целевые функции, а экзогенные переменные – управляющие воздействия. Наличие стохастических факторов не мешает определять наиболее подходящие значения управляющих воздействий, гарантирующие достижение стандартных показателей при заданном уровне надёжности.

Постановка задачи идентификации системы регрессий

Пусть

$$X := \left(x_i\right)_{i=1}^{n\geq 1}$$

– вектор-столбец регрессоров (управляющих параметров), т.е. экзогенных переменных;

$$Y := \left(y_j\right)_{j=1}^{k\geq 1}$$

– вектор-столбец результирующих факторов (целевых параметров), т.е. эндогенных переменных;

N – число совместных (одномоментных) стандартизованных наблюдений экзогенных и эндогенных переменных:

$$\bar{x}_i = \bar{y}_j = 0,\ \sigma_{x_i} = \sigma_{y_j} = 1,\ i \in \overline{1,n},\ j \in \overline{1,k}.$$

Структурную форму модели (СФМ) представим системой линейных взаимозависимых уравнений $AY=BX$, где

$$A:=\left\|a_{ij}\right\|_{i,j=1}^{k},\ B:=\left\|b_{ij}\right\|_{i\in\overline{1,k};\, j\in\overline{1,n}}$$

– матрицы структурных коэффициентов при эндогенных и экзогенных переменных соответственно.

Элементы главной диагонали матрицы A предполагаем не требующими идентификации единичными: $a_{jj}=1,\ j\in\overline{1,k}$.

Рассмотрим также приведённую форму модели (ПФМ) $Y=CX+\mathrm{E}$, где

$$C:=\left\|c_{ij}\right\|_{i\in\overline{1,k};\, j\in\overline{1,n}}$$

– матрица приведённых коэффициентов, связывающих по отдельности каждую эндогенную переменную $y_j,\ j\in\overline{1,k}$, со всеми своими значимыми регрессорами $x_i,\ i\in\overline{1,n}$;

$$\mathrm{E}:=Y-\widetilde{Y}=\left(\varepsilon_j\right)_{j=1}^{k}$$

– вектор-столбец невязок между столбцами Y наблюдаемых и $\widetilde{Y}:=\left(\widetilde{y}_j\right)_{j=1}^{k}=CX$ регрессионных значений

$$\widetilde{y}_j:=\sum\nolimits_{i=1}^{n}c_{ji}x_i,\ j\in\overline{1,k}, \tag{1}$$

эндогенных переменных: $\varepsilon_j:=y_j-\widetilde{y}_j$.

Незначимые приведённые коэффициенты c_{ji} в разложении (1) заменим нулями.

Предположим, что для каждого уравнения ПФМ выполняются условия применимости метода наименьших квадратов (МНК), так что приведённые коэффициенты определяются по МНК формулой:

$$\left\|Y-Y^2\right\|:=\sqrt{\sum\nolimits_{j=1}^{k}\left(y_j-\widetilde{y}_j\right)^2}=\sqrt{\sum\nolimits_{j=1}^{k}\left(y_j-\sum\nolimits_{i=1}^{n}c_{ji}x_i\right)^2}\to\min.$$

Поставим задачу однозначного определения матриц структурных коэффициентов A, B по матрице C приведённых коэффициентов:

$$A(CX+\mathrm{E})=BX. \tag{2}$$

Если все из kn приведённых коэффициентов значимы, а вектор-столбцы наблюдений регрессоров линейно независимыми (rank $X=n$), то с помощью косвенного МНК (КМНК) получим систему kn линейных уравнений алгебраических уравнений (СЛАУ) $AC=B$ для неизвестных элементов матриц A, B.

Всего структурных коэффициентов не более $(k^2+kn)=k(k+n)$ штук, из них требующих идентификации не более $k(k-1)+kn=k(k+n-1)$ штук.

При линейной независимости столбцов наблюдений эндогенных переменных (rank $Y=k$) все kn уравнений СЛАУ

$$AC=B \tag{3}$$

независимы.

С другой стороны, СЛАУ (3) распадается на k независимых подсистем для идентификации коэффициентов каждого из уравнений СФМ: если j-е уравнение, $j \in \overline{1,k}$, имеет $l_j \in \overline{1,k-1}$ неизвестных структурных коэффициентов при эндогенных и $m_j \in \overline{1,n}$ структурных коэффициентов при экзогенных переменных, то соответствующая подсистема СЛАУ (3) имеет n уравнений с (l_j+m_j) неизвестными.

Следовательно, однозначное соответствие между коэффициентами j-го структурного уравнения и совокупностью приведённых коэффициентов имеется только тогда, когда $n=l_j+m_j$.

В случае $n<l_j+m_j$ эта подсистема алгебраически противоречива, т.е. j-е уравнение СФМ сверхидентифицируемо с помощью двухшагового МНК (ДМНК) [1].

В случае $n>l_j+m_j$ соответствующая подсистема СЛАУ (3) имеет бесконечное число алгебраических решений, т.е. j-е уравнение СФМ неидентифицируемо [1].

Таким образом, СФМ точно идентифицируема, если

$$\forall j \in \overline{1,k} \Rightarrow l_j+m_j=n.$$

Невязка $A\mathrm{E}$ СФМ (2) определяется согласованной нормой матрицы A и невязкой ПФМ Е:

$$\|A\mathrm{E}\| \le \|A\| \cdot \|\mathrm{E}\|.$$

Подбирая СФМ с минимальным значением нормы оператора A, получаем наиболее адекватное представление эндогенных переменных при фиксированной невязке ПФМ.

Связь с задачей многокритериальной оптимизации

Целевые эндогенные переменные представляют собой оценки качества продукции в процессе производства, подверженного влиянию случайных факторов. К таким относится, например, производство продукции нефтехимии: сырьё, поступающее с разных нефтяных месторождений, обладает значительным разбросом характеристик; сам процесс массового производства не поддаётся точному контролю. Часто подбор технологических параметров осуществляется после выпуска пробной партии продукции [2].

В этих условиях необходимо по статистическим характеристикам пробной партии подобрать оптимальные значения технологических параметров.

Из равенства $AY=BX$ следует, что при обратимости квадратной матрицы B по заданным оптимальным значениям целевых показателей Y^* однозначно определяется набор управляющих параметров $X^*=B^{-1}AY^*$. Наиболее адекватный подбор матриц A, B позволяет уменьшить выборочную дисперсию управляющих параметров X^*.

Данный алгоритм подбора управляющих параметров применён к процессу производства дорожных битумов на одном из нефтеперерабатывающих предприятий Самарской области. Расчёт доверительных интервалов эндогенных переменных, описывающих соответствие стандарту, наиболее близкому европейским нормам, показал, что невозможно обеспечить производство продукции первого сорта с нужным уровнем надёжности при действующей технологии.

Таким образом, был сделан вывод о необходимости технического перевооружения производства.

Выводы

Подбор системы эконометрических уравнений, отражающих взаимозависимость целевых параметров при многокритериальной оптимизации производства, подверженному воздействию случайных факторов, позволяет построить математическую модель, наиболее адекватно отражающую реальные экономико-технологические условия производства.

Полученная модель позволяет однозначно определить набор управляющих параметров, обеспечивающих производство продукции заданной сортности с высокой статистической надёжностью.

Список литературы

1. Котенко А.П., Букаренко М.Б. Геометрия систем линейных регрессионных уравнений / Известия СНЦ РАН. - Т. 15, № 6(3). – 2013. - С. 820-823.
2. Котенко А.П., Кузнецова О.А. Применение методов многомерного регрессионного анализа для оптимизации производства битума стандартизованных характеристик / Современные информационные технологии и ИТ-образование: сб. науч. тр. 10-й Юбилейной междунар. научно-практ. конф. – М.: МГУ, 2015. – С. 356-359.

USE OF IDENTIFIABLE SYSTEMS OF ECONOMETRIC EQUATIONS

A.P. Kotenko[1], A.A. Kotenko[2]

[1,2]Samara State Technical University, Samara, Russia

[1]Samara University, Samara, Russia

Econometric interconnected systems of equations describe the complex production processes in terms of conflicting criteria. Unique identification of the coefficients of these systems makes it possible to find a set of control process parameters, ensuring the balance between the requirements of standards and the statistical reliability of issue with given quality.

Keywords: *multi-criteria optimization; system of econometric equations; identification of parameters of linear regression.*

Об авторах:
КОТЕНКО Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика и информатика», Самарский государственный технический университет (443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244), доцент кафедры «Математические методы в экономике», Самарский национальный исследовательский университет (443086, г. Самара, Московское шоссе, д. 34), e-mail: ako1959@mail.ru

КОТЕНКО Андрей Андреевич – студент направления подготовки «Прикладная математика и информатика», Самарский государственный технический университет (443100, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244), e-mail: ojiu496@mail.ru

About the authors:
KOTENKO Andrew Petrovich – Philosophy Doctor in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Applied Mathematics and Information Science, Samara State Technical University (244, Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100), Associate Professor of Department of Quantitative Methods in Economics, Samara University (34, Moskovskoye Sh., Samara, 443086), e-mail: ako1959@mail.ru

KOTENKO Andrew Andreevich – Student of training direction on Applied Mathematics and Information Science, Samara State Technical University (244, Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100), e-mail: ojiu496@mail.ru