Е.А. АНДРЕЕВА, Х. БЕНКЕ

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

ТВЕРЬ 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

Е.А. АНДРЕЕВА, Х. БЕНКЕ

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

ТВЕРЬ 2015

УДК 519.7(075.8)
ББК З965я73-1+В18я73-1
А65

Рецензент
Доктор технических наук, профессор
В.И. Гурман

Е.А. Андреева, Х. Бенке
А65 Оптимизация управляемых систем: учеб. пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т.
– 162 с. Библиогр.: 48 назв.

ISBN 978-5-7609-1016-5

В учебном пособии представлены современные достижения и проблемы математической теории оптимального управления, методов оптимизации и моделирования управляемых систем. Рассматриваемые задачи относятся к классу задач оптимального управления со смешанными и фазовыми ограничениями. Учебное пособие состоит из четырех глав. Первые две главы посвящены необходимым и достаточным условиям оптимальности и теоремам о существовании решения. Приведенные теоремы иллюстрируются примерами. В последних главах приводятся модели управляемых систем: модель процесса распространения эпидемии, соревнования по бегу и искусственной нейронной сети. Для построения оптимального управления используются необходимые условия оптимальности, обсуждаются алгоритмы построения решения.

Учебное пособие предназначается для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников, проводящих исследования по теме «Оптимальное управление и моделирование управляемых процессов».

УДК 519.7(075.8)
ББК З965я73-1+В18я73-1

ISBN 978-5-7609-1016-5

Управление есть характеристическое свойство жизни в широком смысле... при этом передача небольших масс или порций энергии вызывает действия, состоящие в передаче или переработке гораздо больших порций энергии или масс...

А.А. Ляпунов

ВВЕДЕНИЕ

Это учебное пособие является результатом совместной работы преподавателей двух университетов городов-побратимов Оснабрюка и Твери. Авторы работы на протяжении многих лет преподают в университете оптимальное управление, вариационное исчисление, методы оптимизации и их использование при моделировании управляемых процессов в медицине, биологии, экономике, технике.

В учебное пособие не вошли результаты всех совместных научных исследований, которые нашли свое выражение в ряде статей. В данном случае авторы ставили своей целью познакомить студентов и аспирантов с современной математической теорией оптимального управления, алгоритмами оптимизации, проблемами, возникающими при моделировании управляемых систем. В учебном пособии представлен ряд проблем, требующих дальнейших исследований, которые могут служить темами дипломных и магистерских работ.

В первой главе приводятся теоремы существования, необходимые и достаточные условия оптимальности, принцип максимума для задач оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями, список литературы, необходимой для изучения темы, и примеры, иллюстрирующие применение теорем.

Во второй главе доказываются теоремы о достаточных условиях оптимальности, вводится понятие двойственной задачи, синтеза оптимального управления. Последние главы посвящены моделированию управляемых процессов в медицине, биологии, искусственных нейронных сетей. Задача авторов состояла в построении моделей распространения эпидемии, соревнований по бегу, нейронной сети, определении оптимального управления на основе изложенного теоретического материала и разработке алгоритмов построения решения.

Данное учебное пособие предназначается для студентов 4–5 курсов и аспирантов математического факультета, специализирующихся по направлению оптимальное управление, оптимизация и моделирование.

ГЛАВА 1

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ И ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

§1. Задача оптимального управления

Постановка задачи оптимального управления

Задача оптимального управления для системы обыкновенных дифференциальных уравнений ставится следующим образом: требуется найти минимум функционала $J(u)$, определенного на заданном отрезке $[t_0, t_1]$, зависящего от управления, состоящего из интегрального и терминального слагаемых

$$J(u) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt + \Phi(x(t_0), x(t_1)). \tag{1.1}$$

Здесь $0 < t_0 < t_1$, значения t_0, t_1 фиксированы. Обозначим далее через $I = [t_0, t_1]$. Абсолютно-непрерывная вектор-функция состояния $x(t): I \to \mathbb{R}^n$ и кусочно-непрерывная вектор-функция управления $u(t): I \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяют динамическим ограничениям

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x(t), u(t)), \quad t \in I, \quad i = \overline{1, n}, \tag{1.2}$$

начальным условиям

$$x(t_0) \in X_0 \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

ограничениям на управление

$$u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in I, \tag{1.4}$$

граничным условиям

$$x(t_1) \in X_1 \subset \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Определение 1.1. Процесс $\omega = (x(t), u(t))$ называется допустимым, если вектор-функция $x(t)$— абсолютно-непрерывна, $u(t)$— кусочно-непрерывна и удовлетворяют условиям (1.2)–(1.5). Совокупность всех допустимых процессов ω задачи (1.1)–(1.5) обозначим через Ω и предположим, что множество Ω не пусто.

Задача оптимального управления непрерывной системой (1.2) заключается в выборе допустимого процесса $\overline{\omega} \in \Omega$, минимизирующего функционал (1.1).

Определение 1.2. Допустимый процесс $\overline{\omega} = (\overline{x}(t), \overline{u}(t))$ является локально-оптимальным в задаче (1.1)–(1.5), если $\exists\ \varepsilon > 0$, такое, что для всех допустимых процессов $\omega = (x(t), u(t)) \in \Omega$, удовлетворяющих условию $\|x(t) - \overline{x}(t)\|_{c(I)} < \varepsilon$, и для любого $u(t) \in U(t)$, $t \in I$, выполняется неравенство

$$J(\overline{\omega}) \leqslant J(\omega).$$

Теорема о необходимых условиях оптимальности в задаче (1.1)–(1.2) впервые была доказана Понтрягиным Л.С. С каждой задачей оптимального управления можно связать две скалярные функции — функцию Понтрягина и функцию Гамильтона, которые строятся по следующему правилу:

$$H(t, x, u, p(t), \lambda_0) = -\lambda_0 f_0(t, x, u) + (p(t), f(t, x, u)),$$
$$\mathcal{H}(t, x, p(t), \lambda_0) = \max_{u \in U} H(t, x, u, p(t), \lambda_0).$$

Предположим, что в задаче (1.1)–(1.5) выполнены все стандартные предположения гладкости, а именно: функции

$$f(t, x, u) : I \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$
$$f_0(t, x, u) : I \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

измеримы по t, непрерывно дифференцируемы по x и непрерывны по u, функция $\Phi(x^0, x^1) : X_0 \times X_1 \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема по x^0 и по x^1, где $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

Если $x(t_0) = x^0$,то задача (1.1)–(1.5) называется задачей с закрепленным левым концом.

Если $X_0 = \mathbb{R}^n$, то задача (1.1)–(5.5) называется задачей со свободным левым концом. Аналогично для правого конца можно выделить два случая: закрепленный правый конец $x(t_1) = x^1$, свободный правый конец $X_1 = \mathbb{R}^n$. Множества X_ℓ, $\ell = 0, 1$ могут задаваться системой ограничений типа равенств и неравенств, например:

$$X_\ell = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ g_i^\ell(x) \leqslant 0, \ i = \overline{1, s}; \ g_i^\ell(x) = 0, \ i = \overline{s+1, p}\right\},$$

здесь $g_i(x)$, $i = \overline{1, p}$, — непрерывно дифференцируемые функции.

Применим метод множителей Лагранжа для построения оптимального решения в задаче со свободным правым концом.

Задача оптимального управления с закрепленным левым и со свободным правым концом состоит в минимизации функционала

$$J(\omega) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt + \Phi(x(t_1)) \tag{1.6}$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in I, \tag{1.7}$$

$$x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

$$u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^r, \tag{1.9}$$

здесь $x(t) : I \to \mathbb{R}^n$— абсолютно-непрерывная вектор-функция, $u(t) : I \to \mathbb{R}^r$— измеримая вектор-функция.

В задаче выполнены все стандартные предположения гладкости, указанные ранее [2]. Для решения задачи воспользуемся методом множителей Лагранжа.

Составим функцию Лагранжа:

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(x(t), u(t), p(t), \lambda_0, \nu) = \lambda_0 \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), u(t))dt + \\ + \lambda_0 \Phi(x(t_1)) + \int\limits_{t_0}^{t_1} (p(t), \dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t)))dt + (\nu, x(t_0) - x^0).\end{gathered} \tag{1.10}$$

Здесь $p(t)$— абсолютно-непрерывная вектор-функция, $p(t) : I \to \mathbb{R}^n$.

Введем следующие функции:

$$\begin{gathered}L(t, x(t), u(t), p(t), \lambda_0) = \lambda_0 f_0(t, x(t), u(t)) + \\ + (p(t), \dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t)));\end{gathered} \tag{1.11}$$

$$l(x(t_0), x(t_1)) = \lambda_0 \Phi(x(t_1)) + (\nu, x(t_0) - x^0). \tag{1.12}$$

Тогда функция Лагранжа (1.10) с учетом определений (1.11), (1.12) имеет вид

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(x(t), u(t), p(t), \lambda_0, \nu) = \\ = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), u(t), p(t), \lambda_0)dt + l(x(t_0), x(t_1)) \to \inf .\end{gathered} \tag{1.13}$$

Пусть известны функции $\overline{u}(t), \overline{p}(t)$, вектор $\overline{\nu}$ и значение $\overline{\lambda}_0$, доставляющие минимум функционалу (1.6), тогда задача безусловной минимизации (1.13) эквивалентна задаче Больца относительно функции $x(t)$, в которой необходимые условия или уравнение Эйлера-Лагранжа имеют вид

$$\overline{L_x}(t) - \frac{d}{dt}\overline{L}_{\dot{x}}(t) = 0. \tag{1.14}$$

Здесь $\overline{L}(t) = L(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t), \overline{p}(t), \overline{\lambda}_0)$— функция, вычисленная вдоль оптимального процесса

$$L_x(t) = \lambda_0 f_{0x}(t, x(t), u(t)) - f_x^T(t, x(t), u(t))p(t), \tag{1.15}$$

$$L_{\dot{x}}(t) = p(t). \tag{1.16}$$

f_x— $n \times n$-матрица, состоящая из первых производных функций $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = \overline{1, n}$. Уравнение Эйлера-Лагранжа (1.14) с учетом (1.15) перепишем в виде

$$\dot{\overline{p}}(t) = \lambda_0 f_{0x}(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t)) - f_x^T(t, \overline{x}(t), \overline{u}(t))p(t). \tag{1.17}$$

Это уравнение называется уравнением для сопряженной функции $p(t)$. Запишем функцию Понтрягина задачи (1.6)-(1.9)

$$H(t, x, u, p(t), \lambda_0) = -\lambda_0 f_0(t, x, u) + (p(t), f(t, x, u)).$$

С учетом определения функции Понтрягина уравнение (1.17) перепишется следующим образом:

$$\dot{\overline{p}}(t) = -\frac{\partial H(t, \overline{x}(t), p(t), \overline{u}(t), \overline{\lambda}_0)}{\partial x}. \tag{1.18}$$

Запишем условия трансверсальности в задаче Больца (1.13):

$$\overline{L}_{\dot{x}}(t_i) = (-1)^i \frac{\partial \overline{\ell}(\xi^0, \xi^1)}{\partial \xi^i},$$
$$\xi_i = x(t_i), \quad i = 0, 1,$$

учитывая, что $L_{\dot{x}}(t) = p(t)$), имеем

$$\overline{p}(t_i) = (-1)^i \frac{\partial \overline{\ell}(\xi^0, \xi^1)}{\partial \xi^i}.$$

Используя определение функции ℓ, получим

$$\overline{p}(t_0) = \nu,$$
$$\overline{p}(t_1) = -\lambda_0 \frac{\partial \ell(\xi^0, \xi^1)}{\partial \xi^1}. \tag{1.19}$$

Пусть в задаче (1.13) неизвестной является только вектор-функция управления $u(t)$, т.е. задача имеет вид

$$\mathcal{L}(\overline{x}(t), u(t), p(t), \overline{\lambda}_0, \overline{\nu}) \to \inf,$$
$$u(t) \in U(t) \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in I.$$

Эта задача есть элементарная задача оптимального управления. Согласно принципу минимума оптимальное управление удовлетворяет условию

$$
\begin{aligned}
&L(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),\overline{p}(t),\overline{\lambda}_0) = \\
&\quad = \lambda_0 f_0(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t)) + (\overline{p}(t),\dot{\overline{x}}(t) - f(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t))) = \\
&\quad = \min_{u\in U(t)} [\lambda_0 f_0(t,\overline{x}(t),u) + (\overline{p}(t),\dot{\overline{x}}(t) - f(t,\overline{x}(t),u))].
\end{aligned}
$$

Преобразуя это выражение с учетом определения функции Понтрягина, получим

$$
-H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),\overline{p}(t),\overline{\lambda}_0) = \min_{u\in U(t)} (-H(t,\overline{x}(t),u,\overline{p}(t),\overline{\lambda}_0)
$$

или (1.20)

$$
H(t,\overline{x}(t),\overline{u}(t),\overline{p}(t),\overline{\lambda}_0) = \max_{u\in U(t)} H(t,\overline{x}(t),u,\overline{p}(t),\overline{\lambda}_0)).
$$

Принцип максимума Понтрягина

Теорема 1.1. *Пусть допустимый процесс $\overline{\omega} = (\overline{x}(t),\overline{u}(t))$ является оптимальным в задаче (1.6)–(1.9). Тогда оптимальное управление удовлетворяет принципу максимума (1.20), а сопряженная функция $\overline{p}(t)$ является решением системы (1.18)–(1.19).*

Во многих приложениях требуется определить градиент минимизируемого функционала. Найдем градиент минимизируемого функционала в задаче со свободным правым концом.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления. Требуется минимизировать функционал

$$
J(u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x(t),u(t))dt + \Phi(x(t_1)) \tag{1.21}
$$

при ограничениях

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = f(t,x,u), \quad x(t_0) = x^0 \in \mathbb{R}^n, \\
&u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r \text{ почти всюду } t \in [t_0,t_1].
\end{aligned} \tag{1.22}
$$

Снова считаем, что выполнены стандартные предположения гладкости, а вектор-функция управления $u(t) \in L_2^r[t_0,t_1]$.

Введем функцию Понтрягина, полагая здесь $\lambda_0 = 1$:

$$
H(t,x,u,\psi) = -f_0(t,x,u) + (f(t,x,u),\psi). \tag{1.23}
$$

Теорема 1.2. *Пусть функции f_0, f, Φ непрерывны по совокупности всех аргументов вместе со своими частными производнымим по t, x, u и выполнены следующие условия:*

$$\|f(x+\triangle x, u+h, t) - f(x,u,t)\| \leqslant L(\|\triangle x\| + \|h\|), \tag{1.24}$$

$$\|f_x(x+\triangle x, u+h, t) - f_x(x,u,t)\| \leqslant L(\|\triangle x\| + \|h\|), \tag{1.25}$$

$$\|f_x^0(x+\triangle x, u+h, t) - f_x^0(x,u,t)\| \leqslant L(\|\triangle x\| + \|h\|), \tag{1.26}$$

$$\|f_u(x+\triangle x, u+h, t) - f_u(x,u,t)\| \leqslant L(\|\triangle x\| + \|h\|), \tag{1.27}$$

$$\|f_u^0(x+\triangle x, u+h, t) - f_u^0(x,u,t)\| \leqslant L(\|\triangle x\| + \|h\|), \tag{1.28}$$

$$\|\Phi_x(x+\triangle x) - \Phi_x(x)\| \leqslant L\|\triangle x\| \tag{1.29}$$

при всех $(x+\triangle x, u+h, t)$, $(x,u,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [t_0, t_1]$, где $L = Const > 0$. Тогда функционал (1.21) при ограничениях (1.22) непрерывен и дифференцируем по $u = u(t)$ в норме $L_2^r[t_0, t_1]$ всюду на $L_2^r[t_0, t_1]$, причем его градиент $J'(u) \in L_2^r[t_0, T]$ в точке $u(t)$ представим в виде

$$J'(u) = -\frac{\partial H(x,u,t,\Psi)}{\partial u}\Big|_{x=x(t,u);u=u(t);\Psi=\Psi(t,x,u)},$$

где $x(t,u)$, $\Psi(t,u)$— решение задачи (1.21)-(1.22), соответствующее выбранному управлению $u = u(t)$. Функция $\Psi(t,u)$ является решением системы

$$\dot{\Psi} = -\frac{\partial H(x(t,u)u, t, \Psi(t,u))}{\partial x}$$

с граничным условием

$$\Psi(t_1) = -\frac{\partial \Phi(x(t_1,u))}{\partial x}.$$

Приращение функционала $\triangle J(u)$ определяется равенством [5].

$$\triangle J(u) = J(u+h) - J(u) = -\int_{t_0}^{T} (H_u(x(t), u(t), t, \Psi(t)), h(t))dt + R.$$

Остаточный член оценивается следующим неравенством

$$|R| \leqslant C\|h\|^2_{L_2} = C\int_{t_0}^{T} |h(t)|^2 dt.$$

Если задача (1.21)-(1.22) рассматривается при дополнительном условии $x(t_1) = x^1$ (правый конец закреплен), то введением функций штрафа

$$P_k(u) = A_k\|x(t_1,u) - x^1\|^2, \quad k = \overline{1,n},$$

можно рассмотреть задачу минимизации функционала

$$J_k(u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t,x,u)dt + \Phi(x(t_1)) + A_k\|x(t_1) - x_1\|^2,$$

при условиях (1.24)-(1.29). Здесь A_k, $k = \overline{1,n}$, есть заданная положительная последовательность, стремящаяся к бесконечности. Если в исходной задаче присутствуют фазовые ограничения

$$a_i \leqslant x_i(t) \leqslant b_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad m \leqslant n,$$

где a_i, b_i - заданные постоянные, то штрафом может служить функция

$$P_k(u) = A_k \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t_1} [(\max\{x_i(t) - b_i, 0\})^2 + (\max\{a_i - x_i(t), 0\})^2]dt.$$

Тогда исходная задача сведется к решению последовательности задач минимизации функционала:

$$\Phi_k(u) = J(u) + P_k(u) = \int_{t_0}^{t_1} F_k^0(t,x,u)dt + \Phi(x(t_1)),$$

при условиях (1.24)-(1.29),

где $F_k(x,u,t) = f_0(x,u,t) + A_k \sum_{i=1}^{m} [(\max\{x_i - b_i, 0\})^2 + (\max\{a_i - x_i, 0\})^2]$,

$F_{ku}^0 = f_u^0$,

$F_{kx_i}^0 = f_{x_i}^0 + 2A_k \max\{x_i - b_i, 0\} - 2A_k \max\{a_i - x_i, 0\}, \quad i = \overline{1,m}$,

$F_{kx_i}^0 = f_{x_i}^0, \quad i = \overline{m+1,n}$.

§2. Задача оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями

В этой части приводится формулировка принципа максимума Понтрягина для задач оптимального управления с фазовыми ограничениями. Большой вклад в разработку теории задач оптимального управления с фазовыми ограничениями внес А.А.Милютин и его ученики [5]. Рассмотрим задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями:

$$J(u) = \int_0^T f_0(t, x, u)dt \to \inf, \tag{2.1}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u), \tag{2.2}$$

$$u \in U \text{ п.в. } t \in [0, T] = I, \tag{2.3}$$

$$h_0(x(0)) = h_1(x(T)) = 0, \tag{2.4}$$

$$g_i(t, x(t)) \leqslant 0, \quad t \in [0, T], \quad i = \overline{1, k}. \tag{2.5}$$

В этой задаче выполнены все стандартные предположения гладкости; функции $g_i : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1, k}$, — непрерывны по t и непрерывно дифференцируемы по x. Ограничения типа (2.5) называются фазовыми ограничениями. Ограничения типа (2.4), где функции $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{S_i}$ дифференцируемы, называются терминальными ограничениями. Введем функцию Понтрягина задачи (2.1)–(2.5)

$$H(t, x, u, p, \lambda_0) = (p, f(t, x, u)) - \lambda_0 f_0(t, x, u)$$

и функцию Гамильтона

$$\mathcal{H}(t, \bar{x}, p, \lambda_0) = \max_{u \in U} H(t, \bar{x}, u, p, \lambda_0).$$

Здесь и далее $\bar{x} = \bar{x}(t), \bar{u} = \bar{u}(t)$, где $t \in [0, T]$.

Теорема 2.1. *Пусть $\bar{\omega} = (\bar{x}(\cdot), u(\cdot))$— оптимальный управляемый процесс в задаче (2.1)–(2.5). Тогда существуют не равные одновременно нулю числа $\lambda_0 \geqslant 0$, векторы $\ell_0 \in \mathbb{R}^{S_0}$, $l_1 \in \mathbb{R}^{S_1}$, вектор-функция $p(\cdot) : I \in \mathbb{R}^n$ и неотрицательные регулярные меры μ_i, $i = \overline{1, k}$, сосредоточенные на множествах*

$$T_i = \{t \in I : g_i(t, x(t)) = 0\},$$

такие, что

1) вектор-функция $p(\cdot)$ является решением интегрального уравнения

$$p(t) = -h_{1x}(\bar{x}(T))\ell_1 + \int_t^T H_x(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau), p(\tau), \lambda_0)d\tau - \\ - \sum_{i=1}^{k} \int_t^T g_{ix}(\tau, \bar{x}(\tau))d\mu_i, \quad t \in [0, T], \tag{2.6}$$

с условиями на левом конце

$$p(0) = h_{0x}(\bar{x}(0))\ell_0; \tag{2.7}$$

2) почти при всех $t \in I$ выполняется равенство

$$H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), p(t), \lambda_0) = \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), \lambda_0). \tag{2.8}$$

Нетрудно видеть, что если все меры μ_i— нулевые,в частности при отсутствии фазовых ограничений, то принцип максимума и уравнение (2.6) для сопряженной вектор-функции $p(\cdot)$ сводятся к принципу максимума для задач оптимального управления без фазовых ограничений. Заметим, что в задачах без фазовых ограничений сопряженная функция является абсолютно непрерывной функцией.

При наличии фазовых ограничений вследствие присутствия в уравнениях (2.6) интеграла по мерам μ_i сопряженная функция может иметь разрывы. Однако сопряженная функция всегда является функцией ограниченной вариации, непрерывной слева из-за регулярности мер μ_i, $i = \overline{1, k}$.

Задача с фазовыми ограничениями является частным случаем задачи оптимального управления с разрывной правой частью. В работе [4] приведены необходимые условия оптимальности процесса, вычисляется величина скачка для сопряженной функции.

В формулировке теоремы не исключается случай,когда одна или обе концевые точки оптимальной траектории лежат на фазовых ограничениях. Поэтому меры могут содержать ненулевые массы, сосредоточенные в точках $t = 0$, $t = T$. В этом случае соотношения (2.6), (2.7) имеют вид

$$\lim_{\substack{t \to T \\ t < T}} p(t) = -h_{1x}(x(T))\ell_1 + \sum_{i=1}^{k} g_{ix}(T, x(T))\mu_i([T]), \tag{2.9}$$

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} p(t) = h_{0x}(x(0))\ell_0 + \sum_{i=1}^{k} g_{ix}(0, x(0))\mu_i([0]), \tag{2.10}$$

т.е. сопряженная функция $p(t)$ может иметь разрыв в точке $t = 0$. Если в концевых точках выполняются строгие неравенства, т.е. $g_i < 0$, то точки 0 и T не принадлежат ни одному из множеств T_i, и поэтому $\mu_i([0]) = \mu_i([T]) = 0$. В этом случае $p(t)$ непрерывна на концах и выполняются известные условия трансверсальности для задач оптимального управления без фазовых ограничений.

Сформулированная теорема представляет собой еще одну реализацию принципа Лагранжа. Для этой задачи функцию Лагранжа следует записать в следующем виде

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = (\ell_0, h_0(x(0)) + (\ell_1, h_1(x(T)))+ \\
+ \int_0^T [(p(t), \dot{x}(t) - f(t, x(t), u(t)) + \lambda_0 f_0(t, x(t), u(t))]dt+ \\
+ \sum_{i=1}^k \int_0^T g_i(t, x(t))d\mu_i.
\end{aligned}
$$

Аналогично тому, как это было сделано в [1], условия (2.6), (2.7) можно получить из условия стационарности функции Лагранжа как функции переменного $x(\cdot)$ в точке $\bar{x}(\cdot)$. Условие (2.8) есть необходимое и достаточное условие минимума функции Лагранжа по $u(\cdot)$ в точке $\bar{u}(\cdot)$. Теорема допускает следующую эквивалентную формулировку [10].

Теорема 2.2. *Пусть $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)) = \bar{\omega}$ оптимальный управляемый процесс в задаче (2.1)–(2.5). Тогда существуют такие не равные одновременно нулю числа $\lambda_0 \geqslant 0$, векторы $\ell_0 \in \mathbb{R}^{S_0}$, $\ell_1 \in \mathbb{R}^{S_1}$, вектор-функция ограниченной вариации $p(t)$ и неотрицательные регулярные меры $\mu_i, i = \overline{1, k}$, сосредоточенные на множествах T_i, что выполнены следующие условия:*

а) при $u(\cdot) = \bar{u}(\cdot)$ вектор-функция $\bar{x}(\cdot)$ является стационарной точкой функции Лагранжа как функции $x(\cdot)$;

б) при $x(\cdot) = \bar{x}(\cdot)$ функция Лагранжа достигает абсолютного минимума по $u(\cdot)$ в точке $\bar{u}(\cdot)$.

Задача оптимального управления со смешанными и фазовыми ограничениями

Далее будет сформулирована теорема о необходимых условиях оптимальности для задач оптимального управления со смешанными и фазовыми ограничениями. Эта теорема показывает, когда в общем случае интегральные уравнения для сопряженных функций могут быть записаны как система дифференциальных уравнений с разрывной правой частью .

Сформулируем задачу оптимального управления со смешанными и фазовыми ограничениями. Требуется найти максимум функционала, определенного на заданном интервале $[0, T]$, состоящего из интегрального и терминального слагаемых:

$$J = \int_0^T F(t, x, u)dt + \Phi(x(T), T), \tag{2.11}$$

при следующих динамических условиях:

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(0) = x^0, \tag{2.12}$$

здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_r)$, $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$,
смешанных ограничениях

$$g(t, x(t), u(t)) \geqslant 0, \quad t \in [0, T], \tag{2.13}$$
$$\text{где } g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s,$$

фазовых ограничениях

$$\begin{gathered} h(t, x(t)) \geqslant 0, \quad t \in [0, T], \\ \text{здесь } h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q, \end{gathered} \tag{2.14}$$

терминальных условиях, заданных системой ограничений типа неравенств и равенств соответственно

$$a(x(T), T) \geqslant 0; \tag{2.15}$$
$$b(x(T), T) = 0, \tag{2.16}$$
$$\text{здесь } a : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\ell, \quad b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^r.$$

Все функции непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов. Градиенты функций $a(x(T), T)$ и $b(x(T), T)$ линейно независимы, если $x(T)$ таково, что $a(x(T), T) = 0$.

Введем функцию Понтрягина задачи (2.11)-(2.16),

$$H = \lambda_0 F(t, x, u) + (\lambda, f(t, x, u))$$

и функцию Лагранжа

$$L(t, x, u, \lambda_0, \lambda, \mu, \nu) = H(t, x, u, \lambda_0, \lambda) + (\mu, g(t, x, u)) + (\nu, h(t, x)).$$

Теорема 2.3. *Пусть (x^*,u^*)— оптимальный процесс в задаче (2.11)-(2.16) на отрезке $[0,T]$, значение T— фиксировано, u^*— непрерывно слева, значение управления в точке разрыва задается левым пределом. Предположим, что оптимальное управление $u^*(t)$ имеет конечное число разрывов. Тогда существуют неотрицательная константа λ_0, кусочно-абсолютно-непрерывная сопряженная функция $\lambda(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$; кусочно-непрерывные функции $\mu(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^s$, $\nu(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^q$; векторы $\eta(\tau) \in \mathbb{R}^q$; $\alpha \in \mathbb{R}^l$; $\beta \in \mathbb{R}^r$; $\gamma \in \mathbb{R}^q$, не равные нулю одновременно для любого $t \in [0,T]$, так что выполнены условия:*
почти всюду на $[0,T]$ выполняется принцип максимума

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in \Omega(t,x^*(t))} H(t, x^*(t), u, \lambda_0, \lambda(t)), \quad \text{п.в. } t \in [0,T], \tag{2.17}$$

здесь $\Omega(t,x) = \{u \in \mathbb{R}^m; g(t,x,u) \geqslant 0\}$,
условие стационарности по u функции Лагранжа

$$L_u^*[t] = H_u^*[t] + \mu g_u^*[t] = 0, \tag{2.18}$$

где $L_u^*(t) = \frac{\partial L}{\partial u}(t, x^*(t), u^*(t), \lambda_0, \lambda, \mu, \nu)$— частная производная L по u, вычисленная вдоль оптимального процесса.

Сопряженная вектор-функция $\lambda(t)$ почти всюду удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\dot{\lambda}(t) = -L_x^*[t]. \tag{2.19}$$

Полные производные по t функций H и L совпадают вдоль оптимального процесса и равны частной производной по t функции L

$$\frac{dH^*[t]}{dt} = \frac{dL^*[t]}{dt} = \frac{\partial L^*[t]}{\partial t}. \tag{2.20}$$

Множители Лагранжа, вектор-функции $\mu(t)$, $\nu(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} &\mu_i(t)g^*[t] = 0, \quad \mu_i(t) \geqslant 0, \quad i = \overline{1,s}, \\ &\nu_i(t)h^*[t] = 0, \quad \nu_i(t) \geqslant 0, \quad i = \overline{1,q}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

В конечный момент времени T выполнено терминальное условие трансверсальности

$$\lambda(T^-) = -\lambda_0 \Phi_x^*[T] + \alpha a_x^*[T] + \beta b_x^*[T] + \gamma h_x^*[T] \tag{2.22}$$

при этом $\alpha \geqslant 0$, $\gamma \geqslant 0$, $\alpha a_x^*[T] = 0$, $\gamma h_x^*[T] = 0$. В любой точке τ, котора является точкой контакта траектории с границей, выполняются услови скачка для сопряженных функций и функции Понтрягина.

$$\lambda(\tau^-) = \lambda(\tau^+) + \eta(\tau)\frac{\partial h^*}{\partial x}[\tau]; \tag{2.23}$$

$$H^*(\tau^-) = H^*[\tau^+] - \eta(\tau)\frac{\partial h^*}{\partial t}[\tau], \tag{2.24}$$

здесь

$$\eta(\tau) \geqslant 0, \qquad \eta(\tau)h^*[\tau] = 0, \tag{2.25}$$

τ^+, τ^- обозначают левые и правые пределы соответственно.

Замечание 2.1. Условие, состоящее в том, что не все множители Лагранжа равны нулю одновременно для любого $t \in [0, T]$, может играть важную роль в исследовании двух различных случаев при построении решения— регулярном $\lambda_0 = 1$ и нерегулярном $\lambda_0 = 0$.

Замечание 2.2. Условия (2.20) и (2.23) показывают, что если исходная задача автономна, т.е. функции F, f, h, g не зависят явно от $t \in [0, T]$, то функция Понтрягина является постоянной вдоль оптимальной траектории.

Сформулируем теорему о существовании оптимального решения, которая называется теоремой Филиппова-Чезари. Для этого нам необходимо ввести два множества:
множество допустимых значений управления

$$\Omega(x, t) = \{u \in \mathbb{R}^m : g(x, u, t) \geqslant 0\} \subset \mathbb{R}^m,$$

множество достижимости

$$N(x, t) = \{F(x, u, t) + \gamma, f(x, u, t) | \gamma \leqslant 0, u \in \Omega(x, t)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Теорема 2.4 (о существовании решения)

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.6) со свободным временем $T \in [T_1, T_2]$. Предположим, что функции F, f, g, h, s, a, b непрерывны по совокупности всех своих аргументов во всех точках $(x, u, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [T_1, T_2]$ и существует хотя бы один допустимый процесс. Предположим, что $N(x, t)$— выпуклое множество для всех $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [T_1, T_2]$. Предположим далее, что выполнены условия ограниченности, а именно, что существует $\delta > 0$, такое, что $\|x(t)\| < \delta$ для всех допустимых пар $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$ и t, и что существует $\delta_1 > 0$, такое, что $\|u\| < \delta_1$ для всех $u \in \Omega(x, t)$ при условии, что $\|x\| < \delta$.

Тогда существует оптимальный процесс $\bar{\omega} = (\bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $t \in [0, \bar{T}]$, причем управление $\bar{u}(t)$ является измеримой функцией.

Доказательство теорем существования решения можно найти в работах Олеха [7], Рокафеллара [8] и др. Заметим, что из этих теорем следует существование измеримого управления, хотя в большинстве приложений мы имеем дело с кусочно- непрерывным управлением. Если множество $N(x,t)$ не является выпуклым для некоторых точек $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, то оптимального решения может не существовать. В этом случае вводится понятие обобщенного управления [6].

Обычно для формулировки достаточных условий оптимальности делаются дополнительные предположения о выпуклости или вогнутости функций и множеств в зависимости от того, решается задача на минимум или на максимум.

Теоремы о достаточных условиях оптимальности

Здесь мы сформулируем теорему о достаточных условиях для регулярного случая, когда $\lambda_0 = 1$.

Теорема 2.5. *Пусть $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$— допустимая пара в задаче (2.1)–(2.6) на фиксированном конечном отрезке $[0,T]$. Если существует кусочно-непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, такая, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$ выполнены следующие условия:*

$$\begin{gathered} H(t,\bar{x}(t),\bar{u}(t),\lambda(t),t) - H(t,x(t),u(t),\lambda(t),t) \geqslant \dot{\lambda}(t)[x(t)-\bar{x}(t)] \\ \text{для почти всех } t \in [0,T], \end{gathered} \tag{2.26}$$

условия скачка во всех точках разрыва функции $\lambda(t)$

$$[\lambda(\tau^-) - \lambda(\tau^+)][x(\tau) - \bar{x}(\tau)] \geqslant 0, \tag{2.27}$$

и условия трансверсальности

$$\lambda(T)[x(T) - \bar{x}(T)] \geqslant S(x(T),T) - S(\bar{x}(t),T), \tag{2.28}$$

то процесс $\bar{\omega} = (\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$— оптимальный.

Эта теорема для случая непрерывной функции $\lambda(t)$, в котором отсутствуют условия скачка, была доказана Лейтманом и Сталфордом , а с учетом возможного разрыва сопряженной функции - Зайерштадтом [9]. Эта теорема, как видно из формулировки, не использует предположения о вогнутости или выпуклости. Однако условия этой теоремы могут быть проверены только в том случае, если найдена функция $\lambda(t)$, которая определяется согласно теореме 2.3.

Следующие две теоремы гарантируют достаточные условия оптимальности при условии, что максимизируемая функция Гамильтона является вогнутой по x или функция Понтрягина вогнута по x.

Теорема 2.6. *Пусть $\{\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)\}$— допустимый процесс в задаче (2.1)-(2.6) с фиксированным T. Пусть существуют кусочно-непрерывно дифференцируемая функция $\lambda(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, кусочно-непрерывные функции $\mu(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^s$ и $\nu(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^q$, такие, что выполняются условия (2.17)-(2.21) теоремы 2.3 в предположении, что $\lambda_0 = 1$. Предположим далее, что существуют $\alpha \in \mathbb{R}^{\ell}$, $\beta \in \mathbb{R}^{\ell_1}$, такие, что выполняются условия (2.22), и пусть во всех точках разрыва τ_i функции $\lambda(\cdot)$ существуют $\eta(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$, такие, что имеют место условия (2.23), (2.25). Если при этом функция Гамильтона*

$$\mathcal{H}(x,\lambda,t) = \max_{u \in \Omega(x,t)} H(x,u,\lambda,t) \tag{2.29}$$

является вогнутой по x для всех $(\lambda(t),t)$, функция $S(x,T)$— вогнута по x, функции $g(x,u,t)$, $h(x,t)$,$a(x,t)$— квазивогнуты по x, функция $b(x,t)$— линейна по x, тогда процесс $\{\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)\}$ является оптимальным в задаче (2.1)-(2.6).

Теорема 2.7. *Теорема 2.6 остается справедливой, если в ней вогнутость функции Гамильтона $\mathcal{H}(x,\lambda,t)$ по x заменить на вогнутость функции Понтрягина по x,u для всех $(\lambda(t),t)$.*

Заметим, что в теоремах 2.6, 2.7 здесь не требуется выполнения условий (2.20), (2.24) теоремы 2.4.

Замечание 2.3. Если выполнены все предположения теоремы 2.6 и если имеет место строгое неравенство (2.26) для всех $x(t) \neq \bar{x}(t)$, тогда оптимальная траектория единственна.

Замечание 2.4. Если выполнены предположения теоремы 2.5 и функция Гамильтона строго выпукла по x, тогда оптимальная траектория $\bar{x}(t)$ единственна.

Замечание 2.5. В замечаниях 2.3 и 2.4 не говорится о единственности оптимального управления.

Замечание 2.6. В работе [10] фазовые ограничения $h(x(t),t) \geqslant 0$, $t \in [0,T]$ заменены на изопериметрические

$$\int_0^T [\min\{0, h(x(t),t)\}]^2 dt = 0. \tag{2.30}$$

Ясно, что это ограничение может быть преобразовано с помощью введения новой функции состояния

$$y(t) = \int_0^t [\min\{0, h(x(s),s)\}]^2 ds \tag{2.31}$$

так, что

$$\dot{y}(t) = [\min\{0, h(x(t), t)\}]^2,$$
$$y(0) = y(T) = 0. \tag{2.32}$$

С помощью такого преобразования мы переходим к стандартной задаче оптимального управления без фазовых ограничений. Тогда в регулярном случае ($\lambda_0 = 1$) функция Понтрягина будет определяться выражением

$$\widehat{H} = F + \widehat{\lambda} f + \bar{\lambda}[\min\{0, h(x, t)\}]^2. \tag{2.33}$$

Максимизация по $u \in \Omega(x, t)$ функции H и $\widehat{H}$ представляют эквивалентную задачу.

Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x}[\min\{0, h(x, t)\}]^2 = 2h_x(x, t)\min\{0, h(x, t)\} = 0. \tag{2.34}$$

Уравнение для сопряженной функции —

$$\dot{\widehat{\lambda}} = -F_x - \widehat{\lambda} f_x - \mu g_x, \quad \dot{\bar{\lambda}} = 0, \tag{2.35}$$

а в исходной задаче это уравнение имеет вид

$$\dot{\lambda} = -F_x - \lambda f_x - \mu g_x - \nu h_x. \tag{2.36}$$

Сделанные выше замечания указывают на то, что при замене неравенства на изопериметрическое ограничение могут появиться нерегулярные решения, если фазовые ограничения являются активными.

На аналогичной идее основано следующее преобразование, при котором фазовое ограничение $h(x, t)$ заменяется изопериметрическим

$$\int_0^T \max\{0, -h(x, t)\} dt = 0, \tag{2.37}$$

а затем недифференцируемый интегранд аппроксимируется последовательностью гладких функций, которые сходятся к $\max\{0, -h(x, t)\}$.

Рассмотрим примеры, иллюстрирующие применение теорем (2.1), (2.3) о необходимых условиях оптимальности в задачах с фазовыми ограничениями.

§3. Примеры использования необходимых условий оптимальности для решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями

В этом параграфе приведем примеры, иллюстрирующие применение принципа максимума для определения оптимального процесса в задачах с фазовыми ограничениями.

Пример 1. Требуется найти минимум функционала

$$J(u(\cdot)) = \frac{1}{2}\int_0^1 (u^2 + x^2)dt \to \inf \tag{3.1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\dot{x} = u, \quad u(t) \in \mathbb{R}, \\ &x(t) \geq c, t \in [0,1], \\ &x(0) = 1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

При отсутствии фазового ограничения $x(t) \geq c$, используя принцип максимума для задачи со свободным правым концом, легко найти оптимальное решение задачи

$$x^*(t) = \frac{e^t + e^{2-t}}{e^2+1}, \quad u^*(t) = \dot{x}^*(t);$$

Функция $x^*(t)$ монотонно убывает и принимает минимальное на отрезке $[0,T]$ значение при $t = 1$:

$$x^*(1) = \frac{2e}{e^2+1}.$$

Решим задачу (3.1)–(3.2) с фазовыми ограничениями, потребовав, чтобы в условии $g(x) = c - x$ параметр c удовлетворял неравенству

$$\frac{2e}{e^2+1} < c < 1.$$

Для решения задачи применим теорему 2.1. Функция Понтрягина и сопряженная система имеют следующий вид:

$$H(t,x,u,p,\lambda_0) = pu - \frac{\lambda_0(u^2+x^2)}{2}, \tag{3.3}$$

$$p(t) = -\int_t^1 \lambda_0 x d\tau + \int_t^1 d\mu, \quad p(1) = d\mu[1]. \tag{3.4}$$

В этой задаче $h_0(x(0)) = x(0) - 1$, $h_1 = 0$, поэтому $p(0) = \ell_0$, $p(1) = d\mu[1]$. Рассмотрим случай $\lambda_0 = 0$. В этом случае при t, достаточно близких к 0, $x(t) > c$, $d\mu = 0$, поэтому $p(t) = 0$, т.е. все множители Лагранжа на некотором интервале равны нулю. Противоречие показывает, что в задаче нет нерегулярных решений, поэтому положим $\lambda_0 = 1$. Из принципа максимума следует, что оптимальное управление удовлетворяет условиям:

$$u^*(t) = p(t), \quad \dot{x}^*(t) = p(t). \tag{3.5}$$

Пусть мера μ абсолютно непрерывна, тогда она имеет почти всюду производную $\frac{d\mu}{dt} = \mu'$, которая является абсолютно непрерывной интегрируемой функцией. Тогда сопряженная функция является решением дифференциального уравнения

$$\dot{p}(t) = x - \mu', \quad \mu' \geq 0, \quad \mu'(x - c) = 0, \quad x - c \geq 0. \tag{3.6}$$

Исследуем движение по фазовой границе $x = c$. В этом случае сопряженная функция $p(t) = 0$, а плотность меры μ' определяется выражением

$$\mu' = \begin{cases} 0, & x > c, \\ x, & x = c. \end{cases} \tag{3.7}$$

Используя (3.2) и (3.6), получим $\ddot{x} = x - \mu'$. Если $x(t) > 0$, то функция $x(t)$ удовлетворяет уравнению $\ddot{x} = x$, а его решением является функция $x(t) = Ae^t + Be^{-t}$.

Так как $\dot{x}$ является непрерывной функцией, то в первой точке τ контакта $x(t)$ с фазовым ограничением выполняется условие $x(\tau) = c$, производные функции $x(t)$ справа и слева совпадают, т.е. $\dot{x}(\tau) = 0$. Итак, мы имеем систему уравнений для определения параметров движения A, B, τ:

$$\begin{cases} x(\tau) = Ae^\tau - Be^{-\tau} = 0, \\ x(0) = A + B = 1, \\ x(\tau) = Ae^\tau + Be^{-\tau} = C. \end{cases} \tag{3.8}$$

Решая систему (3.8), находим значения постоянных A, B, τ:

$$A = \frac{1 \pm \sqrt{1 - c^2}}{2}, \quad B = \frac{1 \mp \sqrt{1 - c^2}}{2}, \quad \tau = \ln \frac{c}{1 \pm \sqrt{1 - c^2}}.$$

Вычислим функцию Понтрягина вдоль оптимального решения. Если $t \in [0, \tau]$, то

$$H(t) = -2AB = \frac{-[(1 \pm \sqrt{1 - c^2})(1 \mp \sqrt{1 - c^2})]}{2} = -\frac{c^2}{2}.$$

Если $t \in [\tau, 1]$, то

$$H(t) = -\frac{c^2}{2}.$$

Приведенные вычисления показывают, что функция Понтрягина является постоянной функцией вдоль оптимальной траектории. Этого и следовало ожидать в силу автономности поставленной задачи.

Пример 2. Требуется найти минимум функционала

$$J(u) = \int_0^T (x_2 + c_1 u_1 + c_2 x_2 u_2) dt \tag{3.9}$$

при динамических ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\beta x_1 x_2 - u_1, \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 x_2 - \gamma x_2 - x_2 u_2, \end{cases} \tag{3.10}$$

фазовых ограничениях

$$\begin{aligned} &x_i(t) \geq 0, \quad i = 1, 2, \\ &x_2(t) \leq A, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \tag{3.11}$$

ограничениях на функции управления

$$0 \leq u_i(t) \leq B_i, \quad t \in [0, T] \quad \text{п.в.}, \quad i = 1, 2, \tag{3.12}$$

начальных условиях

$$x_i(0) = N_i, \quad i = 1, 2. \tag{3.13}$$

Здесь $c_i, \gamma, \beta, A, B_i, N_i, i = 1, 2$ — неотрицательные заданные параметры задачи.

Для решения этой задачи используем теорему 2.3 главы 1. Составим функцию Понтрягина

$$\begin{aligned} H(t, x, u, p, \lambda_0) = -\lambda_0(x_2 + c_1 u_1 + c_2 x_2 u_2) + p_1(-\beta x_1 x_2 - u_1) + \\ + p_2(\beta x_1 x_2 - \gamma x_2 - x_2 u_2), \end{aligned} \tag{3.14}$$

где $U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u_i \leq B_i, i = 1, 2\}$.

Рассмотрим нерегулярный случай $\lambda_0 = 0$.

Функция Понтрягина примет вид

$$H(t,x,u,p) = p_1(-\beta x_1 x_2 - u_1) + p_2(\beta x_1 x_2 - \gamma x_2 - x_2 u_2).$$

Для нахождения оптимального управления решим задачу

$$[-p_1 u_1 - p_2 x_2^* u_2] \to \max_{u \in U} \quad \text{или, иначе,} \quad [p_1 u_1 + p_2 x_2^* u_2] \to \min_{u \in U}. \qquad (3.15)$$

В силу аддитивности минимизируемой функции и независимости ограничений на управление данная задача разбивается на две

$$1) \quad p_1 u_1 \to \min_{0 \le u_1 \le B_1} \qquad 2) \quad p_2 x_2^* u_2 \to \min_{0 \le u_2 \le B_2}.$$

Найдем оптимальное управление, используя ПМП:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & p_1(t) > 0, \\ B_1, & p_1(t) < 0, \\ [0, B_1], & p_1(t) = 0, \end{cases} \quad u_2^*(t) = \begin{cases} 0, & p_2(t) x_2^*(t) > 0, \\ B_2, & p_2(t) x_2^*(t) < 0, \\ [0, B_2], & p_2(t) = 0. \end{cases} \qquad (3.16)$$

Сопряженные функции удовлетворяют системе интегральных уравнений:

$$p_1(t) = \beta \int_t^T x_2^*(p_2 - p_1) d\tau + \int_t^T d\mu_1,$$

$$p_2^*(t) = \int_0^T [\beta x_1^*(p_2 - p_1) - p_2(\gamma + u_2^*)] d\tau + \int_t^T d\mu_2 - \int_t^T d\mu_3. \qquad (3.17)$$

Предположим,что меры μ_i имеют плотность, т.е.

$$d\mu_i = \rho_i dt, \quad \rho_i \ge 0, \quad i = 1,2,3, \qquad (3.18)$$

где ρ_i— плотность меры. Продифференцируем равенства (3.17) по t, учитывая предположение (3.18), получим

$$\dot{p}_1(t) = x_2^* \beta (p_1 - p_2) - \rho_1,$$
$$\dot{p}_2(t) = p_1 \beta x_1^* - p_2(\beta x_1^* - \gamma - u_2^*) - \rho_2 + \rho_3.$$

Неотрицательные меры $d\mu_i \geq 0, i = 1, 2, 3$, определенные на множествах T_i, удовлетворяют условиям

$$x_1^* d\mu_1 = 0, \quad x_2^* d\mu_2 = 0, \quad (x_2^* - A) d\mu_3 = 0. \tag{3.19}$$

Используя (3.18) и учитывая то, что $dt > 0$, получим

$$x_1^* \rho_1 = 0, \quad x_2^* \rho_2 = 0, \quad (x_2^* - A)\rho_3 = 0. \tag{3.19'}$$

Условия трансверсальности имеют вид

$$\begin{aligned} p_1(T) &= \mu_1[T], \\ p_2(T) &= \mu_2[T] - \mu_3[T]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Рассмотрим регулярный случай $\lambda_0 = 1$. Функция Понтрягина в регулярном случае запишется в виде

$$H(t, x, u, p) = -x_2 - c_1 u_1 - c_2 x_2 u_2 + p_1(-\beta x_1 x_2 - u_1) + p_2(\beta x_1 x_2 - \gamma x_2 - x_2 u_2).$$

Запишем принцип максимума Понтрягина:

$$\max_{u \in U} H(t, x^*, u, p) = \max_{u \in U} [-c_1 u_1 - c_2 x_2^* u_2 - p_1 u_1 - p_2 x_2^* u_2 - x_2^* -$$
$$- p_1 \beta x_1^* x_2^* + p_2(\beta x_1^* x_2^* - \gamma x_2)],$$

здесь $U = \{u \in \mathbb{R}^2; 0 \leq u \leq B_1, 0 \leq u_2 \leq B_2\}$,
или

$$\max_{0 \leq u_1 \leq B_1, 0 \leq u_2 \leq B_2} [-(c_1 u_1 + c_2 x_2^* u_2) - p_1 u_1 - p_2 x_2^* u_2] =$$
$$= \max_{0 \leq u_1 \leq B_1} [(-c_1 - p_1) u_1] + \max_{0 \leq u_2 \leq B_2} [(-c_2 - p_2) x_2^* u_2].$$

Оптимальное управление имеет вид

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & -c_1 - p_1 < 0, \\ B_1, & -c_1 - p_1 > 0, \\ [0, B_1], & -c_1 - p_1 = 0, \end{cases} \quad u_2^*(t) = \begin{cases} 0, & (-c_2 - p_2) x_2^* < 0, \\ B_2, & (-c_2 - p_2) x_2^* > 0, \\ [0, B_2], & (-c_2 - p_2) x_2^* = 0. \end{cases} \tag{3.21}$$

Сопряженные функции удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$p_1(t) = \beta \int_t^T x_2^*(p_2 - p_1)d\tau + \int_t^T d\mu_1,$$

$$p_2(t) = \int_0^T (-1 - c_2 u_2^* - p_1 \beta x_1^* + p_2(\beta x_1^* - \gamma - u_2^*))d\tau +$$

$$+ \int_t^T d\mu_2 - \int_t^T d\mu_3.$$

Продифференцирусм предыдущие равенства, учитывая предположение (3.18), получим

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= \beta x_2^*(p_1 - p_2) - \rho_1, \\ \dot{p}_2(t) &= 1 + c_2 u_2^* + p_1 \beta x_1^* - p_2(\beta x_1^* - \gamma - u_2^*) - \rho_2 + \rho_3. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Неотрицательные меры, определенные на множествах T_i, удовлетворяют условиям (3.19), (3.19') и условиям трансверсальности (3.20).

Построение аналитического решения этой нелинейной задачи представляет известные трудности. Здесь мы сформулировали только краевую задачу принципа максимума, которая может быть решена численными методами.

Для дальнейшего анализа решения этой задачи сделаем предположение, что $x_1(t) \gg x_2(t)$. В этом случае величина $x_1(t)$ остается почти постоянной, равной N, и мы приходим к следующей более простой задаче.

Пример 3. Требуется найти минимум функционала

$$J(u) = \int_0^T (x + cxu)dt \tag{3.23}$$

при динамических ограничениях

$$\dot{x} = \alpha x - xu, \quad \text{где} \quad \alpha = N\beta - \gamma, \tag{3.24}$$

фазовых ограничениях

$$0 \leq x \leq A, \tag{3.25}$$

ограничениях на функцию управления

$$0 \le u \le B \tag{3.26}$$

и начальном условии

$$x(0) = x_0. \tag{3.27}$$

Считаем, что параметры задачи c, α, A, B положительны, причем $\alpha < B$. Для решения задачи будем использовать теорему 2.3 главы 1. Составим функцию Понтрягина

$$\begin{aligned} H(t,x,u,p,\lambda_0) &= -\lambda_0(x + cxu) + p(\beta N x - \gamma x - xu) = \\ &= -\lambda_0(x + cxu) + p(\alpha x - xu). \end{aligned} \tag{3.28}$$

Рассмотрим нерегулярный случай $\lambda_0 = 0$, в котором краевая задача принципа максимума имеет вид

$$\dot{x}^* = (\alpha - u^*(t))x^*(t), \tag{3.29}$$

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & px^* > 0, \\ B, & px^* < 0, \\ [0, B], & px^* = 0. \end{cases} \tag{3.30}$$

Интегральное уравнение для сопряженной функции имеет вид

$$p(t) = \int_t^T p(\alpha - u^*)d\tau + \int_t^T d\mu_2 - \int_t^T d\mu_3$$

или в дифференциальной форме с учетом существования плотности меры ρ_i —

$$\dot{p}(t) = -p(\alpha - u^*) - \rho_2 + \rho_2. \tag{3.31}$$

Условия неотрицательности меры, определенной на множествах T_i, —

$$\begin{aligned} &x^* d\mu_2 = 0, \\ &(x^* - A)d\mu_3 = 0, \quad \text{где} \quad d\mu_i \ge 0, i = 2, 3, \end{aligned}$$

или с учетом существования плотности меры —

$$\begin{aligned} &\rho_2 x = 0, \\ &\rho_3(x - A) = 0, \quad \text{где} \quad \rho_i \ge 0, i = 2, 3. \end{aligned} \tag{3.32}$$

Условие трансверсальности—

$$p(T) = \mu_2[T] - \mu_3[T]. \tag{3.33}$$

Возможность существования нерегулярного решения этой задачи предоставляем обосновать читателю.

Рассмотрим регулярный случай $\lambda_0 = 1$.

Тогда функция Понтрягина примет вид:

$$H(t, x, u, p) = -x(1 + cu) + px(\alpha - u).$$

Оптимальное управление согласно принципу максимума определяется выражением

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \Phi(t) < 0, \\ B, & \Phi(t) > 0, \\ [0, B], & \Phi(t) = 0, \end{cases} \tag{3.34}$$

где $\Phi(t) = -(c + p)x^*$. Запишем уравнение для сопряженной функции:

$$p(t) = \int\limits_t^T (-1 - cu^* + p(\alpha - u^*))d\tau + \int\limits_t^T d\mu_2 - \int\limits_t^T d\mu_3 \tag{3.35}$$

или с учетом существования плотности меры в дифференциальной форме:

$$\dot{p}(t) = 1 + cu^* - p(\alpha - u^*) - \rho_2 + \rho_3. \tag{3.36}$$

Условия неотрицательности меры, определенной на множествах T_i:

$$\begin{aligned} & x^* d\mu_2 = 0, \\ & (x^* - A)d\mu_3 = 0, \quad \text{где} \quad d\mu_i \geq 0, i = 2, 3. \\ & \text{или} \\ & x^* \rho_2 = 0, \\ & (x^* - A)\rho_3 = 0, \quad \text{где} \quad \rho_i \geq 0, i = 2, 3. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Условие трансверсальности имеет вид

$$p[T] = \mu_2[T] - \mu_3[T]. \tag{3.38}$$

Анализ траектории.

Согласно принципу максимума оптимальное управление определяется условием (3.34). Пусть на некотором участке траектории $u^* = 0$, тогда, решая $\dot{x} = \alpha x$, найдем $x(t) = ce^{\alpha t}$ и с учетом начального условия

$$x(t) = x_0 e^{\alpha t}. \tag{3.39}$$

Если $u^* = B$ на некотором интервале, то $\dot{x} = (\alpha - B)x$. Общее решение этого уравнения представимо в виде

$$x(t) = ce^{(\alpha - B)t}$$

или с учетом начальных условий $x(0) = x_0$

$$x(t) = x_0 e^{(\alpha - B)t}. \tag{3.40}$$

Пусть $u^*(t) = 0$, $t \in [0, \tau_1]$, тогда имеют место следующие случаи:

1) $x(t)$ растет до тех пор, пока $x^*(\tau_1) = A$. С учетом (3.39) найдем τ_1:

$$x_0 e^{\alpha \tau_1} = A$$

или

$$\tau_1 = \alpha - 1 \ln A x_0^{-1} \leq T.$$

Учитывая уравнение для сопряженной функции и то, что $\rho_i = 0$, получим

$$\dot{p}(t) = \lambda_0 - \alpha p.$$

Решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$p(t) = De^{-\alpha t} + \frac{\lambda_0}{\alpha}.$$

Для того чтобы на этом участке выполнялся принцип максимума, необходимо, чтобы $\Phi(t) < 0$, т.е. $\lambda_0 c + p > 0$. Отсюда найдем неравенство, которому должна удовлетворять постоянная D:

$$D > -\alpha^{-1}(\lambda_0 + c)e^{\alpha t}, \quad t \in [0, \tau_1] \quad \text{или} \quad D > \frac{(\lambda_0 + c)}{\alpha}.$$

Предположим, что на участке $[\tau_1, \tau_2]$ происходит залегание функции $x(t)$ на границе фазового ограничения, это означает что

$$x(t) = A, \quad t \in [\tau_1, \tau_2].$$

Из уравнения движения (3.24) следует, что $u^* = \alpha$. Это возможно, если $\Phi(t) = 0$, т.е. $\lambda_0 c + p = 0$ или $p(t) = -\lambda_0 c$. Используем уравнение сопряженной переменной (3.36) для нахождения плотности меры ρ_3:

$$0 = \lambda_0 + \lambda_0 \alpha c + \rho_3,$$
$$\rho_3 = -\lambda_0(1 + \alpha c).$$

Следовательно, $\rho_3 \leq 0$. Это возможно тогда, если $\lambda_0 = 0$, т.е. в нерегулярном случае.

Таким образом, согласно теореме 2.1 главы 1, траектория $x^*(t) = A$, где $t \in [\tau_1, \tau_2]$ не удовлстворяет принципу максимума, т.е. отрезок $[\tau_1, \tau_2]$ вырождается в точку $\tau = \tau_1 = \tau_2$.

Пусть оптимальное управление $u^*(t) = B$, $t \in [\tau, T]$, тогда соответствующая траектория определяется выражением

$$x^*(t) = x(\tau)e^{(\alpha - B)(t-\tau)} = Ae^{(\alpha - B)(t-\tau)}.$$

Уравнение для сопряженной функции с учетом того, что $\rho_3 = 0$ и $\rho_2 = 0$, имеет вид

$$\dot{p}(t) = \lambda_0(1 + cB) - p(\alpha - B).$$

Решая данное уравнение, получим

$$p(t) = Fe^{(B-\alpha)t} + \frac{\lambda_0(1 + cB)}{(\alpha - B)}.$$

В этом случае согласно принципу максимума Понтрягина необходимо, чтобы выполнялось следующее неравенство

$$\Phi(t) > 0, \quad \text{т.е.} \quad (-\lambda_0 c - p)x^* > 0.$$

В силу фазового ограничения (3.25) предыдущее неравенство можно переписать в виде:

$$-\lambda_0 c - p(t) > 0 \quad \text{или} \quad p(t) < -\lambda_0 c,$$

из которого получаем неравенство, которому должна удовлетворять постоянная F:

$$F < -\lambda_0(1 + c\alpha)(\alpha - B)^{-1} e^{t(\alpha - B)}, \quad t \in [\tau, T].$$

Для построенного процесса минимизируемый функционал принимает сл дующее значение:

$$J_1(u^*(\cdot)) = \int\limits_0^T (x^* + cx^*u^*)dt = \int\limits_0^T x^* dt + \int\limits_\tau^T x^*(1+cu^*)dt =$$

$$= \int\limits_0^\tau x_0 e^{\alpha t} dt + \int\limits_\tau^T A(1+cB)e^{(\alpha-B)(t-\tau)} =$$

$$= \frac{x_0}{\alpha}(e^{\alpha\tau} - 1) + \frac{A(1+cB)}{\alpha - B}(e^{(\alpha-B)(T-\tau)} - 1).$$

Рассмотрим вторую возможность, которую нам дает принцип максимума Пусть на начальном участке $t \in [0,\tau]$ $u(t) = B$, тогда

$$x(t) = x_0 e^{(\alpha-B)t}.$$

Очевидно, что $x(t) > 0$ для любого t.

Учитывая уравнение для сопряженной функции, вид оптимального упра вления и то, что $\rho_3 = 0$, $\rho_2 \neq 0$, получим

$$\dot{p}(t) = \lambda_0(1+cB) - p(\alpha - B).$$

Решим это уравнение:

$$p(t) = De^{(B-\alpha)t} + \frac{\lambda_0(1+cB)}{(\alpha - B)}.$$

На константу D накладываются те же ограничения, что и на константу F.

Вычислим функционал вдоль этой траектории:

$$J_2(u^*) = \int\limits_0^T (1+cu^*)x^* dt = \int\limits_0^T (1+cB)x_0 e^{(\alpha-B)t} dt =$$

$$= (\alpha - B)^{-1}(1+cB)x_0(e^{T(\alpha-B)} - 1).$$

Легко видеть, что второй случай совпадает с первым при условии, что $\tau = 0$. Проверим это. Если $\tau = 0$, то $A = x_0$. Подставим данные значения в выражение для $J_1(u^*)$ и получим

$$J_1(u^*(\cdot)) = (\alpha - B)^{-1}(1+cB)x_0(e^{T(\alpha-B)} - 1),$$

$$\text{т.е.} \quad J_1(u^*(\cdot)) = J_2(u^*(\cdot)), \quad \text{при} \quad \tau = 0.$$

Сравнивая значения функционалов $J_1(u^*(\cdot))$ и $J_2(u^*(\cdot))$, видим, что оптимальным процессом является процесс $u^*(t) = B$, $x^*(t) = x_0 e^{(\alpha-B)t}$, $t \in [0,T]$.

Пример 4. Рассмотрим линейную задачу, в которой требуется найти максимум функционала

$$J(u) = \int_0^3 -x dt \to \max$$

при следующих ограничениях:

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = 1, \quad x(3) = 1,$$
$$x \geqslant 0, \quad |u| \leqslant 1.$$

В этой задаче $T = 3$, $n = m = 1$, $F = -x$, $f = u$, $s = 2$, $g = (1 + u, 1 - u)$, $q = 1$, $l = 0$, $h = x$, $l_1 = 1$, $b = x - 1$.

Легко видеть, что оптимальный процесс должен быть таким, чтобы при каждом $t \in [0,3]$ $x(t)$ было возможно малым и удовлетворяло бы фазовому ограничению $x(t) \geqslant 0$ и граничным условиям $x(0) = x(3) = 1$:

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0,1] \\ 0, & t \in [1,2]; \\ t - 2, & t \in [2,3] \end{cases} \quad \overline{u}(t) = \begin{cases} -1, & t \in [0,1] \\ 0, & t \in [1,2] \\ 1, & t \in [2,3]. \end{cases}$$

Для доказательства используем теорему 2.3 и выпишем функции Понтрягина и Лагранжа:

$$H = -x + \lambda u,$$
$$L = H + \mu_1(1 + u) + \mu_2(1 - u) + \nu x.$$

Согласно этой теореме необходимые условия оптимальности имеют вид

$$L_u = \lambda + \mu_1 - \mu_2 = 0,$$
$$\dot{\lambda} = 1 - \nu,$$
$$\mu_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \quad \mu_1(1 + u) = \mu_2(1 - u) = 0,$$
$$\nu \geqslant 0, \quad \nu x = 0, \quad \lambda(3) = \beta.$$

Рассмотрим интервал $t \in [1, 2]$, где $\overline{u}(t)$ и поэтому $\mu_1 = \mu_2 = 0$, $\lambda = 0$, $\nu = 1$. Таким образом, все множители определены и могут принимать единственное значение на интервале $[1, 2]$.

Пусть $t \in [0, 1)$. Здесь $x(t) > 0$, $\nu = 0$, $\lambda = t - 1$, т.к. $\dot{\lambda} = 1$, $\lambda(1) = 0$, $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = 1 - t$.

Аналогично, если $t \in (2, 3]$, $x(t) > 0$, $\nu = 0$, $\lambda = t - 2$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = t - 2$.

Пример 5. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\begin{aligned}
&J(u) = \int\limits_0^3 e^{-rt} u dt \to \min,\\
&\dot{x} = u, \quad x(0) = 0, \quad 0 \leqslant u \leqslant 3,\\
&x - 1 + (t-2)^2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Для $r > 0$ оптимальное решение имеет вид

$$\overline{x}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\overline{0}, 1) \\ 1 - (t-2)^2, & t \in [1, 2]; \\ 1, & t \in (2, 3] \end{cases} \quad \overline{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \in [\overline{0}, 1) \\ 2(2-t), & t \in [1, 2] \\ 0, & t \in (2, 3] \end{cases}.$$

Применим теорему 2.3 для построения оптимального решения этой задачи. Запишем необходимые условия оптимальности:

$$\begin{aligned}
&H = -e^{-rt}u + \lambda u,\\
&L = H + \mu_1 u + \mu_2(3-u) + \nu[x - 1 + (t-2)^2],\\
&L_u = -e^{-rt} + \lambda + \mu_1 - \mu_2 = 0,\\
&\dot{\lambda} = -L_x = -\nu, \quad \lambda(3) = 0,\\
&\mu_i \geqslant 0, \quad \mu_1 = \mu_2(3-u) = 0,\\
&\nu \geqslant 0, \quad \nu[x - 1 + (t-2)^2] = 0,\\
&\lambda(2^-) = \lambda(2^+) - \eta_2, \quad \eta_2 \geqslant 0,\\
&\lambda(1^-) = \lambda(1^+) - \eta_1, \quad \eta_1 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Определим множители Лагранжа, соответствующие процессу $(\overline{x}(\cdot), \overline{u}(\cdot))$. Пусть $t \in (2, 3]$, здесь $\nu = 0$, $\dot{\lambda} = 0$, $\lambda(3) = 0$, $\mu_2 = 0$, $\mu_1 = e^{-rt}$. Пусть $t \in [1, 2]$: $\mu_1 = \mu_2 = 0$, т.к. $0 < u(t) < 3$, $\lambda = e^{-rt}$, $\nu = re^{-rt}$,

$$\eta_2 = \lambda(2^-) - \lambda(2^+) = e^{-2r} > 0.$$

Пусть $t \in [0, 1)$: $\overline{u}(t) = 0$, $\mu_2 = 0$, $\nu = 0$, $\dot{\lambda} = 0$, $\lambda(t) = e^{-r}$, $\mu_1 = e^{-rt} - e^{-r}$,

$$\eta_1 = \lambda(1^-) - \lambda(1^+) = e^{-r} > 0.$$

Пример 6. Найти минимум функционала

$$J(u) = \int_0^3 2x_1 dt \to \min$$

при ограничениях : $\dot{x}_1 = x_2, \quad x_1(0) = 2,$

$\dot{x}_2 = u, \quad x_2(0) = 0, \quad |u| \leqslant 2,$

$x_1(t) \geqslant \alpha$, здесь $\alpha \leqslant 0$— действительное число.

Если $\alpha \ll 1$, то фазовое ограничение не активно и оптимальное решение должно быть таковым, чтобы $x_1(t)$ было по возможности малым:

$$\overline{x}_1(t) = 2 - t^2, \quad \overline{x}_2(t) = -2t, \quad \bar{u}(t) = -2, \quad t \in [0, 3].$$

Это решение имеет место, если $\alpha \leqslant 7$. Исследуем оптимальное решение, если параметр α изменяется от -7 до 0. Запишем функции Понтрягина, Лагранжа и необходимые условия экстремума:

$$\begin{aligned}
&H = -2x_1 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u,\\
&L = H + \mu_2(2 - u) + \mu_1(2 + u) + \nu(-\alpha + x_1),\\
&L_u = \lambda_2 + \mu_1 - \mu_2 = 0,\\
&\dot{\lambda}_1 = -L_{x_1} = 2 - \nu, \quad \dot{\lambda}_2 = -L_{x_2} = \lambda_1,\\
&\mu_i \geqslant 0, \quad \mu_1(2 + u) = \mu_2(2 - u) = 0,\\
&\nu \geqslant 0, \quad \nu(x_1 - \alpha) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Функция $\lambda_2(t)$ является непрерывной, а $\lambda_1(t)$ может иметь скачок в точках разрыва:

$$\lambda_1(\tau^-) = \lambda_1(\tau^+) + \eta, \quad \eta \geqslant 0.$$

Для $\alpha \in (-7, -2, 5]$ точка переключения управления определяется выражением

$$\sigma = 3 - \frac{1}{4}\sqrt{56 + 8\alpha},$$

а оптимальное решение имеет вид

$$\overline{x}_1(t) = \begin{cases} 2 - t, & t \in [0, \sigma] \\ 2 + t^2 + 2\sigma^2 - 4\sigma t, & t \in [\sigma, 3] \end{cases}; \quad \overline{x}_2(t) = \begin{cases} -2t, & t \in [0, \sigma], \\ 2(t - 2\sigma), & t \in [\sigma, 3]. \end{cases}$$

Найдем множители Лагранжа на каждом из интервалов, используя необходимое условие оптимальности:

$$
\begin{aligned}
& t \in [0, \sigma), \quad \mu_2 = 0, \quad \mu_1 = -\lambda_2 \geqslant 0, \quad \nu = 0, \\
& \lambda_2(t) = -3\sigma + (\sigma + 4)t - t^2. \\
& t \in [\sigma, 3], \quad \lambda_2(t) = -3\sigma + (\sigma + 3)t - t^2, \quad \nu = \mu_1 = 0, \\
& \mu_2(t) = +\lambda_2(t).
\end{aligned}
$$

Если $-2,5 < \alpha \leqslant 0$, то существуют две точки переключения τ и σ:

$$0 < \sigma < \tau < 3.$$

Время τ и σ получено из условия $\overline{x}_1(\tau) = \alpha$ и $\sigma = \tau/2$:

$$
\begin{aligned}
& \tau = 2\sigma = \sqrt{4 - 2\alpha}, \\
t \in [0, \sigma), \quad & \lambda_1 = -3\sigma + 2t, \quad \lambda_2 = -2\sigma^2 + 3\sigma t - t^2, \\
& \mu_1 = -\lambda_2, \quad \mu_2 = \nu = 0. \\
t \in [\sigma, \tau), \quad & \lambda_1 = -3\sigma + 2t, \quad \lambda_2 = -2\sigma^2 + 3\sigma t - t^2, \\
& \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \lambda_2, \quad \nu = 0. \\
t \in [\tau, 3], \quad & \lambda_1 = \lambda_2 = \mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \nu = 2
\end{aligned}
$$

§4. Теорема о существовании решения в одной задаче оптимального управления

Важное место в теории экстремальных задач занимает вопрос о существовании решения. В общем случае нелинейной задачи оптимального управления эта проблема не решена. В данном параграфе приведем доказательство теоремы существования для одного частного случая выпуклой задачи оптимального управления.

Пусть требуется минимизировать функционал

$$J(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$|\dot{x}(t)| \leqslant A, \quad x(t_i) = x_i, \quad i = 0; 1. \tag{4.2}$$

Для доказательства введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} &K := \{(t,x,u) \mid t_0 \leqslant t \leqslant t_1, |x - x_1| \leqslant A|t - t_1|, \\ &|x - x_0| \leqslant A|t - t_0|, |u(t)| \leqslant A, t \in [t_0; t_1]\}, \\ &K \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad L : K \to \mathbb{R} \end{aligned} \tag{4.3}$$

и предположим, что

1) функция $L(t,x,u)$ непрерывна по совокупности аргументов в K;

2) множество K компактно;

3) отображение $K \to L(t,x,u)$ выпукло по u;

4) вектор-функция $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t))$ абсолютно непрерывна и для каждой функции $x(t)$ существует своя константа c, такая, что $|\dot{x}(t)| \leqslant c$, п.в. $t \in [t_0; t_1]$.

Заметим, что последнее предположение означает, что функция $x(t)$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.

$$|x(t') - x(t'')| \leqslant c|t'' - t'|, \quad \forall t', t'' \in [t_0; t_1],$$

и т.к. абсолютно-непрерывная функция является первообразной своей производной, то

$$x(t') - x(t'') = \int_{t'}^{t''} \dot{x}(s)ds.$$

Обозначим через D множество допустимых липшицевых функций задачи (4.1)-(4.2):

$$D := \{x(t) \in \mathrm{Lip} \mid |\dot{x}(t)| \leqslant A, \quad x(t_i) = x_i, \quad i = 0; 1\}. \tag{4.4}$$

Теорема. *Пусть в задаче (4.1)-(4.2) выполнены предположения выпуклости и гладкости относительно $L(t,x,u)$. Тогда существует функция $x(t) \in D$, которая является решением задачи, т.е.*

$$J(\overline{x}(t)) \leqslant J(x(t)), \quad \forall x(t) \in D.$$

Доказательство.

А. Обозначим через C пространство функций, непрерывных на $[t_0; t_1]$, и будем рассматривать D как подмножество C. Это сделать можно, т.к. липшицева функция является непрерывной. Используя теорему Арцела, покажем, что D— компакт:

а) равномерная ограниченность множества D следует из оценки

$$|x(t)| \leqslant |x_0| + A|t_1 - t_0|;$$

б) множество D равностепенно непрерывно, т.к.

$$|x(t') - x(t'')| \leqslant A|t' - t''|, \quad \forall t', t'' \in [t_0; t_1];$$

с) покажем замкнутость множества D. Для этого возьмем произвольную последовательность $x_k(t) \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящуюся равномерно в C к функции $x(t)$. Теперь нужно доказать, что $x(t) \in D$. Перейдем к пределу в неравенстве:

$$|x_k(t') - x_k(t'')| \leqslant A|t' - t''|, \quad \forall t', t'' \in [t_0; t_1].$$

Тогда получим

$$|x(t') - x(t'')| \leqslant A|t' - t''|, \quad \forall t', t'' \in [t_0; t_1],$$

т.е. $x(t) \in D$.

Б. Из компактности D следует, что функционал (4.1) ограничен на D снизу, т.е. $J(x) \geqslant m(t_1 - t_0)$, $x \in D$, и поэтому существует число μ

$$\mu = \inf_D J(x). \tag{4.5}$$

Отсюда следует, что существует последовательность $x_k(t) \in D$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} J(x_k) = \mu$.

В силу компактности D из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность $x_{k_l}(t)$, сходящуюся к некоторой предельной функции $\overline{x}(t)$, принадлежащей множеству D. Однако из сходимости функций не следует сходимость их производных, и поэтому мы еще не знаем, будет ли справедливо равенство $\mu = J(\overline{x})$, с другой стороны, очевидно, что $J(\overline{x}) \geqslant \mu$. Далее для удобства записи обозначим подпоследовательность $x_{k_l}(t)$ через $x_k(t)$, при этом мы имеем $\lim\limits_{k\to\infty} x_k(t) = \overline{x}(t)$, $\lim\limits_{k\to\infty} J(x_k) = \mu$.

Предельная функция $\overline{x}(t)$ принадлежит D, а значит, имеет производную почти всюду на отрезке $[t_0; t_1]$.

В. Функции $\dot{x}_k(t)$ ограничены и измеримы, поэтому $\dot{x}_k(t) \in L_2([t_0; t_1])$

$$\|\dot{x}_k(t)\|_{L_2} = \Big(\int\limits_{t_0}^{t_1} |\dot{x}_k(t)|^2 dt \Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant A|t_1 - t_0|. \tag{4.6}$$

Замкнутый шар в сопряженном сепарабельном пространстве слабо компактен, отсюда следует, что последовательность $\dot{x}_k(t)$ слабо сходится к функции $\xi(t)$, т.е. для любой функции $y(t) \in L_2[t_0; t_1]$ имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{t_0}^{t_1} (\dot{y}(t), \dot{x}_k(t))\,dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} (y(t), \xi(t))\,dt. \tag{4.7}$$

В качестве функции $y(t)$ возьмем характеристическую функцию:

$$\chi(s) = \begin{cases} 1, & s \in [t_0; t], \\ 0, & s \in [t; t_1]. \end{cases}$$

Тогда мы получим следующее равенство:

$$\lim_{k \to \infty} \int_{t_0}^{t} \dot{x}_k(t) dt = \int_{t_0}^{t} \xi(\tau) d\tau, \tag{4.8}$$

которое можно продолжить следующим образом:

$$\lim_{k \to \infty} [x_k(t) - x_k(t_0)] = \overline{x}(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} \xi(t) dt. \tag{4.9}$$

Из последнего равенства следует, что почти всюду $\dot{\overline{x}}(t) = \xi(t)$. Таким образом, последовательность $\dot{x}_k(t)$ сходится слабо в $L_2([t_0; t_1])$ к функции $\dot{\overline{x}}(t)$.

Г. Используя выпуклость интегранта по u, из слабой сходимости производных получим сильную сходимость.

Теорема Мазура. *Пусть последовательность $\xi_n(t), n = 1, 2, \ldots, t \in [t_0; t_1]$ слабо сходится к функции $\xi(t)$ в банаховом пространстве B, тогда существуют такие положительные числа $\alpha_j^n : \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_j^n = 1$, $j = 1, 2, \ldots, m_n$, что последовательность $\eta_n(t)$, определяемая равенством*

$$\eta_n(t) = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_j^n \xi_j(t), \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{4.10}$$

сходится к функции $\xi(t)$ в пространстве B.

Построим последовательность $v_n(t)$:

$$v_n(t) = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_j^n x_j(t), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.11}$$

Тогда по теореме Мазура последовательность $\dot{v}_n(t)$ сходится сильно в L_2 к функции $\dot{\overline{x}}(t)$, а значит, существует подпоследовательность $\dot{v}_{n_l}(t)$, сходящаяся почти всюду к функции $\dot{\overline{x}}(t)$.

Покажем, что при этом подпоследовательность $v_{n_l}(t)$ равномерно в пространстве C сходится к предельной функции $\overline{x}(t)$:

$$
\begin{aligned}
&\|v_{n_l}(t)-\overline{x}(t)\|_C \leqslant \sum_{j=1}^{m_n} \|\alpha_j^n x_j(t)-\overline{x}(t)\|_C \leqslant \\
&\leqslant \max_{j\geqslant 1}\|x_j(t)-\overline{x}(t)\| \to 0, \quad j\to\infty.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Д. Функция $L(t,x,u)$ равномерно непрерывна на K. Поэтому для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, такое, что для любых точек $(t',x',u'),\in K$ и удовлетворяющих неравенствам

$$
|x'-x''|<\delta, |u'-u''|<\delta, \quad t'\in[t_0;t_1],
$$

выполняется условие

$$
|L(t',x',u')-L(t',x'',u'')| \leqslant \varepsilon. \tag{4.13}
$$

По теореме Д.Ф.Егорова, если последовательность $\dot v_{n_l}(t)$ сходится почти всюду к функции $\dot{\overline{x}}(t)$, то можно выбрать множество меры меньше ε, такое, что вне этого множества сходимость будет равномерной.

Пусть множество E такое, что $\mathrm{mes}([t_0;t_1]\backslash E)<\varepsilon$, и последовательность $v_{n_l}(t)$ сходится равномерно на E к функции $\overline{x}(t)$.

Оценим разность функционалов:

$$
\begin{aligned}
J(v_{n_l})-J(\overline{x}) = &\int\limits_{[t_0;t_1]\backslash E} [L(t,v_{n_l},\dot v_{n_l})-L(t,\overline{x},\dot{\overline{x}})]dt+ \\
&+\int\limits_E [L(t,v_{n_l},\dot v_{n_l})-L(t,\overline{x},\dot{\overline{x}})dt \geqslant \varepsilon(\mathrm{mes}E+M-m),
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

$$
\text{где } M=\max_K L(t,x,u), \quad m=\min_K l(t,x,u). \tag{4.15}
$$

Отсюда следует,что

$$
J(\overline{x})-J(v_{n_l}) \leqslant \varepsilon(M-m+t_1-t_0). \tag{4.16}
$$

С другой стороны, используя неравенство Йенсена для выпуклых функций, получим оценку сверху для величины $J(v_{n_l})$:

$$
\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,\overline{x},\dot v_{n_l})dt \leqslant \sum_{j=1}^{m_n}\alpha_j^{n_l}\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,\overline{x},\dot x_j)dt; \tag{4.17}
$$

$$
J(v_{n_l}) \leqslant \sum_{j=1}^{m_n}\alpha_j^{n_l}\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,\overline{x},\dot x_j)dt-\varepsilon(t_1-t_0). \tag{4.18}
$$

Заметим, что в правой части равенства (4.17) второй и третий аргументы в подынтегральном выражении не согласованы.

Используя следующую оценку:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t,\overline{x},\dot{x}_j)dt = \int_{t_0}^{t_1}[L(t,\overline{x},\dot{x}_j) \pm L(t,x_j,\dot{x}_j)]dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1} L(t,x_j,\dot{x}_j)dt + \varepsilon(t_1 - t_0), \tag{4.19}$$

получим

$$J(v_{n_l}) \leqslant \sum_{j=1}^{m_{n_l}} \alpha_j^{n_l} J(x_j) + 2\varepsilon(t_1 - t_0)$$

или с учетом (4.16) имеем

$$J(\overline{x}) \leqslant \sum_{j=1}^{m_{n_l}} \int_{t_0}^{t_1} \alpha_j^{n_l} L(t,x_j,\dot{x}_j)dt + \varepsilon(M - m + 3(t_1 - t_0)). \tag{4.20}$$

Согласно определению точной верхней грани, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любого $j \geqslant N$ справедливо строгое неравенство

$$J(x_j) < \mu + \varepsilon, \tag{4.21}$$

используя (4.16), получим следующую оценку:

$$J(\overline{x}) \leqslant \mu + \varepsilon(1 + M - m + 3(t_1 - t_0)). \tag{4.22}$$

И в силу произвольности $\varepsilon > 0$ последнее неравенство возможно тогда и только тогда, когда $J(\overline{x}) = \mu$, т.е. $\overline{x}(t)$— решение задачи, теорема доказана $\square$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1. Найти максимум функционала

$$J(u) = \int_0^1 [10x^2 - u^2]dt$$

при ограничениях $:\dot{x} = x^2 - u, \quad x(0) = x(1) = 1,$

$$x(t) \leqslant 1,5$$

Показать, что в этой задаче траектория $\overline{x}(t)$ залегает на границе, если $t \in [\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1 = 0,345$, $\tau_2 = 0,655$, управление является непрерывной функцией, траектория касается границы в точках τ_1, τ_2. Начальное значение сопряженной функции $\lambda(0) = -3,81$, ее терминальное значение $\lambda(1) = 3,81$.

Задача 2. Среди всех замкнутых плоских кривых, охватывающих заданную площадь, найти кривую наименьшей длины.

Задача 3. Среди всех плоских замкнутых кривых, охватывающих заданную площадь и расположенных в заданной полосе, найти кривую наименьшей длины.

Задача 4 (о геодезических линиях). Найти кривую наименьшей длины, лежащую на заданной поверхности $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) = 0, i = \overline{1,k}\}$ и соединяющую две заданные точки x^0 и x^1.

Указание. Для формализации задачи в качестве независимого переменного выбрать длину кривой. Рассмотреть геодезические на сфере единичного радиуса $g(x) = \frac{1}{2}((x,x) - 1)$, геодезические на цилиндре

$$g(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_m^2 - 1) = 0, \quad m < n.$$

Задача 5 (об обходе препятствия). Соединить две заданные точки A и B кривой наименьшей длины так, чтобы расстояние от любой точки кривой до начала координат было бы не меньше фиксированого значения $c > 0$.

Список литературы к главе 1

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979.

2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

4. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск, 1974.

5. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А., Левин В.Л. Методы теории экстремальных задач в экономике. М.: Наука, 1981.

6. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

7. Olech C. Existence theorems for optimal control problems with vector - valued cost functions//Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V.136. P.159-180.

8. Rockaffellar R.T. Existence theorems for general control problems of Bolza and Lagrange//Afv. Math. 1975. V.15. P.312-333.

9. Seirstad A. Optimal Control Theory with Economic Application. Amsterdam, 1987.

10. Mcgill R. Optimal control, inequality constrains and the generalized Newton Raphson algorithm//SIAM J. Control. 1965. V.3. P.291-298.

ГЛАВА 2

УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

В этой главе изложены необходимые и достаточные условия оптимальности для систем с последействием. Примеры систем с запаздыванием в аргументе функции состояния изложены в главе 3.

Активное развитие теории дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом повлекло за собой ее использование при решении ряда практических задач, связанных с моделированием управляемых процессов. Задачи оптимального управления системами с запаздывющим аргументом имеют обширные приложения в технике, экономике, биологии, теории автоматического регулирования, теории автоколебательных систем и других науках. Математическая теория управления такими системами еще далека от завершения.

Необходимые и достаточные условия оптимальности для систем с последействием, задача синтеза оптимального управления для линейной системы с запаздыванием и квадратичным критерием качества, подробная библиография приведены в монографии [11].

Актуальным вопросом является развитие приближенных и численных методов для решения задач оптимального управления с запаздывающим аргументом.

В данном параграфе ниже будет сформулирован принцип максимума для задач оптимального управления с постоянным запаздыванием. Авторам неизвестна формулировка этого принципа для задач оптимального управления с последействием при наличии фазовых ограничений. Этот вопрос может быть предложен для теоретического исследования аспирантам и соискателям.

§1. Условие оптимальности для систем с постоянным запаздыванием по фазовой переменной

В этом параграфе приведены необходимые и достаточные условия оптимальности и сформулирована двойственная задача для систем с постоянным запаздыванием.

1. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим управляемую систему запаздывающего типа вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad , t \in [0, T], \tag{1.1}$$

$$x_0 = x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h, 0]. \tag{1.2}$$

редложим, что вектор-функция состояния или фазовая переменная

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$$

вляется абсолютно непрерывной функцией на $[0, T] = \Gamma$ и удовлетворяет азовым ограничениям

$$x(t) \in X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(t, x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, l,$$
$$g_j(t, x) = 0, \quad j = l+1, \ldots, m, \quad t \in \Gamma\} \tag{1.3}$$

граничным условиям

$$x(T) \in X_1 \subset X(T). \tag{1.4}$$

Ізмеримое управление $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ принимает значения из заанного множества

$$u(t) \in U(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^r, \quad \text{п.в.} \quad t \in \Gamma. \tag{1.5}$$

Здесь и далее запись п.в. $t \in \Gamma$ означает: при почти всех $t \in \Gamma$ по мере Іебега.

Фунция $f(t, x, y, u) : \Gamma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n$ с компонентами $f(t, x, y, u)$ змерима по t, непрерывна по u и непрерывно дифференцируема по x, y. Выберем произвольное управление $u(t)$, $t \in \Gamma$, удовлетворяющее условию 1.5), подставим его в систему (1.1). Интегрируя систему (1.1) с начальныи условиями (1.2), найдем траекторию $x(t)$, соответствующую выбранноу управлению $u(t)$. Пару функций $\omega = (x(t), u(t))$ назовем допустимым роцессом, если она удовлетворяет условиям (1.1)-(1.5). Множество всех опустимых процессов обозначим через W. Предположим, что $W \neq \emptyset$. На ножестве допустимых процессов рассмотрим функционал

$$J(u) = \int_0^T F_1(t, x(t), x(t-h), u(t))dt + F_0(x(t)). \tag{1.6}$$

Іоследовательность $\omega_i \in W, \quad i = 1, 2, \ldots$ допустимых процессов назовем минимизирующей, если $\lim\limits_{i \to \infty} J(omega_i) = \inf\limits_{W} J(u)$. Задача оптимального управления системой (1.1)–(1.5) заключается в построении такого допустимого процесса или минимизирующей последовательности, который доставляет абсолютный глобальный минимум функционалу (1.6) на множестве всех допустимых процессов. Ниже предполагается, что в функционале (1.6) скалярная функция $F_1(t,x,y,u) : \Gamma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема по x, y измерима по t и непрерывна по u, функция $F_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$— непрерывно дифференцируема по x.

Если в задаче (1.1)–(1.6) отсутствуют фазовые ограничения и множество U не зависит от x, тогда справедлив принцип максимума [14].

Принцип максимума для задачи оптимального управления с постоянным запаздыванием

Теорема (о необходимых условиях оптимальности). *Пусть процесс $\overline{w} = [\overline{x}(t), \overline{u}(t)]$ является локально-оптимальным для задачи (1.1)–(1.6), тогда оптимальное управление $u(t)$ удовлетворяет принципу максимума Понтрягина:*

$$H(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-h),\overline{u}(t),p(t)) = \max_{u\in U(t)} H(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-h),u,p(t)), \qquad (1.7)$$

$$\text{где} \quad H(t,x,y,u,p(t)) = -\lambda_0 F_1 + (p,f)$$

а сопряженная вектор-функция $p(t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{p}_i(t) = &- \frac{\partial H(t,\overline{x}(t),\overline{x}(t-h),\overline{u}(t),p(t))}{\partial x_i} \\ &- \frac{\partial H(t+h,\overline{x}(t+h),\overline{x}(t),\overline{u}(t+h),p(t+h))}{\partial x_i}, \\ &t \in [t_0,t_1], i = \overline{1,n} \end{aligned} \qquad (1.8)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &p_i(t_1) = -\frac{\partial F_0}{\partial x_i}(x(T)), \quad i = \overline{1,n}, \\ &p_i(t) \equiv 0, \quad t > T, \quad i = \overline{1,n}. \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Условия (1.9) называют условиями трансверсальности.

2. Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим некоторый функционал $V(t,x_t)$, который зависит от выбора момента $t \in \Gamma$ и состояния $x_t = x(t+\Theta)$, $\Theta \in [-h,0]$ системы

..1). Если зафиксировать управление $u(t)$, то $x(t)$ определяется как ре-ение системы (1.1) и функционал $V(t, x_t)$ становится функцией только

Пусть для любого $t \in \Gamma$ и любого допустимого управления u суще-твует предел $\lim\limits_{t_1 \to t+0}[V(t_1, x_{t_1}) - V(t, x_t)](t_1 - t)^{-1} = \dot{V}_u(t, x_t)$. Здесь $_{t_1} = x(t_1 + \Theta)$, $t_1 \geq t$— решение системы (1.1) при выбранном управле-ии u и начальном условии (t, x_t).

Отметим, что $\dot{V}(t, x_t)$ представляет собой полную производную функци-нала $V(t, x_t)$ вдоль траектории системы (1.1) при управлении u. Будем ногда обозначать ее $\dot{V}(t)$.

Кроме того, предположим, что справедливо представление

$$V(t_1, x_{t_1}) - V(t, x_t) = \int\limits_t^{t_1} \dot{V}_u(s)ds.$$

Тогда имеет место равенство

$$J(u) = \int\limits_0^T [F_1(t, x(t), x(t-h), u(t)) - \dot{V}_u(t)]dt + F_0(x(T)) +$$
$$+ V(T, x_T) - V(0, x_0). \qquad (1.10)$$

Теорема 1.1. *Пусть существует функционал $V(t, x_t)$ и допустимый про-цесс ω_0, такие, что*

1) $\int\limits_0^T [F_1(t, x(t), x(t-h), u(t)) - \dot{V}_u(t)]dt \geq 0, \quad \forall \omega \in W,$

2) $F_1(t, x_0(t), x_0(t-h), u_0(t)) - \dot{V}_{u_0}(t) = 0, \quad$ п.в. $\quad t \in \Gamma,$

3) $F_0(x_0(T)) + V(T, x_{0T}) = \inf\limits_{x(T+\Theta) \in X(T+\Theta)} [F_0(x(T)) + V(T, x_T)] = m.$

Тогда процесс $\omega_0 = (x_0(t), u_0(t))$— глобально оптимальный и имеет место равенство

$$J(u_0) = m - V(0, \varphi).$$

Справедливость этой теоремы следует из представления (1.10) для ми-нимизируего функционала.

Таким образом, для решения исходной задачи оптимального управле-ния надлежит построить функционал V, удовлетворяющий условиям теоре-мы 1.1. Используя теорему 1.1, можно получить функциональное уравнение Беллмана для функционала $V(t, x_t)$.

Однако в ряде случаев задачу о выборе функционала V можно изменить, пытаясь подобрать вспомогательную функцию $\Psi(t,x,y) : \Gamma \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую некоторым вспомогательным условиям. Опишем их. Введем множество G:

$$G = \{(t,x,y) \in \mathbb{R}^{2n+1} : t \in \Gamma, x \in X(t), y \in X(t-h)\},$$

Определение 1.1. Функция $\Psi(t,x,y) : G \to R$ принадлежит множеству γ_-, если она непрерывно дифференцируема во внутренних точках G, непрерывна в $\overline{G}$ (т.е. в замыкании G) и допускает представление $\Psi(t,x,y) = \Psi_0(t,x) + \Psi_1(t,y)$, где $\Psi_1(t,y) = 0, \quad t > T$.

Введем в рассмотрение функции $H(t,x,y,u,\Phi(t,x))$ и $\mathcal{H}(t,x,y,\Phi(t,x))$. Положим

$$H(t,x,y,u,\Phi(t,x)) = -F_1(t,x,y,u) + \Phi'(t,x)f(t,x,y,u).$$

Здесь и далее штрих $'$- знак транспонирования,

$$\Psi_{ix}(t,x) = \frac{\partial \Psi_i(t,x)}{\partial x},$$
$$\Phi(t,x) = \Psi_{0x}(t,x) + \Psi_{1x}(t+h,x).$$

Функция $\mathcal{H}$ определяется равенством

$$\mathcal{H}(t,x,y,\Phi(t,x)) = \max_{u \in U(t,x)} H(t,x,y,u,\Phi(t,x)).$$

Обозначим через $\dot{\Psi}(t)$ полную производную функции $\Psi(t,x,y)$ вдоль допустимого процесса задачи (1.1)-(1.6)

$$\dot{\Psi}(t) = \Psi_t + \Psi_x'(t)f(t) + \Psi_y'(t)\dot{x}(t-h), \tag{1.11}$$

где

$$\Psi(t) = \Psi(t,x(t),y(t)), \quad f(t) = f(t,x(t),y(t),u(t)), \quad y(t) = x(t-h),$$
$$\Psi_t(t) = \frac{\partial \Psi(t,x(t),y(t))}{\partial t}, \Psi_x(t) = \frac{\partial \Psi_0(t,x(t))}{\partial x}, \Psi_y(t) = \frac{\partial \Psi_1(t,y(t))}{\partial y}.$$

Интегрируя (1.11) по t в пределах от 0 до T и производя замену переменных $s = t-h$ в последнем слагаемом, получим

$$\int\limits_0^T \dot{\Psi}(t)dt = \int\limits_0^{T-h} [\Psi_t(t) + \Psi_x'(t)f(t) + \Psi_y'(t+h)f(t)]dt +$$
$$+ \int\limits_{T-h}^{T} [\Psi_t(t) + \Psi_x'(t)f(t)]dt + \int\limits_{-h}^{0} \Psi_y'(t+h)\dot{\varphi}(t)dt.$$

Заметим, что последнее слагаемое в этом равенстве зависит только от начальных данных задачи. Обозначим его через C. Учитывая последнюю формулу, сделаем следующее тождественное преобразование функционала (1.6), которое справедливо для любых допустимых процессов ω и функции $\Psi \in \gamma_-$:

$$
\begin{aligned}
J(u) = \int_0^T [\mathcal{H}(t) - H(t)]dt - \int_0^T [\Psi_t(t) + \mathcal{H}(t)]dt + \\
+ C + F_0(x(T)) + \Psi(T, x(T), y(T)) - \Psi(0, x(0), y(0)), \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t, x(t), y(t), \Phi(t, x, (t)))$,

$H(t) = H(t, x(t), y(t), u(t), \Phi(t, x(t)))$.

Определение 1.2. Функция $\Psi(t, x, y) \in \gamma$, если $\Psi(t, x, y) \in \gamma_-$ и удовлетворяет на множестве неравенству Гамильтона-Якоби

$$\Psi_t(t, x, y) + \mathcal{H}(t, x, y, \Phi(t, x)) \leq 0, \quad \forall (t, x, y) \in G$$

Из формулы (1.12) вытекает теорема.

Теорема 1.2. *Пусть существует функция $\Psi \in \gamma$ и процесс $\omega_0 \in W$, такие, что при всех $t \in \Gamma$*

1) $\mathcal{H}(t, x_0(t), y_0(t), \Phi(t, x_0(t))) = H(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t), \Phi(t, x_0(t)))$,
2) $\Psi_t(t, x_0(t), y_0(t)) + \mathcal{H}(t, x_0(t), y_0(t), \Phi(t, x_0(t))) = 0$,
3) $L(\Psi) = \inf\limits_{x \in X_1, y \in X(T-h)} \{F_0(x) + \Psi(T, x, y)\} = F_0(x_0(T)) + \Psi(T, x_0(T), y_0(T))$.

Тогда процесс ω_0 — глобально оптимальный в задаче (1.1)–(1.6) и

$$J(u_0) = L(\Psi) + C - \Psi(0, x(0), x(-h)) := \ell(\Psi).$$

Отсюда и из представления (1.12) следует, что $\forall \omega \in W$ и $\Psi \in \gamma$ имеет место двойственное неравенство $J(u) \geq \ell(\Psi)$. Поэтому наряду с исходной задачей (1.1)–(1.6) можно рассмотреть двойственную к ней задачу ($\mathcal{D}$)

$$\ell(\Psi) \to \sup, \quad \Psi \in \gamma.$$

Двойственная задача независимо от свойств исходной задачи является выпуклой. Это позволяет в случае строгой двойственности, т.е. при условии, что $J(u) = \ell(\Psi)$, найти оптимальное значение минимизируего функционала (1.6), а в общем случае — его нижнюю оценку. Основываясь на этом подходе, можно получить условия локального минимума, требуя выполнения условий теоремы 1.2 в области G_ε, определяемой оптимальной траекторией

$$G_\varepsilon = \{(t,x,y) \in G : t \in \Gamma, |x - x_0(t)| < \varepsilon, |y - x_0(t-h)| < \varepsilon\}.$$

В некоторых случаях удобнее пользоваться иным формализмом. Опишем его. Заметим, что для любых $\omega \in W$, $\Psi \in \gamma$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} J(u) = &\int_0^T [F_1(t) - \Psi_t(t) - \Psi'_x(t)\dot{x}(t) - \Psi'_y(t)\dot{x}(t-h)]dt + \\ &+ F_0(x(T)) + \Psi(T) - \Psi(0), \end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$F_1(t) = F_1(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad \Psi(T) = \Psi(T, x(T), x(T-h)),$$
$$\Psi(0) = \Psi(0, \varphi(0), \varphi(-h)).$$

Введем функцию

$$R(t,x,y,u) = -F_1(t,x,y,u) + \Psi_t(t,x,y) + \Phi'(t,x) f(t,x,y,u), \tag{1.14}$$
$$M(x,y) = F_0(x) + \Psi(T,x,y). \tag{1.15}$$

Сделаем замену переменной $\tau = t - h$ в последнем интеграле в выражении (1.13) и учтем (1.14). Получим следующее представление минимизируемого функционала:

$$J(u) = -\int_0^T R(t, x(t), x(t-h), u(t))dt + M(x(T), y(T)) + C, \tag{1.16}$$

где C — некоторая постоянная, зависящая только от начальных данных задачи.

Теорема 1.3. *Пусть существуют функции $\psi \in \gamma_-$ и последовательность $\omega_i \in W$, $i = 1, 2, \ldots$, такие, что*

1) $\displaystyle\int_0^T R(t, x(t), x(t-h), u(t))dt \le 0, \qquad \forall \omega \in W,$

2) $\displaystyle\lim_{i\to\infty} \int_0^T R(t, x_i(t), x_i(t-h), u_i(t))dt = 0,$

3) $\displaystyle\lim_{i\to\infty} M(x_i(T), y_i(T)) = \inf_{x \in X, y \in X(T-h)} M(x,y) = m.$

Тогда последовательность ω_i, $i = 1, 2, \dots$ является минимизирующей для задачи (1.1)–(1.6).

Справедливость теоремы 1.3 вытекает из формулы (1.16), а также может быть выведена из теоремы 1.1.

Если в задаче (1.1)–(1.6) существует оптимальный процесс ω_0, то теорема 1.3 останется справедливой при $x_i(t) = x_0(t)$, $u_i(t) = u_0(t)$, $i = 1, 2, \dots$

Замечание 1.1. Для выполнения условия 2 теоремы 1.3 достаточно, чтобы последовательность $R_i(t) = R(t, x_i(t), x_i(t-h), u_i(t))$, $i = 1, 2, \dots$ была равномерно ограничена снизу для всех $t \in \Gamma$ и $\lim\limits_{i\to\infty} R_i(t) = 0$ при почти всех $t \in \Gamma$, а в случае существования оптимального процесса ω_0 достаточно, чтобы

$$R(t, x_0(t), x_0(t-h), u_0(t)) = 0.$$

Условие 1 теоремы 1.3, в частности, имеет место, если

$$R(t, x, y, u) \le 0, \quad \forall (t, x, y) \in G, \quad u \in U(t, x)$$

В этой форме оно используется ниже при решении задач.

Замечание 1.2. Каждая компонента фазового вектора $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ в задаче (1.1)–(1.6) может иметь различные величины запаздывания h_i. Тогда соотношения (1.1), (1.2), (1.6) содержат выражения, зависящие от $y_i \models x_i(t-h)$, $i = 1, \dots, n$. В этом случае теоремы 1.2, 1.3 останутся верными, если выполнены все их требования с функцией Ψ вида

$$\Psi(t, x, y) = \Psi_0(t, x) + \sum_{i=1}^{h} \Psi_i(t, y_i),$$

причем $\Psi_i(t, y_j) \equiv 0$ для $t \ge T$. При этом функцию $R(t, x, y, u)$ нужно определить следующим образом:

$$R(t, x, y, u) = R_j(t, x, y, u), \quad t \in [T - h_{j+1}, T - h_j], \quad h_0 = 0,$$
$$h_{n+1} = T, \quad h_1 < h_2 < \ldots < h_n, \quad j = 0, \dots, n;$$
$$R_j = -F_1(t, x, y, u) + \Psi_t(t, x, y) + \sum_{i=1}^{n} \Psi_{0x_i}(t, x) f_i(t, x, y, u) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{j} \Psi_{ix_j}(t + h_i, x_i) f_i(t, x, y, u), \quad j = 1, \dots, n;$$
$$R_0 = -F_1(t, x, y, u) + \Psi_t(t, x, y) + \sum_{i=1}^{n} \Psi_{0x_i}(t, x) f_i(t, x, y, u).$$

Замечание 1.3. Множество γ можно расширить, рассматривая кусочно-непрерывные функции $\Psi(t,x,y)$. Пусть существует разбиение отрезка $\Gamma=[0,T]$ точками $\tau_j: 0=\tau_0<\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_{p+1}=T$ на полуинтервалы $[\tau_j,\tau_{j+1})$, а функция $\Psi(t,x,y)=\Psi_0(t,x)+\Psi_1(t,y)$ непрерывно дифференцируема на внутренних точках $G_j=\{(t,x,y)\in G: t\in[\tau_j,\tau_{j+1})\}, \quad j=0,\ldots,p$ и может быть непрерывно продолжена на $\overline{G}_j, \quad j=0,\ldots,p$. В этом случае теорема 1.2 останется в силе, если функцию $R(t,x,y,u)$ определить, как и ранее, по формуле (1.14), а функцию $M(x,y)$ следующим образом:

$$M(x_j,y_j)=F_0(x_{p+1})+\Psi(t_{p+1})+\sum_{j=1}^{p}\Delta\Psi(\tau_j),$$

где

$$\Delta\Psi(\tau_j)=\Psi(t_j-0,x_j,y_j)-\Psi(\tau_j+0,x_j,y_j), \quad x_j=x(t_j), \quad y_j=y(t_j).$$

Эта ситуация типична для задач с фазовыми и смешанными ограничениями.

Замечание 1.4. Если в задаче (1.1)–(1.6) время T окончания процесса не фиксировано, то условие 3 в теореме 1.3 следует записать в виде

$$\lim_{i\to\infty} M(T_i,x_i(\tau_j),y_i(\tau_j))=\inf_{\{t>0,x_j\in X(\tau_j),y_i\in X(\tau_j-h)\}} M(t,x_j,y_j)=m_1$$

или в случае существования оптимального процесса

$$M(T,x_0(\tau_j),y_0(\tau_j))=m_1.$$

Замечание 1.5. Задача оптимального управления (1.1)–(1.6) с дискретным запаздыванием по фазовой переменной может быть сведена к задаче оптимального управления системой без последействия путем увеличения размерности фазового вектора следующим образом.

Обозначим через N целую часть числа Th^{-1}. Отметим, что достаточно рассмотреть случай $N\geq 1$, ибо при $N=0$ система (1.1) не содержит последействия. Рассмотрим функции $x^i(t),u^i(t)$ на отрезке $[0,h]$, определенные формулами

$$x^i(t)=x(t+ih), \quad u^i(t)=u(t+ih), \quad i=0,\ldots,N-1, \quad t\in[0,h],$$
$$x^N(t)=x(t+Nh), \quad u^N(t)=u(t+Nh), \quad 0\leq t\leq T-Nh.$$

В терминах новых фазовых переменных x^i и управлений u^i исходная задача (1.1)-(1.6) может быть переписана следующим образом. Критерий качества имеет вид

$$\int_0^h \sum_{i=0}^{N-1} F_1(t+ih, x^i(t), x^{i-1}(t), u^i(t))dt + F_0(x^N(T-Nh))+$$

$$+\int_{Nh}^{T} F_1(t, x^N(t), x^{N-1}(t), u^N(t))dt \to \inf .$$

Дифференциальные уравнения для функций x^i:

$$\dot{x}^i(t) = f(t+ih, x^i(t), x^{i-1}(t), u^i(t)), \quad 0 \le t \le h, \quad i = 0, \ldots, N-1,$$

$$\dot{x}^N(t) = f(t+Nh, x^N(t), x^{N-1}(t), u^N(t)), \quad 0 \le t \le T - Nh,$$

начальные и терминальные условия:

$$x^{-1}(t) = \varphi(t-h), \quad 0 \le t \le h, \quad x^i(h) = x^{i+1}(0), \quad i = 0, \ldots, N-1,$$

фазовые ограничения и ограничения на управление:

$$x^i(t) \in X(t+ih), \quad u^i(t) \in U(t+ih, x^i(t)).$$

§2. Сравнение двух типов двойственных задач

В этом параграфе построена двойственная задача, использующая выпуклые свойства исходной задачи. Приведено сравнение двух типов двойственных задач. Вопросам двойственности посвящены, например, работы [1, 2, 3], а в системах с запаздыванием — [4, 5].

1. Определение двойственной задачи

Наряду с двойственной задачей $(\mathcal{D})$ рассмотрим двойственную по Фенхелю-Рокафеллару задачу, обозначаемую $(\mathcal{P}^*)$. Эта задача строится следующим образом.

Пусть X, Y— линейные топологические пространства, X^*, Y^*— линейные топологические пространства, находящиеся в двойственности относительно билейных форм $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ соответственно. Для функции $\Phi(x,p) : X \times P \to \overline{\mathbb{R}}$ построим двойственную к ней $\Phi^*(x^*, p^*) : X^* \times Y^* \to \overline{\mathbb{R}}$, определяемую равенством

$$\Phi^*(x^*, p^*) = \sup_{x \in X, p \in Y} \{\langle x^*, x \rangle_X + \langle p^*, p \rangle_Y - \Phi(x,p)\}. \tag{2.1}$$

Обозначим через $\inf(\mathcal{P})$ нижнюю грань в задаче $(\mathcal{P})$

$$\inf_{x\in X}\Phi(x,0)=\inf(\mathcal{P}),$$

а через $\sup(\mathcal{P}^*)$— верхнюю грань в задаче $(\mathcal{P}^*)$

$$\sup_{p^*\in Y^*}[-\Phi^*(0,p^*)]=\sup(\mathcal{P}^*).$$

Тогда, используя определение сопряженной функции, заключаем, что справедливо неравенство [6]

$$-\Phi^*(0,p^*)\le\Phi(x,0),\quad \forall p^*\in Y^*,\quad \forall x\in X.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\sup(\mathcal{P}^*)\le\inf(\mathcal{P}).$$

Последнее неравенство, как и в §1, будем называть двойственным. Пусть $\wedge : X\to Y$— линейный непрерывный оператор; $\wedge^* : Y^*\to X^*$— сопряженный с $\wedge$ линейный непрерывный оператор, функции $F : X\to\mathbb{R}$ и $E : Y\to\mathbb{R}$. Построим двойственную задачу для случая, когда функция $\Phi(x,0)$ разлагается в сумму

$$\Phi(x,0)=F(x)+E(\wedge x).$$

В этом случае задача $(\mathcal{P})$ имеет вид

$$\inf_{x\in X}[F(x)+E(\wedge x)].$$

Используя определение (2.1), видим, что двойственная к $(\mathcal{P})$ задача может быть представлена в виде

$$\sup_{p^*\in Y^*}[-F^*(\wedge^*p^*)-E(-p^*)],$$

где $F^* : V^*\to\mathbb{R}$, $E^* : Y^*\to\mathbb{R}$— функции, сопряженные к F и E соответственно.

Далее показано, что при некоторых предположениях выпуклости исходной задачи двойственная задача $(\mathcal{P}^*)$ является частным случаем задачи $(\mathcal{D})$, двойственной к $(\mathcal{P})$. В качестве исходной задачи $(\mathcal{P})$ рассмотрим задачу (1.1)–(1.6). Для сравнения упомянутых двух типов двойственности перейдем от задачи $(\mathcal{P})$ к обобщенной вариационной задаче $(\mathcal{V})$. Введем следующие функции и множества:

$$L : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

$$L(t,\xi,\eta,V) = \begin{cases} \inf\limits_u F_1(t,\xi,\eta,u), \quad u \in U(t,\xi), \quad V = f(t,\xi,\eta,u), \\ \qquad\qquad \xi \in X(t), \quad \eta \in X(t-h), \\ \infty, \qquad \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

$$\mathcal{X} = \{x(\cdot) \in W_1^1(\Gamma,\mathbb{R}^n) : x(t) = \varphi(t), t \in [-h,0]\}, \quad \Gamma = [0,T],$$

где $W_1^1(\Gamma,\mathbb{R}^n)$ — пространство функций на Γ со значениями в $\mathbb{R}^n$ и абсолютно интегрируемой первой производной. Не ограничивая общности, положим $\varphi(t) = 0$, в противном случае достаточно рассмотреть новую функцию, равную разности

$$x(t) - \varphi(t), \quad t \in \Gamma.$$

В этих обозначениях задача $(\mathcal{V})$ принимает форму

$$\int\limits_0^T L(t,x(t),x(t-h),\dot{x}(t))dt \to \inf x(\cdot) \in \mathcal{X}. \tag{2.2}$$

Пусть выполняются следущие предположения A относительно функции $L(t,\xi,\eta,v)$.

A_1: функция $L(t,\xi,\eta,v)$ измерима на Γ при любых $\xi,\eta,v \in \mathbb{R}^{3n}$, полунепрерывна снизу на $\mathbb{R}^{3n}$ при любом $t \in \Gamma$;

A_2: $L(t,\xi,\eta,v)$ выпукла по ξ,η,v при любом $t \in \Gamma$ на $\mathbb{R}^{3n}$;

A_3: $L(t,\xi,\eta,v) > \alpha(t)$ при любых $\xi,\eta,v \in \mathbb{R}^{3n}$, где $\alpha(t)$— некоторая измеримая функция.

Утверждение 1. Если выполнены предположения $A_1 - A_3$, то задача $(\mathcal{V})$ определена и эквивалентна задаче $(\mathcal{P})$ в смысле равенства минимальных значений их функционалов [6].

2. Построение двойственной задачи и двойственное неравенство

Построим для задачи $(\mathcal{V})$ двойственную задачу $(\mathcal{P})$, используя подход Фенхеля-Рокафеллара. Введем следущие операторы и функции:

$$\wedge : W_1^1(\Gamma,\mathbb{R}^n) \to W_1^1(\Gamma,\mathbb{R}^{2n}) \times L_1(\Gamma,\mathbb{R}^n),$$
$$\wedge\, x(t) = (x(t),x(t-h),\dot{x}(t)),$$
$$E(\wedge x) = \int\limits_0^T L(t,\wedge x(t))dt,$$

$F(x) = \chi(x)$— индикаторная функция на множестве $\mathcal{X}$.

В этих обозначениях задача (2.2) эквивалентна следующей задаче оптимизации:

$$F(x) + E(\Lambda x) \to \inf, \quad x(\cdot) \in W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^n).$$

Двойственная к ней по Фенхелю-Рокаффелару представима в виде

$$-F^*(\Lambda^* p^*) - E(-p^*) \to \sup,$$

где

$$p^*(t) = (p_1^*(t), p_2^*(t), p_3^*(t)), \quad p_i^*(t) \in L_\infty^n(\Gamma), i = 1,2 \quad p_3^*(t) \in W_\infty^1(\Gamma, \mathbb{R}^n),$$

$W_\infty^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$— пространство n-мерных вектор-функций на Γ с ограниченной первой производной.

Короче это условие записывается в виде $p^* \in Y^*$. Рассмотрим далее задачу определения конкретного вида сопряженных функций и операторов в задаче $(\mathcal{P}^*)$.

Согласно [6],

$$E^*(p^*) = \int_0^T L^*(t, -p^*(t))dt.$$

По определению сопряженной функции справедливо равенство

$$L^*(t, p^*(t)) = \sup_{\xi, \eta, v \in \mathbb{R}^n} \{\xi' p_1^*(t) + \eta' p_2^*(t) + v p_3^*(t) - L(t, \xi, \eta, v)\},$$

где $p^*(t) \in Y^*$.

Используя определение L и то, что множество допустимых процессов $W \neq \emptyset$, получим

$$L(t, -p^*(t)) = \sup_{\xi \in X(t), \eta \in X(t-h)} \{-\xi' p_1^*(t) - \eta' p_2^*(t) + \mathcal{H}(t, \xi, \eta, -p_3^*(t))\}. \quad (2.3)$$

Определим функцию $F^*(\Lambda^* p^*)$:

$$F^*(\Lambda^* p^*) = \sup_{x \in \mathcal{X}} [\langle \Lambda^* p^*, x \rangle - \chi(x)],$$

здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$— скалярное произведение в $W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.

Используя определение сопряженного оператора индикаторной функции, имеем

$$F^*(\Lambda^* p^*) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \langle \Lambda^* p^*, x \rangle = \sup_{x \in \mathcal{X}} \langle p^*, \Lambda x \rangle_Y. \quad (2.4)$$

Раскрывая скалярное произведение, получим следующее представление сопряженной функции:

$$F^*(\wedge^* p^*) = \sup_{x\in\mathcal{X}}\{\int_0^T [p_1^*(t)x(t) + \dot{x}'(t)p_3(t)]dt + \int_{-h}^0 x'(t)p_2^*(t+h)dt\}.$$

Если предположить дополнительно, что $p_3^*(t) \in W_1^1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ и положить $p_2(s) = 0, s \geq T$, то

$$F^*(\wedge^* p^*) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \dot{p}_3^*(t) = p_1^*(t) + p_2^*(t+h), \\ & t \in [0,T], p_3(T) = 0. \\ \infty, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Теперь двойственная задача к $(\mathcal{P})$, а также к $(\mathcal{V})$ может быть представлена как задача максимизации функционала

$$-\int_0^T [\sup_{\xi\in X, \eta\in X(t-h)} \{\xi' p_1^*(t) + \eta' p_2^*(t) + \mathcal{H}(t,\xi,\eta,p_3^*(t))\}]dt \tag{2.6}$$

на множестве, задаваемом ограничениями

$$\dot{p}_3^*(t) = p_1^*(t) + p_2^*(t+h), \quad t \in [0,T], \tag{2.7}$$

$$p_3^*(T) = 0, \quad p^*(t) \in Y^*. \tag{2.8}$$

Назовем задачу (2.6)-(2.8) задачей $(\mathcal{P}^*)$. Верхнюю грань в этой задаче обозначим через $\sup(\mathcal{P}^*)$. При этом $\sup(\mathcal{P}^*) \leq \inf(\mathcal{P})$.

Добавим к функционалу (2.6) выражение $z(T) - z(0) - \int_0^T \dot{z}(t)dt$, где $z(t) \in W_\infty^1(T,\mathbb{R})$. Рассмотрим новую задачу $(\mathcal{D}_k)$ определения минимума линейного функционала

$$z(T) - z(0) \tag{2.9}$$

на множестве функций $(z,p^*) \in W_\infty^{1,n}(I) * Y^*$, удовлетворяющих неравенству

$$\dot{z}(t) + \xi' p_1^*(t) + \eta' p_2^*(t) + \mathcal{H}(t,\xi,\eta,p_3^*(t)) \leq 0, \tag{2.10}$$
$$\text{п.в.} \quad t \in I, \xi \in X(t), \eta \in X(t-h).$$

Положим теперь в задаче $(\mathcal{D})$

$$\psi(t,\xi,\eta) = a(t) + \xi'\psi^1(t) + \eta'\psi^2(t), \tag{2.11}$$

где $\psi^i(t)$, $i = 1, 2$ непрерывные, почти всюду непрерывно дифференцируемые функции, причем $p_i^*(t) = \dot{\psi}^i(t)$, $i = 1, 2$, $a(t) = z(t)$, $t \in \Gamma$.

Тогда двойственная задача $(\mathcal{P}^*)$ совпадает с двойственной задачей $(\mathcal{D}_k)$.

Заметим, что задача $(\mathcal{P}^*)$ построена в предположении выпуклости функции $L(t, \xi, \eta, v)$ по ξ, η, v. Для построения задачи $(\mathcal{D})$ выпуклые свойства задачи $(\mathcal{P})$ не требуются, тем не менее двойственная задача всегда выпукла.

Если выполнены предположения $A_1 - A_3$ и дополнительные условия (2.7), (2.8), то имеет место система неравенств

$$\sup(\mathcal{D}_k) \leq \sup(\mathcal{P}^*) \leq \inf(\mathcal{P}) = \inf(\mathcal{V}). \tag{2.12}$$

Доказательство первого неравенства содержится в работе [7]. Важной является проблема , когда в этой цепочке неравенств стоят равенства, т.е. проблема строгой двойственности, обсуждаемой в §3.

§3. Строгая двойственность

В этом параграфе формулируются условия, при которых имеет место строгая двойственность между задачами $(\mathcal{P})$ и $(\mathcal{D})$.

1. Постановка задачи

Теорема о структуре неотрицательных мер Радона. Предположим дополнительно, что множество допустимых значений управления не зависит от точек (t, ξ), $X(t) = \mathbb{R}^n$.

Рассмотрим задачу $(\mathcal{D}_k)$ как исходную и построим к ней двойственную. Для этого исследуем следующую задачу в банаховом пространстве. Требуется найти минимум линейного функционала

$$J_1(\mu) = \int\limits_{\Sigma} f_0(t, \xi, \eta, v) d\mu(t, \xi, \eta, v) \tag{3.1}$$

среди всех неотрицательных мер Радона μ, удовлетворяющих при любых $(a, g_1, g_2, g_3) \in K$, равенству

$$\int\limits_{\Sigma} [\dot{a}(t) + \xi' g_1(t) + \eta' g_2(t) + f'(t, \xi, \eta, v) g_3(t)] d\mu(t, \xi, \eta, v) = \int\limits_0^T \dot{z}(t) dt. \tag{3.2}$$

Здесь

$$K = \{(a, g_1, g_2, g_3) \in C^1(\Gamma, \mathbb{R}^{3n+1}) : \dot{g}_3(t) = g_1(t) + g_2(t + h), t \in \Gamma, g_3(T) = 0\}$$

$C^1(\Gamma, \mathbb{R}^{3n+1})$— пространство непрерывно дифференцируемых на Γ функций со значением в $\mathbb{R}^{3n+1}$. Обозначим задачу (3.1), (3.2) через $(\mathcal{D}_k^*)$.

Лемма 3.1. *Задача $(\mathcal{D}_k^*)$ является двойственной к задаче $(\mathcal{D}_k)$ и имеет место строгая двойственность*

$$\sup(\mathcal{D}_k) = \inf(\mathcal{D}_k^*). \tag{3.3}$$

Доказательство. Задача $(\mathcal{D}_k)$ является задачей линейного программирования, в которой выполнено условие Слейтера, т.е. при $g_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$, $\dot{a}(t) < \alpha(t)$ имеет место строгое неравенство

$$\dot{a}(t) + \xi' g_1(t) + \eta' g_2(t) + f'(t, \xi, \eta, v) g_3(t) < f_0(t, \xi, \eta, v).$$

Поэтому согласно теореме 1.1 с учетом предположений $A_1 - A_3$ имеет место равенство (3.3) □.

Лемма 3.2. *Множество всех неотрицательных мер Радона, удовлетворяющих условию (3.2), имеет структуру*

$$\int\limits_{\Sigma} g(t, \xi, \eta, v) d\mu(t, \xi, \eta, v) = \int\limits_{0}^{T} \int\limits_{\Omega} g(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v) dt, \tag{3.4}$$

где $g(t, \xi, \eta, v)$— любая непрерывная на Σ функция;
$\Omega = X \times X \times U$; $\mu = \{\mu_t \mid t \in [0, T]\}$— есть семейство вероятностных мер, обладающих следующими свойствами:

1) носитель меры μ_t содержится в множестве Ω.

2) для любой непрерывной на Σ функции h функция $f_n(t)$, определенная равенством

$$f_n(t) = \int\limits_{\Omega} h(t, \xi, \eta, v) d\mu_t(\xi, \eta, v),$$

принадлежит пространству $L_1(\Gamma, \mathbb{R}^n)$.

Множество мер μ, обладающих свойствами 1 и 2, обозначим через $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Положим в (3.2) $g = (g_1, g_2, g_3) = 0$. Тогда для любой непрерывно дифференцируемой функции $a(t)$: $\Gamma \to \mathbb{R}^n$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\Sigma} \dot{a}(t) d\mu(t, \xi, \eta, v) = \int\limits_{0}^{T} \dot{a}(t) dt.$$

Рассмотрим следующие множества, заданные в пространстве линейных непрерывных функционалов:

$$L := \{\Phi \in C^*(\Sigma) : \Phi \geq 0, \Phi(f) = \int_0^T \int_\Omega f(t,\xi,\eta,v) d\mu_t(\xi,\eta,v)dt, \mu \in \mathfrak{M}\},$$

$$M := \{\Phi \in C^*(\Sigma) : \Phi \geq 0, \Phi(\dot{a}) = \int_0^T \dot{a}(t)dt, a(t) \in C_1(\Gamma,\mathbb{R})\},$$

$C^*(\Sigma)$— двойственное пространство функций на Σ, сопряженных к пространству непрерывных функций на Σ. В силу равенства (3.2) имеет место включение $L \subset M$.

Покажем, что $\overline{L} = M$, где замыкание осуществляется в смысле слабой топологии в пространстве $C^*(\Sigma)$. Здесь $C^*(\Sigma)$— пространство линейных непрерывных функционалов на Σ. Заметим, что L— выпуклое множество.

Пусть $\overline{L} \neq M$. Тогда существует элемент $\hat{\Phi} \in M$, который не принадлежит $\overline{L}$. В этом случае $\hat{\Phi}$ может быть строго отделен от $\overline{L}$. Это означает, что существует функционал $\hat{f} \in [C^*(\Sigma)]^* = C(\Sigma)$, такой, что $\forall \Phi \in \overline{L}$ справедливы два неравенства :

$$\hat{\Phi}(\hat{f}) = \int_\Omega \hat{f}(t,\xi,\eta,v) d\hat{\mu}(t,\xi,\eta,v) \geq \alpha, \tag{3.5}$$

$$\Phi(\hat{f}) = \int_0^T \int_\Omega \hat{f}(t,\xi,\eta,v) d\mu_t(\xi,\eta,v)dt < \alpha. \tag{3.6}$$

Введем функцию $\hat{g}(t) \in C(\Gamma,\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{g}(t) = \max\{\hat{f}(t,\xi,\eta,v) : (\xi,\eta,v) \in \Omega\}. \tag{3.7}$$

Тогда

$$\int_\Omega \hat{g}(t) d\hat{\mu}(t,\xi,\eta,v) = \int_0^T \hat{g}(t)dt = \beta \geq \alpha. \tag{3.8}$$

По лемме Филиппова [8], существуют измеримые функции $(\hat{\xi}(\cdot),\hat{\eta}(\cdot),\hat{v}(\cdot))$, такие, что

$$\hat{g}(t) = f(t,\hat{\xi}(t),\hat{\eta}(t),\hat{v}(t)).$$

Возьмем в качестве $\mu_t(\xi,\eta,v)$ функцию Дирака

$$\mu_t(\xi,\eta,v)=\delta(\xi-\hat{\xi}(t),\eta-\hat{\eta}(t),v-\hat{v}(t)).$$

Тогда равенство (3.8) принимает вид

$$\int\limits_0^T\int_\Omega \hat{f}(t,\xi,\eta,v)d\hat{\mu}_t(\xi,\eta,v)dt=\int\limits_0^T\hat{g}(t)dt=\beta\geq\alpha.$$

Из последнего неравенства следует, что существование функционала $\hat{\Phi}\in L$, однозначно соответствующего $\hat{\mu}$ и удовлетворяющего условию (3.5), противоречит строгому неравенству (3.6). Полученное противоречие доказывает лемму. Итак, множество L выпукло и замкнуто, т.е. слабо компактно, и $L=M$ □.

2. Достаточные условия существования строгой двойственности

Таким образом, согласно лемме 3.2, двойственная задача эквивалентна задаче определения минимума функционала

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega f_0(t,\xi,\eta,v)d\mu_t(\xi,\eta,v)dt \tag{3.9}$$

относительно всех мер $\mu\in\mathfrak{M}$, таких, что $\forall(a,g_1,g_2,g_3)\in K$, имеем

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega[\xi' g_1(t)+\eta' g_2(t)+f'(t,\xi,\eta,v)g_3(t)]d\mu_t(\xi,\eta,v)dt=0. \tag{3.10}$$

Выберем $g_3(t)=0$, т.е. $g_1(t)=-g_2(t+h)$. Тогда

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\xi' g_1(t)d\mu_t(\xi,\eta,v)dt=\int\limits_{-h}^{T-h}\int\limits_\Omega\eta' g_1(t)d\mu_{t+h}(\xi,\eta,v)dt. \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что почти всюду на $[0,T-h]$ имеет место равенство

$$\int\limits_\Omega\xi^i d\mu_t(\xi,\eta,v)dt=\int\limits_\Omega\eta^i d\mu_{t+h}(\xi,\eta,v)dt,\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{3.12}$$

Вернемся еще раз к равенству (3.10), учитывая условие (3.12). Получим

$$\int_0^T \{(g_1(t)+g_2(t+h))' \int_\Omega \xi d\mu_t(\xi,\eta,v)+$$

$$+g_3'(t)\int_\Omega f(t,\xi,\eta,v)d\mu_t(\xi,\eta,v)\}dt=0. \tag{3.13}$$

Положим

$$z(t)=\int_\Omega \xi d\mu_t(\xi,\eta,v).$$

Тогда из (3.10) следует, что для всех $g_3(t)\in C^1(\Gamma,\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих граничному условию $g_3(T)=0$, имеет место равенство

$$\int_0^T [(g_3'(t)z(t)+g_3'(t)\int_\Omega f(t,\xi,\eta,v)d\mu_t(\xi,\eta,v)]dt=0\,. \tag{3.14}$$

Пусть в (3.14) $g_3^j(t)=0$, $j\neq i$, $g_3^i(t)\in C^{01}(\Gamma,\mathbb{R})$.
Тогда для любого $z^i(t)\in W_1^1(\Gamma,\mathbb{R})$ получим

$$\dot z^i(t)=\int_\Omega f^i(t,\xi,\eta,v)d\mu_t(\xi,\eta,v), \quad \text{п.в.}t\in\Gamma, \quad i=1,\ldots,n. \tag{3.15}$$

Положим в (3.14) $g_3^j(t)=0$, $j\neq i$, $j=1,\ldots,n$, $g_3^i(t)\in C^1(\Gamma,\mathbb{R})$, $g_3(T)=0$. С учетом (3.15) имеем $g_3'(0)z(0)=0$. Это означает, что $z(0)=0$.

В силу равенств (3.12)–(3.14) и условия $z(0)=0$ двойственная задача $(\mathcal{D}_k^*)$ эквивалентна следующей:

$$\int_0^T\int_\Omega f_0(t,\xi,\eta,v)d\mu_t(\xi,\eta,v)dt\to\inf, \tag{3.16}$$

$$\mu\in\mathfrak{M}, \quad z\in W_1^1(\Gamma,\mathbb{R}^n), \tag{3.17}$$

$$\dot z(t)=\int_\Omega f(t,\xi,\eta,v)d\mu_t(\xi,\eta,v), \quad \text{п.в.}t\in\Gamma, \tag{3.18}$$

$$z(t)=\int_\Omega \xi d\mu_t(\xi,\eta,v), \quad \text{п.в.}t\in\Gamma, \tag{3.19}$$

$$z(t-h)=\int_\Omega \eta d\mu_t(\xi,\eta,v), \quad \text{п.в.}t\in\Gamma, \tag{3.20}$$

$$z(0)=0.$$

Обозначим задачу (3.16)-(3.21) через $(\overline{\mathcal{P}})$. Задачу $(\overline{\mathcal{P}})$ можно рассматривать как задачу определения обобщенного управления $\mu \in \mathfrak{M}$. В силу компактности множества допустимых значений управлений и непрерывности функций f_0, f обобщенное решение в этой задаче существует. Если в задаче $(\overline{\mathcal{P}})$ существует допустимый процесс $(z, \hat{\mu})$, у которого мера μ_t представима в виде

$$\mu_t(\xi, \eta, v) = \delta(\xi - x(t), \eta - x(t-h), v - u(t)), \quad \text{п.в.} t \in \Gamma, \tag{3.21}$$

то процесс $(x(t), u(t))$ является допустимым в исходной задаче $(\mathcal{P})$. Можно рассматривать задачу $(\overline{\mathcal{P}})$ как расширение задачи $(\mathcal{P})$ по аргументам (ξ, η, v) [9, 10].

Итак, установлены следующие соотношения:

$$\sup(\mathcal{D}_k) = \min(\mathcal{D}_k^*) = \min(\overline{\mathcal{P}}) \leq inf(\mathcal{P}). \tag{3.22}$$

В случае, если множества X, U и функция $f_0(t, \cdot, \cdot, \cdot)$ выпуклы на $t \subset \Gamma$, $\min(\overline{\mathcal{P}}) = \inf(\mathcal{P})$ [6]. Сформулируем достаточные условия существования строгой двойственности между задачами $(\mathcal{D}_k)$ и $(\overline{\mathcal{P}})$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\inf(\mathcal{P}) = \min(\overline{\mathcal{P}})$. *Тогда между задачами* $(\mathcal{P})$ *и* $(\mathcal{D}_k)$ *имеет место строгая двойственность, т.е.*

$$\sup(\mathcal{D}_k) = \inf(\mathcal{P}).$$

§4 . Примеры задач оптимального управления с запаздыванием по фазовой переменной

Далее применим теорему о достаточных условиях оптимальности для решения разрывных задач с постоянным запаздыванием с фиксированным и нефиксированным временем.

1.Линейная задача оптимального управления с фиксированным временем

Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^T [a_0'(t)x(t) + a_1'(t)x(t-h) + \frac{1}{2}u'N_1(t)u]dt + c_1'x(T) \tag{4.1}$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + D(t)x(t-h) + B(t)u(t), \quad t \in \Gamma = [0, T], \tag{4.2}$$

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h, 0],$$

$$u(t) = \mathbb{R}^r, \quad x(t) \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3}$$

Здесь $A(t)$, $D(t)$— матрицы размерности $n \times n$; функции $a_i(t) \in \mathbb{R}^n$; $N_1(t)$— положительно определенная матрица размерности $r \times r$; $B(t)$— прямоугольная $n \times r$ — матрица, вектор $c_1 \in \mathbb{R}^n$. Предполагается, что все указанные функции измеримы по t.

Для исследования этой задачи применим теорему 1.3. Выберем функцию $\psi(t, x, y)$ следующим образом:

$$\psi(t, x, y) = a(t) + x'\psi_0(t) + y'\psi_1(t - h), \tag{4.4}$$

где $a(t), \psi_0(t), \psi_1(t - h)$— непрерывные, почти всюду непрерывно дифференцируемые функции. Таким образом, согласно определению 1.1, имеет место равенство $\psi(t, y) = y'(t - h)$. Зависимость функции ψ_1 от аргумента $t-h$ в правой части равенства выбрана для удобства дальнейших выкладок. Зададим функцию $R(t, x, y, u)$ с помощью соотношений

$$R = \dot{a}(t) + x'\dot{\psi}_0(t) + y'\dot{\psi}_1(t - h) + \Phi'(t)(A(t)x + D(t)y + B(t)u) -$$
$$- x'a_0(t) - a_1'y - \frac{1}{2}u'N_1(t)u,$$

где

$$\Phi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t), \quad \psi_1(s) \equiv 0, \quad s \in (T - h, T].$$

Согласно теореме 1.3, достаточно потребовать, чтобы

$$R(t, x, y, u) \le 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^r,$$
$$R(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t)) = 0$$

для почти всех $t \in \Gamma$, где $(x_0(t), u_0(t))$— оптимальный процесс. Поэтому при каждом $t \in \Gamma$ можно решать конечномерную задачу нелинейного программирования, определяя максимум функции $R(t, x, y, u)$ на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$. В точках дифференцируемости функции $\psi_0(t), \psi_1(t - h)$ удовлетворяют системе

$$\dot{\psi}_0(t) = a_0(t) - A'(t)\Phi(t),$$
$$\dot{\psi}_1(t - h) = a_1(t) - D'(t)\Phi(t). \tag{4.5}$$

Оптимальное управление определяется равенством

$$u_0(t) = N_1^{-1}(t)B'(t)\Phi(t). \tag{4.6}$$

Построим функцию $M(x,y)$, где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$:

$$M(x,y) = c_1'x + a(T) + x'\psi_0(T) + y_1'\psi_1(T-h).$$

Используя условие 3 теоремы 1.3 и непрерывность функций ψ_i, получим граничные условия (или условия трансверсальности) для функций ψ_i, $i = 0,1$:

$$\psi_0(T) = -c_1, \quad \psi_1(T-h) = 0\ . \tag{4.7}$$

Опишем алгоритм построения оптимального решения задачи (4.1)-(4.3). Интегрируя систему (4.5) с граничными условиями (4.7), определяем функции ψ_i. Затем, согласно (4.6), строим оптимальное программное управление $u_0(t)$, подставляя которое в систему (4.2), найдем оптимальную траекторию $x_0(t)$. Если в задаче (4.1)-(4.3) присутствуют фазовые ограничения $\beta(t) \le x(t) \le \alpha(t)$, $-h \le t \le T$, где $\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{R}^n$— заданные непрерывные функции, то система (4.5), примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot\psi_0(t) = a_0(t) - A'(t)\Phi(t) + \lambda(t) - \mu(t),\\
&\dot\psi_1(t-h) = a_1(t) - D'(t)\Phi(t) + \lambda(t-h) - \mu(t-h),\\
&\lambda^i(t)(\beta^i(t) - x_0^i(t)) = 0, \quad \lambda^i(t) \ge 0, \quad i = 1,\dots,n,\\
&\mu^i(t)(x_0^i(t) - \alpha^i(t)) = 0, \quad \mu^i(t) \ge 0, \quad i = 1,\dots,n.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Здесь $x_0^i(t)$— компоненты вектора $x_0(t)$.

Функции ψ_i ищем в классе кусочно-непрерывных функций. Построим функцию $M(x_j, y_j)$, используя замечание 1.3:

$$\begin{aligned}
M(x_j,y_j) = {}& c_1'x_{p+1} + a(t_{p+1}) + x_{p+1}'\psi_0(t_{p+1}) + y_{p+1}'\psi_1(t_{p+1}-h) +\\
&+ \sum_{j=1}^{p} [x_j'(\psi_0(\tau_j - 0) - \psi_0(\tau_j + 0)) + y_j'(\psi_1(\tau_j - h - 0) - \psi_1(\tau_j - h + 0))],
\end{aligned}$$

где $x_j = x(\tau_j)$.

Из условия минимума функции M на множестве

$$Q = \{x(t) \in C(\Gamma, \mathbb{R}^n) : \beta(t) \le x(t) \le \alpha(t), t \in \Gamma\}$$

получим условия трансверсальности и условия скачка в точках разрыва функций

$$
\begin{aligned}
&C_1 - \psi_0(T) - \hat{\mu}(T) + \hat{\lambda}(T) = 0,\\
&\psi_1(T-h) - \hat{\mu}(T-h) + \hat{\lambda}(T-h) = 0,\\
&\psi_0(\tau_j - 0) - \psi_0(\tau_j + 0) - \hat{\mu}(\tau_j) + \hat{\lambda}(\tau_j) = 0,\\
&\psi_1(\tau_j - h - 0) - \psi_1(\tau_j - h + 0) - \hat{\mu}(\tau_j - h) + \hat{\lambda}(\tau_j - h) = 0,\\
&\hat{\mu}^\ell(\tau_j)[\beta^\ell(\tau_j) - x_0^\ell(\tau_j)] = 0, \quad \hat{\mu}^\ell(\tau_j) \geq 0,\\
&\hat{\lambda}^\ell(\tau_j)[x_0^\ell(\tau_j) - \alpha^\ell(\tau_j)] = 0, \quad \hat{\lambda}^\ell(\tau_j) \geq 0, \quad \ell = 1, \dots, n, j = 1, \dots, p.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Из условий (4.8), (4.9) видно, что уже при наличии линейных фазовых ограничений нельзя сначала построить функции $\psi_0(t)$, $\psi_1(t-h)$ и оптимальное управление, а затем, интегрируя систему (4.2), (4.3), найти оптимальную траекторию. В этом случае системы (4.2), (4.3) с граничными условиями (4.3), (4.9) должны решаться одновременно. Это представляет собой достаточно сложную задачу, ибо в этой системе присутствует запаздывающий и опережающий аргумент, а граничные условия заданы в начальной и конечной точках. Аналогичная ситуация возникает при минимизации функционала, квадратичного по фазовым переменным.

Так, если минимизируется функционал

$$
\begin{aligned}
J(u) = \int_0^T [\frac{1}{2}x'(t)N_2(t)x(t) + \frac{1}{2}u'(t)N_1(t)u(t) + a_0'(t)x(t) +\\
+ a_1'(t)x(t-h)]dt + c_1'x(T) + x'(t)N_0x(T),
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

где $N_0, N_1(t), N_2(t), t \in \Gamma$— положительно определенные матрицы при ограничениях, задаваемых условиями (4.1)–(4.3), то оптимальное управление определяется формулой (4.6), а функции ψ_i— граничными условиями (4.7) и системой дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{\psi}_0(t) = a_0(t) + N_2(t)x(t) - A'(t)\Phi(t),\\
&\dot{\psi}_1(t-h) = a_1(t) - D'(t)\Phi(t).
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

2. Задача оптимального управления с нефиксированным временем

Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T \varepsilon(t)u^2 dt + \beta T \tag{4.12}$$

на траекториях скалярной системы

$$\dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) + d(t)x(t-h) + b(t)u, \tag{4.13}$$

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h, 0], \quad x(T) = c_1. \tag{4.14}$$

Постоянные $\beta > 0$, c_1 и непрерывные функции $\varepsilon(t) > 0, \alpha(t), d(t), b(t)$ заданы.

Положим $\psi(t,x,y) = a(t) + \psi_0(t)x + \psi_1(t-h)y$,

$$R = \dot{a}(t) + x\dot{\psi}_0(t) + y\dot{\psi}_1(t-h) - \frac{\varepsilon(t)}{2}u^2 + \\ + \Phi(t)[\alpha(t)x + d(t)y + b(t)u], \quad \psi_1(s) \equiv 0, \quad s > T-h, \tag{4.15}$$

где $\Phi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t)$.

Из условия максимума функции $R(t,x,y,u)$ на $G\times U$ найдем оптимальное управление

$$u_0(t) = b(t)\varepsilon^{-1}(t)\Phi(t), \quad t \in \Gamma. \tag{4.16}$$

Подставляя управление (4.16) в функцию R, из условия $R_x = R_y = 0$ определяем систему уравнений для функции ψ_i в точках их дифференцируемости

$$\dot{\psi}(t) = -\alpha(t)\Phi(t), \tag{4.17}$$

$$\dot{\psi}_1(t-h) = -d(t)\Phi(t). \tag{4.18}$$

Построим функцию M, используя замечание 1.4:

$$M(T,x,y) = \beta T + a(T) + \psi_0(T)x + \psi_1(T-h)y. \tag{4.19}$$

В силу произвольности $y(T)$ имеем $\psi_1(T-h) = 0$.
Из условия $R(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t)) = 0$ находим функцию $a(t)$:

$$a(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \varepsilon^{-1}(\tau)(b(\tau)\Phi(\tau))^2 d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$m = \inf_T [\beta T + c_1 \psi_0(T) + a(T)].$$

Согласно замечанию 1.4, оптимальное значение T_0 может быть определено из условий

$$\dot{a}(T_0) + c_1 \dot{\psi}(T_0) + \beta = 0, \quad \ddot{a}(T_0) + c_1 \ddot{\psi}_0(T_0) > 0.$$

Первое из этих условий с учетом (4.17) и выражения для $a(t)$ приводят к равенству

$$\frac{1}{2}\varepsilon(T_0)(\psi_0(T_0)b(T_0))^2 - c_1\alpha(T_0)\psi_0(T_0) + \beta = 0. \tag{4.20}$$

Рассматривая выражение (4.20) как уравнение относительно ψ_0, заключаем, что оно имеет положительные действительные корни, если

$$c_1^2\alpha^2(T_0) - 2\varepsilon^{-1}(T_0)(b(T_0))^2 > 0.$$

Опишем алгоритм построения решения этой задачи.

1. Выберем произвольное допустимое значение T. Решая краевую задачу $\dot{\psi}_0(t) + \alpha(t)\psi_0(t) = 0$, $\psi_0(T) = p$, где p— корень уравнения (4.20), построим функцию $\psi_0(t)$, $t \in [T-h, T]$.

2. Интегрируя уравнение $\dot{\psi}_1(t-h) = -d(t)\psi_0(t)$ с начальным условием $\psi_1(T-h) = 0$, построим $\psi_1(t)$, $t \in [T-2h, T-h]$.

3. Далее интегрируем уравнение $\dot{\psi}_0(t) = -\alpha(t)(\psi_0(t) + \psi_1(t))$ на отрезке $[T-2h, T-h]$ (полученном на шаге 1) условием $\psi_0(T-h)$ и строим функцию $\psi_0(t)$ при $t \in [T-2h, t-h]$.

4. Решая краевую задачу $\dot{\psi}(t-h) = -d(t)(\psi_0^1(t) + \psi_1^2(t))$, $t \in [T-3h, T-2h]$, находим $\psi_1(t)$, $t \in [T-3h, T-2h]$ и т.д. Таким образом определим фунцию ψ_i, $i = 0, 1$ на всем отрезке Γ.

5. Согласно (4.16), находим оптимальное управление, подставляя которое в систему (4.13), найдем оптимальную траекторию и вычислим значение функционала (4.12) вдоль найденного оптимального процесса при фиксированном выбранном значении T.

6. Изменяя T с достаточно малым шагом $\Delta > 0$ на интервале $[0, T]$, найдем значения $J(u, T)$ и определим то значение T_0, при котором достигается минимум этого функционала. Точность может быть обеспечена за счет уменьшения шага Δ.

3. Линейная задача оптимального быстродействия

Требуется минимизировать время T перехода скалярной системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = \alpha(t)x(t) + d(t)x(t-h) + u(t), \quad |u(t)| \le 1, \\ &x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h, 0] \end{aligned} \tag{4.21}$$

из заданного начального состояния φ в конечное $x(T) = c_1$. Используя представление $\psi(t,x,y) = a(t) + \psi_0(t)x + \psi_1(t-h)y$, построим функцию

$$\begin{aligned} &R(t,x,y,u) = \dot{a}(t) + \dot{\psi}_0(t)x + \dot{\psi}_1(t-h)y + \Phi(t)(\alpha(t)x + d(t)y + u), \\ &\psi_1(s) \equiv 0, \quad s > T - h, \end{aligned}$$

где

$$\Phi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t),$$

и функционал

$$m = \inf_{y \in R, T > 0} [a(T) + \psi_0(T)c_1 + \psi_1(T-h)y + T].$$

Требованиям теоремы 1.3 удовлетворяют следующие функции:

$$\begin{aligned} &u_0(t) = sign\Phi(t), \quad t \in \Gamma, \\ &\dot{\psi}_0(t) = -\alpha(t)\Phi(t), \quad \dot{\psi}_1(t-h) = -d(t)\Phi(t), \quad \psi_1(T-h) = 0, \\ &a(t) = \int_0^t |\Phi(s)|ds. \end{aligned}$$

Оптимальное значение T_0 определяется из условия

$$\min_{T>0}\{T + \int_0^T |\Phi(s)|ds + \psi_0(T)c_1\} = T_0 + \int_0^{T_0} |\Phi(s)|ds + \psi_0(T_0)c_1.$$

§5. Оптимальное управление системами с переменным запаздыванием

Во многих реальных задачах запаздывания $h(t)$ зависит от времени. Рассмотрим некоторые задачи управления системами.

1. Задача оптимального управления системой с переменным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h), u(t)), \quad t \in [0,T] = \Gamma,$$
$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)). \tag{5.1}$$

Здесь $h(t)$— положительная, непрерывно дифференцируемая функция, причем $\dot{h}(t) < 1$. Отсюда, в частности, следует, что функция $t - h(t)$ монотонно возрастает и для нее существует обратная функция $r(\tau)$, являющаяся решением уравнения $\tau = t - h(t)$. Зададим начальные условия для системы (5.1)

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in E_0, \tag{5.2}$$

где E_0— заданное начальное множество.

Граничное условие имеет вид $x(T) \in X_T \subset \mathbb{R}^n$.

Управление является измеримой на Γ функцией и удовлетворяет включению

$$u(t) \in U(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^r, \quad \text{п.в.} t \in \Gamma = [0,T]. \tag{5.3}$$

Требуется минимизировать функционал

$$J(u) = \int_0^T F_1(t, x(t), x(t-h), u(t))dt + F_0(x(t)) \tag{5.4}$$

на множестве всех допустимых процессов. Функции f, F_0, F_1 удовлетворяют тем же предположениям, что и в §1. При сделанных предположениях решение системы уравнений (5.1), (5.2) может быть построено при каждом фиксированном допустимом управлении $u(t) \in U(t, x(t))$, $t \in \Gamma$.

2. Достаточные условия оптимальности

Пусть функция $\psi: G \to \mathbb{R}$ принадлежит множеству γ_- (см.§1) и $\psi_2(t, y) = 0$, $t \geq T - h(T)$. Вычислим полную производную функции $\psi(t, xy) \in \gamma_-$ в силу системы (5.1)

$$\dot{\psi}(t) = \psi_t + \psi'_x f(t) + \psi'_y \frac{d}{dt}[y(t)],$$

где $y(t) = x(t-h(t))$, $\quad \psi(t) = \psi(t, x(t), y(t))$, $\quad f(t) = f(t, x(t), y(t), u(t))$.

Интегрируя это выражение в пределах от 0 до T и делая в последнем слагаемом замену переменных $r = t - h(t)$, получим

$$\psi(T) - \psi(0) = \int\limits_0^{T-h(T)} [\psi_t(t) + \psi_x'(t) f(t) + \psi_y'(r(t)) f(t) \dot{r}(t)] dt +$$

$$+ \int\limits_{T-h(T)}^{T} [\psi_t(t) + \psi_x'(t) f(t)] dt + C.$$

Здесь C зависит только от начальных данных задачи (см. §1). Положим

$$R(t,x,y,u) = -F_1(t,x,y,u) + \psi_t(t,x,y) + \Phi'(t,x) f(t,x,y,u),$$
$$\Phi(t,x) = \psi_x(t,x) + \psi_y(r(t),x)\dot{r}(t).$$

Тогда справедливо равенство (1.11) и теорема 1.3 остается в силе с учетом нового определения функции $R(t,x,y,u)$.

Пусть U— выпуклое, замкнутое, ограниченное множество в $\mathbb{R}^r$ и теорема 1.3 выполняется для следующей функции $\psi \in \gamma_-$:

$$\psi(t,x,y) = a(t) + \psi_0'(t)x + \psi_1'(t-h(t))y, \quad \psi_1(s) \equiv 0, \quad s \geq T - h(T).$$

Тогда

$$\begin{aligned} & R(t,x,y,u) = \dot{a}(t) + \dot{\psi}_0'(t)x + y'\frac{d}{dt}(\psi_1(t-h(t))) + \\ & + \Phi'(t) f(t,x,y,u) - F_1(t,x,y,u), \\ & \Phi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t)\dot{r}(t), \quad t \in \Gamma. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Оптимальное управление определяется формулой

$$u_0(t,x,y) = \arg\max_{u \in U} [\Phi'(t) f(t,x,y,u) - F_1(t,x,y,u)]. \tag{5.6}$$

В точках дифференцируемости функции $\psi_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} & \dot{\psi}_0(t) = F_{1x}(t) - f_x'(t)\Phi(t), \\ & \frac{d}{dt}[\psi_2(t-h(t))] = F_{1y}(t) - f_y'(t)\Phi(t), \quad t \in \Gamma, \end{aligned} \tag{5.7}$$

с граничными условиями

$$\psi_1(T) = -F_{0x}(x_0(T)), \quad \psi_2(T - h(T)) = 0. \tag{5.8}$$

Введем функцию H для задачи (5.1)–(5.4):

$$H(t, x, y, u, \psi) = -F_1(t, x, y, u) + \psi'(t) f(t, x, y, u).$$

Для любого допустимого процесса ω справедливо равенство

$$J(u) = -\int_0^T [H(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t)) - \dot{\psi}'(t) x(t)] dt + M(x(T)),$$

где $M(x(T)) = F_0(x(T)) + \psi'(T)x(T) - \psi'(0)x(0)$.
Положим далее $||\Delta x|| = \max_t |x(t) - \bar{x}_0(t)|, \quad t \in \Gamma$.

Считая $||\Delta x||$ достаточно малой величиной и раскладывая функцию H в ряд Тейлора по степеням $\Delta x, \Delta y$ в окрестности точки $(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t))$, найдем приращение функционала (5.4), где $x_0(t)$ и $u_0(t)$— оптимальные траектория и управление:

$$J(u) - J(u_0) = \int_0^T [H(t, x(t), y(t), u_0(t), \psi(t)) - H(t, x(t), y(t), u(t), \psi(t))] dt -$$

$$-\int_0^T [\dot{\psi}'(t)x(t) + H'_{0x}(t)\Delta x(t) + H'_{0y}(t)\Delta y(t)] dt + M'_x(x(t))\Delta x(T) + \bar{o}(||\Delta x||),$$

где $H_0(t) = H(t, x_0(t), y_0(t), u_0(t), \psi(t))$. Используя это равенство, заключаем, что необходимым условием локального минимума функционала в точке $u_0(t)$ является существование нетривиальной вектор-функции $\psi(t)$, удовлетворяющей системе уравнений

$$-\dot{\psi}(t) = H_{0x}(t) + H_{oy}(r(t))\dot{r}(t), \quad t \in \Gamma, \tag{5.9}$$

с граничными условиями

$$\psi(T) = -F_{0x}(x_0(T)), \quad \psi(s) \equiv 0, \quad s > T. \tag{5.10}$$

Вводя обозначения $\psi(t) = \psi_0(t) + \psi_1(t)$ и полагая $\psi_1(t) \equiv 0$, $t > T - h(T)$, убеждаемся в эквивалентности условий (5.7), (5.8) и (5.9), (5.10). Условие для определения оптимального управления в терминах функции H имеет вид

$$u_0(t,x,y) = \arg\max_{u\in U} H(t,x,y,u,\psi). \qquad (5.11)$$

Таким образом, если теорема 1.3 справедлива для линейной по x и y функции $\psi \in \gamma-$, то необходимые и достаточные условия локального минимума в задаче совпадают. Более того, найденное решение доставляет абсолютный минимум функционалу (5.4). Если $h(t) = h = Const$, то $\dot{r}(t) = 1$, $r(t) = t+h$ и условия (5.7)–(5.11) совпадают с принципом максимума Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием.

§6. Оптимальное управление системами с запаздыванием в управлении

Получены необходимые и достаточные условия оптимальности для систем с запаздыванием в управлении. Решена линейная квадратичная задача.

1. Формула для приращения функционала

Рассмотрим задачу оптимального управления системой с запаздыванием в управлении. Такие задачи возникают в теории автоматического регулирования, а также при построении оптимального фильтра.

Абсолютно непрерывная функция состояния $x(t) : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ и измеримая функция управления $u(t) : \Gamma \to \mathbb{R}^r$ удовлетворяют ограничениям

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t),u(t-h)), \quad t \in [0,T] = \Gamma, \qquad (6.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad u(\Theta) = \varphi(\Theta) \quad ,\Theta \in [-h,0], \quad x(T) \in X_T, \qquad (6.2)$$

$$x(t) \in X(t) \subset \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in U(t,x(t)) \subset \mathbb{R}^r. \qquad (6.3)$$

Требуется найти допустимый процесс ω, доставляющий глобальный или локальный минимум функционалу

$$J(u) = \int\limits_0^T F_1(t,x(t),u(t),u(t-h))dt + F_0(x(T)). \qquad (6.4)$$

Предположим, что функции $f(t,x,u,v), f_x(t,x,u,v), F_1(t,x,u,v)$ измеримы по t, непрерывны по u, v, x, функция $F_0(x)$— непрерывно дифференцируема. Если правая часть системы (6.1) и функция F_1 не зависят явно от $u(t)$, то задача (6.1)–(6.4) сводится к задаче без запаздывания введением функции $v(t) = u(t-h)$.

Пусть, далее, ω_0— оптимальный процесс. Тогда для любого допустимого процесса ω и любой абсолютно непрерывной функции $\Phi(t)$ справедливо равенство

$$J(u) - J(u_0) =$$
$$= \int_0^T [H(t, x_0(t), u_0(t), v_0(t), \Phi(t)) - H(t, x(t), u(t), v(t), \Phi(t)) -$$
$$- \dot{\Phi}'(t)\Delta x(t)]dt + F_0(x(T)) - F_0(x_0(T)) + \Phi'(T)\Delta x(T), \qquad (6.5)$$
$$H(t, x, u, v, \Phi) = -F_1(t, x, u, v) + \Phi' f(t, x, u, v),$$
$$\Delta x = x(t) - x_0(t).$$

Положим

$$\dot{\Phi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), v_0(t), \Phi(t)), \quad \Phi(T) = -F_{0x}(x(T)). \qquad (6.6)$$

С учетом (6.6) формула (6.5) имеет вид

$$J(u) - J(u_0) = \int_0^T [H(t, x_0(t), u_0(t), v_0(t), \Phi(t)) - H(t, x(t), u(t), v(t), \Phi(t))]dt +$$
$$+ \int_0^T \acute{o}(||\Delta x(t)||)dt + \acute{o}(|\Delta x(T)|),$$

где $\acute{o}(||\Delta x(t)||)$ есть величина, стремящаяся к нулю при $||\Delta x(t)|| \to 0$. Используя формулу (6.5), можно доказать принцип максимума для задачи (6.1)–(6.3).

Пусть функция $\Psi(t, x)$— непрерывна и почти всюду непрерывно дифференцируема по совокупности аргументов. Положим

$$R(t, x, u, v) = -F_1(t, x, u, v) + \Psi_t(t, x) + \Psi_x'(t, x) f(t, x, u, v),$$
$$M(x) = F_0(x) + \Psi(T, x) - \Psi(0, x(0)).$$

Тогда

$$J(u) - J(u_0) = \int_0^T [R(t, x_0(t), u_0(t), v_0(t), \Phi(t)) - H(t, x(t), u(t), v(t), \Phi(t))]dt +$$
$$+ M(x(T)) - M(x_0(T)).$$

Из последнего равенства вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 6.1. *Пусть существуют непрерывная, почти всюду непрерывно дифференцируемая функция* $\Psi(t,x)$ *и процесс* ω_0, *такие, что*

$$1. \quad \int_0^T R(t,x(t),u(t),v(t))dt \le 0, \quad \forall \omega \in W,$$

$$2. \quad R(t,x_0(t),u_0(t),v_0(t)) = 0, \quad \text{п.в.} t \in \Gamma,$$

$$3. \quad M(x_0(T)) = \inf_{x \in X_T} M(x).$$

Тогда процесс ω_0 — *оптимальный и* $J(u_0) = M(x_0(T))$.

Теорема 6.1 не дает конструктивного метода построения оптимального процесса. С ее помощью можно проверять, является ли данный процесс оптимальным или нет. Сформулируем достаточные условия оптимальности для различных типов задач.

2. Достаточные условия оптимальности для линейных задач

Рассмотрим линейную по фазовым координатам управляемую систему, в которой запаздывание присутствует как в фазовой переменной, так и в управлении:

$$J(u) = \int_0^T [a_0'(t)x(t) + g_0(t,(t))]dt + b'x(T) \to \inf, \tag{6.7}$$

$$\dot{x}(t) = A_0(t)x(t) + A_1(t)x(t-h) + B_0(t,u(t)) + B_1(t,u(t-h_1)), \tag{6.8}$$

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h,0], \quad u(\Theta_1) = \varphi_0(\Theta_1), \quad \Theta_1 \in [-h_1,0], \tag{6.9}$$

$$u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad \text{п.в.} t \in \Gamma = [0,T]. \tag{6.10}$$

Здесь $x(t) : \Gamma \to \mathbb{R}^n$, $u(t) : \Gamma \to \mathbb{R}^r$, $g_0(t,u) : \Gamma \times U \to \mathbb{R}$, $A_0(t), A_1(t)$—$n \times n$ матрицы, $B_0(t,u), B_1(t,v), a_0(t), b$ n-мерные измеримые по t и непрерывные по u и v функции $\varphi(\Theta) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_0(\Theta) \in \mathbb{R}^r$— заданные непрерывные функции.

Пусть

$$\Psi(t,x) = a(t) + p'(t)x, \tag{6.11}$$

где $a(t)$— непрерывная, $p(t)$— абсолютно непрерывная функция.

Аналогично §1, используя представление (6.11), построим двойственную задачу. Для любого допустимого процесса ω и функции $\Psi(t,x)$, определяемой согласно (6.11), справедливо равенство

$$J(u) = \int_0^{T-h} [x'(t)(a_0(t) + \dot p(t) + A_0'(t)p(t) + A_1'(t+h)p(t+h))]dt +$$

$$+ \int_{T-h}^{T} (a_0(t) + \dot p(t) + A_0'(t)p(t))'x(t)dt + \int_0^T [p'(t)B_0(t,u(t)) + g_0(t,u(t))]dt +$$

$$+ \int_{-h1}^{T-h_1} [p'(t+h1)B_1(t+h1,u(t))]dt + \int_{-h}^{0} (A_h'(t+h)p(t+h))'\varphi(t)dt +$$

$$+b'x(T) + p'(T)x(T) - p'(0)x(0). \qquad (6.12)$$

Положим $p(t) = 0$ для $t < 0$, а при $t \geq 0$ определим функцию $p(t)$ как решение системы уравнений

$$-\dot p(t) = A_0'(t)p(t) + A_1'(t+h)p(t+h) + a_0(t), \quad t \in \Gamma, \qquad (6.13)$$

$$p(T) = -b, \quad p(s) = 0, \quad s > T. \qquad (6.14)$$

При сделанных предположениях существует абсолютно непрерывное решение этой системы.

Если ω_0— оптимальный процесс, то $\Delta J \geq 0$. С учетом (6.13), (6.14) выражение для ΔJ представимо в виде

$$\Delta J = J(u) - J(u_0) = \int_0^T [p'(t)(B_0(t,u_0(t)) - B_0(t,u(t))) +$$

$$+ g_0(t,u_0(t)) - g_0(t,u(t)) + p'(t+h_1)(B_1(t+h_1,u_0(t)) -$$

$$- B_1(t+h_1,u(t))]dt. \qquad (6.15)$$

Из равенства (6.15) следует соотношение принципа максимума. Если $u(t)$ на отрезке $[-h_1, 0]$ не задано, то для $t \in [-h_1, T]$

$$u_0(t) = \arg\max_{u \in U} [p'(t)B_0(t,u) + p'(t+h_1)B_1(t+h_1,u) + g_0(t,u)]. \qquad (6.16)$$

Приведем теперь для системы (6.8) соотношения принципа максимума при следующих предположениях:

$u(\Theta_1) = \varphi_0(\Theta_1)$, $\Theta_1 \in [-h_1, 0]$— заданная измеримая функция,

$g_0(t, u) = \frac{1}{2}u'N_1(t)u, \quad U = \mathbb{R}^r, \quad B_0(t,u) = B_0(t)u,$
$B_1(t,v) = B_1(t)v, \quad X_T = \mathbb{R}^n.$

Здесь $N_1(t)$— непрерывная симметричная положительно определенная $r \times r$-матрица, $B_i(t)$— $n \times r$-матрица с измеримыми ограниченными элементами. Тогда оптимальный процесс $(u_0(t), x_0(t))$ определяется следующими условиями :

$$\begin{aligned}
&u_0(t) = N_1^{-1}(t)B_0'(t)p(t) + N_t^{-1}B_1'(t+h_1)p(t+h_1), \quad t \in \Gamma,\\
&\dot{x}(t) = A_0(t)x_0(t) + A_1(t)x_0(t-h) + B_0(t)N_1^{-1}(t)[B_1'(t+h_1)p(t+h_1) +\\
&\quad + B_0'(t)p(t) + B_1'(t)N_1^{-1}(t-h_1)[B_0'(t-h_1)p(t-h_1) + B_1'(t)p(t)]. \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

В этой задаче сначала интегрируется система (6.13), (6.14) для $p(t)$, начиная от конечного момента T до начального $t = 0$, потом, согласно (6.16), определяется программное оптимальное управление $u_0(t)$, а затем интегрируется система (6.17) с начальным условием (6.9) и находится оптимальная траектория $x_0(t)$.

3. Линейная система с квадратичным критерием качества

Аналогичным способом можно построить синтез оптимального управления для квадратичного функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^T [u'N_1(t)u + x'N_2(t)x]dt. \qquad (6.18)$$

Здесь $N_1(t), N_2(t)$— непрерывные, симметричные соответственно $r \times r$- и $n \times n$-матрицы, $N_1(t)$— положительно определена, $N_2(t)$— неотрицательно определена. Кроме того, выполнены ограничения, задаваемые условиями (6.8)–(6.10) в предположении $(\mathcal{A})$. В этой задаче функция $p(t) : \Gamma \in \mathbb{R}^n, p(s) = 0, s < 0$ удовлетворяет почти всюду уравнениям

$$-\dot{p}(t) = A_0'(t)p(t) + A_1'(t+h)p(t+h) + N_2(t)x_0(t), \quad t \in \Gamma, \qquad (6.19)$$

с граничными условиями

$$p(s) = 0, \quad s \geq T. \qquad (6.20)$$

Оптимальное управление $u_0(t)$ определяется выражением (6.16).

Пусть далее для простоты вычислений матрицы N_1, N_2, A_i, B_i— постоянные.

Для решения системы (6.19), (6.20) имеет место представление [274, 275]

$$p(t) = P(t,\tau,\tau)x(\tau) + \int\limits_{\tau-h}^{\tau} P(t, s+h, \tau)A_1 x(s)ds +$$

$$+ \int\limits_{\tau-h_1}^{\tau} P(t, s+h_1, \tau)B_1 u(s)ds. \tag{6.21}$$

Здесь матричная функция $P(t,s,\tau)$ непрерывна по $(t,s,\tau) \in \Gamma$, непрерывно дифференцируема почти всюду, за исключением точек $t = s$, $t = T - h$, $s = T - h$, и удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial P(t,s,\tau)}{\partial \tau} = P(t,\tau,\tau)H_0 P(\tau,s,\tau) + P(t,\tau+h_1,\tau)H_{01}P(\tau+h_1,s,\tau) +$$
$$+ P(t,\tau+h_1,\tau)H_1 P(\tau+h_1,s,\tau); \tag{6.22}$$

$$\frac{\partial P(t,\tau,\tau)}{\partial \tau} = -P(t,\tau,\tau)A_0 - P(t,\tau+h,\tau)A_1 + P(t,\tau,\tau)H_0 P(\tau,\tau,\tau) +$$
$$+ P(t,\tau+h_1,\tau)H_{10}P(\tau,\tau,\tau) + P(t,\tau+h_1,\tau)H_1 P(\tau+h_1,s,\tau); \tag{6.23}$$

$$\frac{\partial P(\tau,\tau,\tau)}{\partial \tau} = -A_0' P(\tau,\tau,\tau) - P(\tau,\tau,\tau)A_0 - A_1' P(\tau+h,\tau,\tau) -$$
$$-P(\tau,\tau+h,\tau)A_1 - N_2 + P(\tau,\tau,\tau)H_0 P(\tau,\tau,\tau) +$$
$$+ P(\tau,\tau+h_1,\tau)H_{10}P(\tau,\tau,\tau) + P(\tau,\tau,\tau)H_{01}P(\tau+h_1,\tau,\tau) +$$
$$+ P(\tau,\tau+h_1,\tau)H_1 P(\tau+h_1,\tau,\tau). \tag{6.24}$$

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} &P(t,s,\tau) = 0, \quad t,s \geq T, \\ &P(T,T,T) = 0, \end{aligned} \tag{6.25}$$

где

$$H_0 = B_0 N_1^{-1} B_0', \quad H_{01} = B_0 N_1^{-1} B_1',$$
$$H_{10} = B_1 N_1^{-1} B_0', \quad H_1 = B_1 N_1^{-1} B_1'.$$

Оптимальное управление, минимизирующее целевой функционал, существует, является единственным и равняется

$$u_0(t) = -N_1^{-1}B_0'[P(t,\tau,\tau)x(\tau) + \int\limits_{\tau-h}^{\tau} P(t, s+h, \tau)A_1 x(s)ds +$$

$$+ \int\limits_{\tau-h_1}^{\tau} P(t, s+h, \tau)B_1 u(s)ds] - \gamma(t)N_1^{-1}B_1'[P(t+h_1, \tau, \tau)x(\tau) +$$

$$+ \int\limits_{\tau-h}^{\tau} P(t+h_1, s+h, \tau)A_1 x(s)ds + \int\limits_{\tau-h_1}^{\tau} P(t+h_1, s+h_1, \tau)B_1 u(s)ds], \qquad (6.26)$$

где

$$\gamma(t) = \begin{cases} 1, & t \in [\tau, T-h_1], \\ 0. & t \in (T-h_1, T]. \end{cases}$$

Синтез управления (или управления с обратной связью) получается, если в выражении (6.26) положить $\tau = t$.

Решение системы уравнений относительно функции $P(t, s, \tau)$ может быть получено с помощью дискретной аппроксимации. Эту систему можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений по τ с фиксированными параметрами t и s. Заметим, что, согласно (6.26), оптимальное управление в момент времени t зависит не только от состояний системы на интервале запаздывания $[t-h, t]$, но и от предшествующего управления на интервале $[t-h_1, t]$.

§7. Необходимые и достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых процессов с запаздыванием

В этом параграфе получены необходимые и достаточные условия оптимальности для дискретных управляемых процессов с запаздыванием по фазовому вектору и вектору управления. Рассмотрен приближенный метод построения решения и сформулирован дискретный принцип максимума и квазимаксимума. Управление дискретными системами рассматривалось в работе [11], в которой приводится подробная библиография по данному вопросу.

1. Постановка дискретной задачи. Эквивалентное представление минимизируемого функционала

Задачи дискретного оптимального управления возникают в экономике, исследовании операций, в организации и технологии производства, а также при построении численных методов решения задач оптимального управления непрерывными системами.

Рассмотрим дискретную задачу с запаздыванием по фазовым переменным и управлению, в которой переход из k в $(k+1)$ – e состояние определяется соотношениями

$$x_{k+1} = f_k(x_{k-\nu}, \dots, x_k, u_{k-\mu}, \dots, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1. \tag{7.1}$$

Фазовый вектор x_k и вектор управления u_k на k – м шаге удовлетворяют ограничениям

$$x_k \in X_k \subset \mathbb{R}^n, \quad k = 0, \dots, N, \quad x_k = (x_{1k}, \dots, x_{nk}), \tag{7.2}$$

$$u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^r, \quad k = 0, \dots, N-1, \quad u_k = (u_{1k}, \dots, u_{rk}). \tag{7.3}$$

Начальное состояние системы задается набором векторов

$$x - i = a_i, \quad i = 0, \dots, \nu, \tag{7.4}$$

$$u - j = \varphi_j^0, \quad j = 1, \dots, \mu. \tag{7.5}$$

Допустимый процесс $\omega = (x_0, \dots, x_N, u_0, \dots, u_{N-1})$ определен, если заданы начальные условия (7.4), (7.5) и выбраны управления $u_k \in U_k$, $k = 0, \dots, N-1$ так, что

$$x_{k+1} = f_k(x_{k-\nu}, \dots, x_k, u_{k-\mu}, \dots, u_k) \subset X_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Задача состоит в минимизации на множестве всех допустимых процессов функционала

$$I(u) = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^0(x_{k-\nu}, \dots, x_k, u_{k-\mu}, \dots, u_k) + b(x_N). \tag{7.6}$$

Введем обозначения $z_j = (x_{j-\nu}, \dots, x_j)$, $v_j = (u_{j-\mu}, \dots, u_j)$, $j = 0, \dots, N-1$. Предположим, что функции f_k^0, f_k, b, $k = 0, \dots, N-1$ ограничены снизу в области определения. Заметим, что если начальные условия в задаче (7.1)–(7.6) фиксированы, множества u_k, $k = 0, \dots, N-1$ ограничены и замкнуты, $W \neq \emptyset$, а функции f_k^0, f_k, b, $k = 0, \dots, N-1$— непрерывны по совокупности

В силу формул (7.1) ни один из векторов x_i, $i = 0, \dots, N-1$ не зависит от x_N. Поэтому

$$p_N = \frac{dI(x,u)}{dx_N} = \frac{\partial b(x_N)}{\partial x_N}. \tag{7.13}$$

Учитывая соотношения (7.1), (7.6), вычислим p_i, $i = N-1, \dots, 0$

$$p_i = \frac{\partial I}{\partial x_i} + \sum_{j=i}^{i+\nu} \frac{\partial x_{j+1}}{\partial x_i} \frac{dI}{dx_{j+1}} \tag{7.14}$$

или

$$p_i = \frac{\partial I}{\partial x_i} + \sum_{j=i}^{i+\nu} \frac{\partial x_{j+1}}{\partial x_i} p_{j+1}.$$

Используя определение функций H_i, формулы (7.14) можно представить в виде

$$\begin{gathered} p_N = b_x(x_N), \quad p_j = 0, \quad j > N, \\ p_i = \sum_{j=i}^{i+\nu} H_{jx_i}(z_j, v_j, p_{j+1}), \quad i = N-1, \dots, 0. \end{gathered} \tag{7.15}$$

Предположим, что функции f_0, f_k непрерывно дифференцируемы по u_i, $i = 0, \dots, N-1$. Для того чтобы решать задачу минимизации сложной функции $I(x(u), u)$, зависящей от N_r переменных на множестве $\mathbb{R}^r \times \ldots \times \mathbb{R}^r$, необходимо знать ее производные по u_i, которые обозначим через y_i, $i = 0, \dots, N-1$

$$y_i = \frac{\partial I(x(u), u)}{\partial u_i} = \lim_{|\Delta| \to 0} |\Delta|^{-1} (I(\tilde{x}, \tilde{u}) - I(x, u)).$$

Здесь процесс $(\tilde{x}, \tilde{u})$ строится следующим образом:

$$\begin{aligned} &u_\ell = \tilde{u}_\ell, \quad \ell = 0, \dots, N-1, \quad \ell \neq i, \quad \tilde{u}_i = u_i + \Delta, \\ &x_\ell = \tilde{x}_\ell, \quad \ell = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Векторы $\tilde{x}_\ell$, $\ell = i+1, \dots, N$ вычисляются согласно (7.1), (7.4).

Используя формулы (7.8), (7.11) для приращения Δi с учетом выбранного процесса $(\tilde{x}, \tilde{u})$, получим

$$y_i = \sum_{j=i}^{i+\mu} H_{ju_i}(z_j, v_j, p_{j+1}), \quad i = 0, \dots, N-1. \tag{7.16}$$

Легко видеть, что если в дискретной задаче отсутствуют ограничения (7.2), (7.3), то формулы (7.10), (7.15) совпадают, а условия $y_i = 0$, $i = 0, \dots, N-1$ являются необходимыми условиями минимума в задаче (7.1), (7.4)–(7.6).

Если в задаче присутствуют ограничения (7.3), причем U_k, $k = 0, \dots, N-1$— компактные выпуклые подмножества $\mathbb{R}^r$, то оптимальное управление $[\overline{u}]$ должно удовлетворять следующим неравенствам:

$$\sum_{j=i}^{i+\mu} H'_{ju_i}(z_j, v_j, p_{j+1})(u_j - \overline{u}_j) \geq 0, \quad \forall u_i \in U_i, \quad i = 0, \dots, N-1.$$

Замечание 7.1. Если в исходной задаче присутствуют смешанные ограничения вида $h_\ell(x, u) \leq 0$, $\ell = 1, \dots, s$, где $h_\ell(x, u)$— непрерывно дифференцируемые по x и u функции, то для ее решения представим эти ограничения в дискретном виде:

$$h_\ell(x_j, u_j) \leq 0, \quad \ell = 1, \dots, s, \quad j = 1, \dots, q.$$

Далее для численной реализации метода и определения набора векторов $[p]$, $[y]$ определим новую функцию

$$I_H[x(u), u] = I[x(u), u] + \sum_{\ell=1}^{s} \sum_{j=1}^{q} \lambda_\ell^j h_\ell(x_j, u_j). \tag{7.17}$$

Задача минимизации функции (7.17) на множестве, задаваемом ограничениями (7.1)–(7.5), является специальной задачей нелинейного программирования, в которой, согласно теореме Куна-Таккера, необходимые условия оптимальности имеют вид

$$\frac{dI_H}{du_i}[x(\overline{u}), \overline{u}] = 0, \quad i = 0, \dots, q-1,$$
$$\lambda_\ell^j h_\ell(\overline{x}_j, \overline{u}_j) = 0, \quad \lambda_\ell^j \geq 0, \quad h_\ell(\overline{x}_j, \overline{u}_j) \leq 0, \quad i = 0, \dots, q, j = 1, \dots, q.$$

Замечание 7.2. Если все функции в задаче (7.1)–(7.6) дважды непрерывно дифференцируемы по x и u, то можно найти вторые производные сложной функции $R[x(u), u]$ по u и использовать для построения решения задачи (7.1), (7.6) быстро сходящиеся методы, аналогичные методу Ньютона. Для получения более высокой точности интегрирования исходной задачи (7.1)–(7.6) можно использовать схему Рунге-Кутта для вычисления производной и более точные квадратурные формулы для вычисления интегралов.

3. Дискретный принцип максимума

Пусть $\omega^* = (u_0^*, \ldots, u_{N-1}^*, x_0^*, \ldots, x_N^*)$— оптимальный процесс, а ω— допустимый процесс, соответствующий начальным условиям (7.4), (7.5) и набору векторов управления $[u] = (u_0^*, \ldots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \ldots, u_{N-1}^*)$, т.е. $u_k = u_k^*$, $k \neq i$, $k = 0, \ldots, N-1$.

Найдем в этом случае приращение функционала ΔI, используя сопряженные векторы p_k, $k = 0, \ldots, N$ (7.10) и формулу (7.11):

$$\Delta I = \sum_{k=i}^{i+\mu}[H_k(z_k, v_k^*, p_{k+1}) - H_k(z_k, v_k, p_{k+1})] + \\ + \sum_{k=i}^{N}\alpha(z_k)|\Delta z_k|. \tag{7.18}$$

Минимизируемую функцию $I(u)$ при фиксированных начальных условиях (7.4), (7.5) можно рассматривать как функцию набора векторов $[u] = (u_0, \ldots, u_{N-1}) \in \mathbb{R}^{rN}$. Минимизация этой функции на множестве $U_0 \times \ldots \times U_{N-1}$ является достаточно сложной задачей вследствие большой размерности $[u]$. Используя специальные свойства дискретной задачи оптимального управления (7.1), (7.6), сформулируем условия, аналогичные принципу максимума Понтрягина для непрерывных систем.

Пусть многошаговый процесс описывается соотношениями (7.1)-(7.5) и задача состоит в отыскании i — й составляющей u_i набора векторов $[u]$, которая составляет минимум функционала

$$I(x(u), u) = b(x_N) \tag{7.19}$$

по всевозможным значениям $u_i \in U_i$, когда все остальные компоненты фиксированы, индекс i— произвольный, меньший $N-1$.

Обозначим через U_i^* множество решений сформулированной задачи и предположим, что

$$U_i^* = arg \min_{u_i \in U_i} b(x_N) \neq 0.$$

Функции f_k, b непрерывны по совокупности аргументов и непрерывно дифференцируемы по x_k, $k = 0, \ldots, N$. Тогда для каждого вектора $u_i \in U_i$ находится последовательность $x_{i+1}, \ldots, x_N$. Функцию $b(x_N)$ можно рассматривать как сложную функцию аргументов $x_{i+1}(u_i) = a_i, \ldots, x_{i+\mu+1}(u_i) = a_{i+\mu}$. Обозначим ее через $B(a_i, \ldots, a_{i+\mu})$. При этом

$$a_i = a_i(u_i) = f_i(z_i, v_i), \ldots, a_{i+\mu} = a_{i+\mu}(u_i) = f_{i+\mu}(z_{i+\mu}, v_{i+\mu}).$$

Множество U_i^* можно представить в виде

$$U_i^* = arg \min_{u_i \in U_i} B(a_i(u_i), \dots, a_{i+\mu}(u_i)). \qquad (7.20)$$

Вместо минимизации функции $B(a_i(u_i), \dots, a_{i+\mu}(u_i))$ по вектору управления $u_i \in U_i$ можно рассмотреть задачу о минимизации функции $B(a_i, \dots, a_{i+\mu})$ по фазовым векторам $a_i \in a_i(U_i) = \Omega_i, \dots, a_{i+\mu} \in a_{i+\mu}(U_i) = \Omega_{i+\mu}$.

Пусть $u_i^* \in U_i^*$, функция $B(a_i, \dots, a_{i+\mu})$ выпукла на выпуклых множествах $\Omega_i, \dots, \Omega_{i+\mu}$, $a_i^* = a_i(u_i^*), \dots, a_{i+\mu}^* = a_{i+\mu}(u_i^*)$. В этом случае для любых $a_i \in \Omega_i, \dots, a_{i+\mu} \in \Omega_{i+\mu}$ справедливо неравенство

$$\sum_{j=i}^{i+\mu} (\frac{\partial B}{\partial a_j}(a_i^*, \dots, a_{i+\mu}^*))'(a_j - a_j^*) \geq 0. \qquad (7.21)$$

Неравенство (7.21) с учетом того, что

$$\frac{\partial B(a_i^*, \dots, a_{i+\mu}^*)}{\partial a_{N-1}} = b_x(x_N) = -p_N, \qquad \frac{\partial B}{\partial a_j} = -p_{j+1}, \quad j = N-1, \dots, 0,$$

где векторы $-p_j$, $j = 0, \dots, N$ удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (7.10) при $z_i = z_i^*$, $v_i = v_i^*$, $i = 0, \dots, N-1$, можно переписать в виде

$$\sum_{j=i}^{i+\mu} p'_{j+1} f_j(z_j, v_j^*) \geq \sum_{j=i}^{i+\mu} p'_{j+1} f_j(z_j, v_j), \quad \forall u_i \in U_i, \quad i = 0, \dots, N-1. \qquad (7.22)$$

Поскольку $v_j = (u_{j-\mu}, \dots, u_{j-1}, u_j)$, $j = i, \dots, i+\mu$, $u_j = u_j^*$, $j = i$, то это условие в общем случае достаточно сложно использовать для определения оптимального вектора. Однако если функции $f_k(z_k, v_k)$ можно представить в виде

$$f_k(z_k, v_k) = \sum_{j=k-\mu}^{k} f_k^j(z_k, u_j), \qquad (7.23)$$

то неравенство (7.22) эквивалентно следующему:

$$\sum_{j=i}^{i+\mu} p'_{j+1} f_j^i(z_j, u_j^*) \geq \sum_{j=i}^{i+\mu} p'_{j+1} f_j^i(z_j, u_i), \quad \forall u_i \in U_i. \qquad (7.24)$$

Неравенство (7.24) представляет собой дискретный принцип максимума для задачи (7.1)–(7.6) с учетом аддитивного представления правой части рекуррентных соотношений (7.1), определяемых равенствами (7.23). Если минимизируемую функцию можно записать в форме

$$I(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=k-\mu}^{k} g'_k(z_k, u_i) + b(x_N), \tag{7.25}$$

то аналогично [11, 15] можно показать, что неравенство (7.24) для любого вектора $u_i \in U_i$, $i = 0, \dots, N-1$ будет иметь вид

$$\sum_{j=i}^{i+\mu} g^i_j(z_i, u^*_i) + p'_{j+1} f^i_j(z_j, u^*_i) \geq \sum_{j=i}^{i+\mu} g^i_j(z_j, u_i) + p'_{j+1} f^i_j(z_j, u_i). \tag{7.26}$$

4. Принцип квазимаксимума

В случае, если дискретная задача является аппроксимацией непрерывной задачи оптимального управления с постоянным шагом интегрирования h и величиной N, пропорциональной h^{-1}, правая часть в выражениях (7.1)–(7.6) равняется

$$f_k(z_k, v_k) = h \sum_{j=0}^{\mu} g_{kj}(z_k, u_{k-j}),$$

$$f^0_k(z_k, v_k) = h \sum_{j=0}^{\mu} g^0_{kj}(z_k, u_{k-j}). \tag{7.27}$$

Для такой задачи, не используя свойств выпуклости, сформулируем дискретный принцип квазимаксимума, предполагая дополнительно, что функции f_k, f^0_k непрерывно дифференцируемы по x_k, $k = 0, \dots, N-1$.

Используя соотношения (7.18), (7.27), запишем приращение минимизируемой функции

$$\Delta I(u_i) = h \sum_{j=0}^{\mu} [H_i(u^*_i) - H_i(u_i)] + \sum_{j=i}^{N} \alpha_j(x_j) |\Delta x_j|, \tag{7.28}$$

где

$$H_i(u_i) = \sum_{j=0}^{\mu} [p'_{i+j+1} g_{i+j,j}(z_{i+j}, u_i) - g^0_{i+j,j}(z_{i+j}, u_i)]. \tag{7.29}$$

Оценим величину $|\Delta x_{k+1}| = |x_{k+1} - x^*_{k+1}|$. Используя рекуррентные соотношения (7.1), (7.27), получим

$$|\Delta x_{k+1}| = |f_k(z_k, v_k) - f_k(z^*_k, v^*_k)| \leq h\mathcal{D}_k. \tag{7.30}$$

В (7.30) через $\mathcal{D}_k$ обозначены некоторые постоянные. Учитывая (7.22), (7.24) и свойства функций $\alpha_j(x_j)$, получим неравенство, которое справедливо для любого $u_i \in U_i$ и для любого $\varepsilon > 0$:

$$H_i(u^*_i) - H_i(u_i) \geq -\varepsilon, \quad \forall u_i \in U_i, \quad i = 0, \ldots, N-1. \tag{7.31}$$

Неравенство (7.32) выражает дискретный принцип квазимаксимума для задачи (7.1)–(7.6) с учетом представления (7.27). Оно означает, что с точностью до сколь угодно малой величины $\varepsilon > 0$ оптимальное значение управления на i – м шаге может быть найдено из условия максимума функции $H_i(u_i)$, определяемой выражением (7.23) на множестве U_i.

Теорема 7.1. *Пусть U_i, $i = 0, \ldots, N-1$— компактные множества в $\mathbb{R}^r$, функции f_k, f^0_k, $k = 0, \ldots, N-1$, определяемые соотношениями (7.27), непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется h_0, такое, что при любом h, удовлетворяющем условию $0 < h < h_0$, оптимальное управление u^*_i, $i = 0, \ldots, N-1$ существует и удовлетворяет неравенству (7.31), в котором функция $H(u_i)$ определяется формулой (7.29), а набор векторов $[p]$— соотношениями (7.10).*

5. Линейная задача и условия ее инвариантности по отношению к выбору управления

Рассмотрим линейную по фазовым переменным дискретную задачу, в которой требуется найти минимум функции

$$I(u) = \sum_{k=0}^{N-1} [\sum_{i=0}^{\nu} x'_{k-i} a^i_k + b^0_k(u_k)] + c'_1 x_N \tag{7.32}$$

при условии, что процесс описывается рекуррентными равенствами

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^{\nu} A^i_k x_{k-i} + B_k(u_k), \quad k = 0, \ldots, N-1, \tag{7.33}$$

$$x_{-j} = a_j, \quad j = 0, \ldots, \nu,$$

$$u_k = (u_{k-\mu}, \ldots, u_k), \quad u_{-j} = \varphi^0_j, \quad j = 1, \ldots, \mu \tag{7.34}$$

$$u_k \in U_k, \quad k = 0, \ldots, N-1. \tag{7.35}$$

В этой задаче отсутствуют фазовые ограничения, т.е. $X_k = \mathbb{R}^n$, $k = 0,\ldots, N$, A_k^i—$n \times n$-матрицы, a_k^i, c_1—n-мерные векторы $i = 0, \ldots, \nu$, $k = 0, \ldots, N-1$.

Формула (7.18) для приращения минимизируемой функции $\Delta I(u_i)$ становится в этой задаче точной и имеет вид

$$\Delta I(x_i) = \sum_{k=i}^{i+\mu} [H_k(z_k, u_k^*, p_{k+1}) - H_k(z_k, u_k, p_{k+1})], \tag{7.36}$$

где

$$H_k(z_k, u_k, p_{k+1}) = p'_{k+1}(\sum_{i=0}^{\nu} A_k^i x_{k-i} + B_k(u_k)) - \sum_{i=0}^{\nu} x'_{k-i} a_k^i + b_k^0(u_k). \tag{7.37}$$

Подставляя (7.37) в (7.36), получим

$$\Delta I(x_i) = \sum_{k=0}^{N-1} [p'_{k+1}(B_k(u_k^*) - B_k(u_k)) + b_k^0(u_k) - b_k^0(u_k^*)]. \tag{7.38}$$

В частности, если набор $[u]$ отличается от $[u^*]$ только i – й компонентой, то в формуле (7.38) суммирование осуществляется от $k = i$ до $k = i + \mu$.

Система (7.10) для построения векторов p_j имеет вид

$$\begin{aligned} p_N &= -c_1, \\ p_k &= \sum_{i=0}^{\nu} [(A_{k+1}^i)' p_{k+i+1} - a_k^i], \quad k = N-1, \ldots, 0. \end{aligned} \tag{7.39}$$

Для того чтобы управление $[u^*]$ было оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума

$$\sum_{k=i}^{i+\mu} [p'_{k+1} B_k(\overline{u}_k^*) - b_k^0(u_k^*)] = \max_{u_i \in U_i, j=i} \sum_{k=i}^{i+\mu} [p'_{k+1} B_k(u_k) - b_k^0(u_k)]. \tag{7.40}$$

Использование формулы (7.40) для определения оптимального управления u^* приводит к необходимости решения задачи о максимизации функции $\varphi(u)$, зависящей от Nr переменных, на множестве $U = U_0 \times \ldots \times U_{N-1}$, т.е. эта задача представима в виде

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{N-1} [p'_{k+1} B_k(u_k) - b_k^0(u_k)] \to \max, u \in U.$$

Однако решение существенно упрощается, если функция b_k^0 и B_k аддитивны по u_j, $j = k - \mu, \ldots, k$ и имеют вид

$$B_k(u_k) = \sum_{i=k-\mu}^{k} B_k^i(u_i), \quad b_k^0(u_k) = \sum_{i=k-\mu}^{k} b_k^{0i}(u_i). \tag{7.41}$$

В этом случае принцип максимума позволяет последовательно построить векторы управления u_i, $i = 0, \ldots, N-1$ из соотношения

$$\sum_{k=i}^{i+\mu}[p'_{k+1}B_k^i(u_i^*) - b_k^{0i}(u_i^*)] = \max_{u_i \in U_i} \sum_{k=i}^{i+\mu}[p'_{k+1}B_k^i(u_i) - b_k^{0i}(u_i)]. \tag{7.42}$$

Рассмотрим задачи (7.32)–(7.35) с функциями B_k, $k = 0, \ldots, N-1$, линейными по u_j, $j = k - \mu, \ldots, k$, т.е. представимыми в виде

$$\begin{aligned} &B_k(u_k) = \sum_{i=k-\mu}^{k} B_k^i u_i, \quad k = 0, \ldots, N-1, \\ &b_k^0 \equiv 0. \end{aligned} \tag{7.43}$$

В равенствах (7.43) B_k^i—$n \times r$– матрицы, b_k^{0i}—n-мерные векторы.

С учетом (7.43) формула (7.38) запишется следующим образом:

$$\Delta I(u_i) = \sum_{k=i}^{i+\mu} p'_{k+1} B_k^i(\overline{u}_i^* - u_i). \tag{7.44}$$

Из формулы (7.44) видно, что $\Delta I(u_i) = 0$, т.е. исходная линейная задача инвариантна по отношению к выбору управления $u_i \in U_i$, если матрицы B_k^i удовлетворяют равенствам

$$\sum_{k=i}^{i+\mu}(B_k^i)' p_{k+1} = 0, \quad i = 0, \ldots, N-1, \tag{7.45}$$

а набор векторов $[p]$ определяется с помощью соотношений (7.39).

6. Достаточные условия оптимальности для дискретной задачи

Пусть $\varphi_k : X_k \to \mathbb{R}$. Построим функции $R_k = R_k(z_k, u_k)$:

$$R_k = \varphi_{k+1}(f_k(z_k, u_k)) - \varphi_k(x_k) - f_k^0(z_k, u_k).$$

Справедливо равенство

$$I(\omega) = -\sum_{k=0}^{N-1} R_k(z_k, u_k) + T(x_N) - \varphi_0(x_0),$$

где

$$T(x_N) = \varphi_N(x_N) + b(x_N),$$

$$\Delta I = \sum_{k=0}^{N-1} [R_k(\overline{z}_k, \overline{u}_k) - R_k(z_k, u_k)] + T(x_N) - T(\overline{x}_N) + \varphi(\overline{x}_0) - \varphi(x_0).$$

Из последнего тождества вытекает теорема о достаточных условиях оптимальности допустимого процесса.

Теорема 7.2. *Пусть существуют непрерывные функции $\varphi_k : X_k \to \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, N$ и допустимый процесс $\overline{\omega}$, такие, что выполнены условия:*

1. $\sum_{k=0}^{N-1} R_k(\overline{z}_k, \overline{u}_k) = \sup_{z_k, v_k, k=0,\dots,N-1} \sum_{k=0}^{N-1} R_k(z_k, u_k) := \mu$;
2. $T(\overline{x}_N) = \inf_{x \in X_N} T(x)$;
3. $\varphi_0(\overline{x}_0) = \sup_{x \in X_0} \varphi_0(x)$.

Тогда процесс $\overline{\omega}$— глобально оптимальный.

Если найдены функции $\varphi_k(x)$, удовлетворяющие теореме 7.2, то функции $\tilde{\varphi}_k(x) = \alpha_k + \varphi_k(x)$, $k = 0, \dots, N$, где α_k— произвольные постоянные, также удовлетворяют этой теореме. Поэтому можно подобрать α_k так, чтобы выполнялись равенства

$$\mu_k = \max_{z_k, v_k} R_k(z_k, u_k), \quad k = 0, \dots, N-1.$$

В этом случае $I(\overline{\omega}) = T(\overline{x}_N) - \varphi_0(\overline{x}_0)$ и для любого допустимого процесса справедливо двойственное неравенство

$$T(\omega) \geq T(x_N) - \varphi_0(x_0).$$

Если теорема 7.2 справедлива для функций $\varphi_k(x) = a_k + p_k' x$, $k = 0, \dots, N$, то для выполнения условия 1 теоремы 7.2 необходимо, чтобы последовательность векторов p_k, $k = 0, \dots, N$ удовлетворяла системе (7.10). Проиллюстрируем теорему 7.2 примерами.

Пример 7.1. Требуется найти минимум функции

$$I(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} [a'_k x_k + \frac{1}{2} u'_k u_k] + b' x_N$$

при ограничениях

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + C_k u_{k-1}, \quad k = 0, \dots, N-1,$$
$$x_0 = a, \quad u_{-1} = u^0_{-1},$$

A_k, B_k, C_k— матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$, $n \times r$ соответственно, a_k, a, b— n-мерные векторы, u^0_{-1}—r-мерный фиксированный вектор. Положим $\varphi_k = \alpha_k + p'_k x$, $k = 0, \dots, N$ и построим функции

$$R_k(x_k, u_k, u_{k-1}) = \alpha_{k+1} - \alpha_k + p'_{k+1}(A_k x_k + B_k u_k + C_k u_{k-1}) -$$
$$- p'_k x_k - a'_k x_k - \frac{1}{2} u'_k u_k, \quad k = 0, \dots, N-1,$$
$$T(x_N) = \alpha_N + x'_N(p_N + b).$$

Используя теорему 7.2, получим рекуррентные соотношения для построения векторов $[p]$

$$p_k = A_k^T p_{k+1} - a_k, \quad k = N-1, \dots, 0,$$
$$p_N = -b, \quad p_j = 0, \quad j > N$$

и оптимальное управление

$$\overline{u}_k = C_{k+1}^T p_{k+2} + B_k^T p_{k+1}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Пример 7.2. Требуется найти минимум функции $J(\omega) = -x_2^2$ при следующих ограничениях:

$$x^1_{k+1} = x^1_k + 2u_k, \quad x^2_{k+1} = -(x^1_k)^2 + (x_{k-1})^2 + (u_k)^2, \quad k = 0, 1,$$
$$x_{-1} = (0,0), \quad x_0 = (3,0), \quad |u_k| \leq 5, \quad k = 0, 1.$$

Выберем следующие представленные функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$:

$$\varphi_1(x) = a_1 + c_1 x^1 + c_2 x^2 + \gamma_1 (x^1)^2,$$
$$\varphi_2(x) = a_2 + \alpha_2 x^1 + \beta_2 x^2, \quad \varphi_0, (x_0) = c_0,$$

где $a_1, a_2, c_1, c_2, c_0, \alpha_2, \beta_2, \gamma_1$— неизвестные числа.

Построим функции $R_0(z_0, v_0), R_1(z_1, v_1), T(x_2)$:

$$R_0 = (4\gamma_1 + c_2)u_0^2 + 2c_1 u_0 + a_1 - 9c_2 - c_0,$$
$$R_1 = \beta_2(u_1)^2 + 2\alpha_2 u_1 - (x^1)^2(\beta_2 + \gamma_1) - c_1 x_1^1 - c_2 x_1^2 + a_2 - a_1 + 3\alpha_2,$$
$$T(x_2) = a_2 + \alpha_2 x_2^1 + (\beta_2 - 1)x_2^2.$$

Используя условие 1 теоремы 7.2, найдем оптимальное управление:

$$\overline{u}_0 = arg \max_{|u_0| \leq 5} [4\gamma_1 + c_2(u_0)^2 + 2c_1 u_0],$$
$$\overline{u}_1 = arg \max_{|u_1| \leq 5} [\beta_2(u_1)^2 + 2\alpha_2 u_1].$$

Используя условие 3 теоремы 7.2, получим, что $\alpha_2 = 0, \beta_2 = 1$. Из условий максимума функций $R_1(z_1, v_1)$ по x_1^1 и x_1^2 следует, что

$$(\beta_2 + \gamma_1) \geq 0, \quad c_2 = 0, \quad c_1 + 2x_1^1(\beta_2 + \gamma_1) = 0.$$

Полагая $\gamma_1 = -1$, найдем $\overline{u}_0 = 0$, $\overline{u}_1 = \pm 5$.

§8. Приближенные методы решения задач оптимального управления с последействием

Изложенное ранее показывает, что задача оптимального управления с одним дискретным запаздыванием может быть сведена к задаче оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений за счет увеличения размерности фазового вектора и вектора управления в $\frac{[0,T]}{h} = N$ раз, где h— величина запаздывания. При этом интервал интегрирования системы дифференциальных уравнений уменьшается также в N раз. Для задачи, линейной по фазовым переменным, численный алгоритм построения решения, так и в случае линейной системы без запаздывания, разделяется на два этапа: сначала решается система дифференциальных уравнений для сопряженных функций, а затем строится оптимальная траектория.

Однако уже с появлением фазовых ограничений и квадратичного по фазовым переменным слагаемого в правой части системы дифференциальных уравнений или в функционале ситуация резко усложняется. А именно: исходная задача минимизации функционала на множестве допустимых процессов сводится к решению краевой задачи для системы уравнений с отклоняющимся аргументом, причем среди этих уравнений присутствуют дифференциальные уравнения как с запаздывающим аргументом, так и с опережающим, а граничные условия заданы на обоих концах интервала интегрирования системы. Для решения такой краевой задачи нужны специальные методы. Здесь будут изложены два подхода для решения задачи оптимального управления с последействием, представляющие собой модификацию соответствующих методов для обыкновенных систем. Первый основан на сведении исходной задачи оптимального управления к конечномерной задаче нелинейного программирования.

Второй итерационный алгоритм построения решения основан на последовательном улучшении управляемого процесса.

Отметим, что оба излагаемых алгоритма могут служить основой для численных процедур построения оптимального управления.

1. Сведение исходной задачи к дискретной задаче оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления, в которую запаздывание входит как в управление, так и в фазовые переменные. Требуется найти минимум функционала

$$J(u) = \int_0^T F_1(t, x(t), x(t-h_1), u(t), u(t-h_2))dt + F_0(x(T)) \tag{8.1}$$

при ограничениях

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t-h_1), u(t), u(t-h_2)), \quad t \in \Gamma = [0, T], \tag{8.2}$$

$$x(\Theta) = \varphi(\Theta), \quad \Theta \in [-h_1, 0], \quad u(\Theta) = \varphi_0(\Theta), \quad \Theta \in [-h_2, 0], \tag{8.3}$$

$$x(t) \in X(t) \subset \mathbb{R}^n, \quad t \in \Gamma, \quad x(T) \in X_T \subset \mathbb{R}^n, \tag{8.4}$$

$$u(t) \in U(t, x(t)) \subset \mathbb{R}^r, \quad \text{п.в.} t \in \Gamma. \tag{8.5}$$

Для построения приближенных методов решения от непрерывной задачи (8.1)–(8.5) перейдем к ее дискретной аппроксимации. Считается, что выполнены все предположения, отмеченные в §1, и решение задачи (8.1)–(8.5) существует. Систему (8.2) будем интегрировать по схеме Эйлера, считая управление кусочно постоянным на каждом шаге и непрерывным справа. Разобьем отрезок интегрирования Γ точками $0 = \tau_0 < \ldots < \tau_q = T$ так, что $\Delta\tau = \tau_{i+1} - \tau_i$, $i = 0, \ldots, q-1$, и положим

$$x_i = x(\tau_i), \quad u_i = u(\tau_i), \quad h_1 = \Delta\tau\nu, \quad h_2 = \Delta\tau\mu,$$
$$z_i = (\tau_i, x_{i-\nu}, x_i, u_{i-\mu}, u_i), \quad B(z_i) = \Delta\tau F_1(z_i),$$
$$F(z_i) = x_i + \Delta\tau f(z_i).$$

Тогда задача (8.1)–(8.6) заменяется следующей дискретной задачей оптимального управления:

$$I(x,u) = \sum_{i=0}^{q-1} B(z_i) + F_0(x_q) \to \inf, \tag{8.6}$$

$$x_i = F(z_i), \quad i = 0, \dots, q-1, \tag{8.7}$$

$$x_{-1} = \varphi_i, \quad i = 0, \dots, \nu, \quad u_{-1} = \varphi_{0i}, \quad i = 1, \dots, \mu, \tag{8.8}$$

$$x_i \in X_i = X(\tau_i), \quad i = 0, \dots, q, \tag{8.9}$$

$$u_i \in U_i = U(\tau_i, x_i), \quad i = 0, \dots, q-1. \tag{8.10}$$

В этой задаче процесс $\omega = [x,u] = (x_1, \dots, x_q, u_0, \dots, u_{q-1})$ и функционал (8.6) являются функциями $q(n+r)$ переменных, связанных ограничениями (8.7)–(8.10). Ограничения (8.9), (8.10) можно записать в общем случае как смешанные ограничения типа равенств и неравенств:

$$\Gamma^i_{1j}(x_{i-\nu}, x_i, u_i, u_{i-\mu}, \tau_i) = 0, \quad i = 1, \dots, q-1, \quad j = 1, \dots, \ell_1,$$
$$\Gamma^i_{2j}(x_{i-\nu}, x_i, u_i, u_{i-\mu}, \tau_i) \le 0, \quad i = 1, \dots, q-1, \quad j = 1, \dots, \ell_2,$$
$$X_q = \{x \in \mathbb{R}^n : \Gamma_{3j}(x) = 0, \quad j = 1, \dots, \ell_3, \quad \Gamma_{4j}(x) \le 0, \quad j = 1, \dots, \ell_4\}.$$

Задача дискретного оптимального управления с запаздыванием является некоторой специальной задачей нелинейного программирования. Для ее решения можно использовать известные методы нелинейного программирования, основанные на вычислении первых производных: метод внешних штрафных функций, метод параметризации, модифицированной функции Лагранжа, метод линеаризации и др. Эти методы решения задач оптимального управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений эффективно реализуются диалоговым комплексом программ ДИСО.

Для применения этого комплекса программ к решению задачи (8.6)–(8.10) необходимо уметь вычислять первые производные функционала (8.6) по x_i, u_i. Опишем способ вычисления этих производных, причем для простоты изложения при вычислении этих производных не будут учитываться ограничения (8.9), (8.10).

Определим вектор $p_i = \frac{dI}{dx_i}$, называемый производной функции $I[x,u]$ по x_i в точке $[x_1, \dots, x_q, u_0, \dots, u_{q-1}]$, с помощью соотношения

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \frac{I(\tilde{x}, u) - I(x,u)}{|\Delta|} = p_i,$$

в котором набор векторов $[u]$ фиксирован, первые $(i-1)$ компоненты набора $[\tilde{x}]$ совпадают с первыми $(i-1)$ компонентами $[x]$, $\tilde{x}_i = x_i + \Delta$, а все последующие компоненты набора $[\tilde{x}]$ строятся с помощью рекуррентных соотношений (8.7) с учетом нового вектора $\tilde{x}_i$.

Введем функции $H_i(z_i, p_{i+1}) = B(z_i) + p'_{i+1}F(z_i)$, $i = 0, \ldots, q-1$. Используя равенство

$$I(x,u) - I(\tilde{x},u) = \sum_{i=0}^{q-1}[H_i(z_i,p_{i+1}) - H_i(\tilde{z}_i,p_{i+1}) - p'_I\Delta x_i] +$$
$$+ b(x_N) - b(\tilde{x}_N) - p'_N\Delta x_N + p'_0\Delta x_0,$$

где $\Delta x_j = x_j - \tilde{x}_j \neq 0$, $j \geq i$, получим

$$\begin{aligned} p_i &= H_{i_{x_i}}(z_i, p_{i+1}) + H_{i+\nu_{x_i}}(z_{i+\nu}, p_{i+\nu+1}), \quad i = 1, \ldots, q-1, \\ p_q &= F_{0x}, \quad p_j = 0, \quad j > q. \end{aligned}$$

Если известен процесс ω, то по этим формулам последовательно находятся векторы $p_q, \ldots, p_0$.

Определим векторы $y_i = \frac{dI(x(u),u)}{du_i}$, $i = 0, \ldots, q-1$ с помощью равенства

$$y_i = \lim_{|\Delta| \to 0} \frac{I(\tilde{x}(\tilde{u}), \tilde{u}) - I(x,u)}{|\Delta|}, \tag{8.11}$$

где $\tilde{u}(u_0, \ldots, u_{i-1}, u_i + \Delta, u_{i+1}, \ldots, u_{q-1})$, $\tilde{x} = (x_0, \ldots, x_i, \tilde{x}_{i+1}, \ldots, \tilde{x}_q)$, $x_{j+1} = F(\tilde{z}_j)$, $j = i, \ldots, q-1$. Используя равенство (8.11) и вычисляя разность $I(\tilde{x}(\tilde{u}), \tilde{u}) - I(x(u), u)$, получим

$$\begin{aligned} y_i &= H_{iu_i}(z_i, p_{i+1}) + H_{i+\mu u_i}(z_{i+\mu}, p_{i+\mu+1}), \quad i = 1, \ldots, q-1, \\ y_j &= 0, \quad j \geq q. \end{aligned}$$

2. Итерационный метод

Рассмотрим задачу оптимального управления (8.1)–(8.5) при условии, что $h_2 = 0$ (т.е. случай запаздывания только по фазовым переменным), функция $R(t, x, y, u)$ и множество γ_- определены в §1.

Идея, излагаемая ниже, основана на итерационном способе улучшения процесса и состоит из следующих этапов:

1. Возьмем произвольную функцию $\psi^0(t,x,y) = \psi^0_1(t,x) + \psi^0_2(t,y) \in \gamma_-$ и найдем

$$u^0(t,x,y) = arg\max R_{\psi^0}(t,x,y,u), \tag{8.12}$$

где R_{ψ^0} означает, что при построении функции R была использована функция $\psi^0(t,x,y)$.

2. Интегрируя систему (8.2) с начальными условиями (8.3), замкнутую управлением $u^0(t,x(t),y(t))$, построим функцию

$$u^0(t) = u^0(t, x^0(t), x^0(t-h)), \quad t \in \Gamma, \tag{8.13}$$

при этом $\omega^0 = (x^0(t), u^0(t)) \in W$.

3. Построим функцию $\psi(t,x,y) \in \gamma_-$, которая обеспечивает выполнение следующих условий:

$$R_{\psi^0}(t, x^0(t), y^0(t), u^0(t)) = \min_{x,y} R_\psi(t,x,y,u^0(t)), \tag{8.14}$$

$$M_{\psi^0}(x^0(T), y^0(T)) = \max_{x,y} M_\psi(x,y). \tag{8.15}$$

В этих выражениях функции R_ψ и M_ψ вычисляются с помощью найденной функции $\psi(t,x,y)$. Далее для этой функции повторяются операции 1 и 2. В результате находим процесс

$$\omega = (x(t), u(t)) \in W.$$

Теорема 8.1. *Для процессов ω^0 и ω справедливо неравенство $J(\omega) \leq J(\omega^0)$.*

Действительно, используя представление (1.8), получим

$$J(u^0) - J(u) = \int_0^T [R_\psi(t,x(t),y(t),u(t)) - R_{\psi^0}(t,x^0(t),y^0(t),u^0(t))]dt +$$
$$+ M_{\psi^0}(x^0(T),y^0(T)) - M_\psi(x(T),y(T)).$$

Из условия (8.15) следует неотрицательность величины

$$M_{\psi^0}(x^0(T),y^0(T)) - M_\psi(x(T),y(T)).$$

Выбор нового управления согласно (8.8) обеспечивает неотрицательность разности

$$\int_0^T [R_\psi(t,x(t),y(t),u(t)) - R_\psi(t,x(t),y(t),u^0(t))]dt \geq 0.$$

Из условия (8.14) следует неотрицательность величины

$$\int_0^T [R_\psi(t, x(t), y(t), u^0(t)) - R_\psi(t, x^0(t), y^0(t), u^0(t))]dt.$$

Теорема 8.1 доказана □.

Указанным методом может быть построена последовательность процессов $\omega_i \in W$ и функций ψ_i, $i = 0, 1, \dots$, такая, что $J(\omega_{i+1}) \leq J(\omega_i)$, $i = 0, 1, \dots$ Для начала построения улучшающей последовательности можно вместо функции $\psi^0(t, x, y)$ задать непосредственно допустимое управление $u^0(t)$ и соответствующую ему функцию $x^0(t)$. Наибольшую трудность в этом методе представляет собой выбор функции $\psi(t, x, y) \in \gamma_-$, удовлетворяющей условиям (8.14), (8.15). В некоторых задачах эту функцию можно искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\psi(t, x, y) = a(t) + \psi_1'(t)x + \psi_2'(t-h)y + \\ + \frac{1}{2}\Delta x'\delta_1(t)\Delta x + \frac{1}{2}\Delta y'\delta_2(t-h)\Delta y.\end{aligned}$$

Здесь $\Delta x = x - x^0(t), \Delta y = y - y^0(t), \delta_i(t), i = 1, 2, \psi_i, i = 1, 2$— непрерывны на Γ и почти всюду непрерывно дифференцируемые $n \times n$ матрицы и вектор функции соответственно, подлежащие определению.

Для того чтобы эта функция удовлетворяла теореме 8.1, в случае, если в задаче нет фазовых ограничений и терминальное множество $X_T = \mathbb{R}^n$, необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned}&R_{\psi_x}(t, x, y, u)|_{u=u^0(t), x=x^0(t), y=y^0(t)} = 0,\\ &R_{\psi_y}(t, x, y, u)|_{u=u^0(t), x=x^0(t), y=y^0(t)} = 0,\\ &M_{\psi_x}(x, y)|_{x=x^0(T), y=y^0(T)} = 0,\\ &M_{\psi_y}(x, y)|_{x=x^0(T), y=y^0(T)} = 0.\end{aligned}$$

Эти условия эквивалентны системе уравнений

$$\dot{\psi}_1(t) = -H_x^0(t), \quad \dot{\psi}_2(t-h) = -H_y^0(t),$$

где функция H, определена как и в §1, $H^0(t) = H(t, x^0(t), y^0(t), u^0(t), \Phi(t))$

$$\Phi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$$

с граничными условиями

$$\psi_2(s) = 0, \quad s \geq T - h,$$
$$\psi_1(T) = -F_0 x(x^0(T)).$$

Для выполнения достаточных условий следует найти неотрицательные функции $\varepsilon_i^\ell(t)$, $\ell = 1, 2$, $i = 1, \ldots, n$ и отрицательные числа α_i^ℓ, $\ell = 1, 2$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что

$$\frac{\partial^2 R^0(t)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 R^0(t)}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, i \neq j,$$
$$\frac{\partial^2 M^0(t)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 M^0(t)}{\partial y_i \partial y_j} = 0, \quad i, j = 1, \ldots, n, i \neq j,$$
$$\frac{\partial^2 R^0(t)}{\partial x_i \partial x_j} = \varepsilon_i^1(t), \quad \frac{\partial^2 R^0(t)}{\partial y_i \partial y_j} = \varepsilon_i^2(t), \quad i, j = 1, \ldots, n, i \neq j,$$
$$\frac{\partial^2 M^0(t)}{\partial x_i \partial x_j} = \alpha_i^1, \quad \frac{\partial^2 M^0(t)}{\partial y_i \partial y_j} = \alpha_i^2, \quad i, j = 1, \ldots, n, i \neq j,$$

где

$$R^0(t) = R(t, x^0(t), y^0(t), u^0(t)), \quad M^0 = M(x^0(T), y^0(T)).$$

Эти условия приводят к задаче Коши с начальными условиями на правом конце для компонент матриц $\delta_i(t)$, $i = 1, 2$.

Для организации предложенного выше итерационного процесса требуется найти функцию $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющую нелинейному уравнению в частных производных (8.14) с граничным условием (8.15). Поставим задачу о построении приближенного синтеза оптимального управления $u_k(t, x, y)$, $k = 1, 2$ без решения уравнения (8.14).

Пусть имеется некоторая функция $\psi(t, x, y)$, удовлетворяющая только граничному условию (8.15).

В силу условия (8.12) можно построить синтез $u(t, x, y)$ и найти

$$P(t, x, y) = R_\psi(t, x, y, u(t, x, y)) = \sup_{u \in U(t,x)} R_\psi(t, x, y, u).$$

Затем, интегрируя систему (8.2)–(8.3), построим соответствующую этому управлению траекторию $x(t)$, $t \in \Gamma$.

Оценим величину $|\Delta J| = |I(u) - I(\overline{u})|$. Имеем

$$|\Delta J| \le \left| \int_0^T [R_\psi(t, x(t), y(t), u(t)) - R_\psi(t, \overline{x}(t), \overline{y}(t), \overline{u}(t))] dt \right| + |\Delta M_\psi| \le$$

$$\le \int_0^T |\sup_{x,y} P_\psi(t, x, y) - \inf_{x,y} P_\psi(t, x, y)| dt + |\Delta M_\psi| = \Delta(\psi),$$

где

$$\Delta M_\psi = M_\psi(x(T), y(T)) - M_\psi(\overline{x}(T), \overline{y}(T)).$$

Из этого неравенства следует, что если построена последовательность функций $\psi_k(t, x, y)$, такая, что $\Delta(\psi_k) \to 0$, $k \to \infty$, то соответствующая последовательность процессов $(x_k(t), u_k(t, x_k(t), y_k(t)))$, $k = 1, 2, \ldots$ является минимизирующей в задаче (8.1)–(8.4). Этот подход был применен в [18, 19] для решения задачи оптимального управления системой, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Список литературы к главе 2

1. Klötzler R. On a general conception of duality in Optimal Coutrol // EQU ADIFF IV. Processings. Lecture Notes in Mathematics. Prague, 1977.

2. Klötzler R. Globale Optimierung in der Steuerungstheorie // ZAMM. 1983. V.63.

3. Andreeva E.A., Klötzler R. Zur analytischen Lösung geometrischer Optimierungsaufgaben mittels Dualität bei Steuerungstheorie // ZAMM. (64). 1984. Teil I. P.35-44; Teil II. P.147-153.

4. Мордухович Б.Ш. К теории двойственности в системах с последействием // Прикл. мат. и мех. 1984. Т.48, вып. 4.

5. Андреева Е.А., Пикенхайн С. Двойственность в задачах оптимального управления с запаздывающим аргументом // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин, 1989.

6. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.

7. Pickenhain S. Dualitat bei Steuerungsproblemen mehrfacher Integrale // ZAA. 1987. Bd 6, N 2.

8. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.

9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Расширение вариационных задач // Тр. Моск. матем. о-ва. 1968. Т.18.

10. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

11. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шейхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992.

12. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982.

13. Колмановский В.Б. Об аппроксимации линейных управляемых систем с последействием // Проблемы управления и теории информации. 1974. Т.3, N 1.

14. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.

15. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М., Мордухович Б.Ш. Дискретный принцип максимума // ДАН СССР. 1973. Т.213, N 1.

16. Андреева Е.А. Оптимальное управление системами с запаздывающим аргументом. Препринт // ВЦ АН СССР. М., 1987.

17. Андреева Е.А. Достаточные условия оптимальности для разрывной задачи оптимального управления системой с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1989 .N 5.

18. Кротов В.Ф. Методы решения вариационных задач на основе достаточных условий абсолютного минимума I, II, III // Автоматика и телемеханика. 1962. Т.23, N 12.

19. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.

ГЛАВА 3

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАБОЛЕВАНИЯ

§1. Модель процесса распространения заболевания

Обозначим через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ число людей, подверженных заболеванию, инфицированных людей и выздоравливающих соответственно. Пусть функция $f(x, y)$ характеризует число встреч людей, подверженных заболеванию (класс 1), и инфицированных людей (класс 2). Свойства этой функции будут описаны ниже, в работе [10] эта функция выбирается в виде $f(x, y) = \beta xy$, при этом предполагается, что заболевание передается только при встрече инфицированного и здорового человека, а постоянный коэффициент β характеризует частоту встреч людей группы 1 и группы 2.

В работе [11] функцию $f(x, y)$ выбирают $f(x, y) = \frac{\beta xy}{x+y}$, здесь β есть вероятность того, что человек из группы 1 встречает человека группы 2, при этом величина $y(x+y)^{-1}$ есть вероятность того, что встреченный им человек принадлежит ко второй группе.

Динамика процесса распространения эпидемиии описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = -f(x, y), \quad \dot{y} = f(x, y) - \gamma y, \quad \dot{z} = \gamma y, \quad \gamma > 0, \tag{1.1}$$

здесь $\gamma > 0$ означает относительную скорость выздоровления, $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$— известные значения в начальный момент времени. Слагаемое γy в формулах выражает число людей, которые имеют иммунитет или выздоравливают в результате какого-либо иного процесса, величина γ^{-1} может изменяться от 10 дней (ангина, простуда) до нескольких недель (холера, малярия) или даже месяцев и лет (до 8 лет AIDS).

В общем случае функция $f(x, y)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &f(x, y) = 0, \quad x = 0 \text{ или } y = 0, \\ &f(x, y) > 0, \quad x > 0, y > 0, \\ &f_{xx},\ f_{yy} \le 0, \quad x > 0, y > 0, \\ &f_x,\ f_y,\ f_{xy} > 0, \quad x > 0, y > 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Заметим, что $x + y + z = Const$. Если людям, подверженным заболеванию, вводится вакцина, то первое уравнение должно быть заменено уравнением

$$\dot{x} = -f(x, y) - u. \tag{1.3}$$

Вследствие ограниченных технических и финансовых средств скорость введения вакцины ограничена, т. е. функция управления удовлетворяет неравенству:

$$0 \leq u(t) \leq u_0, \tag{1.4}$$

где u_0 характеризует максимальное число людей, которым может быть введена вакцина в единицу времени.

Цена заболевания складывается из цены ухода за инфицированными людьми и затратами на вакцину и ее введение.

Принимая стоимость ухода за больными равной единице, запишем общую стоимость эпидемии за фиксированное время T:

$$I(u) = \int_0^T (y(t) + cu(t))\, dt. \tag{1.5}$$

Обычно относительная стоимость вакцинации достаточно мала, $c \ll 1$. Задача оптимального управления процессом распространения эпидемии состоит в построении измеримого оптимального управления $u(t)$, $t \in [0, T]$, которое минимизирует функционал (1.5) при ограничениях (1.1)–(1.3).

Покажем, что оптимальное управление $\overline{u}(t) = u_0 \chi_{[0,t^*]}$, $t^* \in [0, T]$, здесь $\chi(t)$— характеристическая функция множества.

Введем функцию Понтрягина

$$H = -\lambda_0(y + cu) - \lambda_1(f + u) + \lambda_2(f - \gamma y), \quad \text{где } \lambda_0 \geq 0. \tag{1.6}$$

Запишем систему дифференциальных уравнений для сопряженных функций:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2) f_x, \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_2) f_y - \lambda_2 \gamma. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Задача (1.1)–(1.5) является задачей оптимального управления со свободным правым концом, поэтому

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0, \quad \text{если} \quad x(T) > 0, \quad y(T) > 0. \tag{1.8}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то все множители равны нулю одновременно, поэтому в этой задаче нерегулярных решений нет.

Положим $\lambda_0 = 1$. Тогда из принципа максимума оптимальное управление

$$\overline{u}(t) = \arg\max_{0 \le u \le u_0}[(-c - \lambda_1)u]. \tag{1.9}$$

Введем функцию переключения $\varphi(t) = -c - \lambda_1$, с помощью которой оптимальное управление представимо в виде

$$\overline{u}(t) = \begin{cases} u_0, & \text{если } \varphi(t) > 0 \\ 0, & \text{если } \varphi(t) < 0 \end{cases}. \tag{1.10}$$

Если на некотором интервале времени $\varphi(t) = 0$, то оптимальное управление не определено и может принимать любое значение из отрезка $[0, u_0]$.

Поставленная задача является автономной, поэтому $H(t) = -y(T)$, $\forall t \in [0, T]$, так как $\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0$, $\overline{u}(T) = 0$.

Введем функцию $\Psi = \lambda_1 - \lambda_2$ и вычислим ее производную, учитывая дифференциальные уравнения для сопряженных функций

$$\Psi' = \Psi(f_x - f_y + \gamma) - \gamma\lambda_1 - 1, \quad \Psi(T) = 0, \tag{1.11}$$

откуда следует, что $\Psi'(T) = -1$. Это означает, что в некоторой окрестности T имеет место неравенство $\Psi(t) > 0$. Пусть это неравенство нарушается в точке $t_1 < T$, так что $\Psi(t_1) = 0$ и $\Psi'(t_1) \ge 0$. Из условия $\Psi'(t_1) \ge 0$ следует, что

$$-\gamma\lambda_1(t_1) - 1 \ge 0,$$

и, вычисляя функцию Понтрягина в точке t_1, получим

$$H(t_1) = \varphi(t_1)u(t_1) - \Psi(t_1)(f - \gamma y)|_{t_1} - y(t_1)(1 + \lambda_1\gamma) \ge 0.$$

Это условие несовместимо с условием

$$H(t) = -y(T) < 0.$$

Уравнение для функции $\lambda_1(t)$ запишем в виде $\dot{\lambda}_1 = \Psi f_x$. Из положительности производной следует, что функция $\lambda_1(t)$, а следовательно, и функция $\varphi(t)$ строго монотонны. Поэтому может существовать только одна точка t^*, в которой $\varphi(t^*) = 0$ и поэтому $\overline{u}(t) = u_0\chi_{[0,t^*]}$.

Замечание 1. До сих пор мы предполагали, что $x(t) > 0$, $y(t) > 0$, $t \in [0, T]$, хотя в исходной постановке задачи не было фазовых ограничений $x(t) \ge 0$, $y(t) \ge 0$. С учетом этих ограничений уравнения для сопряженных функций, согласно теореме о необходимых условиях оптимальности в задачах с фазовыми ограничениями главы 1, будут иметь вид

$$\dot{\lambda}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)f_x - \nu_1, \quad \nu_1(t)x(t) = 0, \quad \nu_1(t) \ge 0,$$
$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_0 + (\lambda_1 - \lambda_2)f_y + \lambda_2\gamma - \nu_2, \quad \nu_2(t)y(t) = 0, \quad \nu_2(t) \ge 0.$$

В точках τ возможного разрыва сопряженных функций при контакте с фазовыми ограничениями выполнены неравенства

$$\lambda_i(\tau^-) \geq \lambda_i(\tau^+), \quad i = 1,\, 2.$$

Замечание 2. Рассмотренная модель может быть расширена с учетом предположения, что цена вакцинации зависит от x и при этом $c'(x) \leq 0$, а также можно дополнительно предположить, что $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$.

Замечание 3. Усилия по проведению вакцинации могут изменяться со временем, и исходная система дифференциальных уравнений может быть заменена следующей:

$$\dot{x} = -f(x, y) - ug(x), \quad g(x) > 0, \quad g'(x) > 0, \tag{1.12}$$

$$\dot{y} = f(x, y) - \gamma y, \tag{1.13}$$

а целевой функционал в этом случае имеет вид

$$I(u(\cdot)) = \int\limits_0^T (y(t) + du(t) + cg(x)y(t))\, dt. \tag{1.14}$$

Замечание 4. В некоторых ситуациях только часть инфицированных людей ответственна за перенос болезни [12], в этом случае во втором уравнении вместо функции f следует поставить pf, где параметр p удовлетворяет неравенствам $0 < p < 1$. В этом случае задача оптимального управления имеет вид

$$\dot{y} = pf - \gamma y, \quad 0 < p < 1, \quad \dot{x} = -f - u, \tag{1.15}$$

$$I(u(\cdot)) = \int\limits_0^T (y(t) + cu(t))\, dt. \tag{1.16}$$

Мы уже отметили, что обычно цена вакцинации c достаточно мала и критерием малости является выполнение неравенства $\gamma c < 1$. В этом случае время процесса T считается длительным, если

$$y(T) < y(0)(1 - \gamma c) \quad \text{и,} \quad \text{если} \quad f(x(T), y(T)) \leq \gamma y(T).$$

Управление процессом распространения заболевания с помощью введения карантина

При некоторых тяжелых заболеваниях контроль за процессом распространения заболевания осуществляется с помощью изоляции инфицированных людей. Обычно в этом случае число инфицированных людей много меньше общего числа населения, т. е. $y \ll x$, $f_x \ll f_y$ и $f(x,y) > \gamma y$, до тех пор, пока x не сравнимо с y. Предположим, что карантин не используется для изоляции людей с неизвестным состоянием, а только в случае, если человек заболел. Модель динамики заболевания может быть представлена следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = -f(x,y), \\ &\dot{y} = f(x,y) - \gamma y - ug(y,x), \end{aligned} \tag{1.17}$$

где функция $g(y,x)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &g > 0, \quad g_x \geq 0, \quad g_y \geq 0, \quad g_{xx} \geq 0, \\ &g_{xy} \geq 0, \quad -g_{yy} \geq 0, \quad x,\ y \geq 0. \end{aligned} \tag{1.18}$$

γ^{-1}— среднее время заболевания. Цена заболевания выражается интегралом

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T [y(t) + cu(t)g(x,y)]\,dt. \tag{1.19}$$

Цена ухода за инфицированным, находящимся на карантине, больше, чем за инфицированным человеком, и в этом случае $1 \approx c\gamma$.

Если $x \gg y$, то задача (1.17)–(1.19) может быть сведена к задаче

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T (y + cu)\,dt,$$

$$\dot{y} = -\gamma y - u, \quad y(0) = y_0, \quad 0 \leq u \leq u_0.$$

Используя уравнение для сопряженной функции

$$\dot{\lambda} = 1 + \gamma\lambda, \quad \lambda(T) = 0,$$

легко видеть, что в этом случае точка переключения является единственной; $t^* = 0$, если $c\gamma \geq 1$, $t^* = T + \gamma^{-1}\ln(1 - c\gamma)$, $y(t) > 0$.

Пусть в исходной задаче (1.17)–(1.19) функции f и g удовлетворяют предположениям (2), (1.18), $c\gamma \leq 1$. Тогда, аналогично тому, как это сделано выше, легко доказать, что оптимальное управление в задаче представимо в виде

$$u = u_0\chi_{[0,t^*]}, \quad \text{где } 0 \leq t^* < T.$$

Управление процессом распространения эпидемии с помощью программы "Здоровье"

Одним из методов контроля за эпидемией является проведение программы "Здоровье", которая состоит в организации теле- и радиопередач, лекций и т.д. В этом случае функция $f(x, y, u)$ будет также зависеть от управляющей функции $u(t)$, т.е. программа "Здоровье" влияет на частоту встреч здоровых и инфицированных людей. Для простоты часто полагают $f(x, y, u) = \omega(u) f(x, y)$, $0 < \omega(u) \leq 1$, $\omega(0) = 1$, $\omega'(u) < 0$, $\omega''(u) \geq 0$, $\omega'''(u) \leq 0$.

Задача оптимального управления в этом случае имеет вид

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T (y + cu)\, dt \longrightarrow \inf, \tag{1.20}$$

$$\dot{x} = -\omega(u) f(x, y), \quad x(0) = x_0, \tag{1.21}$$

$$\dot{y} = \omega(u) f(x, y) - \gamma y, \quad y(0) = y_0, \tag{1.22}$$

$$0 \leq u \leq u_0, \tag{1.23}$$

$$x(t) \geq 0, \quad y(t) \geq 0, \quad t \in [0, T]. \tag{1.24}$$

§2. Моделирование управляемого процесса распространения заболевания с помощью вакцинации, карантина и программы "Здоровье"

1. Постановка задачи. В этом параграфе исследуется процесс распространения эпидемии в однородном сообществе с учетом времени скрытого периода заболевания. Пусть $x_1(t)$ и $x_2(t)$— количество здоровых людей, подверженных заболеванию, и инфицированных соответственно в момент времени t; $x_3(t)$— функция, характеризующая социальную программу "Здоровье", заботу общества об инфицированных людях с помощью рекламы, передач по радио и телевидению, лекций и т. д.; $u_3(t)$— функция управления программой "Здоровье", удовлетворяющая ограничению $0 \leq u_3(t) \leq A_3$. В заданных обозначениях поведение системы описывается дифференциальными уравнениями с запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1 - x_3) f(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 &= (1 - x_3) f(x_1(t-h), x_2(t-h)) - \gamma x_2, \\ \dot{x}_3 &= u_3 - b x_3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $h > 0$— время скрытого протекания заболевания. Запаздывание h в аргументе функций $x_i(t)$, $i = 1, 2$ характеризует период, в течение которого инфицированный человек еще не является передающим заболевание, это время, в течение которого бактерии размножаются внутри тела. Здесь и далее в формулах опускается аргумент функции t, если функции вычисляются в момент t. В противном случае указывается момент времени, в который вычисляется та или иная функция.

Функция $f(x_1,x_2)$ характеризует частоту встреч здоровых, но подверженных инфекции $x_1(t)$ (группа 1), и инфицированных людей $x_2(t)$ (группа 2). В работах [11], [12] рассматривают однородное общество, в котором люди свободно передвигаются и встречаются друг с другом. Функцию f задают в виде $f(x_1,x_2) = \beta x_1 x_2$.

Как было отмечено ранее в §1 гл. 3, для борьбы с эпидемией используется вакцинация и введение карантина, которые будем характеризовать положительными функциями $u_1(t)$ и $u_2(t)$. В соответствии с финансовыми и техническими ограничениями эти функции не могут быть сколь угодно велики, т. е.

$$0 \le u_i(t) \le A_i, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0,T], \tag{2.2}$$

где A_i— заданные положительные числа. Если $A_i = 0$, то это означает, что соответствующее управление отсутствует. С учетом вышеизложенного динамика управляемого процесса распространения эпидемии описывается системой дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(1-x_3)f(x_1,x_2) - u_1, \\ \dot{x}_2 &= (1-x_3)f(x_1(t-h), x_2(t-h)) - \gamma x_2 - u_2 x_2, \\ \dot{x}_3 &= u_3 - b x_3, \end{aligned} \tag{2.3}$$

и начальными условиями

$$x_i(0) = x_{i_0}, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_i(t) \ge 0, \quad t \in [0,T], \tag{2.4}$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-h, 0], \quad i = 1, 2, \tag{2.5}$$

где $\phi_i(t)$, $i = 1,2$— известные непрерывные функции.

Целью управления является минимизация цены эпидемии, которая выражается следующим интегралом:

$$I(u(\cdot)) = \int_0^T (x_2 + c_1 u_1 + c_2 u_2 x_2 + c_3 u_3)\, dt. \tag{2.6}$$

Проведем анализ системы (2.3). Легко видеть, что если $u_3(t) \equiv 0$, $x_3(0) = 0$, то $x_3(t) \equiv 0$, $t \in [0,T]$. Предположим, что запаздывание отсутствует, т. е. $h = 0$, $f(x_1,x_2) = \beta x_1 x_2$, $x_1 \gg x_2$.

В этом случае система (2.3) упрощается:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\beta a_1 x_2 - u_1, \\ \dot{x}_2 &= (\beta a_1 - \gamma)x_2 - x_2 u_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Как это следовало из предыдущего рассмотрения (см. §1), оптимальное управление $\overline{u}_i(t)$ принимает два значения A_i и 0, $i = 1, 2$.

Интегрируя систему (2.7) при условиях $\overline{u}_i(t) = A_i$, $i = 1, 2$, получим

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{\beta a_1 a_2}{\beta a_1 - \gamma - A_2}(1 - \exp[(\beta a_1 - \gamma - A_2)t]) + a_1 - A_1 t, \\ x_2(t) &= a_2 \exp[(\beta a_1 - \gamma - A_2)t]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Из выражений (2.8) следует, что число инфицированных не возрастает, если параметры задачи связаны неравенством

$$\beta a_1 - \gamma - A_2 \leq 0. \tag{2.9}$$

В противном случае число инфицированных людей растет экспоненциально. При постоянном управлении $u_3(t) = A_3$ функция $x_3(t)$ имеет вид

$$x_3(t) = a_3 e^{-bt} + A_3 b^{-1}(1 - e^{-bt}). \tag{2.10}$$

По своему смыслу эта функция характеризует эффективность программы "Здоровье" и удовлетворяет неравенству

$$0 \leq x_3(t) \leq 1, \tag{2.11}$$

которое является дополнительным фазовым ограничением и существенно осложняет решение. Однако далее будем предполагать, что параметры задачи удовлетворяют неравенству

$$a_3 + A_3 b^{-1} < 1, \tag{2.12}$$

которое гарантирует выполнение строгих неравенств (2.11).

В общей системе (2.3) при отсутствии управления эпидемия нарастает, если $(1 - x_3)f(x_1(t-h), x_2(t-h)) > \gamma x_2$, и затухает, если знак неравенства заменяется на противоположный. При отсутствии управления данная модель может быть использована для прогнозирования процесса роста заболевания.

Функция Понтрягина задачи (2.2)–(2.6) представляется выражением

$$\begin{aligned} H = &-\lambda_0(x_2 + c_1u_1 + c_2u_2x_2 + c_3u_3) - \lambda_1(1 - x_3)f(x_1, x_2) - \lambda_1u_1 + \\ &+ \lambda_2(1 - x_3)f(y_1, y_2) - \lambda_2(\gamma + u_2)x_2 + \lambda_3(u_3 - bx_3), \end{aligned} \tag{2.13}$$

здесь $y_i = x_i(t - h)$, $i = 1, 2$.

Введем функции переключения $\Phi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= -\lambda_0c_1 - \lambda_1, \\ \Phi_2(t) &= (-\lambda_0c_2 - \lambda_2)x_2, \\ \Phi_3(t) &= -\lambda_0c_3 + \lambda_3. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Используя принцип максимума, найдем оптимальное управление

$$\overline{u}_i(t) = \begin{cases} A_i, & \Phi_i(t) > 0, \\ 0, & \Phi_i(t) < 0, \quad i = 1, 2, 3 \end{cases}, \tag{2.15}$$

оптимальное управление не определено, если $\Phi_i(t) = 0$, $i = 1, 2, 3$ на некотором интервале времени и принимает любое значение отрезка $[0, A_i]$, $i = 1, 2, 3$.

Интересной проблемой является определение количества переключений функций $\overline{u}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ на отрезке $[0, T]$, которое связано с числом перемены знака функций $\Phi_i(t)$ или $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2, 3$.

Уравнения для сопряженных функций:

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial y_i}\Big|_{t+h}, \quad i = 1, 2, 3,$$

или с учетом определения функции Понтрягина:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= [\lambda_1(1 - x_3) - \lambda_2(t + h)(1 - x_3(t + h))]\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2), \\ \dot{\lambda}_2 &= [\lambda_1(1 - x_3) - \lambda_2(t + h)(1 - x_3(t + h))]\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \\ &\quad + \lambda_2(\gamma + u_2) + \lambda_0 + c_2u_2, \\ \dot{\lambda}_3 &= \lambda_2 f(x_1(t - h), x_2(t - h)) - \lambda_1 f(x_1, x_2) + \lambda_3 b. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Условия трансверсальности на правом конце

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = \lambda_3(T) = 0. \tag{2.17}$$

Считаем, что в этой задаче параметры подобраны таким образом, что выполняются условия $x_i(t) > 0$, $i = 1, 2, 3$, $t \in [0, T]$. В противном случае задачу (2.2)-(2.6) нужно решать с учетом фазовых ограничений, при этом изменятся уравнения для сопряженной функции и условия трансверсальности.

Проблема. Формулировка теорем 2.1, 2.2, 2.3 главы 1 с учетом запаздывания представляет интересную проблему для научного исследования.

В настоящее время эта задача решена численным методом [1] проекции градиента.

Далее будут рассмотрены некоторые частные случаи решения этой задачи. Здесь же мы сформулируем краевую задачу принципа максимума при условиях наличия фазовых ограничений $x_i(t) \geq 0$, $i = 1, 2$, $0 \leq x_3 \leq 1$ без учета запаздывания, полагая $h = 0$.

Функция Понтрягина в этом случае будет определяться выражением (2.13), в котором следует положить $y_i = x_i$, $i = 1, 2$, функции переключения и оптимальное управление выражаются условиями (2.14), (2.15). Изменяются уравнения, определяющие сопряженные функции и условия трансверсальности. Согласно теореме 2.1 главы 1, сопряженные функции являются решением следующей системы интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \int_t^T \frac{\partial H}{\partial x_1}\,dt + \int_t^T d\mu_1, \\
\lambda_2 &= \int_t^T \frac{\partial H}{\partial x_2}\,dt + \int_t^T d\mu_2, \\
\lambda_3 &= \int_t^T \frac{\partial H}{\partial x_3}\,dt + \int_t^T d\mu_3 - \int_t^T d\mu_4,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
&d\mu_1 x_1(t) = 0, \quad d\mu_2 x_2(t) = 0, \\
&d\mu_3 x_3(t) = 0, \quad d\mu_4 (x_3(t) - 1) = 0, \\
&d\mu_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, 4}.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Сформулируем необходимые условия оптимальности и поставим краевую задачу принципа максимума для управляемого процесса распространения эпидемии с учетом трех возможных управлений, осуществляемых введением карантина, вакцинации и программы "Здоровье", которая с точки зрения математической теории оптимального управления представляет собой задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями. Для ее решения используем теорему 2.3 главы 1. Требуется найти минимум функционала

$$I(u(\cdot)) = \int\limits_0^T (x_2 + c_1u_1 + c_2u_2x_2 + c_3u_3)\,dt \longrightarrow \inf, \tag{2.20}$$

при следующих условиях:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(1-x_3)f(x_1,x_2) - u_1, \\ \dot{x}_2 = (1-x_3)f(x_1,x_2) - \gamma x_2 - x_2u_2, \\ \dot{x}_3 = u_3 - bx_3, \end{cases} \tag{2.21}$$

$$x_i(0) = a_i, \quad i = 1,\,2,\,3, \tag{2.22}$$

$$0 \le u_i(t) \le A_i, \quad i = 1,\,2,\,3, \tag{2.23}$$

$$x_i(t) \ge 0, \quad i = 1,\,2,\,3, \quad x_3(t) \le 1, \quad t \in [0,T]. \tag{2.24}$$

Функция Понтрягина этой автономной задачи является постоянной вдоль оптимального процесса и определяется выражением

$$H(t,x,u,\lambda) = -\lambda_0(x_2 + c_1u_1 + c_2u_2x_2 + c_3u_3) - \lambda_1(1-x_3)f(x_1,x_2) - \lambda_1u_1 +$$
$$+ \lambda_2(1-x_3)f(x_1,x_2) - \lambda_2\gamma x_2 - \lambda_2u_2x_2 + \lambda_3(u_3 - bx_3),$$

здесь $x = (x_1,x_2,x_3)$, $u = (u_1,u_2,u_3)$, $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$.
Функция Лагранжа задачи (2.20)–(2.24) представима в виде

$$L(t,x,u,\lambda,\mu,\nu) = H(t,x,u,\lambda) + \mu_1u - \mu_2(u_0 - u) + \sum_{i=1}^{3}\nu_ix_i + \nu_4(1-x_3).$$

Уравнения для сопряженных функций в предположении, что оптимальное управление является кусочно-непрерывной функцией на отрезке $[0,T]$, согласно теореме 2.3 главы 1, имеют вид

$$\begin{aligned}
&\dot{\lambda}_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)(1-x_3)f_{x_1}(x_1,x_2) - \nu_1, \quad f_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1},\\
&\dot{\lambda}_2 = (\lambda_1 - \lambda_2)(1-x_3)\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2) + \lambda_0 + c_2u_2 + \lambda_2(\gamma + u_2) - \nu_2,\\
&\dot{\lambda}_3 = (\lambda_2 - \lambda_1)f(x_1,x_2) + \lambda_3b - \nu_3 + \nu_4,\\
&\nu_i(t)\overline{x}_i(t) = 0, \quad i = 1,\,2,\,3,\\
&\nu_4(t)(1 - \overline{x}_3(t)) = 0.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Как уже отмечалось в §1 данной главы,параметры задачи можно подобрать таким образом, в частности A_3, b, чтобы функция $x_3(t)$ удовлетворяла бы строгим неравенствам $0 < x_3(t) < 1$. В этом случае множители $\nu_3(t) = \nu_4(t) = 0$.

Множитель $\nu_1(t)$ может быть строго больше нуля, если число здоровых людей равно нулю, т.е. в такой области, где модель не является адекватной действительности, например если $x_1(t)$ достаточно мало, близко к нулю, то число встреч с представителями группы 2 будет описываться другими функциями. Модель (2.20)–(2.24) справедлива, если $x_1(t) > 0$, поэтому в краевой задаче $\nu_1(t)$ можно положить равным нулю.

Что касается множителя $\nu_2(t)$, то он может быть отличным от нуля, если функция $x_2(t) = 0$. Но из вида дифференциального уравнения для функции $x_2(t)$ следует, что если $x_2(\tau) = 0$, то для всех $t \geq \tau$ $x_2(t) \equiv 0$.

Оптимальное управление принимает значения A_i и 0 согласно формуле (2.15) в зависимости от знака функций переключения, определяемых условиями (2.14), в которых функции $\lambda_i(\tau)$, $i = 1, 2, 3$ являются решениями системы (2.25), удовлетворяют условиям скачка при контакте в точке $t = \tau$ с фазовыми ограничениями:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i(\tau^-) = \lambda_i(\tau^+) + \eta_i, \quad \eta_i x_i(\tau) = 0, \quad \eta_i \geq 0, \quad i = 1, 2,\\
&\lambda_3(\tau^-) = \lambda_3(\tau^+) + \eta_3 - \eta_4, \quad \eta_3 x_3(\tau) = 0,\\
&\eta_4(1 - x_3(\tau)) = 0, \quad \eta_3 \geq 0, \quad \eta_4 \geq 0,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

и условиям трансверсальности на правом конце:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i(T^-) = \gamma_i \geq 0, \quad \gamma_i x_i(T) = 0, \quad i = 1, 2,\\
&\lambda_3(T^-) = \gamma_3 - \gamma_4, \quad \gamma_3 x_3(T) = 0, \quad \gamma_4(1 - x_3(T)) = 0,\\
&\gamma_3 \geq 0, \quad \gamma_4 \geq 0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Краевая задача (2.21)–(2.27) может быть решена с помощью численных методов, например метода многократной пристрелки, описанного в монографии [6], или с помощью сведения этой задачи к дискретной задаче оптимального управления [1].

§3. Моделирование процесса распространения заболевания в неоднородной среде, состоящей из n социальных групп

1. Процесс распространения заболевания в n социальных группах описывается системой $2n$ дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием:

$$\begin{cases}
\dot{x}_i(t) = -x_i(t) \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} y_j(t)}{y_j(t) + x_j(t)} - v_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in [0, T],\\
\dot{y}_i(t) = x_i(t-h) \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{ij} y_j(t-h)}{y_j(t-h) + x_j(t-h)} - \gamma_i y_i(t) - y_i(t) u_i(t),\\
\qquad\qquad i = \overline{1,n}, \quad t \in [0, T],
\end{cases} \tag{3.1}$$

с начальными условиями, заданными непрерывными функциями $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, на начальном интервале запаздывания $[-h, 0]$:

$$x_i(t) = \alpha_i(t), \quad y_i(t) = \beta_i(t), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in [-h, 0], \tag{3.2}$$

где $x_i(t)$— численность населения, восприимчивого к заболеванию в i-й социальной группе, $y_i(t)$— число инфицированных людей в i-й социальной группе, y_{i_0}, x_{i_0}— численность инфицированного населения и населения, восприимчивого к заболеванию в начале распространения заболевания, $\dot{y}_i(t)$— скорость роста числа инфицированных людей, n— число социальных групп, $\gamma_i y_i(t)$— количество людей, восстановивших свое "Здоровье" без воздействия внешних средств карантина, вакцины и т. д. в момент времени t в i-й социальной группе, γ_i^{-1}— коэффициент, характеризующий время естественного выздоровления; γ^{-1} может изменяться от 10 дней (ангина, простуда) до нескольких недель (холера) и др., h— инкубационный период заболевания, $u_i(t)y_i(t)$— количество людей, находящихся на карантине в момент времени t, $u_i(t)$— функция, характеризующая интенсивность введения карантина в i-й социальной группе.

Модель предполагает, что заболевание передается в случае, когда встречаются инфицированный человек и здоровый человек, коэффициент a_{ij} характеризует частоту встреч здоровых людей группы i с инфицированными людьми из группы j.

$A = \{a_{ij}\}_{i,\, j=\overline{1,n}}$— матрица, состоящая из положительных (неотрицательных) элементов и характеризующая частоту встреч людей, принадлежащих к различным социальным группам. В предложенной модели процесс распространения заболевания управляется с помощью введения карантина и вакцинации.

Затраты на проведение карантина и введение вакцины ограничены. Это требование выражается условиями

$$\begin{aligned} 0 \le u_i(t) \le B_i, \quad i = \overline{1,n}, \\ 0 \le v_i(t) \le A_i, \quad i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где B_i— величина, характеризующая часть инфицированных людей, отправленных на карантин, по своему физическому смыслу эта величина не превосходит единицы; A_i— максимальная скорость введения вакцины в единицу времени.

Целью управления является минимизация количества инфицированных людей, людей, находящихся на карантине, затрат на карантин и введение вакцины во всех социальных группах.

Итак, требуется найти минимум функционала

$$\int_0^T \sum_{i=1}^n (y_i(t) + u_i(t)y_i(t) + c_i u_i(t) + d_i v_i)\,dt \longrightarrow \inf, \tag{3.4}$$

здесь T— фиксированное время процесса, c_i— стоимость изоляции одного человека в i-й группе, d_i— стоимость вакцинации в i-й группе.

Функции состояния $x_i(t)$, $y_i(t)$— абсолютно-непрерывны на $[0,T]$; функции управления $u_i(t)$— кусочно-непрерывны. Отметим, что в рассматриваемой задаче оптимального управления левый конец фиксирован, а правый — свободен. Параметры задачи подбираются так, что y_i, $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$.

Для нахождения оптимального управления воспользуемся принципом максимума Понтрягина для систем с запаздывающим аргументом (теорема 3.1 главы 1).

Введем функцию Понтрягина $H : I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ для задачи (3.1)–(3.4):

$$\begin{aligned} H(t,x,y,u,v,p_0,p) = &-p_0 \sum_{i=1}^n [c_i u_i + y_i u_i + y_i + d_i v_i] + \\ &+ \sum_{i=1}^n [p_{1i}(-x_i \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} y_j}{y_j + x_j} - v_i) + \\ &+ p_{2i} x_i(t-h) \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij} y_j(t-h)}{y_j(t-h) + x_j(t-h)} - \gamma_i y_i(t) - y_i u_i)]. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Согласно принципу максимума оптимальное управление максимизирует функцию Понтрягина для п. в. $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned} &H(t, \overline{x}(t), \overline{y}(t), \overline{u}(t), \overline{v}(t), p_0, \overline{p}(t)) = \\ &= \max_{u \in U(t),\, v \in V(t)} H(t, \overline{x}(t), \overline{y}(t), \overline{p}(t), u, v, p_0), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$U(t) = \{u \in \mathbb{R}^n : \ 0 \le u_i \le B_i, \ i = \overline{1,n}\},$$
$$V(t) = \{v \in \mathbb{R}^n : \ 0 \le v_i \le A_i, \ i = \overline{1,n}\}.$$

Оптимальное управление определяется из условия максимума функции $\varphi(u,v)$ на множестве, определяемом условиями (3.3)

$$
\begin{aligned}
\varphi(u,v) = \sum_{i=1}^{n}(-p_0c_i - p_0y_i - p_{2i}y_i)u_i + \\
+\sum_{i=1}^{n}(-p_0d_i - p_{1i})v_i.
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Легко видеть, что оптимальное управление определяется следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_i(t) = \begin{cases} 0, & \Phi_i(t) < 0 \\ B_i, & \Phi_i(t) > 0 \\ [0, B_i], & \Phi_i(t) = 0 \end{cases}, \\
\overline{v}_i(t) = \begin{cases} 0, & \Psi_i(t) < 0 \\ A_i, & \Psi_i(t) > 0 \\ [0, A_i], & \Psi_i(t) = 0 \end{cases},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

где $\Psi_i(t) = -p_{1i} - p_0d_i$, $\Phi_i(t) = -c_i - \overline{y}_i(t) - \overline{p}_{2i}(t)\overline{y}_i(t)$, $\overline{1,n}$,— функции переключения.

Таким образом, оптимальное управление зависит от знака функций $\Psi_i(t)$, $\Phi_i(t)$, которые называются функциями переключения.

Важной проблемой является изучение возможности существования особого режима в задаче (3.1)-(3.4), когда одна или несколько функций переключения равны нулю, т.е. $\Phi_i(t) = 0$ или $\Psi_i(t) = 0$, $i = \overline{1,n}$. Читателю предлагается в главе 4 исследовать этот случай.

Запишем систему дифференциальных уравнений для сопряженных функций:

$$
\begin{aligned}
\dot{p}_{1k}(t) = [p_{1k}(t) - p_{2k}(t+h)]\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{kj}\overline{y}_j(t)}{\overline{y}_j(t) + \overline{x}_j(t)} - \\
- \frac{\overline{y}_k(t)}{(\overline{y}_k(t) + \overline{x}_k(t))^2}\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\overline{x}_j(t)[p_{1j}(t) - p_{2j}(t+h)];
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p_{2k}}(t) = p_0(\overline{u}_k(t) + 1) + \overline{p}_{2k}(t)(\gamma_k + \overline{u}_k(t)) + \\
+ \frac{\overline{x}_k(t)}{(\overline{y}_k(t) + \overline{x}_k(t))^2}\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\overline{x}_j(t)[p_{1j}(t) - p_{2j}(t+h)].
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Условия трансверсальности на правом конце имеют вид

$$\overline{p}_{1k}(T)=0,\quad \overline{p}_{2k}(T)=0,\quad k=\overline{1,n},\quad \overline{p}_{ik}(t)=0,\quad t>T,\quad i=1,2. \tag{3.11}$$

Краевая задача принципа максимума включает в себя систему дифференциальных уравнений (3.1) с граничными условиями (3.2), в которой функции управления определяются условиями (3.8),

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}_i(t)=-\overline{x}_i(t)\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}\overline{y}_j(t)}{\overline{y}_j(t)+\overline{x}_j(t)}-\overline{v}_i(t),\\ \dot{\overline{y}}_i(t)=\overline{x}_i(t-h)\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}\overline{y}_j(t-h)}{\overline{y}_j(t-h)+\overline{x}_j(t-h)}-\gamma_i\overline{y}_i(t)--\overline{y}_i(t)\overline{u}_i(t),\\ \overline{x}_i(t)=\alpha_i(t),\quad t\in[-h,0],\\ \overline{y}_i(t)=\beta_i(t),\quad t\in[-h,0],\end{cases}$$

и систему дифференциальных уравнений для сопряженных функций (3.9), (3.10) с граничными условиями (3.11).

Заметим, что краевая задача принципа максимума представляет собой систему дифференциальных уравнений с запаздывающим и опережающим аргументами.

Для решения задачи (3.1)–(3.4) может быть использован метод аппроксимации непрерывной задачи дискретной задачей оптимального управления, которая решается с помощью метода проекции градиента.

2. Дискретная аппроксимация. Построим дискретную аппроксимацию исходной непрерывной задачи (3.1)–(3.4). Для простоты изложения воспользуемся схемой Эйлера для вычисления производных и формулой левых прямоугольников для вычисления интеграла.

Разобьем отрезок $[0,T]$ на N равных частей (t_{k+1},t_k) точками $0=t_0<t_1<\dots<t_n=T$, положим $\Delta t=t_{k+1}-t_k$ и введем следующие обозначения: $x_i^k=x_i(t_k)$, $y_i(t_k)=y_i^k$, $u_i(t_k)=u_i^k$, $v_i(t_k)=v_i^k$.

Задача (10)–(13) аппроксимируется дискретной задачей, в которой минимизируется функция

$$I[u,v,x,y]=\Delta t\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{2}[c_iu_i^k+y_i^ku_i^k+y_i^k+d_iv_i^k]\longrightarrow\inf \tag{3.12}$$

при ограничениях типа равенств, задаваемых рекуррентными соотношениями

$$x_i^{k+1}=x_i^k-[\sum_{j=1}^{n}\frac{x_i^ky_j^ka_{ij}}{y_j^k+x_j^k}]\Delta t-\Delta t v_i, \tag{3.13}$$

$$y_i^{k+1}=y_i^k+\Delta t[x_i^{k-\nu}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}y_j^{k-\nu}}{y_j^{k-\nu}+x_j^{k-\nu}}-\gamma_iy_i^k-y_i^ku_i^k],$$
$$i=\overline{1,n},\quad k=\overline{0,N}, \tag{3.14}$$

$$0\le v_i^k\le A_i,\quad 0\le u_i^k\le B_i,\quad i=\overline{1,n},\quad k=\overline{0,q-1}.$$

Составим функцию Лагранжа этой задачи:

$$\begin{aligned} L(p_0,x,y,u,p)=&\sum_{k=0}^{N-1}p_0\Delta t\sum_{i=1}^{n}(c_iu_i^k+y_i^ku_i^k+d_iv_i^k+y_i^k)+\\ &+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{n}p_{1i}^{k+1}[x_i^{k+1}-x_i^k+\Delta t\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}x_i^ky_j^k}{y_j^k+x_j^k}-v_i^k]+\\ &+\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i=1}^{n}p_{2i}^{k+1}[y_i^{k+1}-y_i^k+\Delta t(x_i^{k-\nu}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{ij}y_j^{k-\nu}}{y_j^{k-\nu}+x_j^{k-\nu}}-y_i^k\gamma_i-y_i^ku_i^k)].\end{aligned} \tag{3.15}$$

Запишем условия стационарности:

$$\frac{\partial L}{\partial x_m^l}=p_{1m}^l-p_{1m}^{l+1}+\Delta t(p_{1m}^{l+1}-p_{2m}^{l+\nu+1})\sum_{j=1}^{n}\frac{a_{mj}y_j^l}{y_j^l+x_j^l}+$$
$$+\frac{\Delta t y_m^l}{(y_m^l+x_m^l)^2}\sum_{j=1}^{n}a_{jm}[p_{2j}^{l+\nu+1}-p_{1j}^{l+1}]x_j^l=0,$$
$$l=\overline{1,N-1},\quad m=\overline{1,n}; \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_m^l}=p_0\Delta t(u_m^l+1)+\Delta t(\gamma_m+u_m^l)p_{2m}^{l+1}+$$
$$+p_{2m}^l-p_{2m}^{l+1}+\frac{\Delta t x_m^l}{(x_m^l+y_m^l)^2}\sum_{j=1}^{n}a_{jm}x_j^l[p_{1j}^{l+1}-p_{2j}^{l+\nu+1}]=0,$$
$$l=\overline{1,N-1},\quad m=\overline{1,n}. \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_m^l}=p_0\Delta t(c_m+y_m^l)+p_{2m}^{l+1}y_m^l\Delta t,$$
$$\frac{\partial L}{\partial v_m^l}=\Delta t(p_0d_m+p_{1m}^{k+1}).$$

Используя формулы (3.16), (3.17), получим рекуррентные соотношения для вычисления сопряженных векторов:

$$
\begin{aligned}
&p_{1m}^l = p_{1m}^{l+1} - \Delta t(p_{2m}^{l+\nu+1} - p_{1m}^{l+1}) \sum_{j=1}^{n} \frac{a_{mj} y_j^l}{y_j^l + x_j^l} + \\
&\qquad + \frac{a_{im} y_m^l x_i^l}{(y_m^l + x_m^l)^2} \sum_{j=1}^{n} (p_{1j}^{l+1} - p_{2j}^{l+\nu+1}), \\
&l = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{1, n}; && (3.18) \\
&p_{2m}^l = p_{2m}^{l+1} - \Delta t[p_0(u_m^l + 1) + (\gamma_m + u_m^l) p_{2m}^{l+1}] - \\
&\qquad - \frac{\Delta t x_m^l}{(y_m^l + x_m^l)^2} \sum_{j=1}^{n} a_{jm} x_j^l [p_{1j}^{l+1} - p_{2j}^{l+\nu+1}], && (3.19) \\
&p_{1m}^k = p_{1m}^N = 0, \quad p_{2m}^k = p_{2m}^N = 0, \\
&\forall k > N, \quad l = \overline{1, N-1}, \quad m = \overline{1, n}. && (3.20)
\end{aligned}
$$

Заметим, что, если поделить условия (3.18), (3.19) на Δt и устремить $\Delta t \longrightarrow 0$, получим уравнения, совпадающие с уравнениями для сопряженных функций в краевой задаче принципа максимума (3.9)–(3.11). Векторы p_{im}^l последовательно вычисляются, начиная с последнего номера согласно выражениям (3.18)–(3.20).

Оптимальное управление в дискретной задаче определяется условиями

$$
\overline{u}_i^k = \begin{cases} 0, & \Phi_i^k < 0 \\ B_i, & \Phi_i^k > 0 \\ [0, B_i], & \Phi_i^k = 0 \end{cases},
$$

$$
\overline{v}_i^k = \begin{cases} 0, & \Psi_i^k < 0 \\ A_i, & \Psi_i^k > 0 \\ [0, A_i], & \Psi_i^k = 0 \end{cases}, \qquad (3.21)
$$

где

$$
\begin{aligned}
&\Phi_i^k = c_i + y_i^k - p_{2i}^{k+1} y_i^k, \\
&\Psi_i^k = -p_{1i}^k - p_0 d_i, && (3.22) \\
&k = \overline{0, N-1}, \quad i = \overline{1, n}.
\end{aligned}
$$

В качестве самостоятельного упражнения решить задачу (3.1)–(3.4), когда условие (3.3) заменено $\sum\limits_{i=1}^{n} u_i \le B_i$, $u_i \ge 0$, $i = \overline{1, n}$.

Поставим краевую задачу принципа максимума для модели, состоящей из двух социальных групп, в которой управление эпидемией осуществляется с помощью введения вакцины:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -f_1(x_1, y_1) - \alpha x_1 y_2 - u_1,\\
\dot{x}_2 &= -f_2(x_2, y_2) - \beta x_2 y_1 - u_2,\\
\dot{y}_1 &= f_1(x_1, y_1) + \alpha x_1 y_2 - \gamma y_1,\\
\dot{y}_2 &= f_2(x_2, y_2) + \beta x_2 y_1 - \gamma y_2;
\end{aligned} \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad 0 \le u_i \le A_i, \quad i = 1, 2;\\
&\text{б)}\quad u_1 + u_2 \le A, \quad u_i \ge 0, \quad i = 1, 2;\\
&x_i(0) = a_i, \quad y_i(0) = b_i, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

здесь коэффициенты α, $\beta > 0$ характеризуют обмен инфекцией между двумя классами.

Следует таким образом управлять процессом распространения заболевания, чтобы минимизировать функционал затрат:

$$I(u) = \int_0^T [(y_1 + y_2) + c(u_1 + u_2)]\, dt. \tag{3.25}$$

Запишем функцию Понтрягина этой задачи:

$$\begin{aligned}
H(x, y, \lambda, u) = &-\lambda_0(y_1 + y_2) - \lambda_0 c(u_1 + u_2) -\\
&- \lambda_1(f_1(x_1, y_1) + \alpha x_1 y_2 + u_1) - \lambda_2(f_2(x_2, y_2) + \beta x_2 y_1 + u_2) +\\
&+ \lambda_3(f_1(x_1, y_1) + \alpha x_1 y_2 - \gamma y_1) + \lambda_4(f_2(x_2, y_2) + \beta x_2 y_1 - \gamma y_2)
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
H(x, y, \lambda, u) = &-y_1(\lambda_0 + \lambda_3\gamma) - y_2(\lambda_0 + \lambda_4\gamma) - u_1\varphi_1(t) -\\
&- u_2\varphi_2(t) + (\lambda_3 - \lambda_1)[f_1(x_1, y_1) + \alpha x_1 y_2] +\\
&+ (\lambda_4 - \lambda_2)[f_2(x_2, y_2) + \beta x_2 y_1],
\end{aligned}$$

где $\varphi_i(t) = -\lambda_0 c - \lambda_i$, $i = 1, 2$ функции переключения.

Из принципа максимума следует, что оптимальное управление $\overline{u}_i(t)$, $i = 1, 2$, определяется знаком функций переключения $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$.

Случай а).

$$\overline{u}_i(t) = \begin{cases} A_i, & \phi_i(t) > 0,\\ 0, & \phi_i(t) < 0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Случай б).

Если $\varphi_i(t) < 0$, $i = 1, 2$, то $\overline{u}_i(t) = 0$, $i = 1, 2$.
Если $\varphi_1(t) < 0$, $\varphi_2(t) > 0$, то $\overline{u}_1(t) = 0$, $\overline{u}_2(t) = A$.
Если $\varphi_1(t) > 0$, $\varphi_2(t) < 0$, то $\overline{u}_1(t) = A$, $\overline{u}_2(t) = 0$.
Если $0 < \varphi_1(t) < \varphi_2(t)$, то $\overline{u}_1(t) = 0$, $\overline{u}_2(t) = A$.
Если $0 < \varphi_2(t) < \varphi_1(t)$, то $\overline{u}_1(t) = A$, $\overline{u}_2(t) = 0$.
Если $0 < \varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, то $\overline{u}_1(t) + \overline{u}_2(t) = A$.

Уравнения для сопряженных функций:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_1 &= -(\lambda_3 - \lambda_1)[\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \alpha y_2], \\
\dot{\lambda}_2 &= -(\lambda_4 - \lambda_2)[\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \beta y_1], \\
\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0 + \lambda_3\gamma - (\lambda_3 - \lambda_1)\frac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} - (\lambda_4 - \lambda_2)\beta x_2, \\
\dot{\lambda}_4 &= (\lambda_0 + \lambda_4\gamma) - (\lambda_3 - \lambda_1)\alpha x_1 - (\lambda_4 - \lambda_2)\frac{\partial f_2}{\partial y_2}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Условия трансверсальности в случае, если $y_i(T)$, $x_i(T) > 0$, имеют вид

$$\lambda_i(T) = 0, \quad i = \overline{1, 4}\ . \tag{3.28}$$

Функция Понтрягина этой автономной задачи является постоянной величиной вдоль оптимальной траектории и совпадает со своим значением в точке $t = T$

$$H(T) = -\lambda_0[\overline{y}_1(T) + \overline{y}_2(T) + c\overline{u}_1(T) + c\overline{u}_2(T)]. \tag{3.29}$$

Значение оптимальных управлений в точке $t = T$ определяется знаком функций переключения $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$. Легко видеть, что $\varphi_i(T) = -\lambda_0 c < 0$, $\dot{\varphi}_i(T) = \lambda_i(T) = 0$, $i = 1, 2$. Поэтому $\overline{u}_i(T) = 0$, $i = 1, 2$, а значение функционала Понтрягина вдоль оптимального процесса, согласно (3.29), определяется выражением

$$H(T) = -\lambda_0[\overline{y}_1(T) + \overline{y}_2(T)]. \tag{3.30}$$

Далее будет приведен список литературы, используемой для составления рассмотренных выше моделей. На основании этого материала можно построить собственную модель и найти оптимальное управление, базируя свои исследования на результатах глав 1,2.

§4. Задача оптимального управления процессом распространения заболевания в неоднородном сообществе с помощью вакцинации

Пусть сообщество, которое подвержено эпидемии, разделено на n различных групп и процесс распространения эпидемии в каждой из групп протекает в зависимости от частоты встреч между здоровыми и инфицированными людьми. Число инфицированных людей в момент времени t в каждой группе обозначим через $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Далее будем считать, что число людей, подверженных заболеванию, в каждой из групп много больше, чем число инфицированных людей, так что мы пренебрегаем в этой модели изменением числа людей, подверженных заболеванию.

Количество инфицированных людей увеличивается в единицу времени вследствие их контактов со здоровыми людьми, число которых характеризуется функцией $f_i(y)$:

$$\dot{y}_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad y_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.1}$$

Условие $f_{iy_j} \geq 0$ означает, что контакт инфицированного человека из класса j со здоровым в классе i приводит с неотрицательной вероятностью к заболеванию в классе i. Далее предположим, что функции $f_i(y)$, $i = \overline{1,n}$, дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям

$$f(0) = 0, \quad f(0, \ldots, y_i, \ldots, 0) \geq -ky_i, \quad k > 0,$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i}|_{y_i=0} > 0.$$

В частности, в работе [2] приводится следующий вид системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику распространения заболевания:

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_i y_j - \gamma y_i, \quad x_i = Const, \quad \beta_{ij} > 0,$$

где x_i— число людей, подверженных заболеванию в классе i.

Инфицированные люди могут быть вылечены с помощью ряда средств: помещены в госпиталь на карантин, с помощью лекарств, с помощью введения вакцины или вакцинации.

Пусть u_i— количество выздоравливающих людей в классе i в единицу времени в результате использования вакцинации. Тогда система уравнений (4.1) перепишется в виде

$$\dot{y}_i = f_i(y) - r_i u_i, \quad r_i > 0, \quad u_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1,n},$$

где r_i— фактор, характеризующий эффективность использования средств лечения заболевания.

Вследствие ограниченности этих средств на функции управления $u_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, могут быть наложены следующие ограничения:

$$\text{а)} \quad 0 \leq u_i \leq B, \quad i = \overline{1,n}; \tag{4.2}$$

$$\text{б)} \quad \sum_{i=1}^{n} u_i \leq B, \quad u_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.3}$$

Здесь B_i, B— заданные положительные величины.

Ограничение а) означает, что каждая группа имеет свои средства; ограничение б) связано с тем, что всеми средствами распоряжается центр, и суммарно они ограничены величиной B.

Управление процессом распространения эпидемии осуществляется так, чтобы минимизировать функционал, выражающий цену заболевания (см.§1, §2):

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} (c_i y_i + u_i d_i) dt. \tag{4.4}$$

Далее будет рассмотрен случай, когда функции $f_i(y) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$, $i = \overline{1,n}$, т.е. линейны по своему аргументу.

Итак, задача оптимального управления процессом распространения заболевания состоит в минимизации функционала (4.4) на множестве всех допустимых процессов $\omega = (y(t), u(t))$, $t \in [0,T]$, в предположении, что $y(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$— абсолютно непрерывная вектор-функция, $u(t) : [0,T] \to \mathbb{R}^n$— кусочно-непрерывная функция.

Вектор-функции $y(t), u(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, которая описывает динамику процесса распространения эпидемии :

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j(t) - u_i(t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Здесь a_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$— заданные неотрицательные величины. В векторной форме система (4.5) запишется следующим образом:

$$\dot{y} = Ay - u,$$

где $y = (y_1, \dots, y_n)$— вектор-функция состояния, $A = \{a_{ij}\}$—$n \times n$-матрица, $u = (u_1, \dots, u_n)$—n-мерная вектор-функция управления, на которую могут быть наложены два типа ограничения типа (4.2), (4.3).

Функции $y_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$y_i(0)=b_i, \tag{4.6}$$

где $b_i>0$, $i=\overline{1,n}$,— заданные неотрицательные величины, и фазовым ограничениям

$$y_i(t)\geq 0, \quad i=\overline{1,n}, \quad t\in[0,T]. \tag{4.7}$$

В рассматриваемой модели время процесса $T>0$ фиксировано.

Для решения задачи оптимального управления (4.4)–(4.7) используем принцип максимума и теорему 2.1 главы 1. Введем в рассмотрение константу $\lambda\geq 0$, сопряженную вектор-функцию $p(t)=(p_1(t),\dots,p_n(t))$, соответствующую ограничениям типа равенств (4.3), и векторную положительную меру $\mu(t)=(\mu_1(t),\dots,\mu_n(t))$, соответствующую фазовым ограничениям типа неравенств $y_i(t)\geq 0$, $i=\overline{1,n}$. Составим функцию Понтрягина задачи (4.4)–(4.5):

$$\begin{aligned} &H(t,y,u,\lambda_0,p(t))=\\ &=-\lambda_0\Big(\sum_{i=1}^{n}(c_iy_i+u_id_i)\Big)+\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j-u_i\Big)=\\ &=\sum_{i=1}^{n}u_i(-\lambda_0d_i-p_i(t))-\lambda_0\sum_{i=1}^{n}c_iy_i+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_i(t)a_{ij}y_j. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Рассмотрим первый тип ограничений на управление - случай а).

Пусть $\lambda_0=0$, тогда функция Понтрягина примет вид

$$H(t,y,u,p(t))=\sum_{i=1}^{n}p_i(t)\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j-u_i\Big). \tag{4.9}$$

Для нахождения оптимального управления надо решить задачу

$$-\sum_{i=1}^{n}p_iu_i\to\max_{u\in U}, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n}p_iu_i\to\min_{u\in U}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{4.10}$$

где $U=\{u\in\mathbb{R}^n; 0\leq u_i\leq B_i, i=\overline{1,n}\}$. В силу аддитивности минимизируемой функции и независимости ограничений на управление эта задача разбивается на n задач :

$$p_iu_i\to\min, \quad 0\leq u_i\leq B_i, \quad i=\overline{1,n}.$$

Используя принцип максимума Понтрягина, найдем оптимальное управление, которое зависит от знака функций $p_i(t)$, $i=\overline{1,n}$:

$$u_i^*(t)=\begin{cases}0, & p_i(t)>0,\\ B_i, & p_i(t)<0,\\ [0,B_i], & p_i(t)=0.\end{cases}$$

Применяя теорему 2.1, запишем систему интегральных уравнений для нахождения сопряженных функций:

$$p_i(t)=\int_t^T\Big(\sum_{j=1}^n p_j a_{ji}\Big)d\tau+\int_t^T d\mu_i,\quad \overline{1,n}. \tag{4.11}$$

Предположим, что меры μ_i имеют неотрицательную плотность ρ_i, $i=\overline{1,n}$

$$d\mu_i=\rho_i dt, \tag{4.12}$$

тогда предыдущее равенство с учетом (4.12) имеет вид

$$p_i(t)=\int_t^T\Big(\sum_{j=1}^n p_j a_{ji}\Big)d\tau+\int_t^T \rho_i dt,\quad i=\overline{1,n}. \tag{4.13}$$

Дифференцируя по t равенства (4.13), получим

$$\dot p_i(t)=-\sum_{j=1}^n p_j a_{ji}-\rho_i,\quad i=\overline{1,n}. \tag{4.14}$$

Неотрицательные меры сосредоточены на множествах $T_i=\{t\in[0,T];\ y_i(t)=0\}$. Это означает, что $y_i(t)d\mu_i=0$, $i=\overline{1,n}$.

Используя обозначение (4.12), получим $y_i\rho_i dt=0$, или т.к. величина $dt>0$, то $y_i\rho_i=0$, $i=\overline{1,n}$. Условия трансверсальности имеют следующий вид:

$$p_i(T)=\mu_i[T],\quad i=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим регулярный случай, когда $\lambda_0=1$. В этом случае функция Понтрягина примет вид

$$H(t,y,u,p(t))=$$
$$=-\sum_{i=1}^n(c_i y_i+u_i d_i)+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n p_i(t)a_{ij}y_j-\sum_{i=1}^n p_i(t)u_i\,.$$

Из принципа максимума следует, что для определения оптимального управления нужно решить следующую конечномерную задачу минимизации:

$$\sum_{i=1}^{n}(d_i + p_i)u_i \to \min_{u \in U},$$

где $U = \{u \in \mathbb{R}^n; 0 \le u_i \le B_i, i = \overline{1,n}\}$.

В силу аддитивности минимизируемой функции и независимости ограничений на управление в каждой из групп для определения оптимального управления следует решить следующие n задач:

$$(d_i + p_i)u_i \to \min_{0 \le u_i \le B_i}, i = \overline{1,n}.$$

Используя принцип максимума, найдем оптимальное управление

$$u_i^*(t) = \begin{cases} 0, & (d_i + p_i) > 0, \\ B_i, & (d_i + p_i) < 0, \quad i = \overline{1,n} \\ [0, B_i], & (d_i + p_i) = 0. \end{cases} \tag{4.15}$$

Согласно теореме 2.1, сопряженные функции удовлетворяют системе интегральных уравнений:

$$p_i(t) = \int_t^T (-c_i + \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ji})d\tau + \int_t^T d\mu_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.16}$$

Используя, что $d\mu_i = \rho_i dt$ и, дифференцируя по t равенства (4.10), получим:

$$\dot{p}_i(t) = c_i - \sum_{j=1}^{n} p_j a_{ji} - \rho_i, \quad \rho_i(t)y_i(t) = 0, \quad \rho_i(t) \ge 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.17}$$

Условия трансверсальности в регулярном случае имеют вид

$$p_i(T) = \mu_i[T], \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.18}$$

Рассмотрим второй тип ограничений на управление, а именно случай б).

Функция Понтрягина, как и в случае а), определяется выражением (4.8). Из принципа максимума следует, что для определения оптимального управления нужно решить следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^{n}(-d_i - p_i)u_i \to \max_{u \in U}, \tag{4.19}$$

где $U = \{u \in \mathbb{R}^n; \sum\limits_{i=1}^{n} u_i \leq B, u_i(t) \leq 0, i = \overline{1,n}$.

Краевая задача принципа максимума включает в себя исходную систему (4.5), в которой оптимальное управление $u^*(t)$ является решением задачи (4.15), систему уравнений для сопряженных функций (4.17) и условия трансверсальности (4.18).

Для решения этой задачи можно использовать численные методы, основанные на сведении исходной непрерывной задачи оптимального управления к дискретной задаче [1].

В случае $n = 2$, используя теорему 2.3 главы 1, можно найти аналитическое решение задачи (4.2)–(4.7), в которой $a_{21} = 0$, $a_{12} = \varepsilon$, $c_i = 1$, $d_i = d$. В этом случае задача оптимального управления состоит в определении максимума функционала

$$J(u) = -\int\limits_0^T [d(u_1 + u_2) + y_1 + y_2]dt \tag{4.20}$$

при динамических ограничениях

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_{11}y_1 + \varepsilon y_2 - u_1, \\ \dot{y}_2 = a_{22}y_2 - u_2, \end{cases} \quad y_i(0) = y_{0i}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{4.21}$$

фазовых ограничениях

$$y_i(t) \leq 0, \quad i = 1, 2, \tag{4.22}$$

ограничениях на функцию управления

$$U = \{u \in \mathbb{R}^2; \sum_{i=1}^{2} u_i \leq B, u_i \geq 0, i = 1, 2\}. \tag{4.23}$$

Для построения оптимального решения задачи (4.20)–(4.23) применим теорему 2.3 главы 1.

Построим функцию Понтрягина:

$$H(t, y, u, p, \lambda_0) = -\lambda_0(du_1 + du_2 + y_1 + y_2) + p_2(a_{22}y_2 - u_2) + p_1(a_{11}y_1 + \varepsilon y_2 u_1).$$

Функция Лагранжа задачи (4.20)–(4.23) имеет вид

$$L(t, y, u, \lambda_0, \nu, \mu) = H(t, y, u, p, \lambda_0) + \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 + \sum_{i=1}^{2} \nu_i u_i + \mu_2(B - \sum_{i=1}^{2} u_i).$$

Используя принцип максимума, найдем оптимальное управление:

$$u^*(t) = arg\max_u[(-\lambda_0 d - p_1)u_1 + (-\lambda_0 d - p_2)u_2]. \tag{4.24}$$

Введем обозначения:

$$-\lambda_0 d - p_1(t) = \lambda_1(t), \quad -\lambda_0 d - p_2(t) = \lambda_2(t),$$

с учетом которых задача (4.24) эквивалентна задаче определения максимума выражения

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \to \max, \quad u \in U. \tag{4.25}$$

В силу теоремы Вейерштрасса непрерывная функция на компактном множестве достигает своего максимального и минимального значения на его границе, это означает, что в зависимости от функций $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$, оптимальное управление будет принимать значения, лежащие на границе области U.

Анализ линейного выражения (4.25) позволяет найти оптимальное управление $(u_1^*(t), u_2^*(t))$ в зависимости от знака функций $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & 1)\, \lambda_1 < 0, \\ & 2)\, 0 < \lambda_1 < \lambda_2; \\ B, & 1)\, \lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \\ & 2)\, 0 < \lambda_2 < \lambda_1; \\ [0,B], & \lambda_1 = 0, \end{cases} \quad u_2^*(t) = \begin{cases} 0, & 1)\, 0 < \lambda_2 < \lambda_1, \\ & 2)\, \lambda_2 < 0; \\ B, & 1)\, 0 < \lambda_1 < \lambda_2, \\ & 2)\, 0 < \lambda_2, \lambda_1 < 0; \\ [0,B], & \lambda_2 = 0. \end{cases} \tag{4.26}$$

В особом случае, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, или, с учетом их определения, если $p_1 = p_2$, то оптимальное управление $u_i^*(t) = 0$, если $\lambda_i < 0$:

$$u_1^*(t) + u_2^*(t) = B, \quad \lambda > 0,$$
$$u_1^*(t) + u_2^*(t) \in [0, B], \quad \lambda = 0.$$

Используя теорему 2.3 главы 1, запишем уравнения для сопряженных функций:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\frac{\partial L}{\partial y_1} = \lambda_0 - p_1 a_{11} - \nu_1, \\ \dot{p}_2(t) &= -\frac{\partial L}{\partial y_2} = \lambda_0 - p_2 a_{22} - \varepsilon p_1 - \nu_2. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Условия дополняющей нежесткости:

$$\nu_i(t)y_i(\tau) = 0, \quad \nu_i(\tau) \geq 0, \quad i = 1,2. \tag{4.28}$$

Условия скачка для сопряженных функций имеют вид

$$\begin{aligned} &p_1(\tau^-) = p_1(\tau^+) + \eta_1, \quad \eta_1 y_1(\tau) = 0, \quad \eta_1 \geq 0, \\ &p_2(\tau^-) = p_2(\tau^+) + \eta_2, \quad \eta_2 y_2(\tau) = 0, \quad \eta_2 \geq 0, \end{aligned} \tag{4.29}$$

откуда следует, что в точке разрыва должны выполняться неравенства

$$p_i(\tau^-) \geq p_i(\tau^+), \quad i = 1,2.$$

Задача (4.20)–(4.23) является автономной, поэтому функция Понтрягина постоянна вдоль оптимального процесса $H^*(\tau^-) = H^*(\tau^+) = H^*(t) = Const$.

В начальный момент времени $y_i(0) = y_{i0} > 0$, $i = 1,2$, поэтому в силу непрерывности функций $y_i(t)$ существует отрезок $[0,\tau]$, на котором $y_i(t) > 0$, и поэтому $\nu_1(t) = \nu_2(t) = 0$.

Согласно принципу максимума на этом отрезке оптимальное управление может быть двух типов: либо $u^*(t) = (0, B)$, либо $u^*(t) = (B, 0)$.

Пусть $u^*(t) = (0, B)$, $t \in [0,\tau]$, тогда, решая исходную систему дифференциальных уравнений, получим

$$\begin{aligned} &y_1(t) = Ce^{a_{11}t} + \frac{\varepsilon A}{a_{22} - a_{11}} e^{a_{22}t} - \frac{\varepsilon B}{a_{11}a_{22}}, \\ &y_2(t) = Ae^{a_{22}t} + \frac{B}{a_{22}}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Учитывая начальные условия, найдем коэффициенты A, C:

$$\begin{aligned} &A = y_{02} - \frac{B}{a_{22}}, \\ &C = y_{01} + \frac{\varepsilon B}{a_{11}a_{22}} - \frac{\varepsilon A}{a_{22} - a_{11}}. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Уравнения для сопряженных функций на этом участке имеют вид

$$\dot{p}_1 = \lambda_0 - p_1 a_{11},$$
$$\dot{p}_2 = \lambda_0 - p_2 a_{22} - \varepsilon p_1. \tag{4.32}$$

Найдем общее решение этой системы, которое зависит от двух произвольных постоянных E, D:

$$p_1(t) = Ee^{-a_{11}t} + \frac{\lambda_0}{a_{11}},$$
$$p_2(t) = De^{-a_{22}t} - \frac{E\varepsilon}{a_{22} - a_{11}} e^{-a_{11}t} + \frac{\lambda_0}{a_{22}}(1 - \frac{\varepsilon}{a_{11}}). \tag{4.33}$$

Согласно принципу максимума, для того чтобы на отрезке $t \in [0, \tau]$ оптимальное управление было равно $(0, B)$, с необходимостью должно выполняться одно из следующих условий:

$$a) \quad \lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 > 0;$$
$$б) \quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2.$$

Оно означает, что постоянные E, D следует подобрать, так чтобы выполнялось либо условие а), либо условие б).

Рассмотрим случай а) $\lambda_1(t) < 0$, $\lambda_2(t) > 0$, $t \in [0, \tau]$. Используя определения $l_i(t)$, $i = 1, 2$, получим следующие неравенства:

$$p_1(t) > -\lambda_0 c,$$
$$p_2(t) < -\lambda_0 c;$$

или с учетом решения сопряженной системы

$$Ee^{-a_{11}t} + \frac{\lambda_0}{a_{11}} > -\lambda_0 c, \quad t \in [0, \tau];$$
$$De^{-a_{22}t} - \frac{E}{a_{22} - a_{11}} e^{-a_{11}t} + \frac{\lambda_0}{a_{22}}(1 - \frac{\varepsilon}{a_{11}}) < -\lambda_0 c, \quad t \in [0, \tau].$$

Отсюда следует, что произвольные постоянные E, D должны удовлетворять неравенствам

$$E > -\lambda_0(c + \frac{\lambda_0}{a_{11}})e^{a_{11}t}, \quad t \in [0, \tau]; \tag{4.34а}$$

$$D < -\lambda_0(c + \frac{a_{11} - \varepsilon}{a_{22} - a_{11}})e^{a_{22}t} + \frac{E\varepsilon}{a_{22} - a_{11}}e^{(a_{22}-a_{11})t}, \quad t \in [0, \tau]. \tag{4.34б}$$

Правая часть неравенства (4.34а) принимает свое максимальное значение при $t = 0$, так как все параметры задачи положительны, значит константа E должна удовлетворять неравенству $E > -\lambda_0(c + a_{11}^{-1})$.

Например, если $E = 0$, то второе слагаемое в правой части неравенства (4.34б) будет равно нулю. В этом случае правая часть данного неравенства будет минимальна при $t = \tau$, и константа D должна удовлетворять следующему неравенству:

$$D < -\lambda_0(c + \frac{a_{11} - \varepsilon}{a_{22} - a_{11}})e^{a_{22}t}.$$

Заметим, что подобранные выше константы E и D в дальнейшем могут не удовлетворять условию скачка в точке τ. Читателю предлагается самостоятельно найти все решения неравенств (4.34а), (4.34б) в зависимости от параметров задачи (4.20)-(4.23).

Если $0 < \lambda_1(t) < \lambda_2(t)$, то это означает, что выполняются неравенства

$$0 < -\lambda_0 c - p_1(t) < -\lambda_0 c - p_2(t), \quad t \in [0, \tau],$$

или

$$p_1(t) < -\lambda_0 c, \quad p_2(t) < p_1(t), \quad t \in [0, \tau].$$

С учетом решения сопряженной системы (4.33) данные неравенства эквивалентны следующим:

$$Ee^{-a_{11}t} + \frac{\lambda_1}{a_{11}} < -\lambda_0 c, \quad t \in [0, \tau],$$

$$De^{-a_{22}t} - E\varepsilon\frac{e^{-a_{11}t}}{a_{22} - a_{11}} + \lambda_0\frac{(a_{11} - \varepsilon)}{a_{11}a_{22}} < Ee^{-a_{11}t} + \frac{\lambda_0}{a_{11}}, \quad t \in [0, \tau].$$

Отсюда получаем соотношения, которым должны удовлетворять постоянные E, D:

$$E < -\lambda_0(c + \frac{1}{a_{11}}e^{a_{11}t}, \quad t \in [0, \tau], \tag{4.35а}$$

$$D < [Ee^{-a_{11}t}(\varepsilon\frac{e^{-a_{11}t}}{a_{22} - a_{11}} - 1) - \lambda_0(\frac{a_{11} - \varepsilon - a_{22}}{a_{11}a_{22}})]e^{a_{22}t}, t \in [0, \tau]. \tag{4.35б}$$

Заметим, что при $t = \tau$ правая часть неравенства (4.35) принимает наименьшее значение, так как все параметры задачи положительны. Тогда константа E должна удовлетворять неравенству

$$E < -\lambda_0(c + \frac{1}{a_{11}})e^{a_{11}\tau}. \tag{4.36а}$$

Используя (4.35б) и (4.36а), получим, что постоянная D в случае б) должна удовлетворять условию

$$D < -\lambda_0[\frac{\varepsilon - a_{11} - a_{22}}{a_{22} - a_{11}}(c + \frac{1}{a_{11}}) - \frac{a_{11} - \varepsilon - a_{22}}{a_{11}a_{22}}]e^{a_{22}t}. \tag{4.36б}$$

Функция Понтрягина $H(t)$ вдоль траектории, соответствующей управлению $u^*(t) = (0, B)$, $t \in [0, \tau]$, является постоянной и задается выражением

$$\overline{H}(t) = -\lambda_0(cB + \overline{y_1} + \overline{y_2}) + p_2(a_{22}\overline{y_2} - B) + p_1(a_{11}\overline{y_1} + \varepsilon\overline{y_2}) = Const, \quad t \in [0, \tau].$$

Легко убедиться, что ее полная производная равна нулю :

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= -\lambda_0(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) + \dot{p}_2(a_{22}y_2 - B) + p_2a_{22}\dot{y}_2 + \\ &+ \dot{p}_1(a_{11}y_1 + \varepsilon y_2) + p_1(a_{11}\dot{y}_1 + \varepsilon\dot{y}_2) = \\ &= -\lambda_0(a_{11}y_1 + \varepsilon y_2 + a_{22}y_2 - B) + (\lambda_0 - p_2a_{22} - \varepsilon p_1)(a_{22}y_2 - B) + \\ &+ p_2a_{22}(a_{22}y_2 - B) + (\lambda_0 - p_1a_{11})(a_{11}y_1 + \varepsilon y_2) + \\ &+ p_1(a_{11}a_{11}y_1 + a_{11}\varepsilon y_2 + \varepsilon a_{22}y_2 - B\varepsilon) = 0.\end{aligned}$$

На данном отрезке времени функция $y_1(t)$ является монотонно возрастающей, так как $\dot{y}_1(t) > 0$, а функция $y_2(t)$ монотонно убывает, если параметры задачи удовлетворяют неравенству

$$y_{02} - \frac{B}{a_{22}} < 0.$$

В точке $t = \tau$ функция $y_2(t)$ пересекает ось $y_2 = 0$, при этом момент τ определяется уравнением

$$y_2(\tau) = 0 = (y_{02} - \frac{B}{a_{22}})e^{a_{22}\tau} + \frac{B}{a_{22}}$$

или

$$\tau = a^{-1}a_{22}\ln[B(B - y_{02}a_{22})^{-1}].$$

Рассмотрим свойства оптимального процесса на отрезке $[\tau, T]$, на котором оптимальное управление $u^*(t) = (B, 0)$. Если $u_2^*(t) = 0$, для $t > \tau$, то $y_2(t) \equiv 0$ и для монотонного убывания $y_1(t)$ необходимо выбрать, согласно теореме 2.3, управление $u_1^*(t) = B$. Учитывая, что $y_2(t) \equiv 0$, $t > \tau$, имеем следующее уравнение для функции $y_1(t)$:

$$\dot{y}_1(t) = a_{11}y_1 - B, \quad t > \tau.$$

Функция $y_1(t)$ непрерывна, поэтому, решая это уравнение с начальным условием

$$y_1(\tau) = ce^{a_{11}\tau} + \frac{\varepsilon A}{a_{22} - a_{11}}e^{a_{22}\tau} - \frac{\varepsilon B}{a_{11}a_{22}},$$

найдем

$$y_1(t) = (y_1(\tau) - \frac{B}{a_{11}})e^{a_{11}(t-\tau)} + \frac{B}{a_{11}}, \quad t > \tau. \tag{4.37}$$

Если $y_1(\tau) - \frac{B}{a_{11}} < 0$, то $y_1(t)$ монотонно убывает.

На участке $t \in [\tau, T]$ $y_1(t) > 0$, поэтому $\nu_1(t) = 0$; функция $y_2(t) \equiv 0$, а следовательно, $\nu_2(t) \geq 0$.

Уравнения для сопряженных функций имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= \lambda_0 - p_1 a_{11}, \\ \dot{p}_2(t) &= \lambda_0 - p_2 a_{22} - \varepsilon p_1 - \nu_2(t), \quad t \in [0, T]\ . \end{aligned} \tag{4.38}$$

В силу принципа максимума на интервале (τ, T) должно выполняться одно из следующих условий :

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad \lambda_2(t) < 0, \quad \lambda_1(t) > 0; \\ &\text{б)} \quad 0 < \lambda_2 < \lambda_1 \end{aligned}$$

или, учитывая определение функций $\lambda_i(t)$, $i = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} &\text{а)} \quad p_2(t) > -\lambda_0 c, \quad p_1(t) < -\lambda_0 c \\ &\text{б)} \quad p_1(t) < p_2(t) < -\lambda_0 c \end{aligned} \tag{4.39}$$

В точке τ возможен скачок сопряженных функций так, что должны выполняться неравенства

$$p_i(\tau^-) \geq p_i(\tau^+), \quad i = 1, 2.$$

Если мы предположим, что на отрезке $[\tau, T]$ сопряженная функция постоянна, т.е. $p_2(t) = c_2$, то должны выполняться неравенства

$$\lambda_0 - c_2 a_{22} - \varepsilon p_1(t) = \nu_2(t) \geq 0, \quad t \in (\tau, T]; \tag{4.40а}$$

$$p_1(t) = \frac{\lambda_0}{a_{11}} + c_1 e^{-a_{11}t} < c_2, \quad t \in (\tau, T]. \tag{4.40б}$$

Неравенства (4.39) накладывают ограничения на выбор произвольных постоянных c_i, $i = 1, 2$.

Условия скачка в точке τ приводятся к следующей системе неравенств:

$$\begin{gathered} Ee^{-a_{11}\tau} + \frac{\lambda_0}{a_{11}} \geq \frac{\lambda_0}{a_{11}} + c_1 e^{-a_{11}\tau}, \\ De^{-a_{22}\tau} - \frac{E\varepsilon e^{-a_{11}\tau}}{a_{22} - a_{11}} + \frac{\lambda_0(a_{11} - \varepsilon)}{a_{11}a_{22}} \geq c_2, \end{gathered} \tag{4.41}$$

где $\tau = a_{22}^{-1} \ln[B(B - y_{02}a_{22})^{-1}]$. Для того чтобы доказать, что найденный процесс удовлетворяет необходимым условиям оптимальности, требуется подобрать постоянные D, E, c_1, c_2 таким образом, чтобы они удовлетворяли неравенствам (4.36), (4.40), (4.41).

В качестве самостоятельной работы читателю предлагается аналогичным образом рассмотреть процесс, в котором осуществляется переключение с управления $u^*(t) = (B, 0)$, $t \in [0, \tau)$ на управление $u^*(t) = (0, B)$, $t \in [\tau, T]$. Для найденных процессов следует вычислить максимизируемый функционал (4.20) и в зависимости от параметров задачи выбрать тот процесс, на котором функционал (4.20) принимает максимальное значение.

Дискретная задача оптимального управления

Приведем задачу (4.2)–(4.7) к дискретному виду или осуществим редукцию непрерывной задачи в дискретную задачу оптимального управления, используя схему Эйлера для вычисления производных и правило прямоугольника для вычисления интеграла. В теоретическом плане вопрос об эквивалентности непрерывной и дискретной задач требует дополнительных исследований. Используя обозначения $x_i(t_l) = x_l$, $u_i(t_l) = u_l$, $i = \overline{0, n}$; $l = \overline{0, q-1}$, придем к следующей дискретной задаче оптимального управления.

Требуется найти минимум функции

$$I([x], [u]) = \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{n} (c_i x_i^l + u_i^l d_i) \Delta t \tag{4.42}$$

при ограничениях, задаваемых рекуррентными соотношениями

$$x_i^{l+1} = x_i^l + \Delta t[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^l - u_i^l], \quad i = \overline{1,n}; \quad l = \overline{0,q-1}. \tag{4.43}$$

Далее будем рассматривать два различных допустимых множества для векторов управления:

$$\text{а)} \quad 0 \le u_i^l \le B_i, \quad i = \overline{1,n}; \quad l = \overline{0,q-1}, \tag{4.44а}$$

где B_i— константа,

$$\text{б)} \quad \sum_{l=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^l \le B, \quad 0 \le u_i^l, \quad i = \overline{1,n}, \quad l = \overline{0,q-1}, \tag{4.44б}$$

где B— заданная константа.

Фазовые ограничения и начальные условия в дискретной задаче имеют вид

$$x_i^l \ge 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad l = \overline{0,q-1}; \tag{4.45}$$

$$x_i^0 = b_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.46}$$

Введем множители Лагранжа $[p] = (p^0, \ldots, p^{q-1})$, где $p^{l+1} = (p_1^{l+1}, \ldots, p_n^{l+1})$, $l = \overline{0,q-1}$, соответствующие ограничениям типа равенств (4.43), и наборы векторов $\mu^l = (\mu_1^l, \ldots, \mu_n^l)$, $\lambda^l = (\lambda_1^l, \ldots, \lambda_n^l)$, $l = \overline{0,q-1}$, соответствующих ограничениям типа неравенств (4.44а). Составим функцию Лагранжа.

$$\mathcal{L}(x,u,p,\lambda_0,\lambda,\mu) = -\lambda_0(\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{n}(c_i x_i^l + u_i^l d_i)\Delta t) +$$

$$+\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{n} p^{l+1}(x_i^{l+1} - x_i^l - \Delta t[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i^l - u_i^l]) +$$

$$+\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(u_i^l - B_i) - \sum_{l=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{n}\mu^l x_i^l - \sum_{l=1}^{q-1}\sum_{i=1}^{n}\nu_i^l u_i^l.$$

Согласно теореме о необходимых условиях минимума, для того чтобы допустимый процесс $[x,u]$ был локально оптимальным, с необходимостью должны выполняться условия

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x,u,\lambda_0,p,\mu)}{\partial x_i^l} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad l = \overline{0,q-1}, \tag{4.47}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(x,u,\lambda_0,p,\mu)}{\partial u_i^l} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad l = \overline{0,q-1}. \tag{4.48}$$

Учитывая определение функции Лагранжа $\mathcal{L}(x, u, \lambda_0, p, \mu)$, запишем условия стационарности:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, u, p, \lambda_0, \lambda\mu)}{\partial x_i^l} = \lambda_0 c_i \Delta t + p_i^l - p_i^{l+1} - \Delta t \sum_{j=1}^{n} p_i^{l+1} - \mu_i^l = 0, \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, u, p, \lambda_0, \lambda\mu)}{\partial u_i^l} = \lambda_0 \Delta t \sum_{i=1}^{n} d_i + \Delta t p_i^{l+1} + \lambda_i^l - \nu_i^l = 0. \quad (4.50)$$

При этом не все множители равны нулю и удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости

$$\mu_i^l x_i^l = 0, \quad \nu_i^l u_i^l = 0,$$
$$\lambda_i^l (u_i^l - B_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad l = \overline{0, q-1}. \quad (4.51)$$

С учетом того, что λ_0 равно либо нулю, либо единице, число уравнений совпадает с числом неизвестных функций Лагранжа, равным $6nq$. Соотношение (4.49) можно разрешить относительно p_i^l:

$$p_i^l = p_i^{l+1} + \Delta t \sum_{j=1}^{n} p_j^{l+1} a_{ji} + \mu_i^l - \lambda_0 \Delta t c_i, \quad i = \overline{1, n}, l = \overline{0, q-1}. \quad (4.52)$$

Переходя к пределу в формуле (4.52) при $\Delta t \to 0$, мы получим уравнение для сопряженных функций принципа максимума:

$$\dot{p}_i(t) = -\sum_{j=1}^{n} p_j(t) a_{ij} + c_i - \gamma_i(t), \quad (4.53)$$

которое совпадает с сопряженной системой, полученной при использовании теоремы 2.3.

В случае, если множество допустимых управлений удовлетворяет условиям (4.44б), функция Лагранжа будет иметь вид

$$\mathcal{L}(x, u, p, \lambda_0, \lambda, u) = -\lambda_0 (\sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{n} (c_i x_i^l + u_i^l d_i) \Delta t) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{n} p_i^{l+1} (x_i^{l+1} - x_i^l - \Delta t [\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^l - u_i^l]) +$$
$$+ \lambda (\sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{n} u_i^l - B) - \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{n} \mu_i^l x_i^l - \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{n} \nu_i^l u_i^l.$$

Согласно теореме о необходимых условиях минимума в конечномерной экстремальной задаче, для того чтобы допустимый процесс $[x, u]$ был локально оптимальным, должны выполняться следующие условия :

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,u,p,\lambda_0,\lambda\mu)}{\partial x_i^l} = \lambda_0 c_i \Delta t + p_i^l - p_i^{l+1} - \Delta t \sum_{j=1}^{n} a_{ji} p_i^{l+1} - \mu_i^l = 0, \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x,u,p,\lambda_0,\lambda\mu)}{\partial u_i^l} = \lambda_0 \Delta t \sum_{i=1}^{n} d_i + \Delta t p_i^{l+1} + \lambda_i^l - \nu_i^l = 0, \quad (4.55)$$

$$\lambda(\sum_{l=0}^{q-1}\sum_{i=1}^{n} u_i^l - B) = 0, \quad \mu_i^l x_i^l = 0, \quad \nu_i^l x_i^l = 0, \quad (4.56)$$

$$\lambda_0 \geq 0, \quad \mu_i^l \geq 0, \quad \nu_i^l \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, l = \overline{0, q-1}, \quad (4.57)$$

$$x_i^{l+1} - x_i^l - \Delta t[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^l - u_j^l] = 0, \quad i = \overline{1,n}, l = \overline{0,q-1}. \quad (4.58)$$

Полученные выше соотношения могут быть использованы для реализации программы построения оптимального управления.

Замечание. В рассматриваемой модели возможно учесть два фактора: первый — эффективность используемых средств лечения, предполагая, что функции $r_i(y_i)$ зависят от числа инфицированных людей в i-й группе, причем $r_i(0) = 0$, $r_i'(y_i) > 0$, $r_i''(y_i) \leq 0$, и второй — воспитательная программа, которая может влиять на число встреч здоровых и инфицированных людей.

В этом случае задача оптимального управления будет иметь следующий вид:

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T \sum_{i=1}^{n} (y_i + c_i u_i + d_i v_i) dt \to \inf,$$

$$\dot{y}_i = \omega_i(v_i) f_i(y) - r_i(y) u_i, \quad y_i(t) \geq 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$y_i(0) = y_{i,0}, \quad 0 \leq u_i \leq b_i, \quad 0 \leq v_i \leq a_i, \quad i = \overline{1,n},$$

где функция $\omega_i(v_i)$, характеризующая воспитательную программу здоровья, обладает следующими свойствами:

$$\omega_i(0) = 1, \, \omega_i(v_i) \geq 0, \, \omega_i'(v_i) < 0, \, \omega_i''(v_i) > 0.$$

Выпишем функции Понтрягина и Лагранжа поставленной выше задачи и применим теорему 2.3 главы 1 о необходимых условиях оптимальности.

$$H = -\sum_{i=1}^{n}(\lambda_0 c_i + \lambda_i r_i)u_i + \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i f_i \omega_i(v_i) - \lambda_0 d_i v_i) - \lambda_0 \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$\mathcal{L} = H + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(b_i - u_i) + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i u_i + \sum_{i=1}^{n} \nu_i y_i.$$

Оптимальное управление согласно принципу максимума определяется из следующих условий:

$$\overline{u_i}(t) = arg \max_{0 \le u_i \le b_i} (-\lambda_0 c_i + \lambda_0 r_i)u_i,$$

$$\overline{v_i}(t) = arg \max_{0 \le v_i \le a_i} (\lambda_i f_i \omega_i(v_i) - \lambda_0 d_i v_i),$$

где сопряженные функции являются решением разрывной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{\lambda}_i = \lambda_0 - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\omega_j(v_j)\frac{\partial f_j(y)}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_j(y)}{\partial y_i} u_j - \nu_i,$$

$$\nu_i(t) y_i(t) = 0, \quad \nu_i(t) \ge 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\lambda_i(T^-) = \gamma_i \ge 0, \quad \gamma_i y_i(T) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$\lambda_i(\tau^-) = \lambda_i(\tau^+) + \mu_i(\tau), \quad \mu_i(\tau) y_i(\tau) = 0, \quad \mu_i(\tau) \ge 0, i = \overline{1,n}.$$

Поставленная краевая задача в общем виде не решается аналитически. Приближенное решение может быть найдено методом функций штрафа и редукцией к дискретной задаче оптимального управления или методом многократной пристрелки.

§5. Алгоритмы построения оптимального управления

Ниже представлены два алгоритма построения оптимального решения на примере задачи (4.42)–(4.46) (случай а). Первый использует принцип максимума, второй – метод функций штрафа.

1. Организуем процедуру печати графиков функций x_i^l, p_i^l, u_i^l; $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{0, q-1}$.

2. Вводим параметры задачи:

- коэффициенты c_i, d_i;
- начальные значения x_i^0;

- поэлементно матрицу A;

- ограничения на управление u_i.

3. Формируем массив u_i^l, где часть (произвольно) $u_i^l = B$, остальные равны 0.

4. Формируем цикл по l и i по для нахождения x_i^l. Расчет производится по следующей рекуррентной формуле:

$$x_i^{l+1} = x_i^l + \Delta t[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^l - u_i^l]. \tag{5.1}$$

5. Организуем цикл по k для нахождения и сравнения функционала на двух последних итерациях.

$$J^{k+1} = \Delta t \sum_{l=0}^{q-1} \sum_{i=1}^{n} (c_i x_i^l + u_i^l d_i). \tag{5.2}$$

Если $|J^{k+1} - J^k| < \epsilon$ и $J^{k+1} < J^k$, то переходим к пункту **7**.

6. Задаем конечное значение $p_i^q = 0$ и формируем цикл по l и по i для нахождения значений p_i^l с шагом по l, равным -1. Вычисления выполняются по следующей рекуррентной формуле:

$$p_i^l = p_i^{l+1} + \Delta t \sum_{j=1}^{n} p_j^{l+1} a_{ji} - \Delta t c_i. \tag{5.3}$$

В этом же цикле находим функцию переключения для управления u_i^l : $F_i^l = -d_i - p_i^l$.Проверяем следующие условия $F_i^l > 0$, $x_i^l > 0$,если они одновременно выполняются, то управлению u_i^l присваивается значение, равное B_i, иначе $u_i^l := 0$. После того как сформирован набор управлений u_i^l, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{0,q-1}$, возвращаемся к пункту 4.

7. Распечатываем значение функционала последней итерации $J^{(k+1)}$ и номер этой итерации $k+1$. Переходим к пункту **1**.

Метод штрафных функций

Используя для решения задачи оптимального управления метод штрафных функций, получим следующую дискретную задачу.

Требуется найти минимум функции

$$I([x],[u]) = \Delta t \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=0}^{q} [c_i x_i^l + d_i u_i^l + A_k (max\{-x_i^l; 0\}^2] \tag{5.4}$$

при следующих условиях:

$$x_i^{l+1} = x_i^l + \Delta t[\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^l - u_i^l], \tag{5.5}$$

где оптимальное управление определяется условием (5.6)

$$u_i^l = \begin{cases} 0, & d_i + p_i^l > 0; \\ B_i, & d_i + p_i^l < 0; \\ [0, B_i], & d_i + p_i^l = 0, \quad i = \overline{1,n}, l = \overline{0,q-1}. \end{cases} \tag{5.6}$$

Значение p_i^l находим по формуле

$$p_i^l = p_i^{l+1} + \Delta t \sum_{l=1}^{n} p_j^{l+1} a_{ji} - \lambda_0 \Delta t[c_i + 2A_k \max\{-x_i^l, 0\}]. \tag{5.7}$$

Коэффициенты $A_k \to \infty$, $k = 1, 2, \ldots$ — параметры метода штрафных функций.

Алгоритм (метод штрафных функций).

1. Задаем произвольное значение A_m. Организуем цикл по $m = 1, 2, \ldots$.

2. Задаем допустимый набор управлений $[u]^{(0)}$, который состоит из элементов u_i^l, $i = \overline{1,n}$, $l = \overline{0,q-1}$.

3. Используя соотношение (5.5), вычислим набор векторов состояний $[x]^{(0)}$, который состоит из элементов x_i^l, $i = \overline{1,n}, l = \overline{0,q-1}$.

4. Вычислим по формуле (5.4) минимизируемую функцию $I^{(0)}$, зависящую от процесса $([u]^{(0)}, [x]^{(0)})$.

5. Для найденного процесса $([u]^{(0)}, [x]^{(0)})$ вычислим сопряженные векторы с компонентами p_i^l, $i = \overline{1,n}, l = \overline{0,q-1}$ по формуле (5.7).

6. Согласно принципу максимума (5.3), вычислим набор управлений $[u]^{(1)}$.

7. Вычислим набор векторов состояний $[x]^{(1)}$, соответствующий управлениям $[u]^{(1)}$, и функцию $I^{(1)}$.

8. Составляем разность $\Delta I^{(1)} = I^{(1)} - I^{(0)}$ и проверяем условие $\Delta I^{(1)} \leq 0$.

9. Если выполнено условие $\Delta I^{(1)} \leq 0$, то переходим к пункту 2, используя набор управлений, найденных на следующей итерации. Процесс повторяется до тех пор, пока модуль разности двух последующих приближений минимизируемой функции $|\Delta I^{(k)}|$ станет меньше заданной точности ε, т.е. $|\Delta I^{(k)}| \leq \varepsilon$.

10. Если на k-й итерации $\Delta I^{(k)} > 0$, то уменьшаем шаг интегрирования Δt и возвращаемся к пункту **2**.

11. Получившийся результат запоминаем в массиве и возвращаемся к пункту **1**, задавая новое значение A_m.

В предложенном алгоритме важно исследовать зависимость оптимального решения от величины весового коэффициента A_m, $m = 1, 2, \ldots$. Следует так подобрать коэффициент A_m, чтобы дальнейшее его увеличение слабо влияло на величину оптимального управления.

Список литературы к главе 3

1. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Исследование управляемого процесса распространения эпидемии с помощью введения вакцинации, карантина и программы "Здоровье". Тверь. 1995. 17с. - Деп. в ВИНИТИ 29.03.95 N856-B95.

2. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Численное решение краевой задачи принципа максимума при моделировании процесса распространения эпидемии // Воронежская математическая школа "Понтрягинские чтения VII": Тез. докл. 17-23 апреля 1996 г. Воронеж, 1996.

3. Behncke H. The Control of Determenistic Epidemics // Math. Biosciences. 1992. V.2. P.101–112.

4. Behncke H. The Control of Determenistic Epidemics // Math. Appl. Sci. 1993. V.3. P.298–311.

5. Filipov A.F. On certain questions in the theory of optimal control // SIAM J. Control 1962. V.1. P.76-84.

6. Stoer J., Bulirsch R. Intoduction to Numerical analysis. NY - Heidelberg - Berlin: Springer - Verlag. 1983.

7. Morton R., Wickwire K.H. On the optimal control of a deterministic epidemic // Adv. Appl. Prob. 1974. V.6. P.622–635.

8. Neustadt L. Optimization. Princeton: University Press, 1976.

9. Sethi S. Dynamical Optimal Control Models in Advertising. A Survey // SIAM Review 1977. V.19. P.685–725.

10. Wickwire K.H. Optimal isolation policies for deterministic and stochastic epidemics // Math. Biosciences. 1975. V.26. P.325–346.

11. Wickwire K.H. A note on the optimal control of carrier-barne epidemics // J. Appl. Prob. 1975. V.12. P.565–568.

12. Wickwire K.H. Mathematical models for the control of pests and infections dieases // Theor. Popul. Biol. 1977. V.11. P.182–238.

ГЛАВА 4

МОДЕЛЬ СОРЕВНОВАНИЙ ПО БЕГУ

§1. Постановка задачи

На соревнованиях по бегу, плаванию, беговым конькам, велосипедным гонкам и др. результаты спортсменов определяются их возможностями развивать максимальное усилие, запасами энергии, правильным дыханием. Целью спортсмена является преодоление заданной дистанции за минимальное время. Для этого спортсмен должен оптимально использовать свою силу и энергию во время движения.

В работе [4] Келлер Дж. рассматривает задачу о выборе оптимального ускорения движения и энергии на соревнованиях по бегу как вариационную. Эта задача как задача оптимального управления была поставлена в работах Бенке X. [1,2].

В этом параграфе будут приведены основные положения, лежащие в основе описания процесса оптимального выбора усилия и расхода энергии в зависимости от физиологических факторов без учета психологических факторов, моделирование которых с математической точки зрения достаточно сложно.

Подробно математическая модель этого процесса описана в работах [1,2]. Здесь будут приведены лишь основные идеи. Заметим, что аналогичная модель может быть получена для соревнований по плаванию, беговым конькам, велосипедным гонкам и т.д.

Пусть М — масса спортсмена, F — сила, развиваемая спортсменом, R — сила сопротивления воздуха. Можно считать, что эти силы пропорциональны массе спортсмена, поэтому уравнение движения Ньютона имеет вид

$$M\dot{v} = F - R(x, v), \tag{1.1}$$

или, поделив уравнение (1.1) на массу М, получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{v} = f - r(x, v), \tag{1.2}$$

где f— сила, развиваемая 1 кг веса тела, r— сопротивление движению на 1 кг веса, $v(t)$— скорость центра масс.

Далее в модели все величины будут отнесены к 1 кг весу бегуна.

Мы будем описывать динамику как одномерное движение, где $x(t)$ и $v(t)$ обозначают положение центра масс и скорость центра масс спортсмена соответственно. При этом закон Ньютона имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= f - r(x, v) - cv^2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

здесь f— сила бегуна, приходящаяся на единицу его массы, усредненная за время одного шага, функция $r(x, v)$ характеризует диссипацию внутренней энергии спортсмена при движениии, cv^2— сопротивление воздуха. Известно, что величина $r(x, v)$ при средних значениях скорости является практически постоянной величиной, а при более высоких скоростях функция $r(x, v)$ растет линейно. Можно считать, что эта функция является аддитивной, т.е.

$$r(x, v) + cv^2 = r_0(x) + r_1(v).$$

В работе [4] приводится значение коэффициента $c \cong 0.0037\text{м}^{-1}$.

Если дистанция имеет наклон $\gamma(x)$ или холмы с углом наклона $\gamma(x)$, то функция сопротивления $r_0(x)$ определяется выражением

$$r_0(x) = a + g \sin \gamma(x),$$

здесь g— ускорение свободного падения.

Если угол наклона $\gamma(x)$ меньше 12°, т.е. $|\gamma(x)| < 12°$, то, согласно [2], [5], функция $r_0(x)$ обладает следующими свойствами:

$$1.8 \leqslant r_0(x) \leqslant 5, \quad |r_0'(x)| \leqslant 0.13, \quad |r_0''(x)| \leqslant 0.0033.$$

Далее будем использовать следующие определения функций $r_1(v)$ и $r_0(x)$:

$$r_1(v) = \begin{cases} 0,0037v^2, & v \leqslant 6\text{м/с}, \\ 0,6(v-6)+0,0037v^2, & v \geqslant 6\text{м/с}, \end{cases} \quad r_0(x) = \begin{cases} 2, & \gamma \leqslant 0, \\ 2 + 9,8 \sin \gamma(x), & \gamma \geqslant 0. \end{cases}$$

Заметим, что если рассматривается движение на длинной дистанции, то начальную фазу можно не учитывать, полагая $v(0) = 6\text{м/с}$.

При беге и другом типе физической активности энергия черпается из следующих четырех источников:

1) АТФ и криатин фосфат — анаэробный энергетический источник;

2) глюколиз — анаэробный распад глюкозы на молочную и пировиноградную кислоты;

3) окисление глюкозы и гликогена — аэробный энергетический источник;

4) окисление жиров — аэробный энергетический источник.

Анаэробный запас энергии в мускулах в момент t обозначим через $E(t)$, $G(t)$-запас энергии в мускулах и крови вследствие аэробного окисления глюкозы и жиров. Подчеркнем, что далее энергию $E(t)$ мы будем в дальнейшем называть анаэробная энергия, а $G(t)$— аэробная энергия. Хотя, конечно, это разделение и название условно.

Уравнение для анаэробной энергии $E(t)$ является следствием закона сохранения энергии и имеет вид

$$\dot{E} = -\frac{fv}{\eta} + \sigma(t) + d_1(E), \tag{1.4}$$

здесь $fv\eta^{-1}$ расход энергии вследствие механической работы; множитель $\eta^{-1}(v)$ характеризует эффективность перехода химической энергии в механическую и в общем случае зависит от скорости спортсмена.

Функция $d_1(E)$ описывает увеличение энергии вследствие удаления кровью молочной кислоты и перевод ее к другим мышцам, где она окисляется, при этом $d_1(E) = 0$ при больших энергиях $E > E_{00}$, для энергии $E \leqslant E_{00}$ $d_1(E)$ определяется выражением

$$d_1(E) = \gamma_1(E_{00} - E), \quad \gamma_1^{-1} = 900 \text{ с}, \qquad E_{00} = 0.65E_0. \tag{1.5}$$

Вследствие того, что мускулы не могут иметь неограниченный запас энергии, анаэробная и аэробная энергии $E(t)$, $G(t)$ соответственно ограничены и удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant E(t) \leqslant E_0, \quad 0 \leqslant G(t) \leq G_0. \tag{1.6}$$

В начальный момент времени, когда бегун находится в покое, его энергия известна, т.е.

$$E(0) = E_0, \quad G(0) = G_0. \tag{1.7}$$

Уравнение (1.4) не моделирует изменение энергии, если $E(t) = E_0$ и правая часть этого уравнения положительна. В этом случае уравнение должно быть заменено на $E'(t) = 0$, потому что мышцы не могут сохранить больше анаэробной энергии, чем E_0. Как мы увидим ниже, это ограничение не является активным в данной задаче.

Функция $\sigma(t)$ характеризует скорость роста энергии за счет дыхания, т.е. использования кислорода:

$$\sigma(t) = \sigma_0(E, G)e^{-\frac{t}{\tau}}(1 - e^{-\frac{t}{30}}). \tag{1.8}$$

Первый множитель в этом выражении указывает на зависимость функции $\sigma(t)$ от имеющегося в наличии гликогена и состояния мышц, причем $\sigma_E = 0$, если $E \geqslant E_{00}$, второй множитель характеризует усталость мышц, работающих достаточно долгое время. В большинстве случаев этим фактором можно пренебречь, также можно пренебречь при $t > 120$ с в последнем множителе вторым слагаемым, который описывает начальное, стартовое увеличение значения функции $\sigma(t)$. Функция $\sigma_0(E, G)$ линейна по G

$$\sigma_0(E, G) = \sigma_{00}(E)\frac{G}{G_0}. \tag{1.9}$$

Функция $\sigma_{00}(E) = 26$, если $E \geqslant 0,6E_0$, и линейно возрастает от 18 до 26 на отрезке $E \in [0; 0,6E_0]$.

Изменение аэробной энергии во времени определяется процессами, происходящими в печени и мышцах в результате окисления жиров и глюкозы:

$$\dot{G} = -\sigma - \alpha(\frac{fv}{\eta} - \sigma) + d_2(E). \tag{1.10}$$

Первое слагаемое характеризует окисление глюкозы в мышцах в процессе дыхания. Второе слагаемое указывает на то, какая часть глюкозы участвует в глюколизе. Параметр $\alpha \approx 19$, если $E \leqslant E_{00}$; $\alpha = 0$, если глюколиз не происходит при $E > E_{00}$. На отрезке $E \in [0,5E_0; 0,7E_0]$ этот параметр изменяется линейно от 19 до нуля.

Функция $d_2(E)$ описывает выделение энергии при окислении жиров в печени и, согласно [2], [5], может быть представлена в виде

$$d_2(E) = \begin{cases} \gamma_2(G_{00} - G), & G \leqslant G_0, \\ 0, & G > G_{00}, \end{cases} \tag{1.11}$$

$$\text{где } \gamma_2^{-1} = 3000 \text{ с}, \quad G_{00} = 0.9G_0.$$

Механическая энергия в мышцах образуется анаэробно из АТФ, фосфаткриатина и глюкозы, а аэробно — из глюкозы и жиров.

Условие (1.10) справедливо только в том случае, если $\frac{fv}{\eta} > \sigma$. Если $\frac{fv}{\eta} < \sigma$, его следует заменить уравнением $\dot{G} = -\sigma$, однако этот случай не реализуется в задаче соревнования по бегу.

Скорость спортсмена уменьшается с уменьшением энергии $E(t)$, точнее, мощность спортсмена определяется концентрацией АТФ.

Вследствие того, что при $E(t) \leqslant E_{00}$ величина $E(t)$ является и мерой концентрации АТФ, согласно [1], можно записать следующее неравенство, ограничивающее механическую мощность:

$$\frac{fv}{\eta} \leqslant P(E) + \sigma. \tag{1.12}$$

Функция $P(E)$, согласно [1], представима в следующем виде:

$$P(E) = \min(P_0, E\rho^{-1}), \quad \rho \cong 22. \tag{1.13}$$

Ограничение (1.13) существенно в двух случаях. На первой фазе движения при $t \leqslant 120$ с мы используем предельное значение

$$P_0 \cong \frac{v_\infty F}{\eta} \ .$$

На длинных дистанциях $t > 120$ с, величина P много меньше своего предельного значения вследствие эффекта Пастора.

Мы будем предполагать, согласно [1], что $P_0 \leqslant 100$w/кг. Соотношение (1.12), таким образом является математической формализацией эффекта Пастора.

Мышцы и сухожилия не могут выносить бесконечную нагрузку, поэтому величина мышечного усилия ограничена величиной F, т.е.

$$0 \leqslant f \leqslant F. \tag{1.14}$$

Цель спортсмена состоит в прохождении заданной дистанции D за минимальное время T. Здесь для простоты сначала исследуем задачу с фиксированным временем процесса T. При этом за данное время пробега T спортсмен должен так распределить свои усилия, энергию, чтобы пройти максимальное расстояние $x(T)$.

Поставленная выше задача является задачей оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями, в которой управляющей функцией является усилие f, развиваемое спортсменом. Далее обозначим $f = U(t)$, а функциями состояния будут расстояние $x(t)$, скорость $v(t)$, анаэробная энергия $E(t)$, аэробная энергия $G(t)$, $t \in [0;T]$.

Решение будем искать в классе кусочно-непрерывных управлений и абсолютно-непрерывных функций состояния, с фиксированным временем процесса T. Задача со свободным временем и фиксированной дистанцией $D = x(T)$, т.е. задача быстродействия, представляет собой теоретический и практический интерес и будет рассмотрена отдельно.

Приведем средние значения параметров задачи [5]:

$$\textit{Мужчины} \quad F = 6.7\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}, \quad E_0 = 2500\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}, \quad \sigma_0(E_0) = 27, \quad G_0 \approx 10^5;$$

$$\textit{Женщины} \quad F = 6\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}, \quad E_0 = 2000\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}, \quad \sigma_0(E_0) = 20, \quad G_0 \approx 0.9 \cdot 10^5.$$

Если рассматривается бег на короткие дистанции $t \leqslant 120$ с, то изменением функции $G(t)$ можно пренебречь, в этом случае модель существенно упрощается.

В качестве начального значения $v(0)$ можно выбрать значение от 4 до 6м/с, т.к. набор этой скорости происходит за $1-2$ с и в пределах точности исходных данных, используемых при расчетах, величина $v(0)$ не влияет на решение задачи.

Далее для построения оптимального решения задачи использована теорема 2.3 главы 1 о необходимых условиях оптимальности в задачах со смешанными и фазовыми ограничениями.

§2. Математическая модель управляемого процесса и необходимые условия оптимальности

Итак, задача об оптимальном распределении усилий спортсмена, участвующего в соревнованиях по бегу, может быть сформулирована следующим образом.

Требуется найти максимум функционала

$$J(u) = x(T) \to \max \tag{2.1}$$

при следующих динамических ограничениях:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = v, \\ &\dot{v} = u - r(x, v), \\ &\dot{E} = -\frac{uv}{\eta} + \sigma + d_1(E), \\ &\dot{G} = -\sigma - \alpha(\frac{uv}{\eta} - \sigma) + d_2(G), \end{aligned} \tag{2.2}$$

ограничениях на функцию управления

$$0 \leqslant u \leqslant F, \tag{2.3}$$

смешанных ограничениях

$$\frac{uv}{\eta} \leqslant P(E) + \sigma, \tag{2.4}$$

фазовых ограничениях

$$v \geqslant 0, \quad 0 \leqslant E \leqslant E_0, \quad 0 \leqslant G \leqslant G_0, \tag{2.5}$$

заданных начальных условиях

$$x(0) = 0, \quad v(0) = v_0, \quad G(0) = G_0, \quad E(0) = E_0. \tag{2.6}$$

Участвующие в формулировке задачи функции σ, d_1, d_2, $P(E)$ и необходимые для их определения постоянные параметры приведены в §1 этой главы.

Задача (2.1)–(2.6) относится к задаче оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями.

Применим теорему о необходимых условиях оптимальности (теорема 2.3 главы 1) в задаче оптимального управления со смешанными ограничениями.

Функция Понтрягина этой задачи –

$$\begin{gathered} H(t, x, v, E, G, u, \lambda) = \lambda_1 v + \lambda_2(u - r) + \\ + \lambda_3(-\frac{uv}{\eta} + \sigma + d_1) + \lambda_4(-\sigma - \alpha(\frac{uv}{\eta} - \sigma) + d_2). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Функция Лагранжа –

$$\begin{gathered} L(t, x, v, E, G, u, \lambda, \mu.\nu) = H(t, x, v, E, G, u, \lambda) + \mu_1(P + \sigma - \frac{uv}{\eta}) + \\ + \mu_2 u + \mu_3(F - u) + \nu_1 E + \nu_2(E_0 - E) + \nu_3 G + \nu_4(G_0 - G) + \nu_5 v, \end{gathered} \tag{2.8}$$

где функциональные множители $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5)$, $\lambda_0 \geqslant 0$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} \mu_1(t)(P(E) + \sigma - \frac{uv}{\eta}) = 0, \\ \mu_2(t)u = 0, \quad \mu_3(t)(F - u) = 0, \quad \mu_i(t) \geqslant 0, \ i = 1, 4; \end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} \nu_1(t)E = 0, \quad \nu_2(t)(E_0 - E) = 0, \quad \nu_3(t)G = 0, \\ \nu_4(t)(G_0 - G) = 0, \quad \nu_5(t)v = 0, \quad \nu_i(t) \geqslant 0, \ i = 1, 4 \end{gathered} \tag{2.10}$$

и при любом $t \in [0; T]$ не равны нулю одновременно.

Принцип максимума для задачи (2.1)–(2.6) позволяет определить оптимальное управление $\bar{u}(t)$:

$$\bar{u}(t) = \arg \max_{u \in \Omega(t, \bar{y}(t))} [(\lambda_2 - \frac{\lambda_3}{\eta} v - \alpha \lambda_4 \frac{v}{\eta}) u], \tag{2.11}$$

$$\text{где } \Omega(t, \bar{y}(t)) = \{u \ : \ \frac{uv}{\eta} \leqslant P(E) + \sigma, \ 0 \leqslant u \leqslant F\},$$

здесь $y(t) = (x(t), v(t), E(t), G(t))$— вектор-функция состояния задачи (2.1)–(2.6).

Отсюда следует, что оптимальное управление в зависимости от функции переключения

$$\Phi(t) = \lambda_2 - \frac{\lambda_3 v}{\eta} - \alpha\lambda_4 \frac{v}{\eta} \tag{2.12}$$

может принимать значения:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} F, & \text{если } \Phi(t) > 0, \quad \frac{Fu}{\eta} \leqslant P(E) + \sigma; \\ 0, & \text{если } \Phi(t) < 0; \\ \frac{\eta}{v}(P(E) + \sigma), & \text{если } \Phi(t) > 0, \quad \frac{Fu}{\eta} > P + \sigma. \end{cases} \tag{2.13}$$

Оптимальное управление не определяется с помощью принципа максимума, если $\Phi(t) = 0$, и может принимать любое значение из отрезка $[0; F]$.

Система дифференциальных уравнений для сопряженной функции в задаче (2.1)–(2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial \bar{L}}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial r}{\partial x}, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial \bar{L}}{\partial v} = -\lambda_1 + \lambda_2 \frac{\partial r}{\partial v} + \lambda_3 \frac{u}{\eta} + \alpha\lambda_4 \frac{u}{\eta} - \nu_5, \\ \dot{\lambda}_3 &= -\frac{\partial \bar{L}}{\partial E} = -\lambda_3 \frac{\partial(\sigma + d_1)}{\partial E} + (1-\alpha)\lambda_4 \frac{\partial \sigma}{\partial E} - \nu_1 + \nu_2 - \mu_1 \frac{\partial(P+\sigma)}{\partial E}, \\ \dot{\lambda}_4 &= -\frac{\partial \bar{L}}{\partial G} = \lambda_4 \frac{\partial d_2}{\partial G} - \nu_3 + \nu_4 - \mu_1 \frac{\partial \sigma}{\partial G} - \lambda_3 \frac{\partial \sigma}{\partial G} + (1-\alpha)\lambda_4 \frac{\partial \sigma}{\partial G}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Здесь, как и ранее, $\bar{L}$ означает, что функция Лагранжа вычисляется вдоль оптимального процесса.

Задача (2.1)–(2.6) является автономной, поэтому функция Понтрягина остается постоянной вдоль траектории и не имеет скачков, в то время как у сопряженных функций возможны скачки. Выпишем условия скачка в точках возможного разрыва функций $\lambda_i(t)$, $i = \overline{1,4}$:

$$\begin{aligned} &\lambda_2(\tau^-) = \lambda_2(\tau^+) + \eta_2(\tau), \quad \eta_2(\tau) \geqslant 0, \quad \eta_2(\tau)v(\tau) = 0, \\ &\lambda_3(\tau^-) = \lambda_3(\tau^+) + \eta_3(\tau) - \eta_4(\tau), \quad \eta_3(\tau), \eta_4(\tau) \geqslant 0, \\ &\eta_3(\tau)E(\tau) = 0, \quad \eta_4(\tau)(E_0 - E(\tau)) = 0, \\ &\lambda_4(\tau^-) = \lambda_4(\tau^+) + \eta_5(\tau) - \eta_6(\tau), \quad \eta_5(\tau), \eta_6(\tau) \geqslant 0, \\ &\eta_5(\tau)G(\tau) = 0, \quad \eta_6(\tau)(G_0 - G) = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Условия трансверсальности для сопряженных функций:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(T^-) = -\lambda_0;\\
&\lambda_2(T^-) = \alpha_1, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_1 v(T) = 0;\\
&\lambda_3(T^-) = \alpha_2 - \alpha_3, \quad \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0, \quad \alpha_2 E(T) = 0, \quad \alpha_3(E_0 - E(T)) = 0;\\
&\lambda_4(T^-) = \alpha_4 - \alpha_5, \quad \alpha_4, \alpha_5 \geqslant 0, \quad \alpha_4 G(T) = 0, \quad \alpha_5(G_0 - G(T)) = 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Задача (2.2),(2.6),(2.9)–(2.16) представляет собой краевую задачу принципа максимума и предполагает использование численных методов для поиска оптимального управления. Разработка численного метода и решения такой задачи может явиться предметом научных исследований для соискателей и аспирантов. В этом разделе будут приведены некоторые частные случаи решения задачи в предположении, что функция сопротивления r не зависит явно от x, что является справедливым для бега по ровной местности. При небольших дистанциях и времени, меньше 100 с, функция $G(t) \cong G_0$, и поэтому мы можем считать ее постоянной вдоль траектории.

Соревнования на средней дистанции

В этом разделе мы будем считать, что сопротивление движению $r = r(v)$ зависит только от скорости, $G(t) = G_0$, а также пренебрежем влиянием слагаемого $d_1(E)$. Заметим, что функция $E(t)$ является невозрастающей в нашей задаче, т.к. ее производная, равная $\sigma - \frac{uv}{\eta} < -P(E) < 0$, является отрицательной вследствие ограничения (2.4) на мощность спортсмена, поэтому ограничение $E(t) \leqslant E_0$ является неактивным и соответствующие множители в формулах (2.15), (2.16) равны нулю $\nu_1(t) = \nu_2(t) = 0$, $\eta_3(t) = \eta_4(t)$. Множители $\nu_3(t) = \nu_4(t) = 0$, так как функция $G(t) = G_0$. Множитель $\nu_5(t) = 0$, так как скорость движения $v(t) > 0$. Скорость $v(t) = 0$ означала бы, что спортсмен отдыхает на дистанции. С учетом сделанных предположений исходную задачу можно упростить. Сформулируем следующую задачу оптимизации. В этой постановке время T изменяется от 10 до 100 с.

Необходимо найти максимум функционала

$$J(u(\cdot)) = \int_0^T v(t)dt \tag{2.17}$$

или минимум $J(u(\cdot)) = -x(T)$ при следующих ограничениях:

$$\dot{v} = u - r(v),$$

$$\dot{E} = -\frac{uv}{\eta} + \sigma(E), \tag{2.18}$$

$$\frac{uv}{\eta} \leqslant P(E) + \sigma(E), \quad E(t) \geqslant 0, \tag{2.19}$$

$$0 \leqslant u \leqslant F, \tag{2.20}$$

$$v(0) = 6, \quad E(0) = E_0 - 40. \tag{2.21}$$

Для ее решения будем использовать теорему 2.3 главы 1. Построим функцию Понтрягина этой задачи

$$H(t, v, E, u, \lambda) = \lambda_0 v + \lambda_1(u - r) + \lambda_2(\sigma - \frac{uv}{\eta}). \tag{2.22}$$

Функция Лагранжа имеет вид

$$\begin{aligned} L(t, v, E, u, \lambda, \mu, \nu) = \lambda_0 v + \lambda_1(u - r) + \lambda_2(\sigma - \frac{uv}{\eta}) + \\ + \mu(P + \sigma - \frac{uv}{\eta}) + \mu_1 u + \mu_2(F - u) + \nu E. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Согласно принципу максимума оптимальное управление определяется выражением (2.13), в котором функция переключения $\Phi(t)$ имеет вид

$$\Phi(t) = \lambda_1 - \lambda_2 \frac{v}{\eta} \tag{2.24}$$

и принимает значения, равные F, 0, $(P + \sigma)\eta v^{-1}$, если $\Phi(t) \neq 0$. Особым случаем является случай вырождения принципа максимума, когда $\Phi(t) = 0$ на отрезке ненулевой длины.

Запишем уравнение для сопряженных функций и условия трансверсальности:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -\lambda_0 + \lambda_1 \frac{\partial r}{\partial v} + \lambda_2 \frac{u}{\eta} + \mu \frac{u}{\eta}, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_2 \frac{\partial \sigma}{\partial E} - \mu \frac{\partial}{\partial E}(P + \sigma) - \nu, \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\mu(\frac{uv}{\eta} - P - \sigma) = 0, \quad \mu \geqslant 0, \quad \nu E = 0, \quad \nu \geqslant 0, \quad \lambda_0 \geqslant 0.$$

Условия скачка для сопряженных функций -

$$\lambda_2(\tau^-) = \lambda_2(\tau^+) + \eta(\tau), \tag{2.26}$$
$$\eta(\tau)E(\tau) = 0, \quad \eta(\tau) \geqslant 0,$$

откуда следует, что в точке входа или схода с границы $E = 0$ выполнены следующие условия:

$$\lambda_2(\tau^-) \geqslant \lambda_2(\tau^+), \tag{2.27}$$

$$\lambda_0 \geqslant 0, \quad \lambda_1(T) = 0, \quad \lambda_2(T^-) = \alpha_2, \quad \alpha_2 E(T) = 0, \quad \alpha_2 \geqslant 0. \tag{2.28}$$

Из физического смысла задачи и анализа необходимых условий оптимальности можно предположить, что оптимальная траектория устроена следующим образом. Вначале спортсмен движется с максимальным ускорением $\bar{u}(t) = F$, $t \in [0;\tau_1]$, затем некоторое время $t \in [\tau_1, \tau_2]$ он движется с почти нулевым ускорением. Здесь движение характеризуется тем, что функция $\Phi(t) = 0$. Скорость спортсмена, достигнув максимально возможного значения, далее изменяется незначительно. Завершает свой пробег спортсмен $t \in [\tau_2, T]$ с максимальной допустимой мощностью, так что $\bar{u}(t) = (P+\sigma)\eta v^{-1}$.

При этом на первом участке он максимально расходует энергию $E(t)$, на втором участке $\dot{E}(t) \cong \sigma(E) > 0$ спортсмен накапливает энергию $E(t)$ и на третьем участке снова расходует ее.

Пусть $t \in [0, \tau_1]$, $\bar{u}(t) = F$, тогда уравнения движения и энергии имеют вид

$$\begin{cases} \dot{v} = F - r(v), \\ \dot{E} = -\dfrac{Fv(t)}{\eta} + \sigma(E). \end{cases} \tag{2.29}$$

На этом участке $E(t) > 0$, поэтому $\nu = 0$, $\mu = 0$, т.к. $(Fv)\eta^{-1} < \sigma(E) + P(E)$, дифференциальные уравнения для сопряженных функций имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\lambda_0 + \lambda_1 \dfrac{\partial r}{\partial v} + \lambda_2 \dfrac{F}{\eta}, \\ \dot{\lambda}_2 = -\lambda_2 \dfrac{\partial \sigma}{\partial E}. \end{cases} \tag{2.30}$$

Функция Понтрягина остается постоянной вдоль всей траектории в силу теоремы 2.3 главы 1:

$$H(t) = \lambda_0 v + \lambda_1(F - r) + \lambda_2(\sigma - \frac{Fv}{\eta}) = \text{Const}, \quad t \in [0;T].$$

Функция $v(t)$ является решением уравнения (2.29) с начальным условием $v(0) = v_0$. После того как найдена функция $v(t)$, можно проинтегрировать дифференциальное уравнение для функции $E(t)$ с начальным условием (2.30) $E(0) = E_0 - 40$.

С учетом определения функций $r(v)$, $\sigma(E)$

$$r(v) = \begin{cases} 2 + 0.0037v^2, & v \leqslant 6\text{м/с}, \\ 2 + 0.0037v^2 + 0.6(v-6), & v > 6\text{м/с}, \end{cases}$$
$$\sigma(E) = \sigma_{00}(E),$$

и, используя начальные условия и оптимальное управление, можно найти функции $v(t)$ и $E(t)$ как решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.18).

Если $t \in [\tau_2, T]$, то $\bar{u}(t) = (P+\sigma)\eta v^{-1}$, при этом $\mu \geqslant 0$ и для построения оптимального процесса следует решить систему

$$\begin{cases} \dot{v} = \dfrac{(P+\sigma)\eta}{v} - r(v), \\ \dot{E} = -P(E). \end{cases} \tag{2.31}$$

Функция $P(E)$ либо постоянная, либо линейная, поэтому второе уравнение легко интегрируется с известным начальным условием $E(\tau_2)$, в результате чего легко определяется функция $E(t)$, затем с заданным начальным условием $v(\tau_2)$ интегрируется первое уравнение и строится функция $v(t)$. В точках τ_1, τ_2 функции $x(t)$, $v(t)$, $E(t)$ являются непрерывными, т.е. их значения справа и слева равны. Данные рассуждения позволяют построить достаточно хорошее начальное приближение оптимального процесса.

Требуется отметить, что величины τ_1, τ_2 являются неизвестными и должны определяться с использованием условия принципа максимума с помощью определения знака функции $\Phi(t)$ при $t \in [0, T]$ и условий скачка сопряженных функций в точке входа на ограничения (2.19).

Нахождение функции $\Phi(t)$— достаточно сложная задача, т.к. в этом примере нам не известны значения сопряженных функций на конце отрезка в точке $t = T$.

Однако вдоль каждой траектории с фиксированными значениями τ_1 и τ_2 можно вычислить функционал $J(\bar{u}(\cdot))$, который будет являться функцией двух переменных τ_1 и τ_2. Определив минимальные значения функционала на множестве $\{\tau_1, \tau_2\} \in [0, T] \times [0, T]$ с помощью численных методов, мы найдем оптимальные значения $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$.

Задачу (2.17)–(2.21) можно решать методом функций штрафа, который описан в §1 главы 1. Введем функцию штрафа $P_k(u(\cdot))$

$$P_k(u(\cdot)) = A_k \int\limits_0^T [(\max\{-E(t),0\})^2 + (\max\{\frac{uv}{\eta} - P - \sigma, 0\})^2]dt. \qquad (2.32)$$

Тогда исходная задача заменяется следующей задачей оптимального управления без фазовых и смешанных ограничений об определении минимума функционала:

$$J_k(u(\cdot)) = P_k(u(\cdot)) - \int\limits_0^T v dt \to \min \qquad (2.33)$$

при ограничениях:

$$\dot{v} = u - r(v), \quad v(0) = v_0 \ , \qquad (2.34)$$

$$\dot{E} = -\frac{uv}{\eta} + \sigma, \quad E(0) = E_0 \, , \qquad (2.35)$$

$$0 \leqslant u \leqslant F \ . \qquad (2.36)$$

Функция Понтрягина задачи (2.33)–(2.36) имеет вид

$$H(t,v,E,u,\lambda) = -\lambda_0[A_k[(\max\{-E(t),0\})^2 + (\max\{-P - \sigma + \frac{uv}{\eta}, 0\})^2]] +$$
$$+ \lambda_0 v + \lambda_1(u - r(v)) + \lambda_2(\sigma - \frac{uv}{\eta}) \ .$$

Оптимальное управление $\bar{u}(t)$ находится согласно принципу максимума

$$\begin{aligned} &\bar{u}(t) = \arg \max_{0 \leqslant u \leqslant F} \{-\lambda_0 A_k (\max\{-P - \sigma + \frac{uv}{\eta}, 0\})^2 + \Phi(t)u\}, \\ &\text{где } \Phi(t) = \lambda_1 - \lambda_2 \frac{v}{\eta}. \end{aligned} \qquad (2.37)$$

Если $\frac{uv}{\eta} < P + \sigma$, $\Phi(t) > 0$, то $\bar{u}(t) = F$; если $\Phi(t) < 0$, то $\bar{u}(t) = 0$.

Если $\frac{uv}{\eta} > P + \sigma$, то для определения $\bar{u}(t)$ следует найти максимум функции $\phi(u)$ на множестве $[0; F]$:

$$\phi(u) = -\lambda_0 A_k (\frac{uv}{\eta} - p - \sigma)^2 + \Phi(t)u, \quad u \in [0; F]. \qquad (2.38)$$

Вычислим первую и вторую производные функции $\phi(u)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial u} &= -2\lambda_0 A_k(\frac{uv}{\eta} - P - \sigma)\frac{v}{\eta} + \Phi(t), \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 u} &= -2\lambda_0 A_k \frac{v^2}{\eta^2} < 0 .\end{aligned} \tag{2.39}$$

Введем $u_k(t)$:

$$\begin{aligned}&u_k(t) = \frac{\Phi(t)\eta^2}{2v^2\lambda_0 A_k} + \frac{(P+\sigma)\eta}{v} = \frac{(P+\sigma)\eta}{v} + \frac{\tilde{\Phi}(t)}{A_k}, \\ &\text{где } \tilde{\Phi}(t) = \frac{\Phi(t)\eta^2}{2v^2\lambda_0}, \quad A_k \to \infty, \quad k = 1, 2, \ldots .\end{aligned} \tag{2.40}$$

Оптимальное управление $\bar{u}(t)$ определяется выражением

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} \frac{(P+\sigma)\eta}{v} + \frac{\tilde{\Phi}(t)}{A_k}, & \text{если } 0 \leqslant u_k((t) \leqslant F, \\ F, & \text{если } u_k(t) > F, \\ 0, & \text{если } u_k(t) < 0. \end{cases} \tag{2.41}$$

Уравнение для сопряженных функций -

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_0 + \lambda_1 \frac{\partial r}{\partial v} + \lambda_2 \frac{u}{\eta} + \\ &+ 2\lambda_0 A_k \frac{u}{\eta} \max\{\frac{uv}{\eta} - P - \sigma, 0\}, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\frac{\partial H}{\partial E} = \lambda_2 \frac{\partial \sigma}{\partial E} - 2\lambda_0 A_k \max\{-E(t), 0\} - \\ &- 2\lambda_0 A_k \max\{\frac{uv}{\eta} - P - \sigma, 0\} \frac{\partial (P+\sigma)}{\partial E}.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Условия трансверсальности -

$$\lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0. \tag{2.43}$$

Краевая задача принципа максимума (2.34), (2.35), (2.41)-(2.43) может быть решена методом пристрелки [6] или градиентным методом [7].

§3. Соревнования по бегу на холмистой местности

Рассмотрим следующую задачу, в которой существенно то, что функция сопротивления r зависит от x.

Требуется найти максимум терминального функционала

$$x(T) \to \max$$

на множестве процессов, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = f - r(x, v), \tag{3.1}$$

$$\dot{E} = -\frac{fv}{\eta} + \sigma(t) + d_1(E), \tag{3.2}$$

$$\dot{G} = -\sigma - \alpha(\frac{fv}{\eta} - \sigma) + d_2(G), \tag{3.3}$$

$$0 \leqslant f \leqslant F, \tag{3.4}$$

$$0 \leqslant E(t) \leqslant E_0, \quad 0 \leqslant G(t) \leqslant G_0, \tag{3.5}$$

$$\frac{fv}{\eta} \leqslant P(E) + \sigma(t), \tag{3.6}$$

$$x(0) = 0, \quad v(0) = 6, \quad E_0 - 40 = E(0), \quad G(0) = G_0. \tag{3.7}$$

Функция Понтрягина этой задачи —

$$\begin{aligned} H = {} & \lambda_0 v + \lambda_1(f - r) + \lambda_2(\sigma - \frac{fv}{\eta} + d_1) + \\ & + \lambda_3(-\sigma - \alpha(\frac{fv}{\eta} - \sigma) + d_2) + \nu_1(\frac{fv}{\eta} - P - \sigma) + \\ & + \nu_2(-f) + \nu_3(f - F). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь снова предполагаем, что фазовые ограничения (3.5) не являются активными. Множители ν_i, $i = 1, 2, 3$, $\lambda_i(T)$, $i = 1, 2, 3$ удовлетворяют условиям

$$\nu_1 \leqslant 0, \quad \nu_2 \leqslant 0, \quad \nu_3 \leqslant 0, \quad \nu_1(\frac{fv}{\eta} - P - \sigma) = 0, \tag{3.9}$$

$$\lambda_i(T) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \quad \lambda_0(T) = 1\ . \tag{3.10}$$

Система дифференциальных уравнений для сопряженных функций имеет вид

$$
\begin{aligned}
\dot\lambda_0 &= \lambda_1 r_x, \\
\dot\lambda_1 &= -\lambda_0 + r_v\lambda_1 + f(\frac{v}{\eta})'(\lambda_2 + \alpha\lambda_3) - f(\frac{v}{\eta})'\nu_1, \\
\dot\lambda_2 &= -(\sigma_E + d_1')\lambda_2 - (\alpha - 1)\sigma_E\lambda_3 + \alpha_E(f\frac{v}{\eta} - \sigma)\lambda_3 + (P' + \sigma_E)\nu_1, \\
\lambda_3 &= -\sigma_G\lambda_2 - (\sigma_G(\alpha - 1) + d_2')\lambda_3 + \sigma_G\nu_1.
\end{aligned} \tag{3.11}
$$

Функция Понтрягина линейна по управлению f. Введем функцию переключения

$$
\phi = \lambda_1 - (\lambda_2 + \alpha\lambda_3)\frac{v}{\eta} \tag{3.12}
$$

или, полагая $\psi = \lambda_2 + \alpha\lambda_3$, имеем

$$
\phi = \lambda_1 - \psi\frac{v}{\eta}. \tag{3.13}
$$

Заметим, что множитель $\lambda_0(T) \neq 0$, иначе $\lambda_i(T) = 0$, $i = \overline{0,4}$, а это невозможно, т.к. тогда все множители Лагранжа, согласно системе (3.11), будут равны нулю.

Оптимальное управление снова, как и в §2, определяется знаком функции переключения, и для определения решения необходимо исследовать свойства функции $\phi(t)$, $t \in [0;T]$.

Заметим, что в системе (3.11) два последних уравнения относительно функций $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ не зависят от функций $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$.

На последнем этапе дистанции, так как $\lambda_0(T) = 1$, $\lambda_i(T) = 0$, $i = 1, 2, 3$, то, как следует из (3.11), $\lambda_1(t) \approx T - t$ для значений t, близких T, а функции $\lambda_2(t), \lambda_3(t) = O(T - t)$ в окрестности T. Таким образом, в окрестности точки T знак функции переключения $\phi(t)$ определяется знаком $\lambda_1(t)$, и т.к. $\phi(T) = 0$, то эта функция положительна в окрестности T.

Можно доказать следующие леммы [2]:

Лемма 2.1. *Функции $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ положительны на* $[0, 1)$.

Доказательство основывается на описании сопряженных функций с помощью субдифференциалов минимизируемого функционала [2]. Интегрируя сумму дифференциальных уравнений (3.11) с конца при T $= t$, мы можем получить тот же результат, т.к. $\phi(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t) > 0$ для t из окрестности T, если T— достаточно большая величина.

Функции $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ можно рассматривать как теневые цены процесса.

Для того чтобы провести более полный анализ оптимального процесса, следует изучить свойства функции ϕ и ее производных. Мы имеем

$$\begin{aligned}\phi' = -\lambda_0 + \lambda_1 r_v + \psi(\frac{v}{\eta})' + \psi(\frac{v}{\eta})a - \lambda_3\frac{v}{\eta}b- \\ - \nu_1[f(\frac{v}{\eta})' - \psi(\frac{v}{\eta})(P' + \sigma_E + \alpha\sigma_G)],\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\text{где } a = \sigma_E + d_1' + \alpha\sigma_G,$$

$$b = \sigma_E + \alpha d_1' + \sigma_G\alpha + \alpha_G d_1.$$

Так как величины a и b малы, то доминирующими слагаемыми в определении ϕ' являются первые три слагаемых.

Лемма 2.2. *Функция переключения $\phi(t)$ не имеет отрицательных дуг [2].*

Для доказательства этого утверждения необходимо проанализировать различные случаи, однако очевидно, что если бы такая отрицательная дуга существовала, то на этом интервале времени оптимальное управление было бы равно нулю и поэтому такая дуга не может покрывать большой промежуток времени, т.к. если $\bar{u}(t) = f = 0$, то через три-четыре секунды скорость с максимального значения упадет до нуля.

Доказательство леммы 2.2 основано на вычислении и анализе второй производной функции переключения ϕ.

В случае, если время $T < 1000$ с функция $G(t) = G_0 = Const$, тогда в системе уравнений для сопряженных функций (3.11) $\lambda_3(t) \equiv 0$.

Приведем дискретную задачу и формулы необходимые для ее решения методом функций штрафа и градиентным методом. Для построения численного алгоритма перейдем к дискретной задаче оптимального управления, которая состоит в максимизации функции

$$I[x, f] = x^q \tag{3.15}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}&x^{i+1} = x^i + \Delta t v^i, \quad -f^i \le 0, \quad f^i \le F, \\ &v^{i+1} = v^i + \Delta t(f^i - r(x^i, v^i)),\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$E^{i+1} = E^i + \Delta t(-\frac{f^i v^i}{\eta} + \sigma(t_i, E^i) + d_1(E^i)),$$

$$G^{i+1} = G^i - \Delta t(\sigma^i + \alpha_i(\frac{f^i v^i}{\eta} - \sigma^i) - d_2^i), \quad i = \overline{0, q-1}, \tag{3.17}$$

$$\frac{f^i v^i}{\eta} - P(E^i) - \sigma(t_i, E^i) \le 0, \quad i = \overline{0, q-1}\,. \tag{3.18}$$

Составляя функцию Лагранжа задачи (3.15)–(3.18) и выписывая условия стационарности, получим рекуррентные соотношения для определения сопряженных векторов:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_0^\ell = \lambda_0^{\ell+1} - \lambda_1^{\ell+1}\frac{\partial r^\ell}{\partial x^\ell}\Delta t, \quad \lambda_0^q = 1, \quad \ell = \overline{q-1,0};\\
&\lambda_1^\ell = \lambda_1^{\ell+1} + \lambda_0^{\ell+1}\Delta t - \lambda_1^{\ell+1}\frac{\partial r^\ell}{\partial v^\ell}\Delta t - \lambda_2^{\ell+1}\frac{f^\ell}{\eta}\Delta t-\\
&\quad - \lambda_3^{\ell+1}\alpha^\ell\frac{f^\ell}{\eta}\Delta t - \mu_3^\ell\frac{f^\ell}{\eta},\\
&\lambda_1^q = 0, \quad \ell = \overline{q-1,0}; \qquad\qquad (3.19)\\
&\lambda_2^\ell = \lambda_2^{\ell+1} - \lambda_2^{\ell+1}(\frac{\partial \sigma^\ell}{\partial E^\ell} + \frac{\partial d_1^\ell}{\partial E^\ell})\Delta t + \lambda_3^{\ell+1}[\frac{\partial \sigma^\ell}{\partial E^\ell}(1-\alpha^\ell)+\\
&\quad + \frac{\partial \alpha^\ell}{\partial E^\ell}(\frac{\partial f^\ell v^\ell}{\eta} - \sigma^\ell)] + \mu_3^\ell(\frac{\partial (P^\ell + \sigma^\ell)}{\partial E^\ell}),\\
&\lambda_2^q = 0, \quad \ell = \overline{q-1,0};\\
&\lambda_3^\ell = \lambda_3^{\ell+1} - \lambda_3^{\ell+1}(\frac{\partial \sigma^\ell}{\partial E^\ell}(1-\alpha^\ell) - \frac{\partial d_2^\ell}{\partial G^\ell})\Delta t + \mu_3^\ell\frac{\partial \sigma^\ell}{\partial G^\ell} + \lambda_2^{\ell+1}\frac{\partial \sigma^\ell}{\partial G^\ell}\Delta t,\\
&\lambda_3^q = 0, \quad \ell = \overline{q-1,0};\\
&\mu_3(\frac{f^\ell v^\ell}{\eta} - P(E^\ell) - \sigma(t_\ell, E^\ell)) = 0, \quad \ell = \overline{0,q-1}. \qquad\qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Условия стационарности по управлению :

$$\frac{\partial L}{\partial f^\ell} = -\lambda_1^{\ell+1}\Delta t + \lambda_2^{\ell+1}\frac{v^\ell}{\eta}\Delta t + \lambda_3^{\ell+1}\alpha^\ell\frac{v^2}{\eta}\Delta t + \mu_1^\ell - \mu_2^\ell + \mu_3^\ell\frac{v^\ell}{\eta} = 0, \quad (3.21)$$

$$\mu_1^\ell(f^\ell - F) = 0, \quad \mu_2^\ell f^\ell = 0, \quad \ell = \overline{0,q-1}\ . \quad (3.22)$$

Полученные соотношения могут быть использованы для построения численного решения итерационным методом. Для применения метода проекции градиента уточнение управления на $k+1$ итерации осуществляется по формуле

$$(f^\ell)^{(k+1)} = (f^\ell)^{(k)} - \alpha(\frac{\partial L}{\partial f^\ell})^{(k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

если $0 \le (f^\ell)^{(k+1)} \le F$, в случае, если $(f^\ell)^{(k+1)} > F$, то строится проекция градиентного метода $(f^\ell)^{(k+1)} = F$, аналогично, если $(f^\ell)^{(k+1)} < 0$, то полагаем $(f^\ell)^{(k+1)} = 0$.

Наряду с задачей (3.1)–(3.7) можно рассмотреть аналогичную задачу, в которой ограничение (3.6) учитывается в виде функции штрафа, и получить для новой задачи уравнения для сопряженных векторов, аналогичные (3.19)–(3.21). Сравнивая правые части выражений для λ_i^{ℓ}, легко построить алгоритм для улучшения множителей μ_3^{ℓ}, $\ell = \overline{0, q-1}$.

Для построения решения можно использовать необходимые условия оптимальности в непрерывной задаче, которые указывают на характер оптимального решения на отдельных интервалах времени, уточняя моменты переключения управления с помощью метода пристрелки. В данном случае могут быть использованы алгоритмы, приведенные в §5 главы 3.

Список литературы к главе 4

1. Behncke H. Optimization models for the force and energy in completive sports // Math. Meth. Appl. Sci. 1987. V.9. P.218–311.

2. Behncke H. A mathematical model for the force and energetics in competitive running // J. Math. Biol. 1993. V.31. P.953–878.

3. Bryson A.E., Yu-Chi Ho Applied Optimal Control // Washington; NY; London: Hemisphere Publishing Co, 1975.

4. Keller J.B. A Theory of Competitive running // Phys. Today. 1973. V.26, P.43–47.

5. Mangaria R. Biomechanics and energetics of muscular exercise. Oxford: Oxford Univ. Press, 1976.

6. Stoer J., Bulirsch R. Introduction to numerical analysis. NY Heidelberg; Berlin: Springer Verlag 1983.

7. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации М.: Наука, 1982.

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENS

Учебное издание

АНДРЕЕВА Елена Анатольевна
БЕНКЕ Хорст

ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Отпечатано с оригинала авторов

Технический редактор А.В. Жильцов
Подписано в печать 29.04.2015. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 10,12. Тираж 100. Заказ № 186.
Редакционно-издательское управление
Тверского государственного университета
Адрес: 170100, г. Тверь, Студенческий пер. 12, корпус Б.
Тел. РИУ (4822) 35-60-63.