УДК 530.145.7:530.131:531.62

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В.Л. Скопич
Тверской государственный университет, 170002 Тверь, Садовый переулок, 35
nsdobnyakov@mail.ru

Аннотация: В работе показано, что использование некоторых формул в рамках первого приближения теории возмущений является необоснованным. Кроме того, нет оснований утверждать, что при малом времени перехода из начального в конечное состояние закон сохранения энергии в квантовой теории столкновений не выполняется.
Ключевые слова: *сохранение энергии, квантовая механика, теория возмущений.*

Рассмотрим поведение системы, состоящей из двух слабо взаимодействующих частей. К категории рассматриваемых явлений относятся, например, различные столкновения; при этом система в начальном и конечном состояниях представляет собой совокупность свободных частиц, а роль возмущения играет взаимодействие между ними.

Вероятность перехода из первоначального (i) стационарного состояния в конечное (f) стационарное состояние равна [1]

$$w_{fi} = \frac{1}{h^2}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} v_{fi} e^{i\omega_{fi} t} dt\right|^2 . \tag{1}$$

Здесь и далее h – постоянная Планка. Если интеграл в формуле (1) взять по частям, то он разбивается на два слагаемых (поскольку на нижнем пределе значение первого члена исчезает):

$$a_{fi} = -\frac{i}{h}\int_{-\infty}^{t} v_{fi} e^{i\omega_{fi} t} dt = -\frac{v_{fi} e^{i\omega_{fi} t}}{h\omega_{fi}} + \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial v_{fi}}{\partial t}\frac{e^{i\omega_{fi} t}}{h\omega_{fi}} dt . \tag{2}$$

Далее будем рассматривать случай быстрого, внезапного включения взаимодействия (в момент $t = 0$), при котором $v = 0$ для $t < 0$, и $\partial v / \partial t = 0$ для $t > 0$. При этом в [1] рассматривается только второе слагаемое, хотя первое никуда не исчезает. Учет первого слагаемого дает для вероятности w_{fi} следующее выражение:

$$w_{fi} = \left|a_{fi}\right|^2 = \frac{\left|v_{fi}\right|^2}{h^2 \omega_{fi}{}^2} 4\sin^2\frac{\omega_{fi} t}{2} . \tag{3}$$

Использование одного из представлений δ-функции [2]

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\sin^2 \alpha t}{\pi t \alpha^2} = \delta(\alpha) \tag{4}$$

позволяет записать при больших t выражение (3) в следующем виде:

$$w_{fi} = \frac{2\pi t}{h}\left|v_{fi}\right|^2 \delta(E_f - E_i) . \tag{5}$$

Здесь возникает вопрос: а что на практике означает $t \to \infty$? По определению δ-функции, для любой функции $V(x)$ справедливо следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x)\,\delta(x-a) = V(a) \tag{6}$$

Это означает, что можно взять $\delta_a(x)$ в качестве приближенной δ-функции $(\delta_a(x) \approx \delta(x))$, если

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \Delta x^{-1}; & 0 \le x \le \Delta x \\ 0; & x < 0, x > \Delta x \end{cases} \tag{7}$$

и, при этом, $V(x)$ слабо меняется на отрезке Δx. И вообще, в интервале Δx $\delta_a(x)$ может быть любой, лишь бы $\int_0^{\Delta x} \delta_a(x)\,dx = 1$. Пусть Δx_{ch} – интервал, на котором $V(x)$ заметно меняется. Тогда должно быть $\Delta x << \Delta x_{ch}$.

В правую часть выражения (3) входит функция энергии

$f(E_f) \equiv \dfrac{1}{(E_f - E_i)^2} \sin^2(\dfrac{E_f - E_i}{2h} t)$, причем $\lim\limits_{t\to\infty} f(E_f) = \dfrac{t\pi}{2h}\delta(E_f - E_i)$.

Эта функция имеет максимум при $E_f = E_i$ и затухает при $\left|\dfrac{(E_f - E_i)t}{2h}\right| \ge M$, где M – достаточно большое число ($M \ge 10$).

Любой процесс, происходящий в системе, есть некое взаимодействие между частями этой системы, с характерной для каждого процесса энергией взаимодействия $\overline{V_{\rm int}}$. Для атомных процессов эта энергия $\overline{V_{\rm int}} \ge 10$ эв, для ядерных процессов – $\overline{V_{\rm int}} \ge 10$ Мэв. Понятно, что $f(E_f)$ можно представить в виде δ-функции, если V_{fi} слабо меняется на отрезке $E_f - E_i$, т. е. если $|E_f - E_i| << \overline{V_{\rm int}}$. А так как $|E_f - E_i| \ge \dfrac{2hM}{t}$, то отсюда получаем условие на время, при котором можно представить $f(E_f)$ в виде δ-функции:

$$t >> \frac{2hM}{\overline{V_{\rm int}}}. \tag{8}$$

Посмотрим, как совместимо это условие с условием применимости первого приближения теории возмущений. Для этого запишем вероятность w_{ii} того, что после включения взаимодействия система останется в начальном состоянии:

$$w_{ii} = |a_{ii}|^2, \text{ где } a_{ii} = 1 - \frac{i\,v_{ii}}{h} t. \tag{9}$$

Переход из определенного начального в какое-либо конечное состояние есть достоверное событие. Это означает, что должно быть $\sum_f |a_{fi}|^2 = 1$. Однако, при малых t в первом приближении $\sum_f |a_{fi}|^2 = 1 + \frac{t^2}{h^2} \sum_f |v_{fi}|^2$, т.е. левая часть больше 1. Чтобы устранить это противоречие, необходимо добавить к выражению для a_{ii} малый действительный параметр $\beta << 1$. Легко видеть, что $\beta = -\frac{t^2}{2h^2} \sum_f |v_{fi}|^2$. Заметим, что в первом приближении, как и должно быть, $\beta = 0$. Отсюда следует, что первое приближение теории столкновений справедливо при

$$t \ll \frac{}{\sqrt{\sum_f |v_{fi}|^2}} \qquad (10)$$

Сравнивая (10) с (8), видим, что полученные неравенства несовместимы (их знаменатели являются величиной одного порядка). Другими словами, представление $f(E_f)$ в виде δ-функции возможно лишь при таких больших t, при которых первое приближение теории возмущений уже не работает.

Далее, соотношение (3) используется в [1] для обоснования возможности нарушения закона сохранения энергии при малых t.На основании (3) утверждается, что наиболее вероятное значение разности $E_f - E_i$ порядка величины h/t. Здесь почему-то молчаливо подразумевается, что конечное состояние отличается от начального. Однако вероятность того, что система останется в том же начальном состоянии при $t \to 0$, стремится к 1, и, в то же время, вероятность обнаружения отличного от нуля изменения энергии $E_f - E_i \neq 0$ при малых t, пропорциональна t^2, т. е. по сути равна нулю. Другими словами, наиболее вероятное значение разности $E_f - E_i = 0$, а не h/t.

Если же говорить не о наиболее вероятном значении разности, а о среднеквадратичном отклонении $\sqrt{\overline{(E_f - E_i)^2}} \equiv \Delta(E_f)$, то из (3) и (9) очевидно, что $\Delta(E_f)$ прямо пропорционально величине возмущения V, и, значит, при сколь угодно малом взаимодействии V между обеими частями системы, отклонение $\Delta(E_f)$ будет стремиться к нулю (изменение энергии при измерении не будет обнаружено).

Таким образом, нет оснований допускать возможность нарушения закона сохранения энергии в первом приближении теории возмущений при малых t. Такой же вывод, по существу, содержится и в работе [3], – правда на основании рассмотрения других аспектов рассматриваемой проблемы. Главными из этих аспектов являются отсутствие последовательности и согласованности между конкретными случаями применения закона сохранения энергии и общим формализмом квантовой механики, вопрос о природе времени (время – это оператор или параметр), об общем выражении соотношения неопределенности для энергии и времени. Иначе говоря, в [3] рассмотрение носит методологический характер, здесь же подход осуществляется с более строгих математических позиций.

Библиографический список

1. **Ландау, Л.Д.** Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1974. – 752 с.
2. **Блохинцев, Д.И.** Основы квантовой механики / Д.И. Блохинцев. – 5-е изд., перераб. – М.: Наука, 1976. – 664 с.
3. **Мандельштам, Л.И.** Соотношение неопределённости энергия-время в нерелятивистской квантовой механике / Л.И. Мандельштам, И.Е. Тамм // Известия АН СССР. Серия физическая. – 1945. – Вып. 9. – С. 122-128.