Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

А.А.ГОЛУБЕВ, Т.А.СПАССКАЯ

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ – 2017

Учебное пособие

ТВЕРЬ 2017

УДК 517(07)
ББК Ч426.221я72
Г62

Рецензент
Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры компьютерной безопасности
и математических методов управления
ФГБОУ ВПО «Тверской государственный университет»
И.А. Шаповалова

Голубев А.А., Спасская Т.А.
Г62 Пособие по математике для подготовки к ЕГЭ 2017: учеб. пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2017. – 124 с.

ISBN 978-5-7609-1183-4

Данное пособие адресовано учителям математики средней школы, может быть использовано при изучении различных методов и приёмов решения задач по математике, а также при подготовке учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ – 2017.

Книга может быть рекомендована также старшеклассникам и абитуриентам для самоподготовки.

УДК 517(07)
ББК Ч426.221я72

ISBN 978-5-7609-1183-4

ПРЕДИСЛОВИЕ

Назначение учебного пособия – оказание помощи учителю математики при изучении различных методов и приёмов решения задач по алгебре и геометрии и отработка практических навыков учащихся при подготовке к экзамену по математике в форме ЕГЭ 2017 года.

Книга содержит справочный материал, примеры решения типовых задач и 40 вариантов учебно-тренировочных тестов, составленных по спецификации ЕГЭ с учётом опыта экзаменов предыдущих лет.

В конце книги даны ответы ко всем заданиям вариантов и список рекомендуемой литературы.

Сборник заданий адресован учителям математики для подготовки учащихся к ЕГЭ – 2017. Он также может быть использован учащимися для самоконтроля и самоподготовки.

СПРАВОЧНИК

1. Некоторые признаки делимости натуральных чисел

Натуральные числа – это числа, используемые для счёта:

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots$$

Натуральные числа образуют множество, называемое *множеством натуральных чисел*. Множество всех натуральных чисел обозначается символом **N**: $\mathbf{N}=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$.

Признак делимости на 2. Число делится на 2, если его последняя цифра есть число чётное или ноль.

Признак делимости на 4. Число делится на 4, если две его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 4.

Признак делимости на 8. Число делится на 8, если три его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 8.

Признак делимости на 3 и 9. Число делится на 3, если сумма цифр числа делится на 3. Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9.

Признак делимости на 5. Число делится на 5, если оно оканчивается либо на ноль, либо на 5.

Признак делимости на 25. Число делится на 25, если две его последние цифры нули или образуют число, делящееся на 25.

Признак делимости на 11. Число делится на 11, если у него сумма цифр, занимающих чётные места, либо равна сумме цифр, занимающих нечётные места, либо отличается от неё на число, делящееся на 11.

2. Свойства степени с целым показателем

Степень с натуральным показателем $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n},\quad n\in\mathbf{N}$

(a – основание степени, n – показатель степени).

Степень с целым показателем $a^k,\ k\in\mathbf{Z}$:

1) если $k=n,\ n\in\mathbf{N}$, то $a^k=a^n=\underbrace{a\cdot\ldots\cdot a}_{n}$,

2) если $k=-n,\ n\in\mathbf{N},\quad a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, например, $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}$,

3) если $k=0$, то по определению $a^0=1$.

1^0. $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ – при перемножении степеней с одинаковым основанием показатели степеней складываются.

2^0. $\dfrac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$ – при делении степеней с одинаковым основанием из показателя числителя вычитается показатель знаменателя.

3^0. $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$ – при возведении степени в степень показатели перемножаются.

4^0. $a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n$ – при перемножении степеней с одинаковым показателем основания перемножаются.

5^0. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ – при делении степеней с одинаковым показателем основание числителя делится на основание знаменателя.

3.Формулы сокращенного умножения

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	(квадрат суммы);
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	(квадрат разности);
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	(разность квадратов);
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	(куб суммы);
$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	(куб разности);
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	(сумма кубов);
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$	(разность кубов).

4. Свойства арифметического корня

Действие, обратное возведению в натуральную степень, называется *извлечением корня*. С помощью этого действия по данной степени и её показателю ищется основание степени. *Извлечь корень степени* n из числа a – это значит найти такое число x, которое после возведения в степень n даёт само число a.

Неотрицательное значение корня чётной степени из неотрицательного числа называется *арифметическим корнем*.

Степень с дробным показателем $a^{\frac{m}{n}}$ определяется как $\sqrt[n]{a^m}$, то есть $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$; $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ при $a \geq 0$.

1^0. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

2^0. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ $(b \neq 0)$;

3^0. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$;

4^0. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

5^0. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$;

6^0. $\sqrt[n]{a^n} = a$ $(a \geq 0)$;

7^0. $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;

8^0. $\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}$ $(a \geq 0)$;

5. Квадратное уравнение. Формулы Виета

Уравнение – это равенство, справедливое при определенных значениях входящих в него переменных.

$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$ – квадратное уравнение.

$x^2 + px + q = 0$ – приведённое квадратное уравнение.

$D = b^2 - 4ac$ – дискриминант квадратного трехчлена.

Если $D \geq 0$, то квадратное уравнение имеет корни, причем при $D > 0$ – два различных корня $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$; при $D = 0$ – равные корни (один корень) $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Для корней квадратного уравнения справедливы равенства – формулы Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a, \\ x_1 \cdot x_2 = c/a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}.$$

Разложение квадратного трехчлена на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

6. График квадратичной функции

Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ называется квадратичной. Здесь a, b, c – фиксированные действительные числа, причём $a \neq 0$, а x принимает любые действительные значения. График квадратичной функции называют параболой.

График квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет вид:

а) при $a > 0$, $D < 0$ парабола лежит выше оси Ox (следовательно, не имеет общих точек с осью Ox) (рис. 1);

б) при $a > 0$, $D = 0$ парабола касается сверху оси Ox в точке $x_0 = x_1 = x_2$ (рис. 2);

в) при $a > 0$, $D > 0$ парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2 (рис. 3);

г) при $a < 0$, $D < 0$ парабола лежит ниже оси Ox (следовательно, не имеет общих точек с осью Ox) (рис. 4);

д) при $a<0$, $D=0$ парабола касается снизу оси Ox в точке $x_0=x_1=x_2$ (рис. 5);

е) при $a<0$, $D>0$ парабола пересекает ось Ox в двух точках x_1 и x_2 (рис. 6).

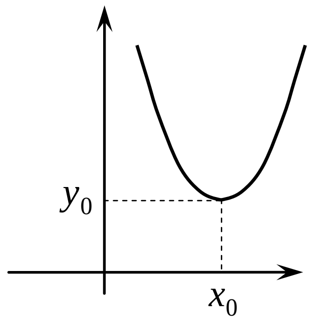


Рис. 1

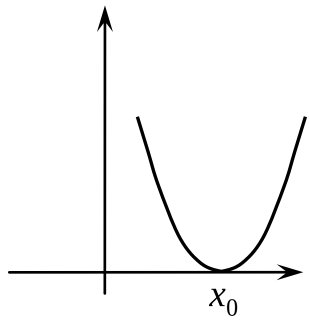


Рис. 2

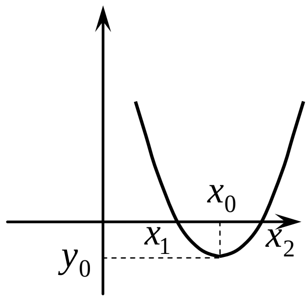


Рис. 3

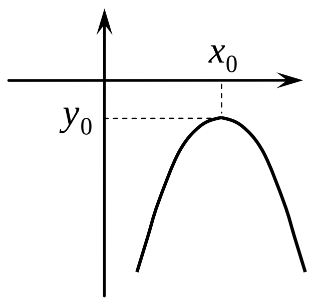


Рис. 4

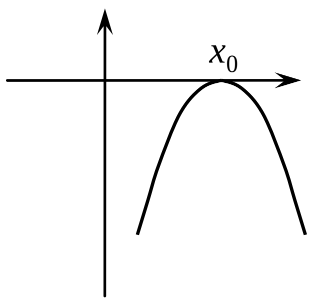


Рис. 5

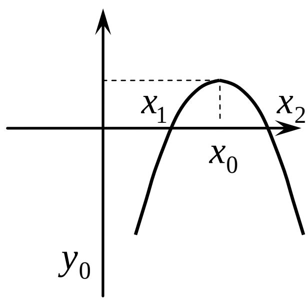


Рис. 6

7. Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами

Выражение вида $F(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$, где $a_0,a_1,\ldots,a_n$ – целые числа, $a_0\neq 0$, n – натуральное число, x – некоторый символ, называется *многочленом степени n с целыми коэффициентами от переменной x.*

Число c называется *корнем многочлена* $F(x)$, если $F(c)=0$.

Справедливо следующее утверждение: если несократимая дробь $\dfrac{p}{q}$ является корнем многочлена $F(x)$, то p – делитель свободного члена a_n, а q – делитель старшего коэффициента a_0. В частности, при $a_0=1$ рациональные корни многочлена будут целыми числами. (В качестве иллюстрации можно вспомнить теорему Виета о корнях приведенного квадратного уравнения.) Следовательно, если мы хотим найти рациональные корни уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$, то достаточно проверить все делители числа a_n (как положительные, так и отрицательные).

8. Рациональные неравенства. Метод интервалов

Неравенства, которые можно привести к виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \vee 0,$ где $P(x)$ и $Q(x)$ - некоторые многочлены, $Q(x)-$ не тождественный нуль, $\vee -$ один из знаков $>,<,\geq,\leq$, называются *рациональными неравенствами.*

При решении рациональных неравенств удобно пользоваться следующими утверждениями:

1. Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ равносильно неравенству $P(x)\cdot Q(x)>0.$
2. Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)}<0$ равносильно неравенству $P(x)\cdot Q(x)<0.$
3. Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0$ равносильно системе $\begin{cases} P(x)\cdot Q(x)\geq 0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$
4. Неравенство $\frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0$ равносильно системе $\begin{cases} P(x)\cdot Q(x)\leq 0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$

Пусть $F(x)$ – некоторый многочлен степени n. Возможны два случая разложения этого многочлена на множители.

1 случай. $F(x)=a_0\left(x-a_1\right)^{k_1}\left(x-a_2\right)^{k_2}...\left(x-a_{l-1}\right)^{k_{l-1}}\left(x-a_l\right)^{k_l}$, где $a_0, a_1, ..., a_l$ – действительные числа, $k_1,k_2,...,k_l-$ натуральные числа, $k_1+k_2+...+k_l=n.$

Пусть $a_1<a_2<...<a_{l-1}<a_l$. Изобразим эти точки на числовой прямой, получим $l+1$ промежутков. Расставим знаки «+» или «–» в каждом промежутке по следующему правилу: справа от самой правой точки ставят знак коэффициента a_0. Затем, двигаясь справа налево, при переходе через точку a_i меняют знак, если число k_i нечётное , и оставляют тот же знак, если оно четное. В качестве решения неравенства $F(x)\vee 0$ берут объединение промежутков с подходящими знаками. Если неравенство строгое, то концы промежутков в ответ не входят, а если нестрогое, то входят.

2 случай.

$F(x)=a_0\left(x-a_1\right)^{k_1}...\left(x-a_l\right)^{k_l}\left(b_1x^2+c_1x+d_1\right)^{s_1}...\left(b_mx^2+c_mx+d_m\right)^{s_m}$, где $a_0,a_1,...,a_l,b_1,c_1,d_1,...,b_m,c_m,d_m-$ действительные числа, $k_1,...,k_l,s_1,...,s_m-$ натуральные числа, $k_1+...+k_l+2s_1+...+2s_m=n$ и каждый из квадратных трёхчленов $b_ix^2+c_ix+d_i$ имеет отрицательный дискриминант. Тогда неравенство $F(x)\vee 0$ равносильно неравенству

$$a_0b_1^{s_1}..b_m^{s_m}\left(x-a_1\right)^{k_1}...\left(x-a_l\right)^{k_l}\vee 0,$$

поскольку квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом имеет постоянный знак, совпадающий со знаком старшего коэффициента.

9. *Иррациональные уравнения и неравенства*

Иррациональное уравнение (неравенство) – это уравнение (соответственно, неравенство), содержащее радикалы.

При решении иррациональных уравнений и неравенств можно применять следующие эквивалентности:

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=(g(x))^2, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)}\ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge (g(x))^2, \\ g(x)\ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)< 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)}> g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)> (g(x))^2, \\ g(x)\ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)< 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\sqrt{f(x)}\le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\le (g(x))^2, \\ f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)}< g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)< (g(x))^2, \\ f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

10. *Показательная функция*

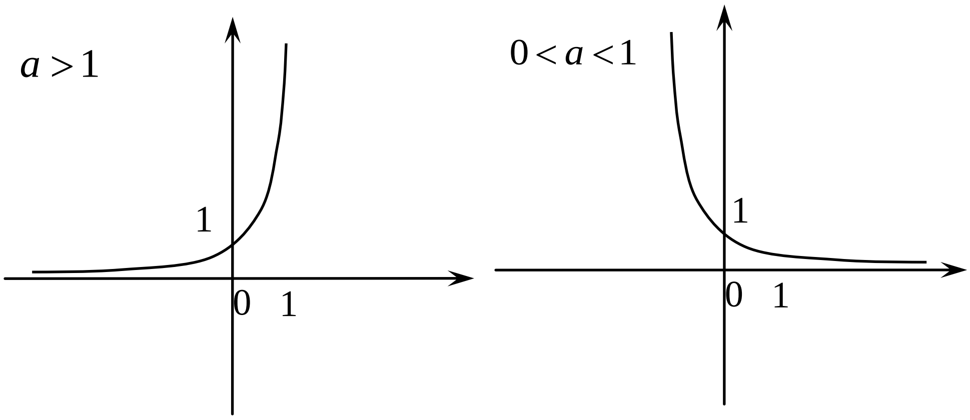
Функция вида $y=a^x$, где a – постоянное положительное число, не равное единице, называется *показательной*.

Перечислим основные свойства этой функции.

1) Функция задана на всей числовой прямой $\mathbf{R}$.
2) При любом положительном основании $a^0=1$. Следовательно, все графики показательной функции пересекают ось ординат в одной и той же точке $(0;1)$.
3) Функция является возрастающей при $a>1$ и убывающей при $0<a<1$. Причём, если $a>1$, то $a^x<1$ при $x<0$ и $a^x>1$ при $x>0$; если $0<a<1$, то $a^x>1$ при $x<0$ и $a^x<1$ при $x>0$.
4) Непрерывна на всей числовой прямой $\mathbf{R}$.

5) Множеством значений функции $y = a^x$ является интервал $(0;+\infty)$. Таким образом, показательная функция положительна при любом значении аргумента *x* (график расположен выше оси *Ox*).

График показательной функции имеет вид:



11. Понятия логарифма и основные его свойства. Логарифмическая функция

Пусть дано уравнение $a^x = b$, где $a > 0$, $b > 0$ и $a \neq 1$.

Логарифмом числа b *по основанию* a называется показатель степени *c*, в которую надо возвести данное основание *a*, чтобы получить число *b*. Запись $\log_a b = c$ читается так: логарифм числа b по основанию a равен *c*.

Основные свойства логарифма

Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$, $\beta \in \mathbf{R}$.

1. $\log_a 1 = 0$ (логарифм единицы равен нулю).

2. $\log_a a = 1$ (логарифм основания равен единице).

3. $a^{\log_a b} = b$ (основное логарифмическое тождество).

4. $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел при том же основании).

Замечание. В общем случае приведённое выше правило формулируется так: логарифм произведения нескольких чисел, если оно положительно, равен сумме логарифмов модулей этих чисел, взятых по тому же основанию, то есть

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a |b_1| + \log_a |b_2| + \ldots + \log_a |b_n|,\ b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n > 0.$$

5. $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$ (логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов этих чисел при том же основании).

Замечание. Логарифм частного двух чисел, если оно положительно, равен разности логарифмов модулей делимого и делителя, взятых по тому же основанию, то есть

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a |b| - \log_a |c|,\ \frac{b}{c} > 0.$$

6. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ (логарифм степени равен произведению логарифма основания этой степени на её показатель).

Замечание. Логарифм чётной степени числа, отличного от нуля, равен произведению показателя степени на логарифм модуля её основания, взятый по тому же основанию, то есть

$$\log_a b^{2n} = 2n \log_a |b|,\ n \in \mathbf{Z}.$$

7. $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha} \log_a b,\ \alpha \neq 0.$

8. $\log_{a^\alpha} b^\alpha = \log_a b,\ \alpha \neq 0.$

9. $\log_{a^\alpha} b^\beta = \dfrac{\beta}{\alpha} \log_a b,\ \alpha \neq 0.$

10. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a},\ c \neq 1$ (формула перехода к новому основанию).

11. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a},\ b \neq 1$ (частный случай формулы перехода к новому основанию).

12. $\log_a c \cdot \log_b d = \log_a d \cdot \log_b c,\ b \neq 1.$

13. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}.$

14. $\lg b$ – общепринятое написание выражения $\log_{10} b$ (десятичный логарифм); $\ln b$ – общепринятое написание выражения $\log_e b$ (натуральный логарифм), где число $e \approx 2{,}72$.

Нахождение логарифмов заданных чисел или выражений называется операцией *логарифмирования*. Нахождение числа b по заданному значению $\log_a b$ называется *потенцированием*.

Функция вида $y = \log_a x$, где a – положительное число, не равное единице, называется *логарифмической* (таким образом, логарифмическая функция является обратной к показательной функции).

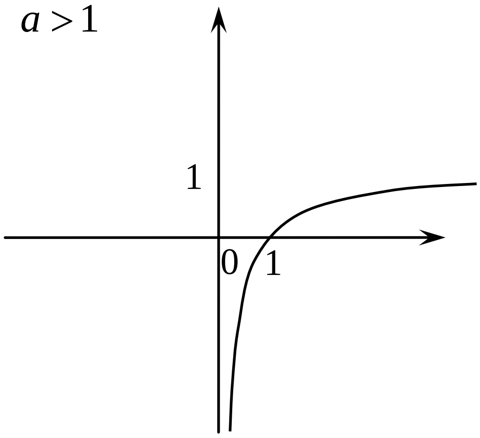
Перечислим основные свойства этой функции.

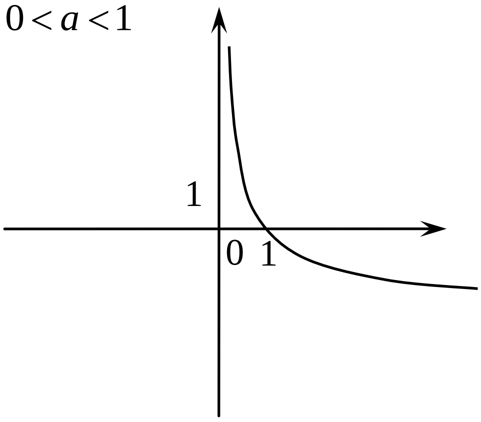
1) Функция задана на интервале $(0;+\infty)$ (график расположен справа от оси Oy).
2) При любом положительном основании $\log_a 1 = 0$. Следовательно,

график логарифмической функции пересекает ось абсцисс в точке $(1;0)$ при любом $a>0$, $a\neq 1$.

3) Функция является возрастающей при $a>1$ и убывающей при $0<a<1$. Причём, если $a>1$, то $\log_a x<0$ при $0<x<1$ и $\log_a x>0$ при $x>1$; если $0<a<1$, то $\log_a x>0$ при $0<x<1$ и $\log_a x<0$ при $x>1$.
4) Непрерывна на всей области определения $(0;+\infty)$.
5) Множеством значений функции $y=\log_a x$ является интервал $(-\infty;+\infty)$, то есть логарифмическая функция принимает все действительные значения.

График логарифмической функции имеет вид:





12. Некоторые тригонометрические формулы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha.$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha; \qquad \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha; \qquad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big).$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big).$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big).$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x-y}{2}\sin\frac{x+y}{2}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\ \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}.$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\ \operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}.$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha};\ \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};\ \cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

13. Простейшие тригонометрические уравнения

$$\sin x=a\Leftrightarrow\begin{cases}x=(-1)^n\arcsin a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, & \text{если}\ |\alpha|\le 1,\\ \text{нет решений}, & \text{если}\ |\alpha|>1.\end{cases}$$

$$\cos x=a\Leftrightarrow\begin{cases}x=\pm\arccos a+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, & \text{если}\ |\alpha|\le 1,\\ \text{нет решений}, & \text{если}\ |\alpha|>1.\end{cases}$$

$\operatorname{tg}x=a\Leftrightarrow x=\operatorname{arctg}a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

$\operatorname{ctg}x=a\Leftrightarrow x=\operatorname{arcctg}a+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$

14. Алгоритм решения простейших тригонометрических неравенств

1. Устно заменяем неравенство уравнением. Чертим единичную окружность и отмечаем на ней точки, соответствующие уравнению.
2. Отмечаем точки окружности, соответствующие неравенству, т. е. выделяем соответствующую дугу.
3. Указываем направление отсчёта.
4. Находим начало дуги и угол, ему соответствующий.
5. Находим угол, соответствующий концу дуги.
6. Записываем ответ в виде промежутка с учетом периодичности функции.

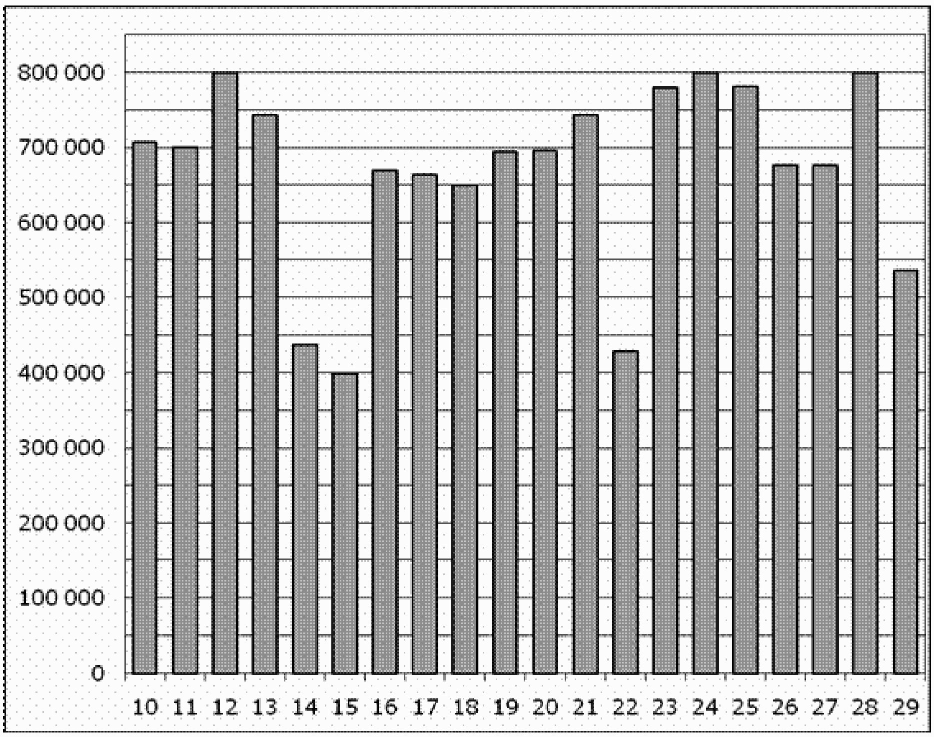
ВАРИАНТ ЕГЭ – 2016 [1]

1. В квартире установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). Показания счётчика 1 сентября составляли 103 куб. м воды, а 1 октября – 114 куб. м. Сколько нужно заплатить за холодную воду за сентябрь, если стоимость 1 куб. м холодной воды составляет 19 руб. 20 коп.? Ответ дайте в рублях.

Решение. За сентябрь израсходовано 114 – 103 = 11 куб. м воды. Поскольку стоимость 1 куб. м воды составляет 19 руб. 20 коп., то за воду за сентябрь нужно заплатить 11 · 19,2 = 211,2 руб.

***Ответ*:** 211,2.

2. На диаграмме[2] показано количество посетителей сайта РИА Новости во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали – количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей больше, чем наименьшее количество посетителей за день.



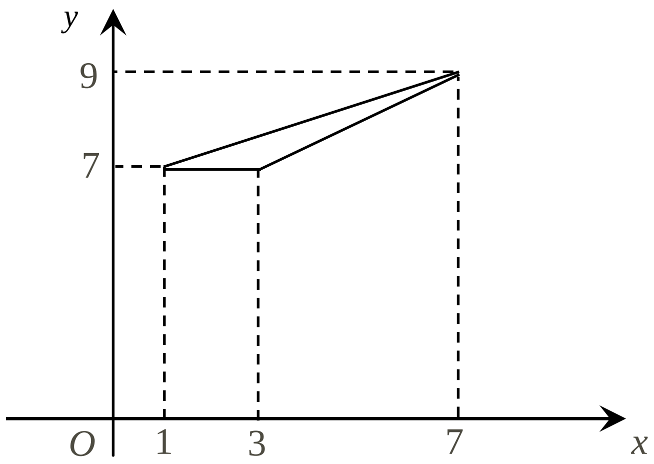
Решение. Находим на диаграмме самый высокий и самый низкий столбцы. Самых высоких столбцов – три им соответствует 800 000

[1] alexlarin.net/ege/2016/060616.pdf
[2] https://ege.sdamgia.ru/test?theme=8

посетителей. Самый низкий столбец – один, ему соответствует 400 000 посетителей. Находим 800 000 / 400 000 = 2.

Ответ**:** 2.

3. Найдите площадь треугольника, изображенного на рисунке.



Решение. Площадь треугольника найдём по формуле $S = \frac{1}{2}ah$. Основание a параллельно оси Ox и равно 3 – 1 = 2. Тогда высота треугольника равна 9 – 7 = 2, а площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Ответ**:** 2.

4. В соревнованиях по толканию ядра участвуют 8 спортсменов из Великобритании, 6 спортсменов из Франции, 5 спортсменов из Германии и 5 – из Италии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий последним, окажется из Франции.

Решение. Всего 24 спортсмена, 6 из них – из Франции. Тогда всевозможных исходов 24, а благоприятных исходов 6. Искомая вероятность равна $P = \frac{6}{24} = 0{,}25$.

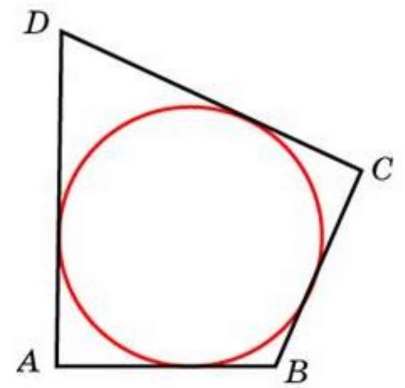
Ответ**:** 0,25.

5. Найдите корень уравнения: $2^{4x-14} = \frac{1}{64}$.

Решение. $2^{4x-14} = \frac{1}{64} \Rightarrow 2^{4x-14} = 2^{-6} \Rightarrow 4x - 14 = -6 \Rightarrow x = 2$.

Ответ: 2.

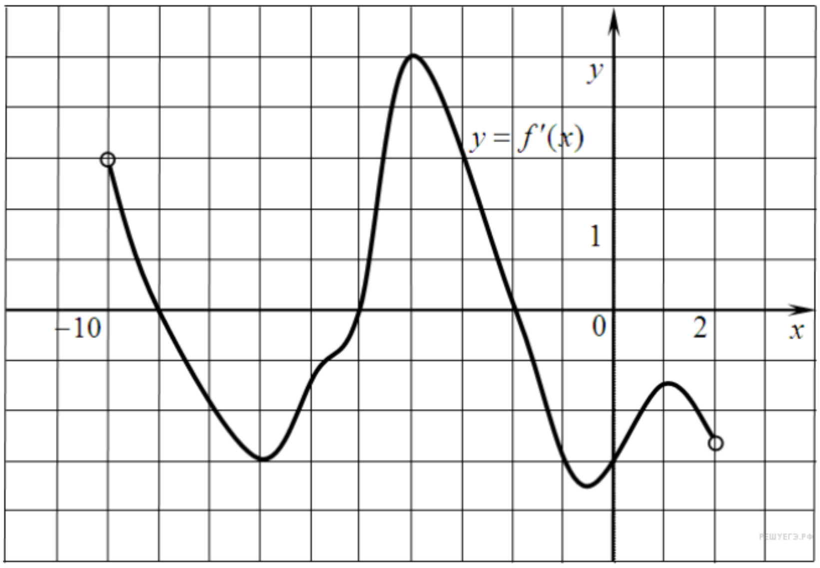
6. В четырехугольник $ABCD$, периметр которого равен 48, вписана окружность[3], $AB = 15$. Найдите CD.



Решение. Если четырехугольник описан около окружности, то суммы длин его противоположных сторон равны: $AD + BC = AB + CD$. Тогда $AB + CD = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$. Откуда $CD = 24 - AB = 24 - 15 = 9$.

Ответ: 9.

7. На рисунке[4] изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 2)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -2x - 11$ или совпадает с ней.



Решение. Согласно геометрическому смыслу производной угловой коэффициент k касательной к графику функции в точке x_0 равен $f'(x_0)$.

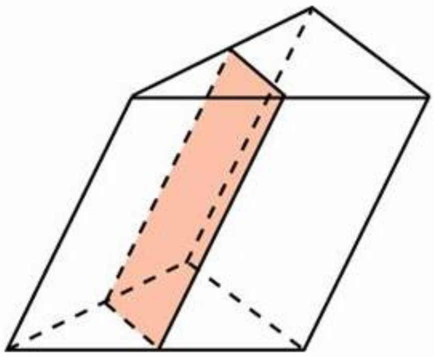
---

[3] https://ege.sdamgia.ru/test?theme=113
[4] https://ege.sdamgia.ru/test?theme=70

С другой стороны, две прямые параллельны, если равны их угловые коэффициенты. Таким образом, должно выполняться равенство $f'(x_0) = -2$. Остается найти по рисунку количество точек пересечения прямой $y = -2$ с графиком $y = f'(x)$. Таких точек 5.

Ответ: 5.

8. Площадь боковой поверхности треугольной призмы[5] равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Решение. Очевидно, что площади двух из трёх боковых граней (левой задней и передней) отсеченной призмы в 2 раза меньше площадей соответствующих боковых граней исходной призмы. По свойству средней линии треугольника, ребра отсеченной призмы, параллельные ребрам исходной, в два раза меньше них. Следовательно, площадь третьей боковой грани (правой задней) отсеченной призмы также в 2 раза меньше площади соответствующей грани исходной призмы. Таким образом, площадь боковой поверхности отсеченной призмы в 2 раза меньше площади боковой поверхности исходной призмы и равна 24 : 2 = 12.

Ответ: 12.

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\log_8 20}{\log_8 5} + \log_5 0{,}05$.

Решение. $\dfrac{\log_8 20}{\log_8 5} + \log_5 0{,}05 = \dfrac{\log_{2^3} 20}{\log_{2^3} 5} + \log_5 \dfrac{1}{20} = \dfrac{\frac{1}{3}\log_2 20}{\frac{1}{3}\log_2 5} + \log_5 20^{-1} =$

$$= \frac{\log_2 20}{\log_2 5} - \log_5 20 = \log_5 20 - \log_5 20 = 0.$$

Ответ: 0.

[5] https://ege.sdamgia.ru/test?theme=178

10. Груз массой 0,8 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$, где t – время с момента начала колебаний, T = 16 с – период колебаний, $v_0 = 0{,}5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса груза в килограммах, v – скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 10 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение. Учитывая данные задачи, находим:

$$E = \frac{mv^2}{2} = 0{,}4v^2 = 0{,}4\left(v_0 \sin\frac{2\pi t}{T}\right)^2 = 0{,}4\left(0{,}5\sin\frac{2\pi\cdot 10}{16}\right)^2 =$$

$$= 0{,}1\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)^2 = 0{,}1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0{,}1\cdot 0{,}5 = 0{,}05.$$

***Ответ*: 0,05.

11. Шесть одинаковых рубашек дешевле куртки на 2%. На сколько процентов девять таких же рубашек дороже куртки?

Решение. Стоимость одной куртки примем за 1, а стоимость одной рубашки – за a. По условию шесть рубашек дешевле куртки на 2%, следовательно $6a = \left(1 - \frac{2}{100}\right)\cdot 1 = 0{,}98$. Тогда $9a = \frac{9}{6}\cdot 0{,}98 = 1{,}47 = \left(1 + \frac{47}{100}\right)\cdot 1$, т.е. 9 рубашек дороже куртки на 47%.

***Ответ*:** 47.

12. Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x+8)^2$.

Решение. Находим производную:

$$y' = \left(2x - \ln(x+8)^2\right)' = 2 - \frac{1}{(x+8)^2}\cdot 2(x+8) = 2 - \frac{2}{x+8} = \frac{2x+14}{x+8}.$$

Приравнивая производную к нулю, находим стационарную точку $x = -7$. При переходе через эту точку, производная меняет знак с минуса на плюс, значит x = –7 – точка минимума.

***Ответ*:** –7.

13. а) Решите уравнение $2\log_2^2(2\sin x) - 7\log_2(2\sin x) + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение. Выписываем ОДЗ: $2\sin x > 0 \Rightarrow \sin x > 0$.

Делаем замену переменной $t=\log_2(2\sin x)$ и приходим к квадратному уравнению $2t^2-7t+3=0 \Rightarrow t_1=\frac{1}{2},\ t_2=3$. Выполняем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} t=\frac{1}{2}, \\ t=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(2\sin x)=\frac{1}{2}, \\ \log_2(2\sin x)=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x=2^{\frac{1}{2}}, \\ 2\sin x=2^3 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin x=4 \end{array}\right. \Rightarrow \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Заметим, что найденные корни принадлежат ОДЗ, т.к. $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$.

б) Отбираем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$, используя единичный круг, получим $\frac{3\pi}{4}$.

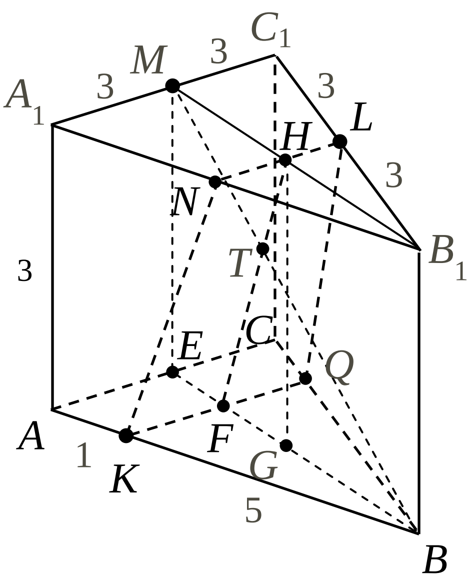
***Ответ*:** а) $x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}$.

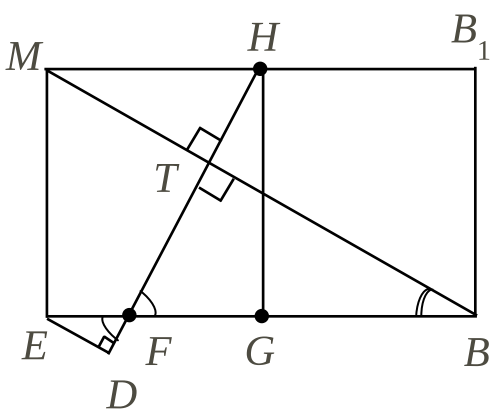
14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно 3. На ребре AB отмечена точка K так, что $AK=1$. Точки M и L – середины рёбер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно. Плоскость γ параллельна прямой AC и содержит точки K и L.

а) Докажите, что прямая BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости γ.

Решение





а) Проведем через точку K прямую, параллельную AC, получим точку Q. Проведем через точку L прямую, параллельную A_1C_1, получим точку N. Четырехугольник $KQLN$ – сечение треугольной призмы плоскостью γ.

Рассмотрим плоскость BB_1M. Точки пересечения этой плоскости с прямыми AC, KQ и NL обозначим соответственно через E, F и H. Четырёхугольник BB_1ME – прямоугольник, причём $BB_1 = 3$, $B_1M = \sqrt{A_1B_1^2 - A_1M^2} = \sqrt{36-9} = 3\sqrt{3}$.

Т.к. основания призмы – равносторонние треугольники и $NL \parallel A_1C_1$, а $KQ \parallel AC$, то NL отсекает от B_1M одну вторую часть (также как и от B_1C_1), а KQ отсекает от BM одну шестую часть (также как и от AB). Тогда $EF = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $MH = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Пусть HG – высота трапеции FHB_1B, тогда $FG = MH - EF = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Таким образом, $\operatorname{tg}\angle HFG = \dfrac{HG}{FG} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ и, следовательно $\angle HFG = \dfrac{\pi}{3}$. С другой стороны, $\operatorname{tg}\angle MBE = \dfrac{ME}{BE} = \dfrac{3}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ и, следовательно $\angle MBE = \dfrac{\pi}{6}$. Тогда из треугольника TBF находим $\angle BTF = \pi - \angle HFG - \angle MBE = \pi - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$. Мы доказали, что прямая BM перпендикулярна прямой FG, лежащей в плоскости γ.

Прямая $KQ \parallel AC$, а AC перпендикулярна плоскости BB_1M, содержащей прямую BM. Получаем, что BM перпендикулярна прямой KQ, лежащей в плоскости γ.

Таким образом, BM перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости γ, значит, BM перпендикулярна плоскости γ.

б) Поскольку прямая AC параллельна плоскости γ, расстояние от точки C до плоскости γ равно расстоянию от точки E до этой плоскости. Опустим перпендикуляр ED из точки E на прямую FH. Так как $ED \parallel BM$, а $BM \perp \gamma$, то расстояние от точки E до плоскости γ равно длине отрезка ED. Находим ED из треугольника EDF: $BM = EF \cdot \sin\angle EFD = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{4}$.

Ответ: а) что и требовалось доказать; б) $\dfrac{3}{4}$.

15. Решите неравенство $\dfrac{9^x - 3^{x+2} + 20}{3^x - 3} + \dfrac{9^x - 3^{x+2} + 1}{3^x - 9} \le 2 \cdot 3^x - 6$.

Решение. Преобразуем неравенство.

$$\frac{9^x - 9 \cdot 3^x + 20}{3^x - 3} + \frac{9^x - 9 \cdot 3^x + 1}{3^x - 9} \le 2 \cdot 3^x - 6.$$

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид

$$\frac{t^2 - 9t + 20}{t - 3} + \frac{t^2 - 9t + 1}{t - 9} \le 2t - 6.$$

Сгруппируем слагаемые в числителях дробей таким образом, чтобы получились выражения, содержащие знаменатель в качестве множителя:

$$\frac{t(t-3) - 6t + 20}{t - 3} + \frac{t(t-9) + 1}{t - 9} \le 2t - 6.$$

Делим числитель на знаменатель.

$$t + \frac{-6t + 20}{t - 3} + t + \frac{1}{t - 9} \le 2t - 6; \quad \frac{-6t + 20}{t - 3} + \frac{1}{t - 9} \le -6.$$

Ещё раз группируем слагаемые в числителе первой дроби таким образом, чтобы получилось выражение, содержащее знаменатель в качестве множителя, а затем делим числитель на знаменатель.

$$\frac{-6(t-3) + 2}{t - 3} + \frac{1}{t - 9} \le -6; \quad -6 + \frac{2}{t - 3} + \frac{1}{t - 9} \le -6;$$

$$\frac{2}{t - 3} + \frac{1}{t - 9} \le 0; \quad \frac{t - 7}{(t-3)(t-9)} \le 0.$$

Наконец, методом интервалов находим $t < 3;\ 7 \le t < 9$.

При $t < 3$ получим $3^x < 3$, следовательно $x < 1$ (учитываем, что $y = 3^x$ – монотонно возрастающая функция).

При $7 \le t < 9$ получим $7 \le 3^x < 9$, откуда $\log_3 7 \le x < 2$.

Записываем ответ.

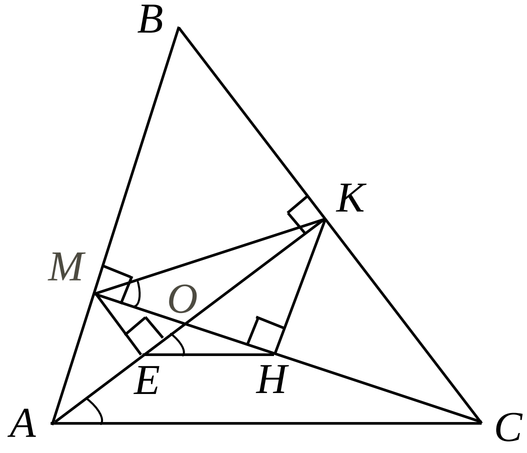
Ответ: $(-\infty; 1) \cup [\log_3 7; 2)$.

16. В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты *AK* и *CM*. На них из точек *M* и *K* опущены перпендикуляры *ME* и *KH* соответственно.

а) Докажите, что прямые *EH* и *AC* параллельны.

б) Найдите отношение *EH* к *AC*, если $\angle ABC = 60^\circ$.

Решение



а) Треугольник AMC – прямоугольный, следовательно, гипотенуза AC является диаметром описанной около него окружности. Аналогично, треугольник AKC – прямоугольный, и AC является диаметром окружности, описанной около треугольника AKC. Но тогда речь идет об окружности описанной около четырёхугольника $AMKC$.

Аналогично, рассмотрев прямоугольные треугольники KEM и KHM доказывается, что около четырёхугольника $MEHK$ можно описать окружность.

Поскольку вписанные углы, опирающиеся на общую дугу равны, имеют место равенства: $\angle KAC = \angle KMC = \angle KMH = \angle KEH$. Получили равенство соответственных углов, т.е. прямые EH и AC параллельны.

б) Пусть O – точка пересечения AK и CM. Тогда

$$\angle AOM = 90^\circ - \angle MAO = 90^\circ - \angle BAK = \angle ABC = 60^\circ.$$

Треугольники EOH и AOC подобны по двум углам ($\angle AOC$ – общий, $\angle OEH = \angle OAC$). Далее заметим, что

$$EO = MO \cdot \cos\angle AOM = AO \cdot \cos^2 \angle AOM = AO \cdot \cos^2 60^\circ = \frac{1}{4} AO,$$

т.е. коэффициент подобия треугольников EOH и AOC равен $\frac{1}{4}$. Но тогда $\frac{EH}{AC} = \frac{1}{4}$.

Ответ**:** а) что и требовалось доказать; б) 1 : 4.

17. 15-го января планируется взять кредит в банке на сумму 1 млн. рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число r процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн. рублей)	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0

Найдите наименьшее значение r, при котором общая сумма выплат будет составлять более 1,25 млн. рублей.

Решение. Введем обозначение: $q = 1 + \frac{r}{100}$ – множитель роста долга. Выплата по кредиту происходит после увеличения долга на r процентов. Тогда величина выплаты, осуществленной после первого увеличения долга, составит $1 \cdot q - 0{,}9$ млн. рублей; после второго – $0{,}9q - 0{,}8$; после третьего – $0{,}8q - 0{,}7$; после четвертого – $0{,}7q - 0{,}6$; после пятого – $0{,}6q - 0{,}5$. Последняя выплата составит $0{,}5q$ и долг обнулится. Таким образом, общая сумма выплат составит:

$$(q-0{,}9)+(0{,}9q-0{,}8)+(0{,}8q-0{,}7)+(0{,}7q-0{,}6)+(0{,}6q-0{,}5)+0{,}5q=4{,}5q-3{,}5.$$

Согласно условию задачи, должно выполняться неравенство

$$4{,}5q-3{,}5>1{,}25 \Rightarrow q>\frac{4{,}75}{4{,}5}=\frac{19}{18}=1\frac{1}{18}.$$

Учитывая, что $q=1+\dfrac{r}{100}$, перепишем последнее неравенство

$$1+\frac{r}{100}>1+\frac{1}{18} \Rightarrow r>\frac{50}{9}=5\frac{5}{9}.$$

Получаем наименьшее целое решение этого неравенства: $r = 6$.

Ответ: 6.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4-9x^2+a^2}=x^2+3x-a$$

имеет ровно три различных корня.

Решение. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^4-9x^2+a^2=(x^2+3x-a)^2, \\ x^2+3x-a\ge 0. \end{cases}$$

Найдём корни уравнения $x^4-9x^2+a^2=(x^2+3x-a)^2$:

$$x^4-9x^2+a^2=x^4+9x^2+a^2+6x^3-2ax^2-6ax;$$

$$3x^3+(9-a)x^2-3ax=0; \quad x(x+3)(3x-a)=0;$$

Получили корни $x=0$, $x=-3$, $x=\dfrac{a}{3}$.

Тогда исходное уравнение имеет три различных корня, если $a\ne -9$, $a\ne 0$ и все три корня $x=0$, $x=-3$ и $x=\dfrac{a}{3}$ удовлетворяют неравенству $x^2+3x-a\ge 0$. Таким образом, необходимо решить систему неравенств

$$\begin{cases} a\ne -9, \\ a\ne 0, \\ -a\ge 0, \\ \dfrac{a^2}{9}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\ne -9, \\ a<0 \end{cases} \Rightarrow a\in(-\infty;-9)\cup(-9;0).$$

Ответ: $a\in(-\infty;-9)\cup(-9;0)$.

19[6]**.** На доске написаны числа 2 и 3. За один ход из них можно получить числа $a + b$ и $2a - 1$ или числа $a + b$ и $2b - 1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить числа 5 и 3 или 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске окажется числом 19.

б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в) Сделали 1007 ходов, причем на доске никогда не было равных чисел. Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

Решение[7]**.** а) Например, (2; 3), (5; 5), (10; 9), (19; 19) или (2; 3), (5; 5), (10; 9), (19; 17).

б) Заметим, что минимальное возможное число после первого хода – 3, при дальнейших ходах минимальное возможное увеличение числа за один ход равно 2. Таким образом, минимальное возможное число после 100 ходов $3 + 2 \cdot 99 = 201$, что больше 200.

в) Исходные числа 2 и 3 отличаются на 1 – имеют вид a и $a + 1$. Из них можно получить равные числа $2a + 1$ и $2a + 1$, что не разрешается, или числа, отличающиеся на 2: $2a - 1$ и $2a + 1$. Кроме того, если получать равные числа запрещено, то после нечетного хода всегда будет получаться пара нечетных чисел, а после четного хода – четное и нечетное. Ход 1007 – нечетный, значит, после него получилось два нечетных числа. Минимальная возможная разность двух различных нечетных чисел рана 2. Покажем, что такую разницу получить возможно:

$$(2; 3), (3; 5), (8; 9), (15; 17), (32; 33), ...$$

или

$$(a; a + 1), (2a - 1; 2a + 1), (4a; 4a + 1), (8a - 1; 8a + 1), \ldots$$

Тем самым, наименьшая разность, которую можно получить за 1007 ходов, равна 2.

***Ответ*:** а) (2; 3), (5; 5), (10; 9), (19; 19); б) нет; в) 2.

[6] https://ege.sdamgia.ru/test?pid=514452
[7] https://ege.sdamgia.ru/test?pid=514452

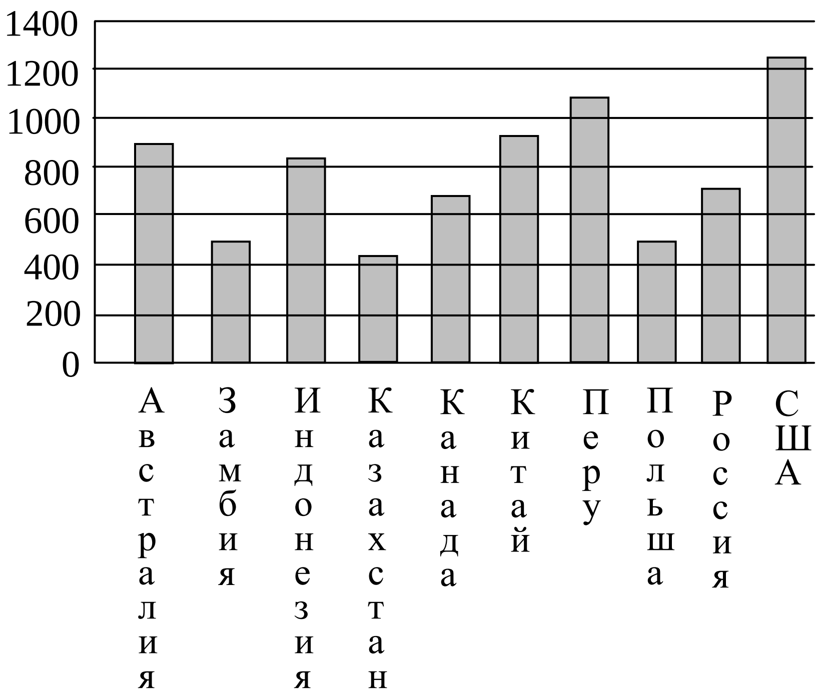
ВАРИАНТ ЕГЭ – 2013

В1 Одна таблетка лекарства весит 20 мг и содержит 5 % активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 0,4 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте трёх месяцев и весом 5 кг в течение суток?

Решение. Одна таблетка содержит $20 \cdot 0{,}05 = 1$ мг активного вещества. Ребёнку весом 5 кг необходимо $5 \cdot 0{,}4 = 2$ мг активного вещества в сутки, то есть 2 таблетки.

Ответ**:** 2.

В2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место – Казахстан. Какое место занимала Россия?



Решение. Сравнивая высоту представленных на диаграмме столбцов, видим, что Россия (предпоследний столбец) находилась на шестом месте.

Ответ**:** 6.

В3 Найдите площадь трапеции *ABCD*, вершины которой имеют координаты *A*(2;1), *B*(4;1), *C*(5;5), *D*(9;5).

Решение. Четырёхугольник *ABCD* – трапеция, основания *AB* и *CD* которой параллельны оси абсцисс. Тогда площадь *ABCD* вычисляем по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a, b – основания, h – высота трапеции. Длины оснований – это разности абсцисс координат вершин, длина высоты – разность ординат:

$$a = 4 - 2 = 2,\ b = 9 - 5 = 4,\ h = 5 - 1 = 4.$$

Отсюда $S = \dfrac{2+4}{2} \cdot 4 = 12$.

***Ответ*:** 12.

B4 Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного 0,01 средней цены P, показателей функциональности F, качества Q и дизайна D. Каждый из показателей оценивается целым числом от 1 до 4. Итоговый рейтинг вычисляется по формуле $R = 4(2F + 2Q + D) - 0{,}01P$. В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей пылесосов. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей пылесосов.

Модель пылесоса	Средняя цена	Функцио-нальность	Качество	Дизайн
А	4700	2	0	1
Б	5500	4	0	4
В	4600	2	4	1
Г	4900	3	0	1

Решение. Подставляя данные таблицы в формулу, получаем

$$R_{\text{А}} = 4(2\cdot 2 + 2\cdot 0 + 1) - 0{,}01\cdot 4700 = 20 - 47 = -27,$$
$$R_{\text{Б}} = 4(2\cdot 4 + 2\cdot 0 + 4) - 0{,}01\cdot 5500 = 48 - 55 = -7,$$
$$R_{\text{В}} = 4(2\cdot 2 + 2\cdot 4 + 1) - 0{,}01\cdot 4600 = 52 - 46 = 6,$$
$$R_{\text{Г}} = 4(2\cdot 3 + 2\cdot 0 + 1) - 0{,}01\cdot 4900 = 28 - 49 = -21.$$

***Ответ*:** 6.

B5 Найдите корень уравнения $2^{9+x} = 8$.

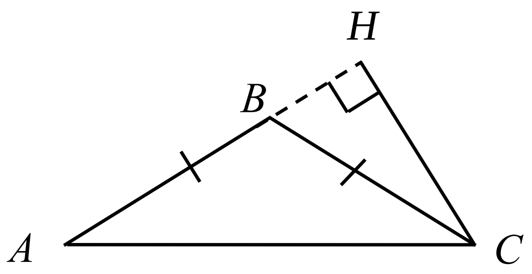
Решение. Перепишем уравнение в виде

$$2^{9+x} = 2^3;\quad 9 + x = 3;\quad x = -6.$$

***Ответ*:** –6.

B6 В треугольнике ABC $AB = BC,\ AC = 10$, высота CH равна 4. Найдите синус угла ACB.

Решение. Из прямоугольного треугольника ACH получаем $\sin\angle A = \dfrac{CH}{AC} = \dfrac{4}{10} = 0{,}4$.



Из условия задачи следует, что $\angle ACB = \angle BAC$. Таким образом, $\sin \angle ACB = 0{,}4$.

***Ответ*:** 0,4.

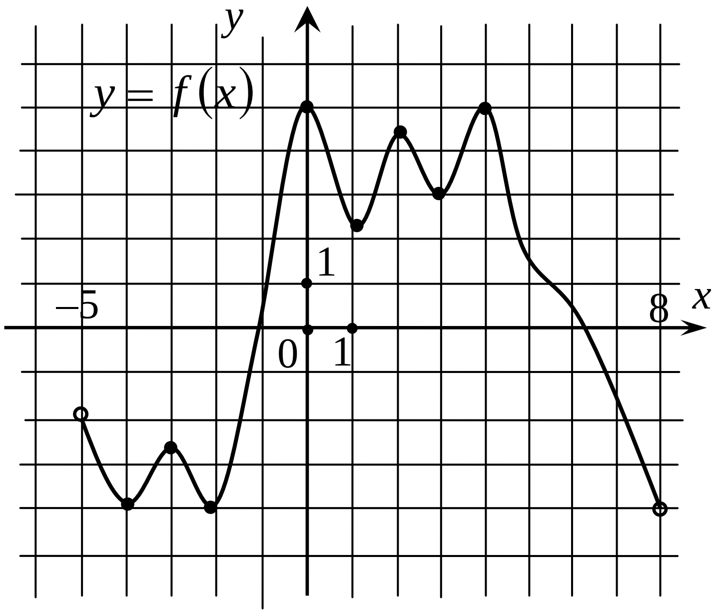
B7 Найдите значение выражения $\log_5 312{,}5 - \log_5 2{,}5$.

Решение. По свойству логарифма

$$\log_5 312{,}5 - \log_5 2{,}5 = \log_5 \frac{312{,}5}{2{,}5} = \log_5 125 = 3.$$

***Ответ*:** 3.

B8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5;8)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.

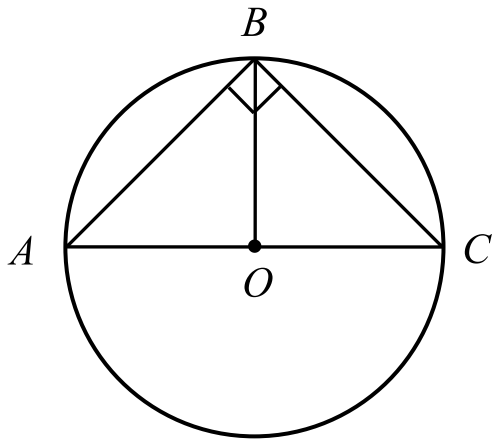


Решение. Производная функции равна нулю в точках экстремума (максимума и минимума) функции. Таких точек на графике 8.

***Ответ*:** 8.

B9 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $52\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

Решение. Рассмотрим осевое сечение конуса.



Мы имеем равнобедренный треугольник ABC, вписанный в окружность. Основание треугольника AC есть диаметр окружности. Искомая величина есть гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника ABO, то есть образующая конуса равна $AB = AO\cdot\sqrt{2} = 52\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 104$.

Ответ**:** 104.

B10 Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвуют 26 спортсменов, среди которых 17 спортсменов из России, в том числе Денис Полянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Денис Полянкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

Решение. В соответствии с классическим определением вероятность есть отношение числа благоприятных исходов испытания к общему числу исходов. В условиях задачи число благоприятных исходов равно количеству членов команды России (кроме Дениса), то есть 16, а общее число исходов равно количеству всех возможных противников Дениса, то есть 25. Итак, искомая вероятность $P = \dfrac{16}{25} = 0{,}64$.

Ответ**:** 0,64.

B11 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, E, F, B_1 правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 6.

Решение. Многоугольник, объём которого надо найти, – это пирамида $ABCDEFB_1$ с основанием и высотой, совпадающими с основанием и высотой данной призмы. Её объём

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}V_{\text{призмы}} = \frac{1}{3}S_{\text{осн.}}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot 6 = 12.$$

Ответ**:** 12.

B12 Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 598 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v = c \cdot \dfrac{f - f_0}{f + f_0}$, где $c = 1500$ м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов (в МГц), f – частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 5 м/с. Ответ выразите в МГц.

Решение. Учитывая, что скорость погружения батискафа не должна превышать 5 м/с, запишем неравенство $v \le 5$. Из этого неравенства следует

$$1500 \cdot \frac{f-598}{f+598} \le 5;\ \ 300 \cdot \frac{f-598}{f+598} \le 1;\ \ 300(f-598) \le f+598;$$

$$300f - 300 \cdot 598 \le f + 598;\ \ 299f \le 301 \cdot 598;\ \ f \le 301 \cdot 2 = 602.$$

Наибольшая возможная частота равна 602МГц.

***Ответ*:** 602.

B13 Катер в 10:00 вышел из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 4 часа, катер отправился назад и вернулся в пункт А в 18:00 того же дня. Определите (в км/ч) собственную скорость катера, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

Решение. Пусть x – искомая скорость катера. Тогда по течению он двигается со скоростью $x+2$, а против течения – со скоростью $x-2$. Время, затраченное на путь в один конец, равно $\dfrac{15}{x+2}$, а в другой – $\dfrac{15}{x-2}$. Учитывая время стоянки, получаем уравнение $\dfrac{15}{x+2} + \dfrac{15}{x-2} = 4$. Отсюда $2x^2 - 15x - 8 = 0$, $x_{1,2} = \dfrac{15 \pm 17}{4}$. Один из корней отрицательный, следовательно, он не подходит по смыслу задачи. Итак, $x = \dfrac{15+17}{4} = 8$.

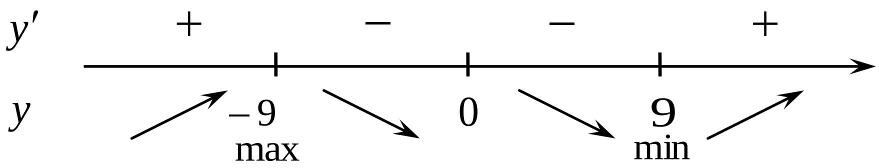
***Ответ*:** 8.

B14 Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 81}{x}$ на отрезке $[4;20]$.

Решение. Найдём производную данной функции и исследуем поведение функции на данном отрезке.

Производная $y' = \left(x + 81x^{-1}\right)' = 1 - 81x^{-2} = \dfrac{x^2 - 81}{x^2}$. Критические точки (нули числителя и знаменателя полученной дроби) таковы:

– 9, 0, 9. Изобразим на числовой прямой эти точки, знаки производной и поведение функции.



На отрезке $[4;20]$ функция имеет только точку минимума $x = 9$, следовательно, наименьшее значение функции на этом отрезке равно $y_{\text{наим.}} = y(9) = \dfrac{9^2 + 81}{9} = 18$.

***Ответ*:** 18.

С1 а) Решите уравнение $21^{-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};0\right]$.

Решение. а) Перепишем данное уравнение в виде

$$3^{-\sin x} \cdot 7^{-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x}\ ;\ 7^{-\sin x} = 7^{\cos x};\ -\sin x = \cos x;\ \operatorname{tg} x = -1\ .$$

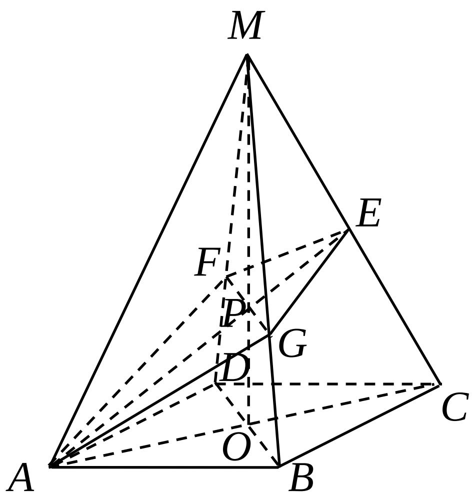
Тогда $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

б) Для отбора корней решим неравенство $-\dfrac{3\pi}{2} \le -\dfrac{\pi}{4} + \pi n \le 0$ относительно n: $-\dfrac{3}{2} \le -\dfrac{1}{4} + n \le 0$; $-\dfrac{5}{4} \le n \le \dfrac{1}{4}$. Целые значения в полученном промежутке это –1 и 0. Следовательно, $x_1 = -\dfrac{5\pi}{4}$; $x_2 = -\dfrac{\pi}{4}$.

***Ответ*:** а) $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; б) $-\dfrac{5\pi}{4}; -\dfrac{\pi}{4}$.

С2 В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 5. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку A и середину ребра MC параллельно прямой BD.

Решение



Пусть точка E – середина ребра MC. Отрезок AE пересекает плоскость MBD в точке P. В треугольнике MAC точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O – центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен BD и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MD, G – ребру MB), откуда

$$MF:FD=MG:GB=MP:PO=2:1;$$

$$FG=\frac{2}{3}BD=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=4\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $AFEG$ – искомое сечение. Отрезок AE – медиана треугольника MAC, значит,

$$AE=\frac{\sqrt{2AC^2+2MA^2-MC^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MA^2}}{2}=\frac{13}{2}.$$

Поскольку прямая AC перпендикулярна плоскости MBD, диагонали AE и FG четырёхугольника $AFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{AFEG}=\dfrac{AE\cdot FG}{2}=13\sqrt{2}$.

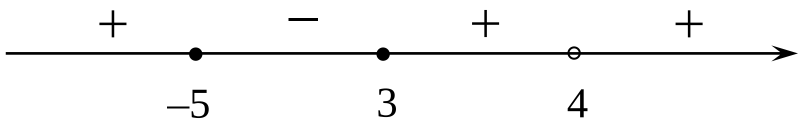
***Ответ*:** $13\sqrt{2}$.

С3 Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6}\ge -6, \\ x^3+9x^2+\dfrac{40x^2+2x-10}{x-5}\le 2. \end{cases}$

Решение. 1. Решим первое неравенство системы, используя метод рационализации. Перепишем неравенство в виде $\log_{4-x}\dfrac{x+6}{(x-4)^6}\ge \log_{4-x}\dfrac{1}{(4-x)^6}$. Последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 4-x>0, \\ 4-x\neq 1, \\ x+6>0, \\ (4-x-1)\left(\dfrac{x+6}{(x-4)^6}-\dfrac{1}{(4-x)^6}\right)\geq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x<4, \\ x\neq 3, \\ x>-6, \\ \dfrac{(x-3)(x+5)}{(x-4)^6}\leq 0. \end{cases}$$

Решая последнее неравенство системы методом интервалов



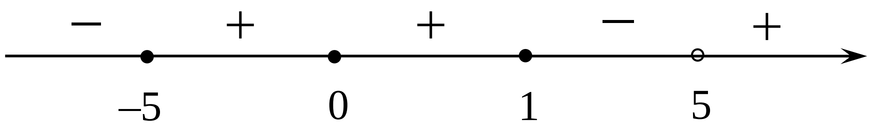
и учитывая остальные условия, получаем, что $-5\leq x<3$.

2. Решим второе неравенство системы:

$$x^3+9x^2+\frac{40x^2+2x-10}{x-5}\leq 2;\;\; x^3+9x^2+\frac{40x^2}{x-5}\leq 0;$$

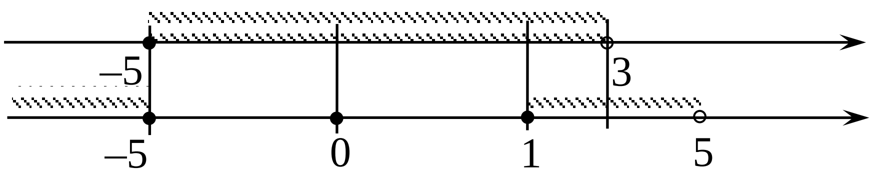
$$\frac{x^4+4x^3-5x^2}{x-5}\leq 0;\;\; \frac{x^2(x-1)(x+5)}{x-5}\leq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов,



получим: $x\leq -5;\ x=0;\ 1\leq x<5.$

3. Решение исходной системы удобно завершить, используя иллюстрацию:

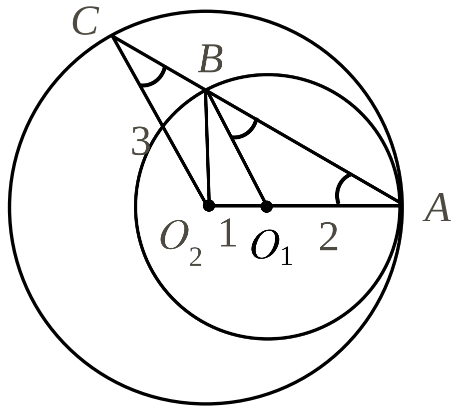


Ответ: $-5;\ 0;\ [1;3).$

С4 Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую – в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1=30°$.

Решение. Возможны два случая: 1) окружности касаются внутренним образом; 2) окружности касаются внешним образом.

1-й случай. 1. Выполним рисунок.



2. Центры окружностей O_1 и O_2 и точка их касания A лежат на одной прямой. Треугольники ABO_1 и ACO_2 – равнобедренные, следовательно,

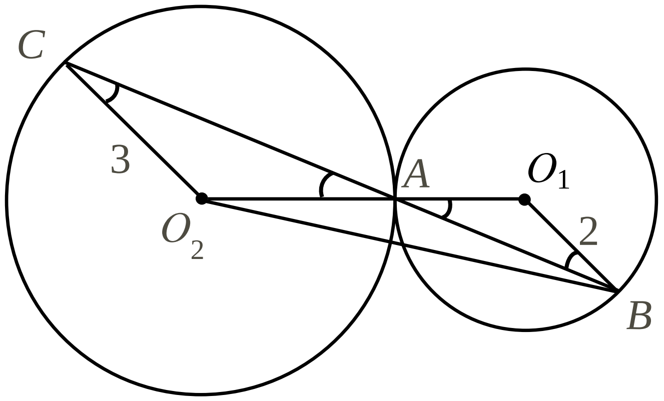
$$\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30^\circ .$$

Тогда $AB = 2AO_1 \cos 30^\circ = 2\sqrt{3}$ и $AC = 2AO_2 \cos 30^\circ = 3\sqrt{3}$. Откуда $BC = AC - AB = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Таким образом, площадь треугольника BCO_2 равна

$$S_{BCO_2} = \frac{1}{2} BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} .$$

2-й случай. 1. Выполним рисунок.



2. В данном случае точка касания окружностей, точка A, лежит между точками B и C. Тогда

$$BC = AC + AB = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3} ,$$

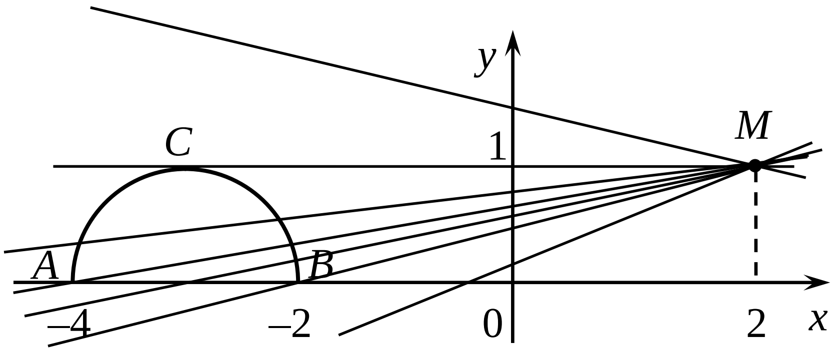
и площадь треугольника BCO_2 равна

$$S_{BCO_2} = \frac{1}{2} BC \cdot CO_2 \cdot \sin \angle BCO_2 = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} .$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

С5 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{-8 - 6x - x^2} = 2a + 1$ имеет единственный корень.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sqrt{-8-6x-x^2}=-ax+2a+1$. Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{-8-6x-x^2}$ и $g(x)=-ax+2a+1$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{1^2-(x+3)^2}$ является полуокружность радиуса 1 с центром в точке $(-3;0)$, лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(2;1)$.



Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.

Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень.

При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $A(-4;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=1/6$. При $0<-a\le 1/6$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет две общие точки с полуокружностью.

Прямая MB, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, проходит через точки $M(2;1)$ и $B(-2;0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=1/4$. При $1/6<-a\le 1/4$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+2a+1$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $1/6<-a\le 1/4$ исходное уравнение имеет единственный корень.

При $-a>1/4$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

***Ответ*:** $\left[-1/4;-1/6\right)$; 0.

С6 Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, встречается несколько раз, то на доске остаётся одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, при которых на доске будет записан набор 10, 12, 13, 22, 23, 24, 25, 34, 35, 36, 37, 46, 47, 49, 59.

Решение. а) Задуманные числа 1, 1, 1, 1, 1, 1 дают требуемый набор, написанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе – это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе – это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть 22–1=21. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

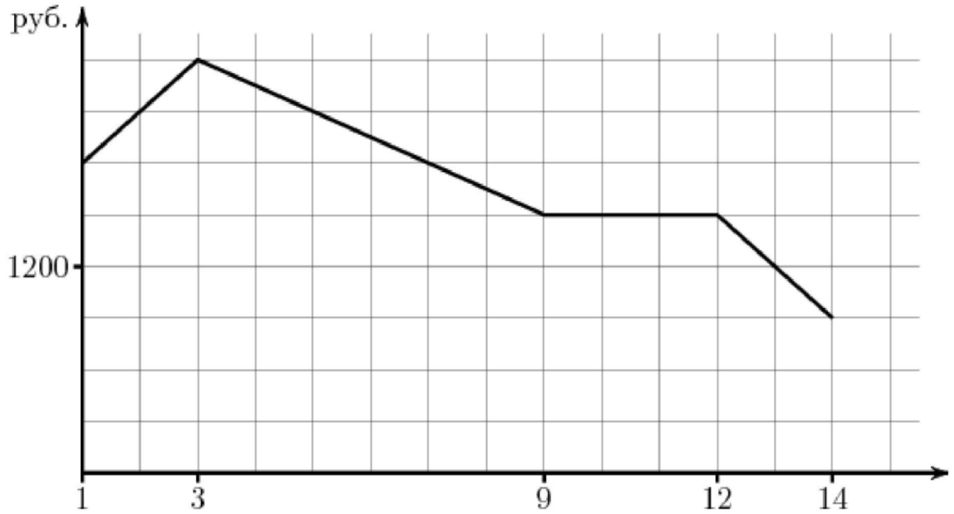
в) Число 10 – наименьшее число в наборе – является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе – это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{59}{10}$, то есть 5. Кроме того, числа 12 и 13 меньше, чем сумма двух чисел 10, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна 59–10–12–13=24. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 10, оставшиеся задуманные числа – это 12 и 12 или 24. Для задуманных чисел 10, 12, 12, 12, 13 и 10, 12, 13, 24 на доске будет записан набор, заданный в условии.

Ответ: а) 1,1,1,1,1,1; б) нет; в) 10,12,12,12,13 или 10,12,13,24.

Вариант 1

1. Железнодорожный билет для взрослого стоит 550 рублей. Стоимость билета для школьника составляет 50% от стоимости билета для взрослого. Группа состоит из 18 школьников и 4 взрослых. Сколько рублей стоят билеты на всю группу?

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели ноября. 2 ноября бизнесмен приобрёл 10 акций этой компании. Шесть из них он продал 6 ноября, а 13 ноября – остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?



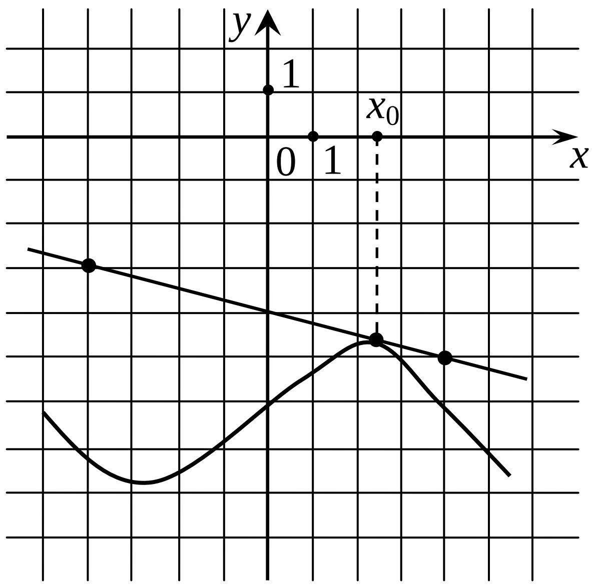
3. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 1, а один из углов равен $150°$.

4. Куб, все грани которого раскрашены, разрезали на 1000 равных кубиков. Какова вероятность того, что наугад выбранный кубик имеет ровно две окрашенные грани?

5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-15}=\frac{1}{64}$.

6. В треугольнике ABC угол BAC равен $110°$, AD – биссектриса угла A, угол C меньше угла ADC в три раза. Найдите градусную меру угла B.

7. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно $\sqrt{3}$, а площадь полной поверхности призмы равна $36\sqrt{3}$. Найдите сторону основания призмы.

9. Найдите значение выражения $\left(9x^2+y^2-(3x-y)^2\right):(5xy)$.

10. При вращении ведёрка с водой на верёвке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет неотрицательной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления $P=m\left(\dfrac{v^2}{L}-g\right)$, где m – масса воды, v – скорость движения ведёрка, L – длина верёвки, $g=10\,м/с^2$ – ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась из него, если длина верёвки равна 78,4 см? (Ответ выразите в $м/с$.)

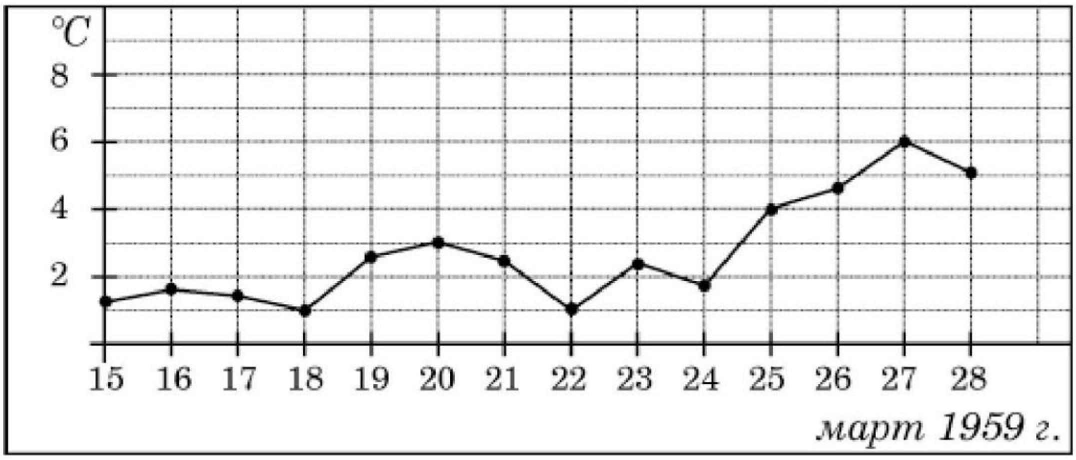
11. Заказ из 240 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

12. Найдите наибольшее значение функции $y=7\cos x+14x-9$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2};0\right]$.

Вариант 2

1. На день рождения полагается дарить букет из нечётного числа цветов. Пионы стоят 60 рублей за штуку. У Вани есть 480 рублей. Из какого наибольшего числа пионов он может купить букет Маше на день рождения?

2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Пскове каждый день с 15 по 28 марта 1959 года. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за указанный период.



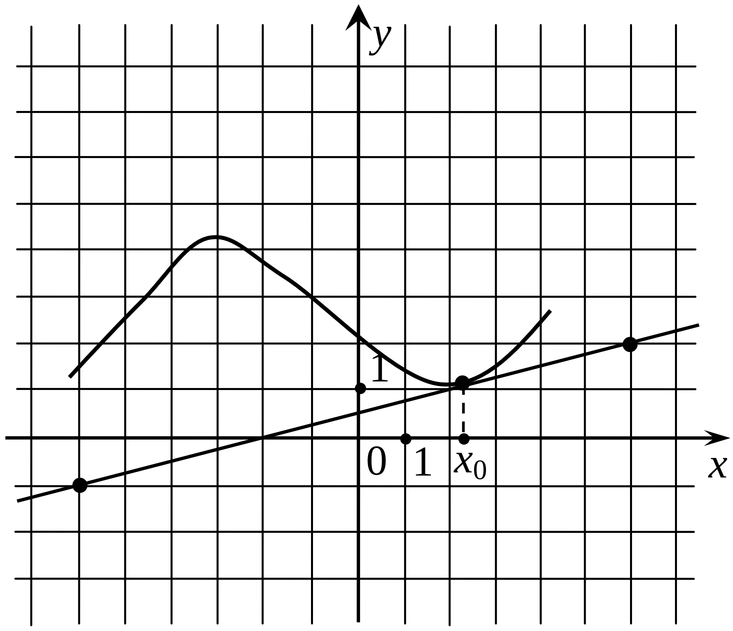
3. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (0;0), (2;3), (3;2).

4. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них 3 стандартные), а во втором – 15 (из них 6 стандартные). Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей окажется хотя бы одна стандартная?

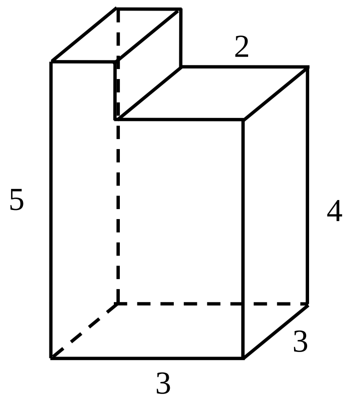
5. Найдите корень уравнения $\sqrt{21+4x}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

6. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 25, а высота, проведённая к основанию, равна 20. Найдите косинус угла A.

7. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы многогранника прямые).



9. Найдите значение выражения $\dfrac{a^{2,19}\cdot a^{5,26}}{a^{3,45}}$ при $a=3$.

10. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0=20\,м/с$ и тормозящий с постоянным ускорением $a=4\,м/с^2$, за t секунд после начала торможения проходит путь $S=v_0t-\dfrac{at^2}{2}$. Определите (в секундах) наименьшее время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал не менее 32 метров.

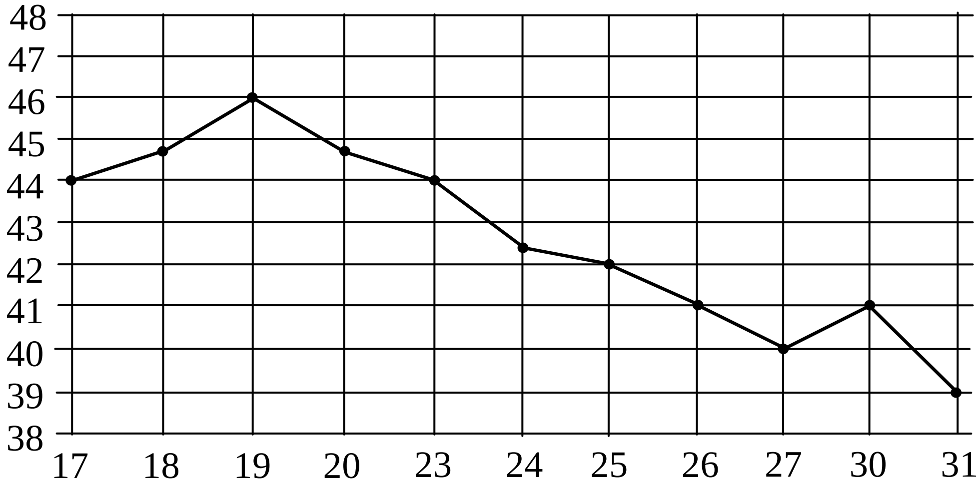
11. Улитка ползёт от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 10 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 150 метрам.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=12\operatorname{tg}x-12x+3\pi-5$ на отрезке $[-\pi/4;\pi/4]$.

Вариант 3

1. В пачке бумаги 500 листов формата А4. За неделю в офисе расходуется 800 листов. Какое наименьшее количество пачек бумаги нужно купить в офис на 9 недель?

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



3. Периметры двух подобных многоугольников относятся как 3:5. Площадь меньшего многоугольника равна 18. Найдите площадь большего многоугольника.

4. Игральный кубик подбрасывают дважды. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите с точностью до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x+9}=3$.

6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB=10$, $AC=4\sqrt{6}$. Найдите $\sin A$.

7. Прямая $y=8x-9$ является касательной к графику функции $y=x^3+x^2+8x-9$. Найдите абсциссу точки касания.

8. Объём конуса равен 144. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объём меньшего конуса.

9. Найдите значение выражения $4a-24b-3$, если $\dfrac{10a-3b}{3a+b+1}=3$.

10. Для одного из предприятий–монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (в тыс. рублей) задаётся формулой $q=150-15p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. рублей), при котором значение выручки предприятия за месяц $r=q\cdot p$ составит не менее 360 тыс. рублей.

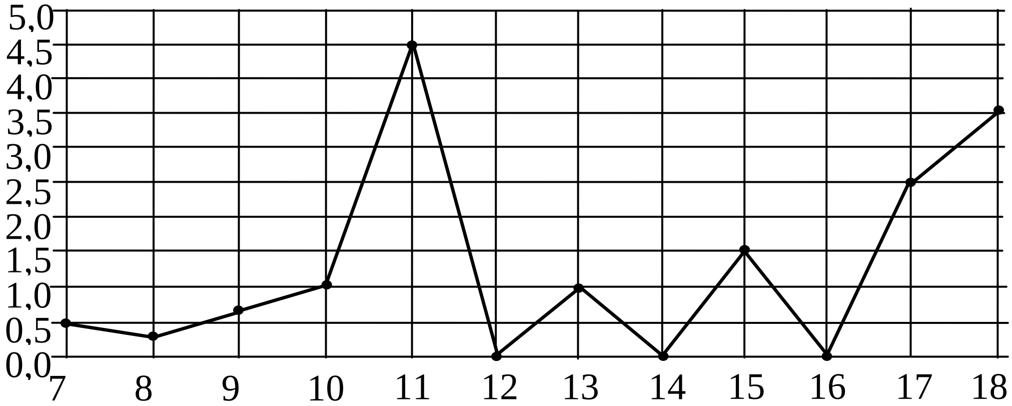
11. По морю параллельными курсами в одном направлении следуют два сухогруза: первый длиной 120 метров, второй – длиной 80 метров. Сначала второй сухогруз отстает от первого, и в некоторый момент времени расстояние от кормы первого сухогруза до носа второго составляет 400 метров. Через 12 минут после этого уже первый сухогруз отстает от второго так, что расстояние от кормы второго сухогруза до носа первого равно 600 метрам. На сколько километров в час скорость первого сухогруза меньше скорости второго?

12. Найдите наименьшее значение функции $y=3x-\ln(x+5)^3$ на отрезке $[-4{,}5;0]$.

Вариант 4

1. Для приготовления вишнёвого варенья на 1 кг вишни нужно 1,5 кг сахара. Сколько килограммовых упаковок сахара нужно купить, чтобы сварить варенье из 23 кг вишни?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа выпало наибольшее количество осадков.



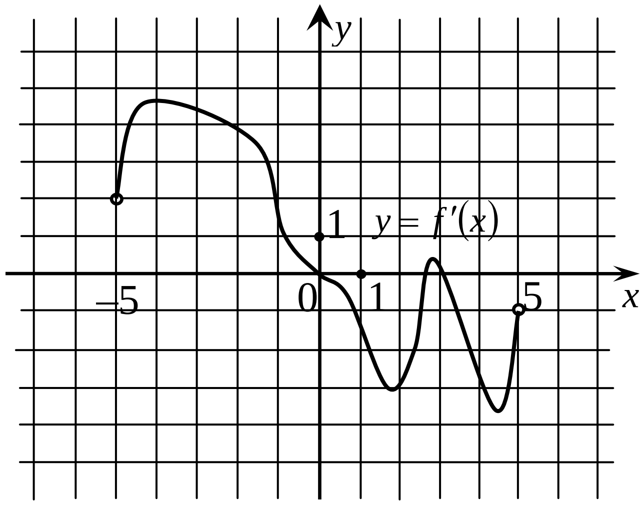
3. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;6), (10;6), (5;8).

4. Имеется пять отрезков длиной 1, 3, 4, 7 и 9 см. Определите вероятность того, что из трёх наугад выбранных отрезков (из данных пяти) можно построить треугольник.

5. Найдите корень уравнения $\frac{x-119}{x+7}=-5$.

6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB=25,\ BC=24$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A.

7. На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5;5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4;4]$.



8. Во сколько раз объём конуса, описанного около правильной четырёхугольной пирамиды, больше объёма конуса, вписанного в эту пирамиду?

9. Найдите значение $\mathrm{tg}(\alpha+7\pi/2)$, если $\mathrm{tg}\,\alpha=0{,}4$.

10. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур задается выражением $T(t) = T_0 + at + bt^2$, где $T_0 = 1160\ K$, $a = 34 K/мин$, $b = -0{,}2 K/мин^2$. Известно, что при температуре нагревателя свыше 2000 K прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

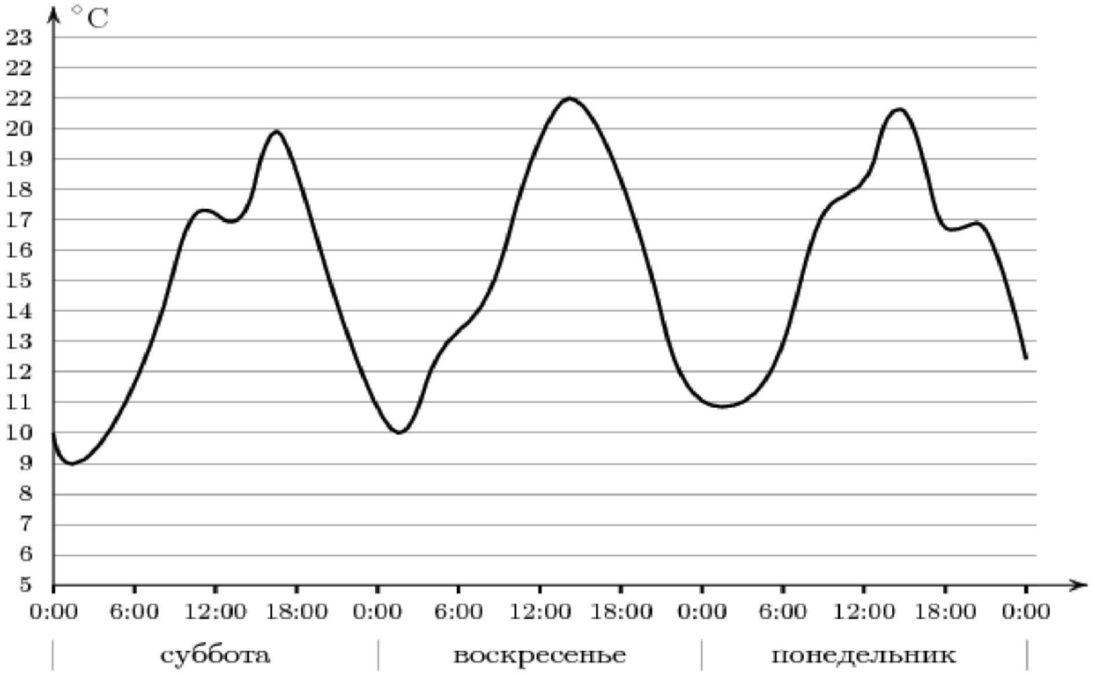
11. Петя и Ваня выполняют одинаковый тест. Петя отвечает за час на 8 вопросов теста, а Ваня — на 9. Они одновременно начали отвечать на вопросы теста, и Петя закончил свой тест позже Вани на 20 минут. Сколько вопросов содержит тест?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 12\sqrt{2}\cos x + 12x - 3\pi + 9$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вариант 5

1. При оплате услуг через платёжный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приёмное устройство данного терминала?

2. На графике показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов субботы. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат – значение температуры в градусах Цельсия. Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с субботы на воскресенье. Ответ дайте в градусах Цельсия.



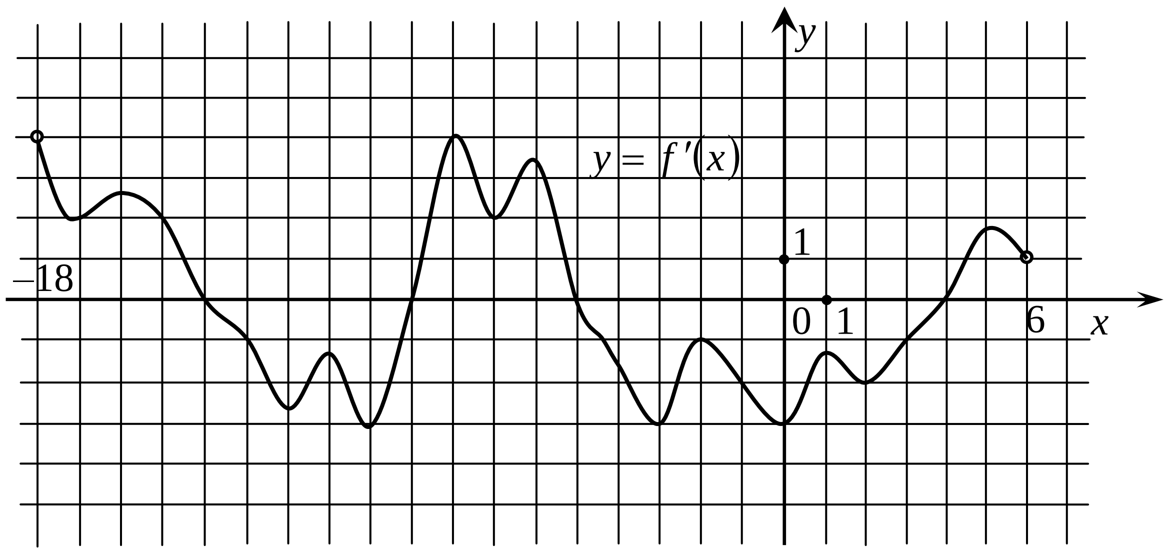
3. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;2), (3;2), (7;4).

4. Завод выпускает 95% деталей стандартными, причём из них 86% – первого сорта. Найдите вероятность того, что наугад взятая деталь окажется первого сорта.

5. Найдите корень уравнения $\frac{4x+2}{x+5}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB=\sqrt{181}$, $BC=9$. Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.

7. На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-18;6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-13;1]$.



8. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB=8$, $AD=9$, $AA_1=12$. Найдите расстояние между вершинами A и C_1 этого параллелепипеда.

9. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{(x+4)^4}+\sqrt[4]{(x+4{,}5)^4}$ при $x=-\sqrt{17}$.

10. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t)=at^2+bt+H_0$, где $H_0=4$ – начальный уровень воды, t – время в минутах, $a=1/100$ и $b=-2/5$ – постоянные. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? (Ответ приведите в минутах.)

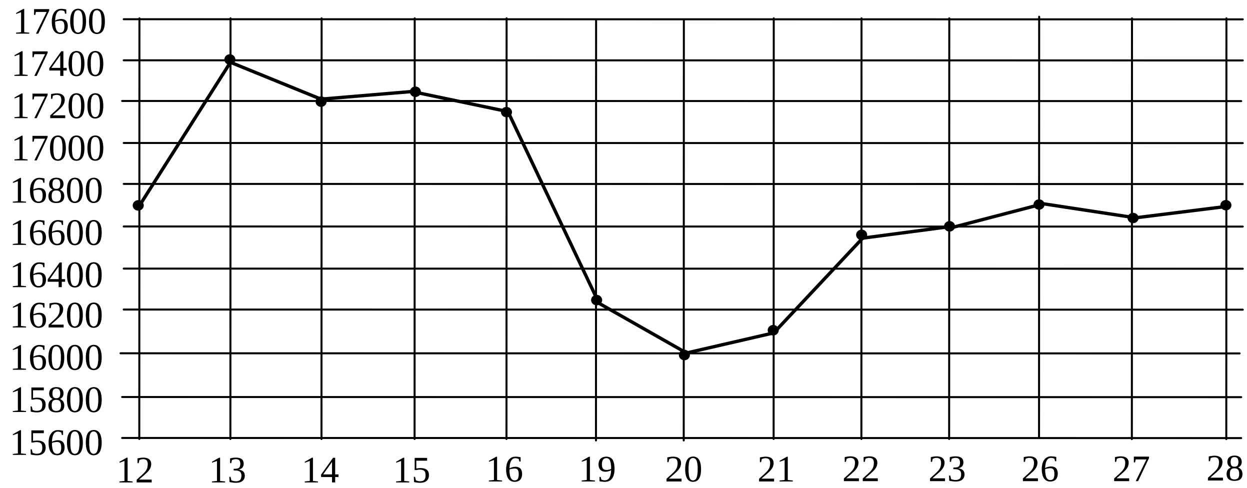
11. Из А в В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 42 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью, на 28 км/ч большей скорости первого, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста. (Ответ дайте в км/ч.)

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 12x - 8\sin x + 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Вариант 6

1. Больному прописано лекарство, которое нужно пить по 0,5 г 4 раза в день в течение 16 дней. В одной упаковке 10 таблеток лекарства по 0,5 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

2. На рисунке жирными точками показана цена олова на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 12 по 28 ноября 2007 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена тонны олова в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену олова на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за тонну).



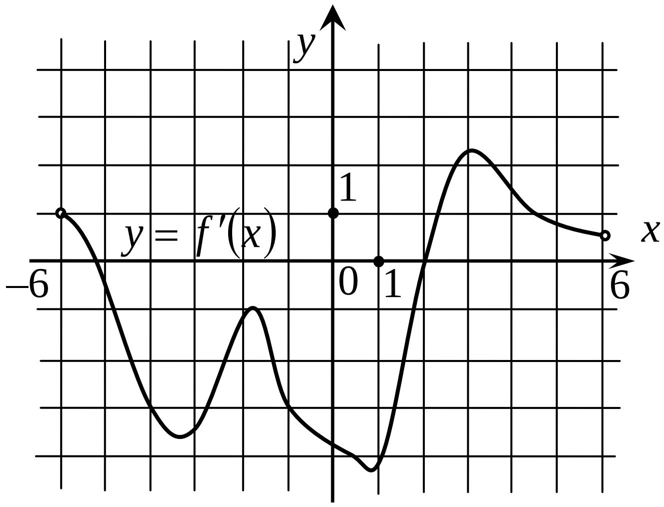
3. Найдите площадь круга, длина окружности которого равна $\sqrt{\pi}$.

4. В шкатулке лежат 10 одинаковых по форме шаров: 3 белых, 2 красных и 5 зелёных. Какова вероятность того, что наугад вынутый шар не белый?

5. Найдите корень уравнения $\frac{25x-3}{2x-1} = \frac{5}{2}$.

6. В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен $20°$. Найдите градусную меру большего из острых углов этого треугольника.

7. На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;6)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -3x - 11$ или совпадает с ней.



8. Концы отрезка KM лежат на окружностях оснований цилиндра. Высота цилиндра равна 24, радиус основания равен 13, а угол между прямой KM и плоскостью основания цилиндра равен $60°$. Найдите расстояние между осью цилиндра и параллельной ей плоскостью, проходящей через точки K и M.

9. Найдите значение выражения $\dfrac{n^{\frac{2}{5}}}{n^{\frac{1}{12}} \cdot n^{\frac{1}{15}}}$ при $n = 256$.

10. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \dfrac{g}{2}k^2t^2$, где $H_0 = 20м$ – начальная высота столба воды, t – прошедшее время (в секундах), $k = 1/300$ – отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а $g = 10 м/с^2$ – ускорение свободного падения. К какому моменту времени в баке останется не более чем четверть первоначального объёма? (Ответ приведите в секундах.)

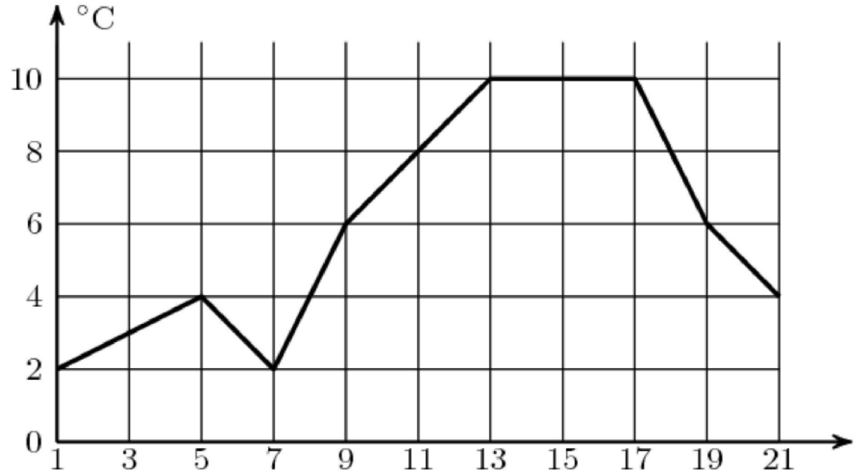
11. От пристани А к пристани В отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 2 часа после этого следом за ним со скоростью, на 2 км/ч большей, отправился второй. Расстояние между пристанями равно 168 км. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт В оба теплохода прибыли одновременно (Ответ дайте в км/ч.)

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5\operatorname{tg} x - 5x + 6$ на отрезке $[0; \pi/4]$.

Вариант 7

1. Для приготовления маринада для огурцов на 1 литр воды требуется 16 г лимонной кислоты. Лимонная кислота продаётся в пакетиках по 10 г. Какое наименьшее число пачек нужно купить хозяйке для приготовления 6 литров маринада?

2. Первый посев семян петрушки рекомендуется проводить в апреле при дневной температуре воздуха не менее $+6°C$. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха в первых трёх неделях апреля. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев семян петрушки.



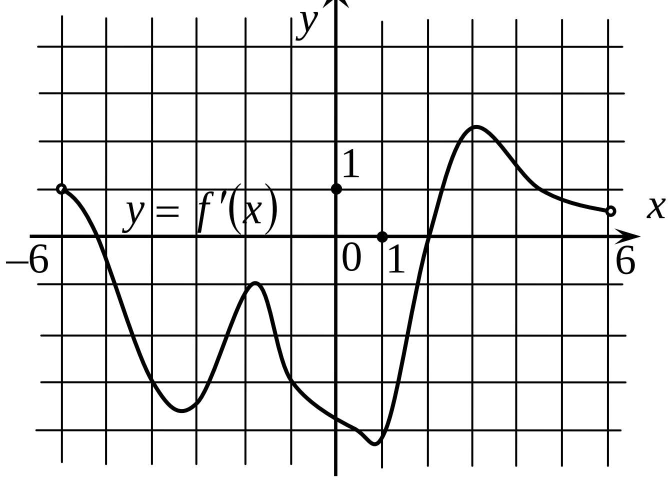
3. Найдите площадь сектора круга радиуса 1, длина дуги которого равна 2.

4. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найдите вероятность того, что наугад выбранные 2 детали будут стандартными. Результат запишите с точностью до сотых.

5. Найдите корень уравнения $2^{3-4x}=128$.

6. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 6:7, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 190.

7. На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



8. Конус вписан в шар. Высота конуса равна радиусу шара. Объём конуса равен 6. Найдите объём шара.

9. Найдите значение выражения $100 \cdot \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$.

10. Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 59 км/ч$, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 4 км/ч^2$. Расстояние от мотоциклиста до города определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время (в минутах), в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее, чем 30 км от города?

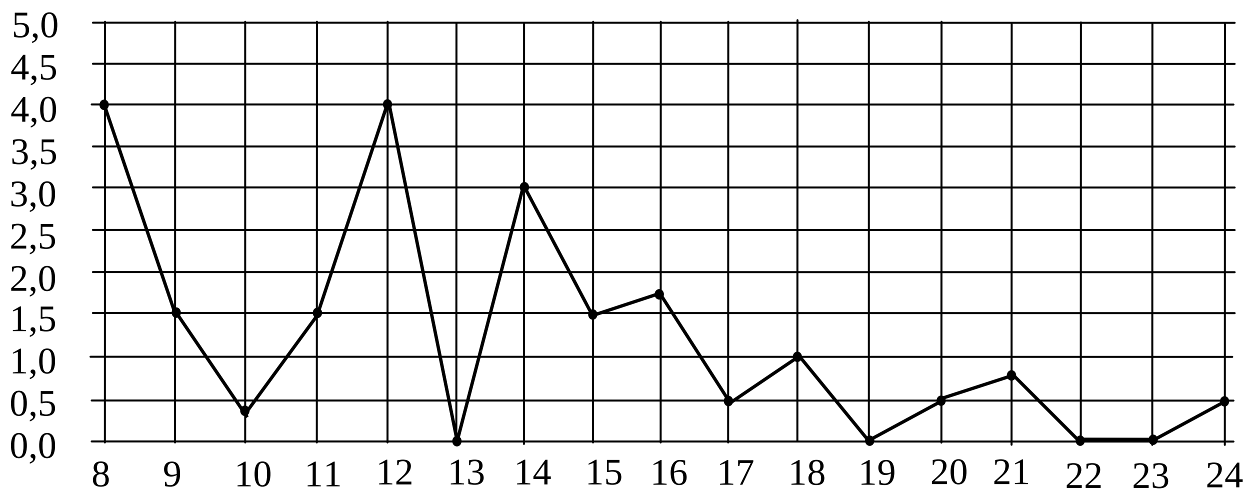
11. Два велосипедиста одновременно отправились в 88-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. (Ответ дайте в км/ч.)

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 10x + 4\ln x + 11$ на отрезке $\left[\frac{10}{11}; \frac{12}{11}\right]$.

Вариант 8

1. Аня купила месячный проездной билет на автобус. За месяц она сделала 45 поездок. Сколько рублей она сэкономила, если проездной билет стоит 750 рублей, а разовая поездка – 19 рублей?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало ровно 1,5 миллиметра осадков.



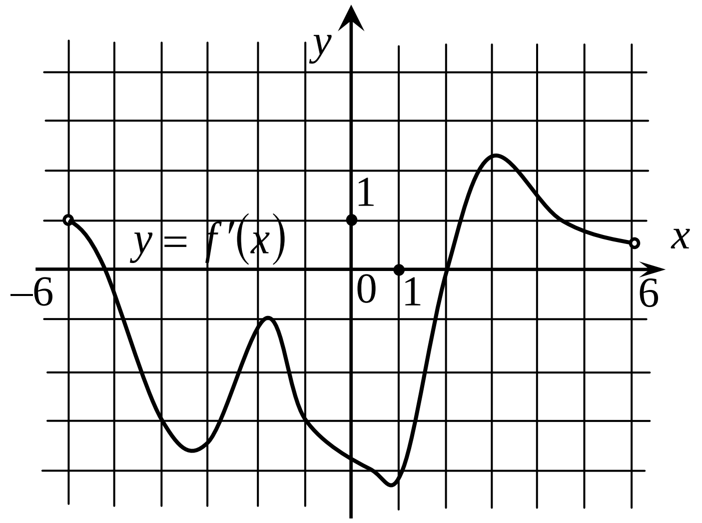
3. Найдите площадь трапеции, вершины которой имеют координаты (1;1), (3;1), (2;4), (8;4).

4. Трое стрелков, для которых вероятности попадания в цель соответственно равны 0,8, 0,75 и 0,7, делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что только два стрелка попадут в цель?

5. Найдите корень уравнения $\sqrt[5]{x-3}=-2$.

6. Найдите длину хорды, на которую опирается угол 45°, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{2}$.

7. На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6;6)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на интервале $(-4;5)$.



8. Если каждое ребро куба увеличить на 1, то объём куба увеличится на 37. Найдите ребро этого куба.

9. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{a+4}{a-4}-\dfrac{a-4}{a+4}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{a}\right)$ при $a=3{,}96$.

10. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле $F_A=\rho g l^3$, где l – длина ребра куба в метрах, $\rho = 1000\,кг/м^3$ – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g=9{,}8\,Н/кг$). Какой может быть максимальная длина ребра куба, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении будет не больше 78 400 $Н$? Ответ выразите в метрах.

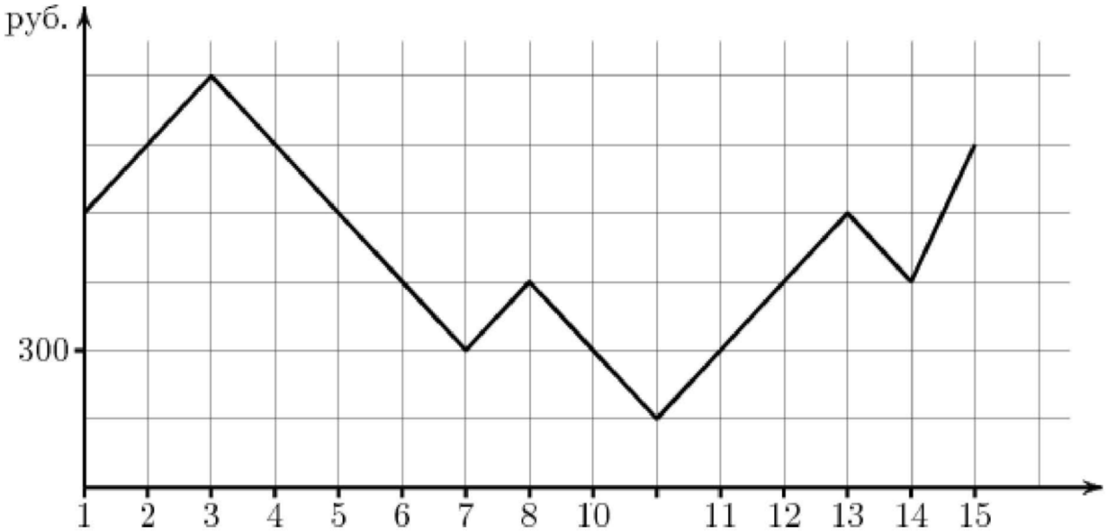
11. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй — за три дня?

12. Найдите точку минимума функции $y=(x+16)e^{x-16}$.

Вариант 9

1. Студент получил свой первый гонорар в размере 700 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет тюльпанов для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество тюльпанов сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, тюльпаны стоят 60 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первой половине сентября. 7 сентября бизнесмен купил пакет акций, а 13 сентября продал его. В результате этих операций прибыль бизнесмена составила 3600 рублей. Сколько акций было в пакете?



3. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

4. На 400 компакт-дисков в среднем приходится 6 бракованных. Какова вероятность того, что взятый наугад компакт-диск окажется исправен?

5. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них: $|3x-5|=|5x-3|$.

6. Около окружности описана трапеция, длина средней линии которой равна 15. Найдите периметр трапеции.

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=6t^2-48t+17$ (где x – расстояние от точки отсчета в метрах, t – время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите её скорость (в м/с) в момент времени $t=9$ с.

8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы со стороной основания 10 см, налили воду. Высота уровня равна 60 см. Воду перелили в другой сосуд такой же формы, в результате чего высота уровня воды понизилась на 45 см. Найдите длину (в см) стороны основания второго сосуда.

9. Найдите значение выражения $\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cdot(-\cos\alpha)$, если $\cos\alpha = 0{,}2$.

10. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}100\%$. При каком наименьшем значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 70%, если температура холодильника $T_2 = 300$.

11. Смешали 4 литра 15-процентного водного раствора некоторого вещества с 6 литрами 25-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = -14x + 7\operatorname{tg}x + \frac{7\pi}{2} + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$.

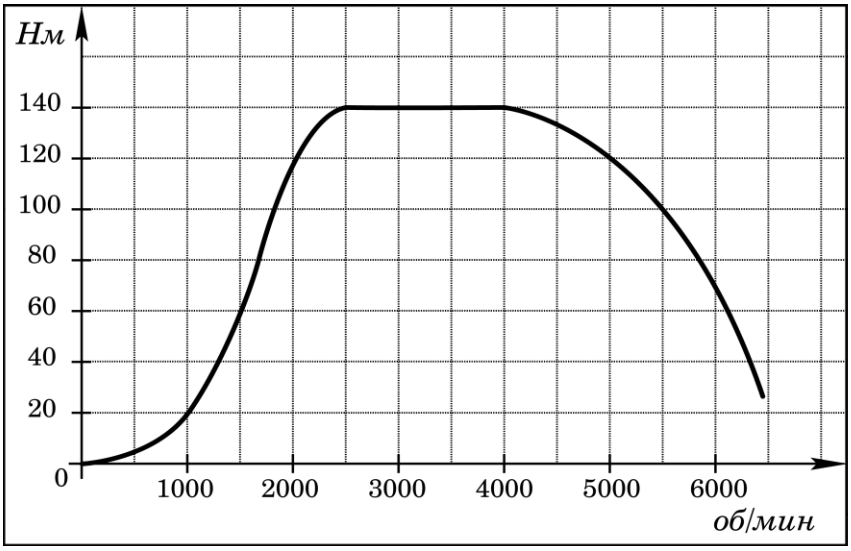
13. Решите уравнение: $\frac{\left(3\sin^2 x - 2\sin x\right)\sqrt{\cos x + \frac{1}{2}}}{\log_{\cos x}\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)} = 0$.

14. Точка M – середина стороны BC основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро призмы равно $\sqrt{39}$, а сторона основания равна 12. Найдите синус угла между прямой B_1M и плоскостью боковой грани ABB_1A_1.

Вариант 10

1. Магазин делает пенсионерам скидку на определенное количество процентов от цены покупки. Пакет кефира стоит в магазине 40 рублей. Пенсионер заплатил за пакет кефира 38 рублей. Сколько процентов составляет скидка для пенсионеров?

2. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат – крутящий момент в Н$\cdot$м. Скорость автомобиля (в км/ч) приближенно выражается формулой $v = 0{,}036n$, где n – число оборотов двигателя в минуту. С какой наименьшей скоростью должен двигаться автомобиль, чтобы крутящий момент был не меньше 120 Н$\cdot$м? (Ответ дайте в километрах в час.)



3. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(-12;4)$, вектор $\vec{b}$ имеет координаты $(3;9)$ Найти градусную меру угла между этими векторами.

4. В квадрате с длиной стороны 1 случайным образом отмечают одну точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до ближайшей к ней стороны квадрата окажется больше, чем 0,2?

5. Решите уравнение $7^{1,2x+0,6}=\dfrac{1}{343}$.

6. В прямоугольном треугольнике угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла, равен $24°$. Найдите градусную меру большего из острых углов этого треугольника.

7. Прямая $y=3x+4$ является касательной к графику функции $y=3x^2-3x+c$. Найдите c.

8. Объём треугольной пирамиды равен 15. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 1 : 2, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.

9. Найдите значение выражения $9\sin(3\pi/2+\beta)-3\cos(3\pi+\beta)$, если $\cos\beta=-2/3$.

10. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m=8\,кг$ и радиуса $R=10\,см$, и двух боковых с массами $M=1\,кг$ и с радиусами $R+h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $кг\cdot см^2$, задаётся формулой $I=\dfrac{(m+2M)R^2}{2}+M\left(2Rh+h^2\right)$. При каком максимальном значении h (в $см$) момент инерции катушки не превышает предельного значения $625\,кг\cdot см^2$?

11. Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200 000 рублей. Митя внес 14% уставного капитала, Антон – 42 000 рублей, Гоша – 0,12 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1 000 000 рублей причитается Борису? (Ответ дайте в рублях.)

12. Найдите точку минимума функции $y=(0{,}5-x)\cos x+\sin x$, принадлежащую промежутку $(0;\pi/2)$.

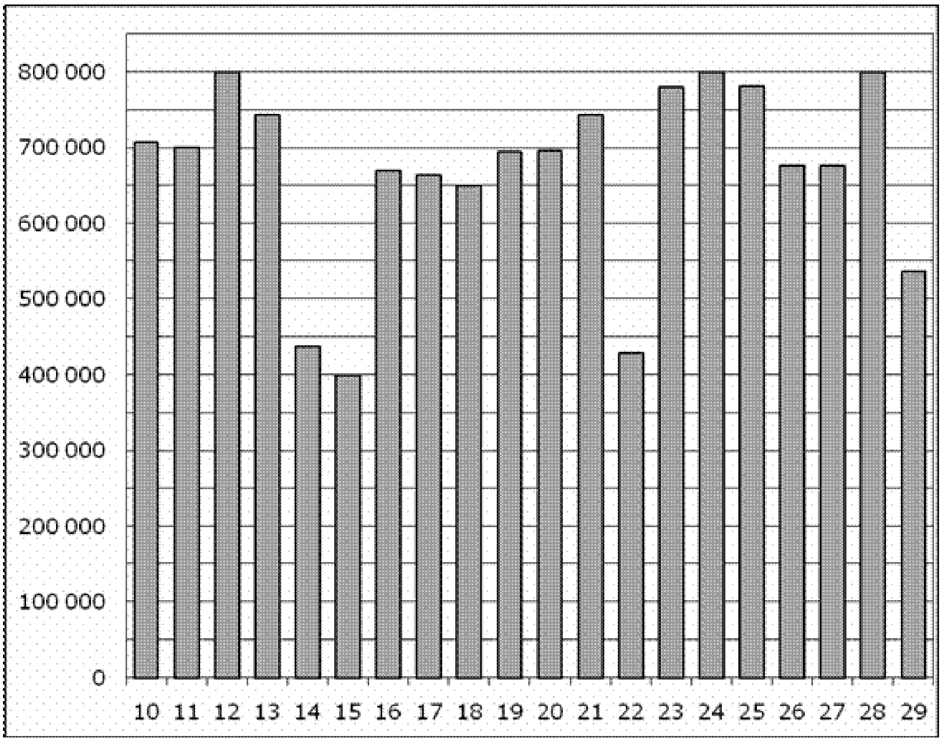
13. Решите уравнение $\dfrac{\left(2\cos^2 x-3\cos x+1\right)\cdot\sqrt{-2\sin x}}{\log_{2012}(-tgx)}=0$.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от точки A до плоскости A_1BT, где T – середина отрезка AD.

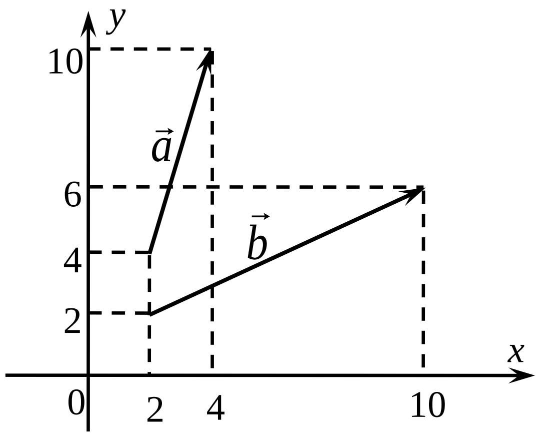
Вариант 11

1. При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы, кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 300 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приемное устройство данного терминала?

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА «Новости» во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали — количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, во сколько раз наибольшее количество посетителей больше, чем наименьшее количество посетителей за день.



3. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

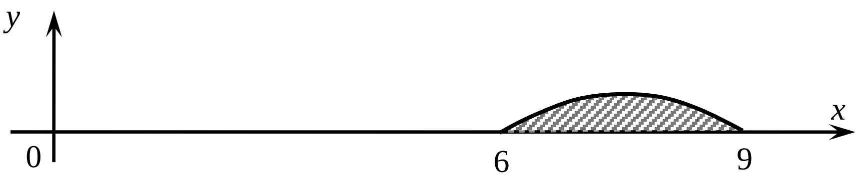


4. Игральный кубик подбрасывают дважды. Определите вероятность того, что при двух бросках выпадет разное количество очков. Результат округлите до сотых.

5. Решите уравнение. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них: $\dfrac{x+3}{x+0{,}1}=\dfrac{x+3}{0{,}2x+2}$.

6. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке O_1, а биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке O_2. Угол AO_1B равен $110°$. Найдите градусную меру угла AO_2B.

7. На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция $F(x)=-\dfrac{1}{10}x^3+\dfrac{9}{4}x^2-\dfrac{81}{5}x-\dfrac{5}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8. Ребро правильного тетраэдра равно 1. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырех его рёбер.

9. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2}{9}+1\dfrac{9}{12}\right)\cdot 7{,}2$.

10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f=30\,см$. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

11. В 2008 году в городском квартале проживало 40 000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году — на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?

12. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[-10;-1]$.

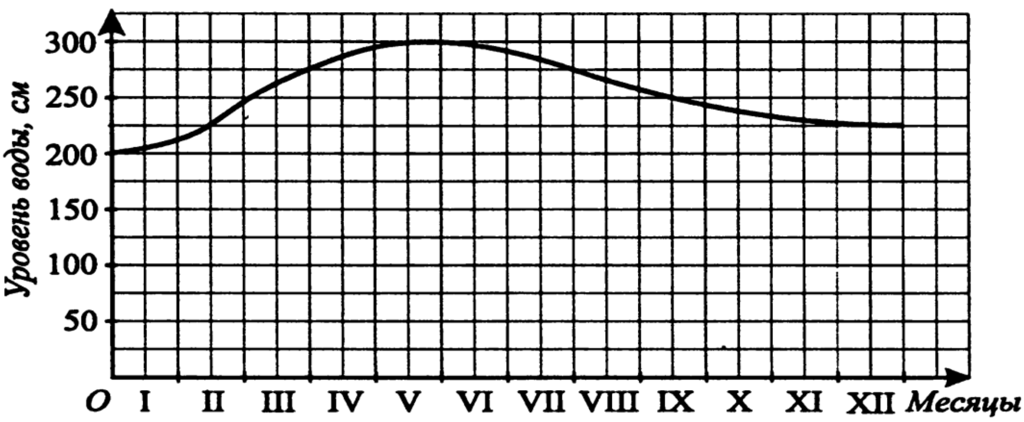
13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{2\sin^2 x+3\sin x+1}{\sqrt{-y}}=0, \\ y=-\cos x. \end{cases}$

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, точки G и H – середины рёбер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и BH.

Вариант 12

1. Призёрами городской олимпиады по математике стало 48 учеников, что составило 12% от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

2. На графике показано изменение уровня воды в реке на протяжении одного года. На оси абсцисс отмечены номера месяцев, на оси ординат – значение уровня воды (в см). Определите по графику количество месяцев, в течение которых уровень воды превышал норму 250 см – больше чем на 25 см.



3. Основания равнобедренной трапеции равны 14 и 26, а ее периметр равен 60. Найдите площадь трапеции.

4. В магазине на полке стоят CD-диски с фильмами, среди которых 385 комедийных фильмов, 110 триллеров, 160 фильмов в жанре «фантастика» и 95 мультипликационных фильмов. Какова вероятность того, что взятый наугад диск будет содержать либо комедийный, либо мультипликационный фильм?

5. Решите уравнение $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1$.

6. Хорда AB делит окружность на две дуги, градусные величины которых относятся как 2:7. Под каким углом видна эта хорда из точки C, принадлежащей меньшей дуге окружности?

7. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=t^2-13t+23$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

8. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен $45°$. Найдите объём пирамиды.

9. Найдите значение выражения $2x+y+10z$, если $4x+y=5,\ y+20z=6$.

10. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0=440 Гц$. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v)=\dfrac{f_0}{1-v/c}$ (Гц), где c – скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c=315 м/с$. Ответ выразите в м/с.

11. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

12. Найдите точку минимума функции $y=2x^2-5x+\ln x-3$.

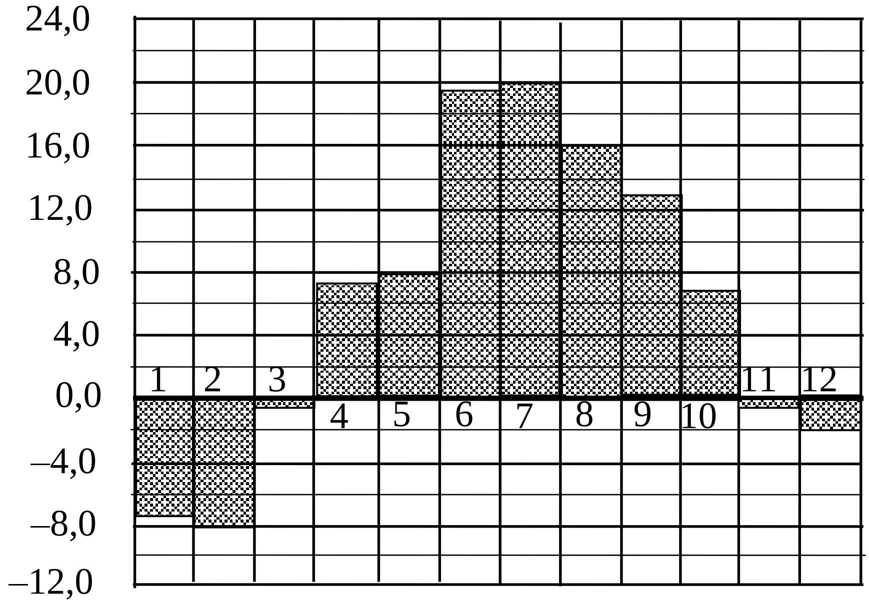
13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{2\sin^2 x-3\sin x+1}{\sqrt{y}}=0, \\ y-\cos x=0. \end{cases}$

14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AG и плоскостью BCC_1.

Вариант 13

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Мария Константиновна получила 11 310 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Марии Константиновны?

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт–Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1999 году.



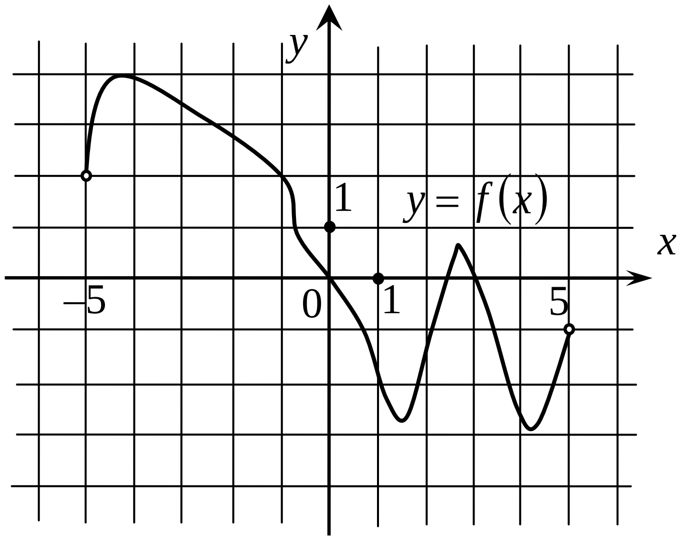
3. Сторона квадрата $ABCD$ равна 7. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$.

4. 15 учеников обменялись фотографиями таким образом, что все обменялись друг с другом. Сколько было роздано фотографий?

5. Решите уравнение $\log_{0,008}(2x-7)=-\dfrac{1}{3}$.

6. Длины двух сторон параллелограмма относятся как 5:6, а его периметр равен 88. Найдите большую сторону параллелограмма.

7. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-5;5)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ отрицательна.



8. Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 25.

9. Найдите значение выражения $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-8x+16}$ при $x=\sqrt{7}$.

10. Модель камнеметательной машины выстреливает камни под определённым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой $y=ax^2+bx$, где $a=-\frac{1}{120}\,м^{-1}$, $b=\frac{7}{12}$ – постоянные параметры, x – расстояние от машины до камня, считаемое по горизонтали, y – высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над ней на высоте не менее 1 метра?

11. Имеются два сосуда. Первый содержит 30 кг, а второй — 20 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

12. Найдите точку минимума функции $y=\left(2x^2-12x+12\right)e^{x-12}$.

13. а) Решите уравнение

$$8\sin^2 x+2\sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=9;$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

13. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны

1, точка D – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1.

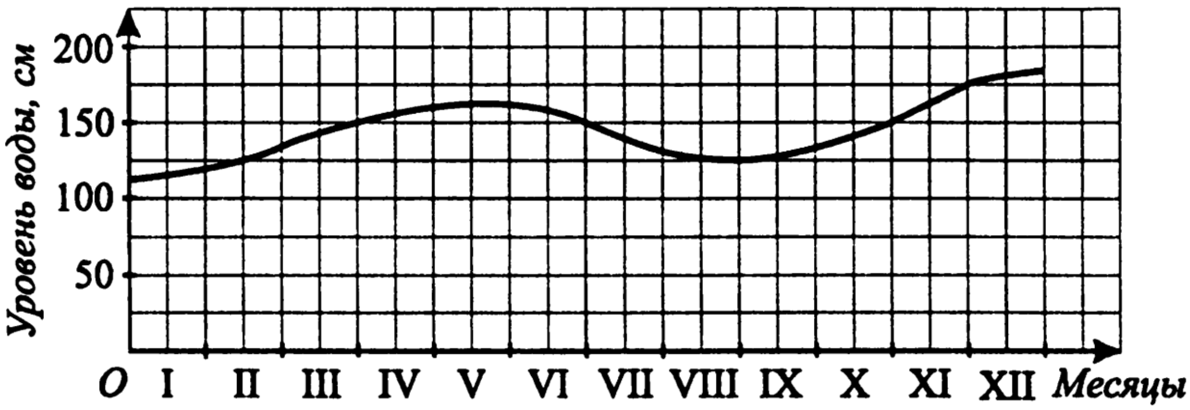
15. Решите неравенство:

$$\frac{\log^2_{2x+17}(x+16)+1-\log_{2x+17}(x+16)^2}{x+4} \le \frac{\log^2_{2x+17}\dfrac{x+16}{2x+17}}{3x}.$$

Вариант 14

1. Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 18 000. Сколько рублей он получит после вычета налога на доходы?

2. На графике показано изменение уровня воды в реке на протяжении одного года. На оси абсцисс отмечены номера месяцев, на оси ординат – значение уровня воды (в см). Определите по графику количество месяцев, в течение которых уровень воды был ниже 150 см.



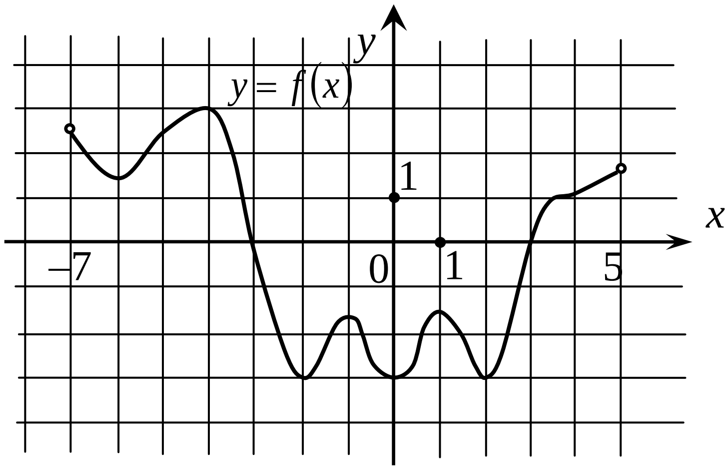
3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (1;1), (2;4), (4;2), (5;5).

4. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятность попадания равна соответственно 0,7 и 0,8. Какова вероятность того, что лишь один из охотников попадёт в цель?

5. Решите уравнение $\cos\frac{\pi(x+5)}{3}=\frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

6. В треугольнике ABC угол C равен 60°, $AB=\frac{\sqrt{3}}{5}$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

7. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-7;5)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.



8. В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объём этого шара, делённый на π .

9. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{5{,}6}\cdot\sqrt{2{,}4}}{\sqrt{0{,}21}}$.

10. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I=\frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε – ЭДС источника (в вольтах), $r=1$ Ом – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20% от силы тока короткого замыкания $I_{кз}=\frac{\varepsilon}{r}$? (Ответ выразите в омах.)

11. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 240 км. На следующий день он отправился обратно в А со скоростью на 1 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 1 час. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. (Ответ дайте в км/ч.)

12. Найдите точку минимума функции $y=4x-\ln(x+5)+8$.

13. Найдите все решения уравнения $\sin^2 2x+\sin^2 3x=1$, принадлежащие отрезку $[1;2]$.

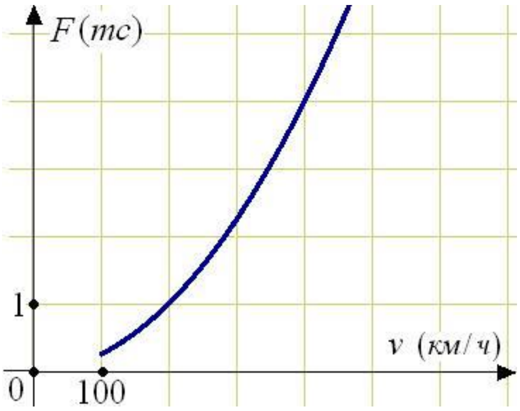
14. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки E, F середины рёбер соответственно A_1B_1 и B_1C_1. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

15. Решите неравенство: $3\log_{x-2}(8-x)+1\le\frac{1}{4}\log^2_{x-2}\left(x^2-10x+16\right)^2$.

Вариант 15

1. В магазине «Четвёрочка» проходит рекламная акция: тем, кто покупает 7 шоколадок, дают 8-ю шоколадку в подарок. До менее проведения акции, чтобы купить 20 шоколадок, нужно было иметь 200 рублей. Сколько шоколадок можно получить на 200 рублей во время акции?

2. Когда самолёт находится в горизонтальном полете, подъёмная сила, действующая на крылья, зависит только от скорости. На рисунке изображена эта зависимость для некоторого самолета. На оси абсцисс откладывается скорость (в километрах в час), на оси ординат – сила (в тоннах силы). Определите по рисунку, чему равна подъёмная сила (в тоннах силы) при скорости 200 км/ч.



3. На координатной плоскости заданы точки: $A(-9;4), B(2;6), C(0;2)$. Найдите координаты точки D, если четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом. В ответе укажите наименьшую из координат точки D.

4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 5 очков. Результат округлите до сотых.

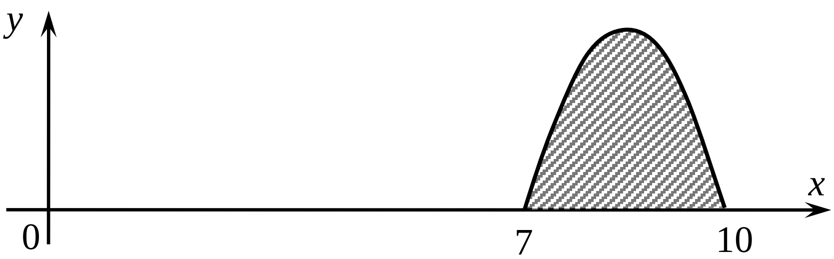
5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{12}{2x-14}}=\dfrac{1}{10}$.

6. В правильном $n-$угольнике угол между двумя радиусами вписанной окружности, проведёнными к соседним сторонам, равен $15°$. Найдите n.

7. На рисунке изображён график некоторой функции $y=f(x)$. Функция

$F(x)=-\dfrac{1}{2}x^3+\dfrac{51}{4}x^2-105x-3$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

Найдите площадь закрашенной фигуры.



8. Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 64, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.

9. Найдите значение выражения $\frac{16\sin 142° \cdot \cos 142°}{\sin 284°}$.

10. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик определяет его, измеряя время падения t небольших камешков в колодец и рассчитывая по формуле $h = -5t^2$. До дождя время падения камешков составляло 1,4 с. На какую минимальную высоту должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось больше чем на 0,2 с?

11. Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 315 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 18 км/ч, стоянка длится 6 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 42 часа после отплытия из него. (Ответ дайте в км/ч.)

12. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^5}{15} - x^3$ на отрезке $[0;4]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 4^y - 10 \cdot 2^y + 16 = 0, \\ \cos x = \sqrt{y-2}. \end{cases}$

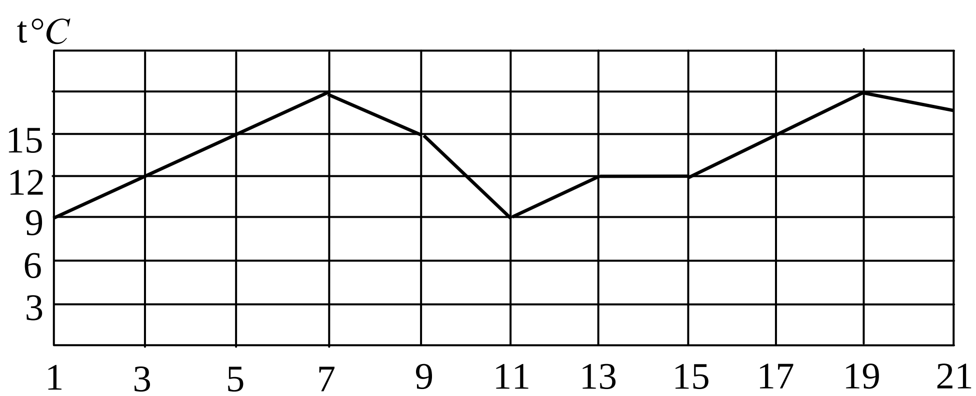
14. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все рёбра которой равны 1, точки G и H – середины рёбер соответственно A_1B_1 и A_1F_1. Найдите косинус угла между прямыми AG и FH.

15. Решите неравенство $\frac{\log_2(2x^2 - 13x + 20) - 1}{\log_3(x+7)} \le 0$.

Вариант 16

1. Таксист за месяц проехал 6000 км. Стоимость 1 л бензина 21 рубль. Средний расход бензина на 100 км составляет 6 литров. Сколько рублей потратил таксист на бензин за этот месяц?

2. Посев семян моркови рекомендуется проводить в мае при дневной температуре не менее $+12°C$. На рисунке показан прогноз дневной температуры воздуха в первой и второй декадах мая. Определите, в течение скольких дней за этот период можно производить посев моркови.



3. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в эту окружность?

4. Брошена игральная кость. Какова вероятность того, что выпадет чётное число очков?

5. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}-x\right)^2=\left(\frac{1}{4}-x\right)^2$.

6. Радиус описанной окружности правильного шестиугольника равен $\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в этот шестиугольник.

7. Прямая $y=12x-6$ параллельна прямой l, которая является касательной к графику функции $y=x^4-20x+10$. Найдите абсциссу точки касания прямой l и данного графика.

8. В правильной четырёхугольной пирамиде сторона основания равна 8, а длина бокового ребра равна 9. Найдите высоту пирамиды.

9. Найдите значение выражения $\frac{x^2+2x-8}{x^2-2x}$ при $x=0{,}0008$.

10. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет 80 Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите (в омах) наименьшее возможное сопротивление R_y этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_x и R_y их общее сопротивление определяется по формуле $R=\frac{R_x\cdot R_y}{R_x+R_y}$, а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 30 Ом.

11. Первая труба пропускает на 4 литра воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 238 литров она заполняет на 4 минуты дольше, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 234 литра?

12. Найдите точку максимума функции $y=\left(x^2-3x-3\right)e^{3-x}$.

13. а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

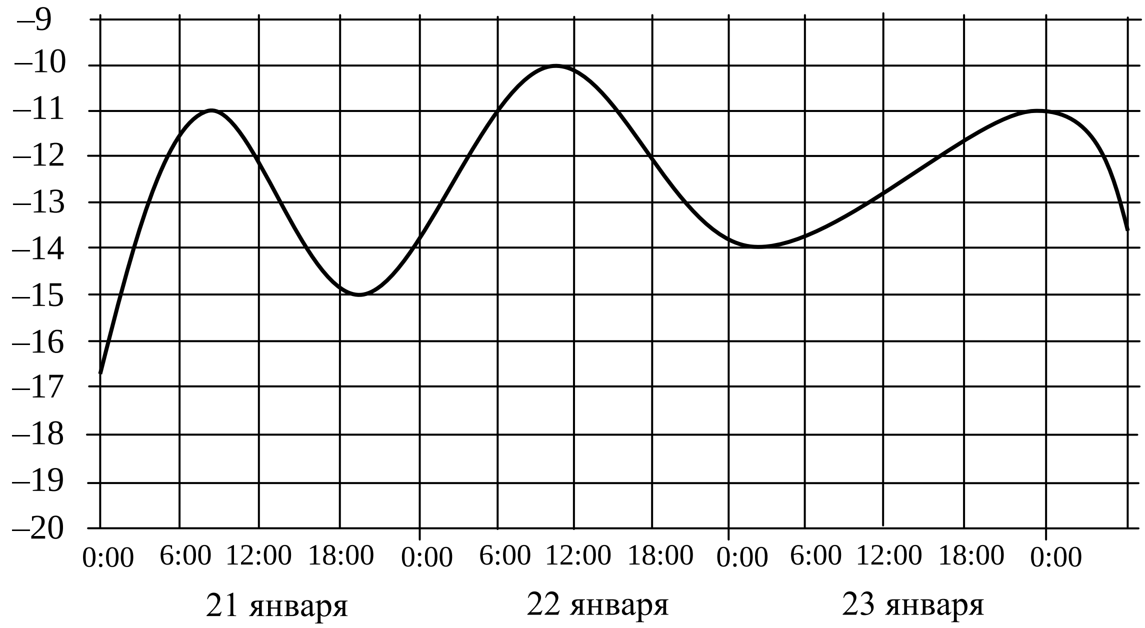
14. Высота конуса равна $\sqrt{6}$, а радиус основания равен $\sqrt{10}$. Образующие конуса SL и SP составляют угол $60°$. Найдите тангенс угла между плоскостью SLP и плоскостью основания конуса.

15. Решите неравенство $\log_{x+1}\left(19+18x-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+1}(x-19)^2\geq 2$.

Вариант 17

1. В школьную библиотеку привезли книги по физике для 7–9-х классов, по 60 для каждого класса. В шкафу 4 полки, на каждой полке помещается 12 книг. Сколько шкафов можно полностью заполнить новыми книгами по физике?

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 22 января.



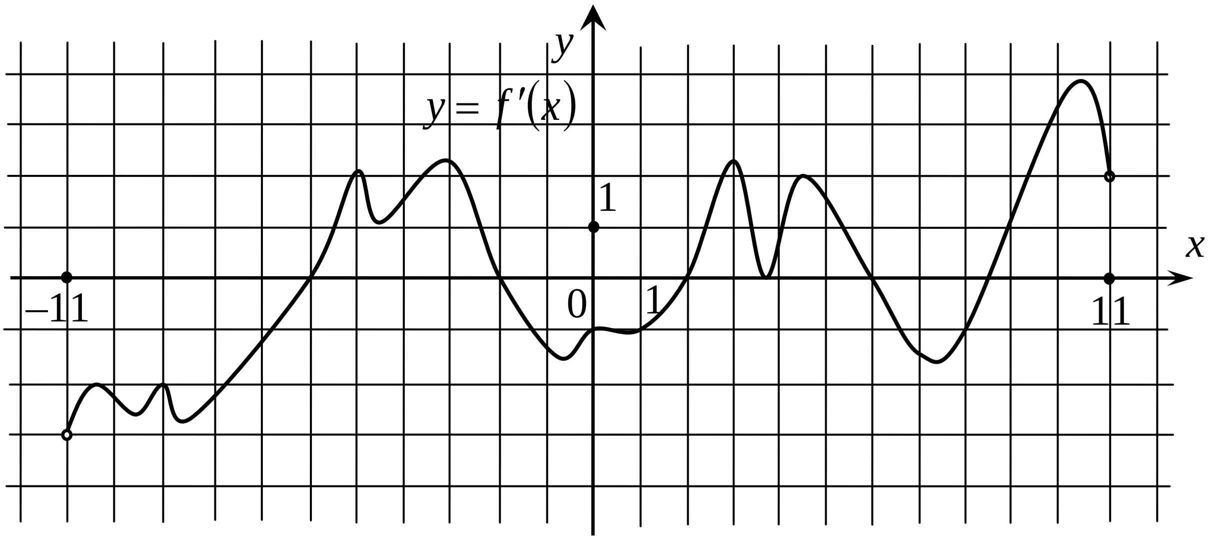
3. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны: $AC = 16$, $BD = 30$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}$.

4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 равных кубиков. Найдите вероятность того, что наудачу взятый кубик имеет три окрашенные грани.

5. Найдите корень уравнения $36^{x-7} = \frac{1}{6}$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 82°, биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке O. Найдите градусную меру угла AOB.

7. На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-11;11)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-10;10]$.



8. Объём куба равен 12. Найдите объём четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной – центр куба.

9. Найдите значение выражения $3^{2+\log_3 7}$.

10. Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы, определяемой по формуле $A(\omega)=\dfrac{A_0\omega_p^2}{\left|\omega_p^2-\omega^2\right|}$, где ω – частота вынуждающей силы (в c^{-1}), A_0 – постоянный параметр, $\omega_P=360c^{-1}$ – резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5%. Ответ выразите в c^{-1}.

11. Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

12. Найдите наибольшее значение функции $y=x^2-6x+4\ln x+2$ на отрезке $[0{,}5;1{,}5]$.

13. Решите уравнение $\dfrac{(\sin x-1)(2\cos x+1)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0$.

14. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Найдите угол между прямыми DM и CL, где M – середина ребра BC, L – середина ребра AB.

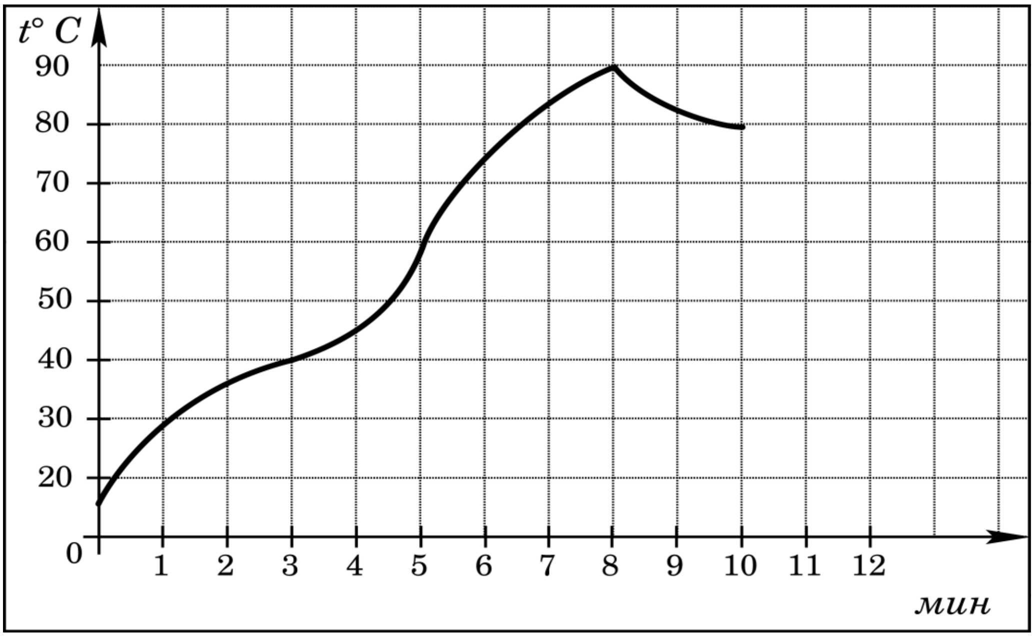
15. Решите неравенство $\dfrac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5x}2}{\log_{0,125x}8}\le 1$.

16. Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.

Вариант 18

1. В сентябре 1 кг винограда стоил 60 рублей, в октябре виноград подорожал на 25%, а в ноябре еще на 20%. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в ноябре?

2. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее от запуска двигателя, на оси ординат – температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, сколько минут двигатель нагревался от температуры $60°C$ до температуры $90°C$.



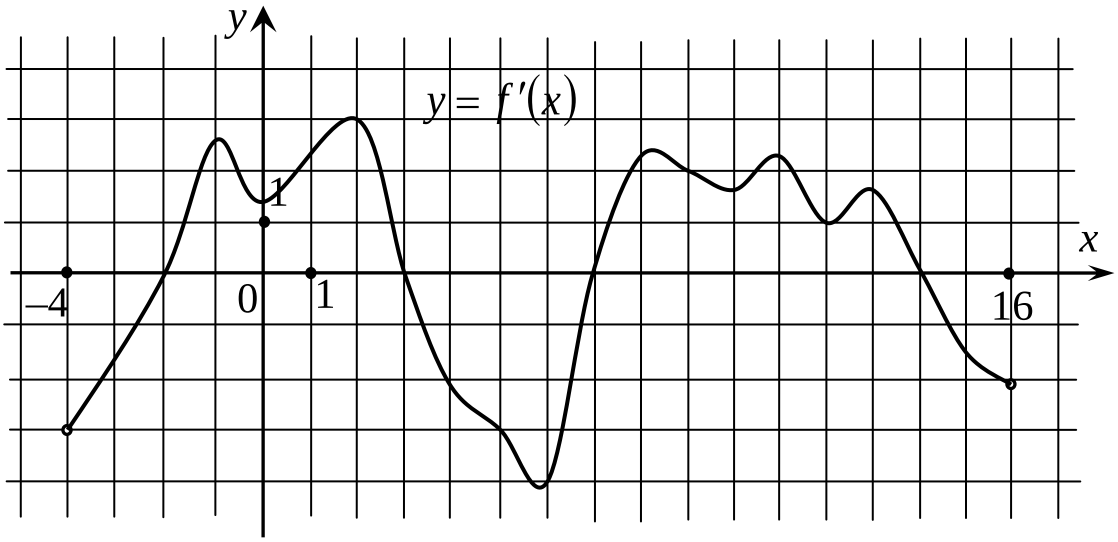
3. Даны два квадрата, диагонали которых равны 10 и 6. Найдите диагональ квадрата, площадь которого равна разности площадей данных квадратов.

4. Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то он выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

5. Найдите корень уравнения $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=-x$.

6. Точки $A, B, C, D,$ расположенные на окружности, делят эту окружность на четыре дуги AB, BC, CD и AD, градусные меры которых относятся соответственно как $6:3:4:2$. Найдите градусную меру угла C четырёхугольника $ABCD$.

7. На рисунке изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4;16)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[0;13]$.



8. Длины двух рёбер прямоугольного параллелепипеда равны 5 и 6, а площадь поверхности параллелепипеда равна 192. Найдите объём параллелепипеда.

9. Найдите значение выражения $\left(\dfrac{1}{2(b-1)}+\dfrac{1}{2(b+1)}+\dfrac{1}{b-b^3}\right):\left(\dfrac{b-1}{b}-\dfrac{b}{b+1}\right)$ при $b=0{,}61$.

10. Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 749 МГц. Скорость спуска батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле $v=c\dfrac{f-f_0}{f+f_0}$, где $c=1500$ м/с – скорость звука в воде, f_0 – частота испускаемых импульсов (в МГц), f – частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отраженного сигнала f, если скорость погружения батискафа не должна превышать 2 м/с.

11. Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 14 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 80 км/ч, и через 40 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=7x-6\sin x+8$ на отрезке $[-\pi/2;0]$.

13. Решите уравнение $(\cos x-1)\left(tgx+\sqrt{3}\right)\sqrt{\cos x}=0$.

14. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

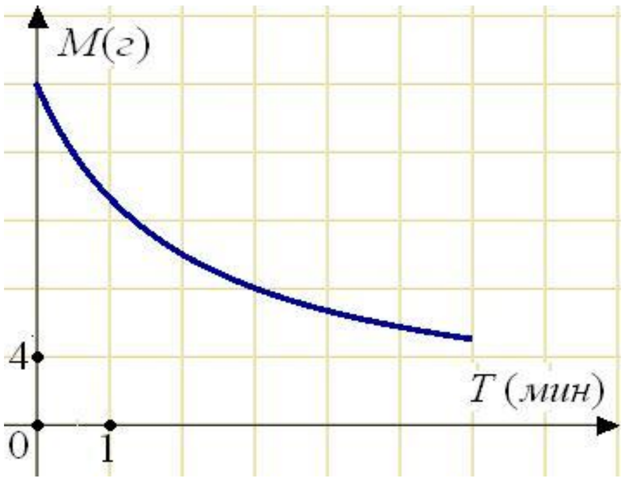
15. Решите неравенство $2\log_{\left(x^2-8x+17\right)^2}\left(3x^2+5\right) \le \log_{x^2-8x+17}\left(2x^2+7x+5\right)$.

16. На стороне BA угла ABC, равного $30°$, взята такая точка D, что $AD=2$ и $BD=1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и D и касающейся прямой BC.

Вариант 19

1. В супермаркете проходит рекламная акция: покупая 2 шоколадки, покупатель получает третью шоколадку в подарок. Шоколадка стоит 20 рублей. Какое наибольшее количество шоколадок получит покупатель на 270 рублей?

2. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое еще не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат – масса оставшегося реагента, который еще не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за три минуты?



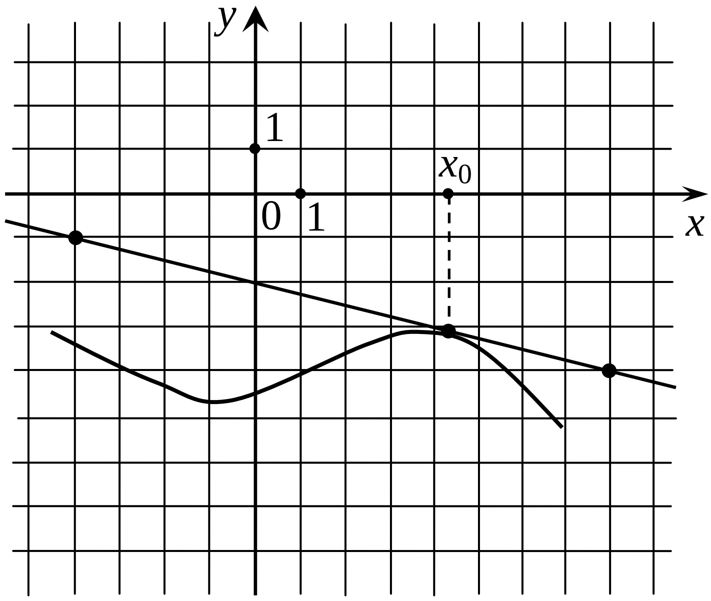
3. Периметр прямоугольника равен 28, а диагональ равна 10. Найдите площадь этого прямоугольника.

4. Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет число 56?

5. Решите уравнение $|6x-9|=|12-x|$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из корней.

6. Один из внешних углов четырёхугольника равен $96°$. Углы четырёхугольника, не смежные с данным внешним углом, относятся как 5:7:11. Найдите меньший из углов четырёхугольника.

7. На рисунке изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту. Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 10.

9. Найдите значение выражения $\dfrac{x^{1}\cdot x^{-10}}{x^{-14}}$ при $x=4$.

10. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде $pV^{\alpha}=const$, где p (Па) – давление в газе, V – объём газа в кубических метрах, α – положительная константа. При каком наименьшем значении константы α уменьшение вдвое объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит к увеличению давления не менее чем в 4 раза?

11. Моторная лодка в 11:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв в пункте В 1 час 20 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 15:00. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки равна 12 км/ч.

12. Найдите точку максимума функции $y=(x-7)^2e^{x-8}$.

13. 1) Решите уравнение $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$.

2) Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

14. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка B_1C_1 до плоскости AB_1D_1.

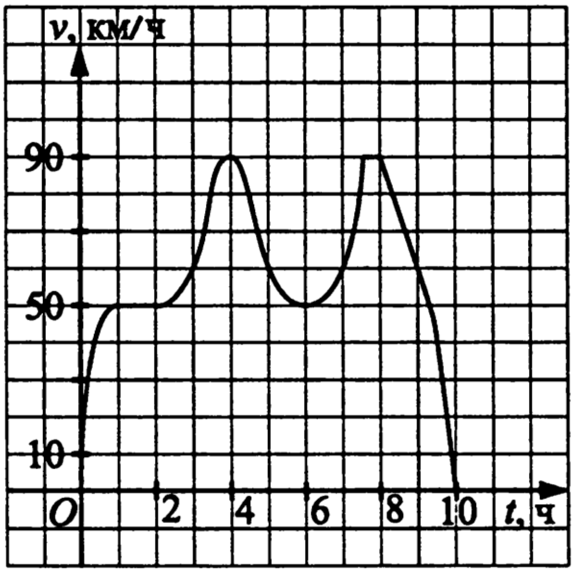
15. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5^{x-1}+12\cdot 5^{2-x}\le 61, \\ \dfrac{2\log_7(x-1)-1}{\log_{x-1}7}\le 0. \end{cases}$

16. Окружности радиусов 3 и 9 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую – в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Вариант 20

1. В летнем лагере 230 детей и 27 воспитателей. В автобус помещается не более 49 пассажиров. Сколько автобусов требуется, чтобы перевезти всех из лагеря в город?

2. На рисунке изображён график изменения скорости движения автомобиля в зависимости от времени. На оси абсцисс отмечается время движения в часах, на оси ординат – скорость в километрах в час. Сколько часов автомобиль двигался со скоростью не менее 60 км/ч?



3. Площадь прямоугольного треугольника равна 16. Один из его катетов равен 4. Найдите другой катет.

4. Ученика попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет число, кратное 5?

5. Найдите корень уравнения $\log_5(5-5x) = 2\log_5 2$.

6. В треугольнике ABC угол A равен $48°$, угол B равен $60°$. Высоты треугольника AD и BE пересекаются в точке O. Найдите градусную меру угла AOB.

7. В точке A графика функции $y = x^3 + 4x + 1$ проведена касательная к нему, параллельная прямой $y = 4x + 3$. Найдите сумму координат точки A.

8. Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, делённую на π.

9. Найдите значение выражения $\sqrt{548^2 - 420^2}$.

10. Опорные башмаки шагающего экскаватора, имеющего массу $m = 1260$ тонн, представляют собой две пустотелые балки длиной $l = 18$ метров и шириной s метров каждая. Давление экскаватора на почву, выражаемое в килопаскалях, определяется формулой $p = \frac{mg}{2ls}$, где m – масса экскаватора (в тоннах), l – длина балок в метрах, s – ширина балок в метрах, g – ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). Определите наименьшую возможную ширину опорных балок, если известно, что давление p не должно превышать 140 кПа. Ответ выразите в метрах.

11. Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 20 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолёте со скоростью 480 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = x^3 - 6x^2 - 15x + 1$ на отрезке $[-5;5]$.

13. 1) Решите уравнение $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin x$.

2) Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

14. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

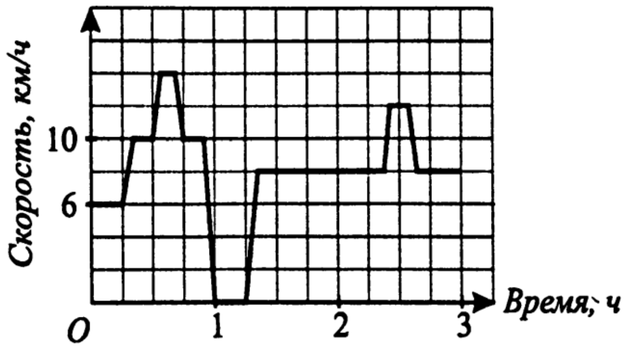
15. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} > 2\sqrt[4]{3}, \\ \log_2^2 x + 6 \ge 5 \cdot \log_2 x. \end{cases}$

16. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причём треугольник ABC – равнобедренный и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Вариант 21

1. Клиент взял в банке кредит 18000 руб. на год под 18%. Он должен погашать кредит, внося в банк ежемесячно одинаковую сумму денег с тем, чтобы через год выплатить всю сумму, взятую в кредит, вместе с процентами. Сколько он должен вносить в банк ежемесячно?

2. На графике показано изменение скорости велосипедиста на протяжении трёхчасовой поездки за город (по оси ординат откладывается скорость в км/ч, по оси абсцисс – время в часах). Определите по графику максимальную скорость велосипедиста во вторую половину пути.



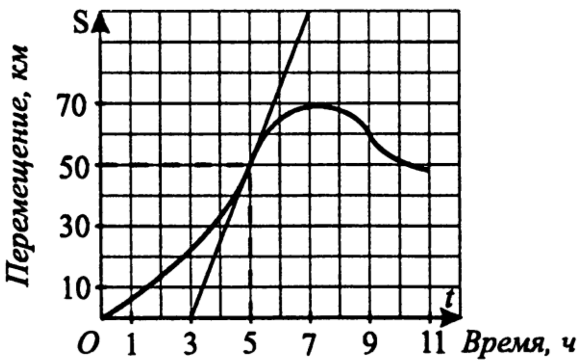
3. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 8 и 12, а угол между ними равен $30°$.

4. Биатлонист пять раз стреляет по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал по мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

5. Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{10}{7x-29}}=\dfrac{1}{3}$.

6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH – высота, $BC=15$, $BH=3\sqrt{21}$. Найдите $\cos A$.

7. На рисунке представлен график движения тела и касательная к графику в момент времени $t=5$. Определите по графику скорость движения тела (в км/ч) в этот момент времени.



8. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

9. Найдите значение выражения $54^{-3,9}\cdot 9^{4,9}:6^{-2,9}$.

10. При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 150$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \dfrac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c – скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 10$ м/с и $v = 15$ м/с – скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 160 Гц?

11. Расстояние между пристанями А и В равно 120 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошел 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите длину отрезка монотонности функции $f(x) = 50x^3 - 225x^2 - 756x + 931$, содержащего точку 0.

13. 1) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

2) Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

14. Найдите угол между прямой, проходящей через середины скрещивающихся рёбер правильной треугольной пирамиды, и плоскостью её основания. Боковое ребро пирамиды равно 29, сторона основания $20\sqrt{3}$.

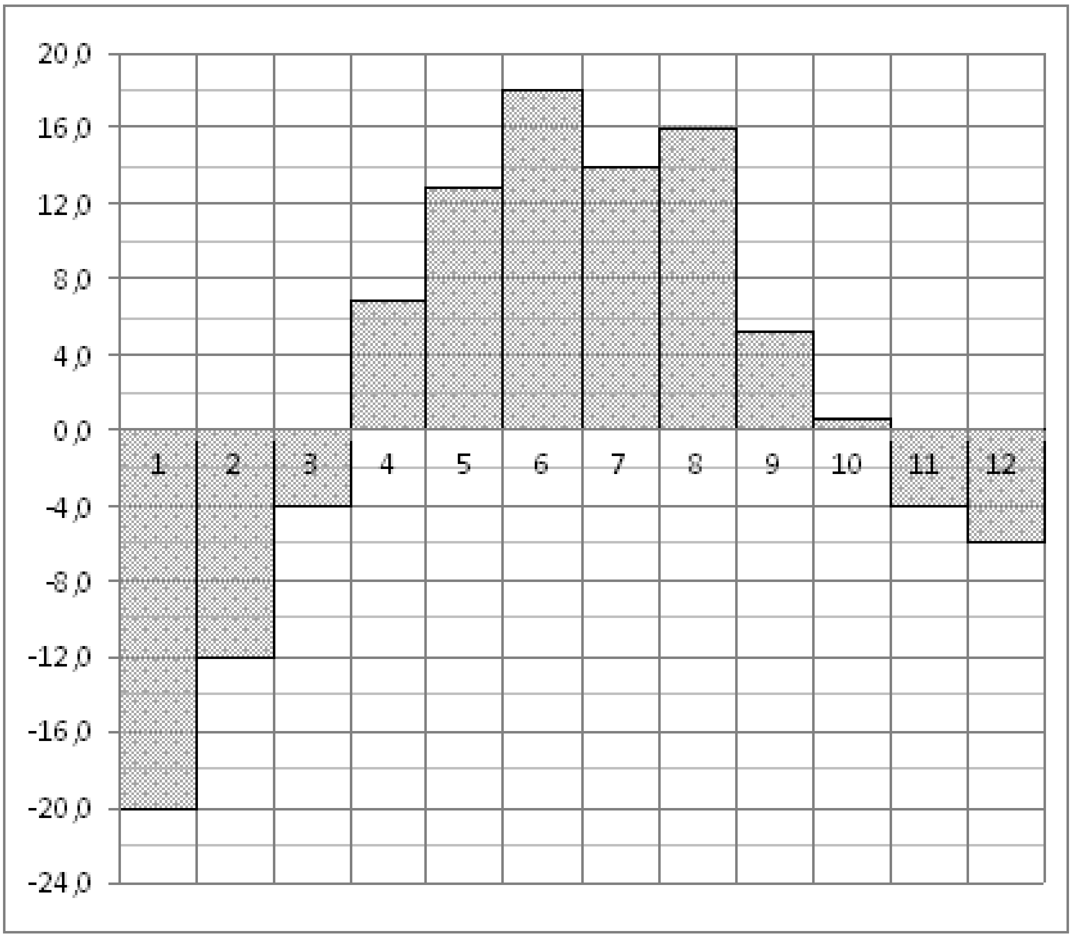
15. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} \geq 2\sqrt[4]{5}, \\ \log_3^2 x + 2 > 3\log_3 x. \end{cases}$

16. В треугольнике ABC $AB = 15$, $BC = 5$, $AC = 12$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 3 : 4$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F соответственно. Найдите длину отрезка EF.

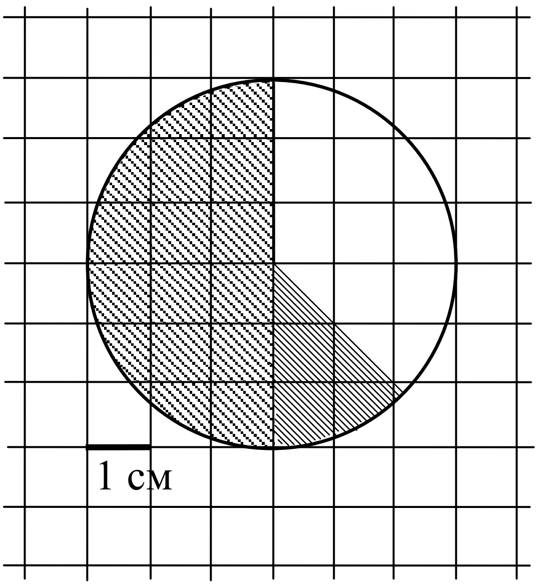
Вариант 22

1. Летом килограмм клубники стоит 80 рублей. Мама купила 1кг 200 г клубники. Сколько рублей сдачи она должна получить с 500 рублей?

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наибольшую среднемесячную температуру во второй половине 1973 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. На бумаге с клетками размером 1см х 1см изображена фигура. Найдите её площадь S в квадратных сантиметрах. В ответе запишите S/π.

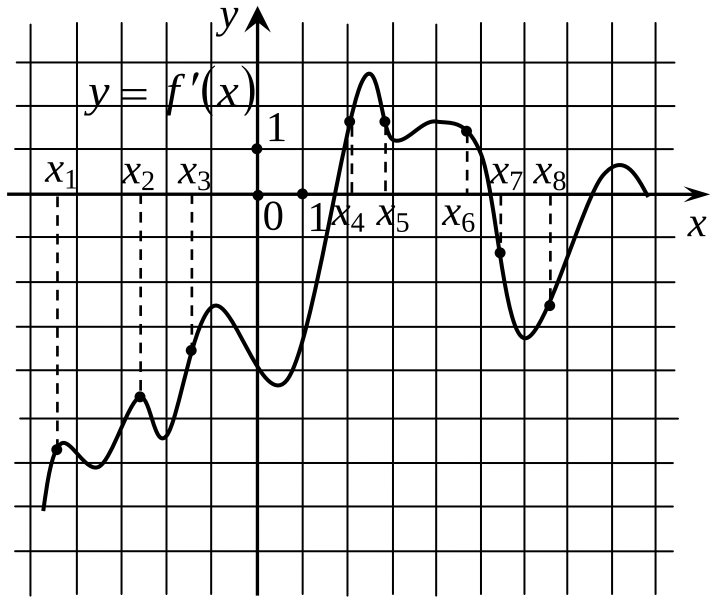


4. Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов – первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

5. Решите уравнение $\frac{x^2-9}{4x+5}=\frac{x^2-9}{5x+4}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из корней.

6. Один из внешних углов треугольника равен 80°. Углы треугольника, не смежные с данным внешним углом, относятся как 3:7. Найдите градусную меру большего из этих углов.

7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: x_1, x_2, x_3,..., x_8. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?



8. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1 и 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.

9. Найдите значение выражения $(7x-13)(7x+13)-49x^2+6x+22$ при $x=80$.

10. К источнику с ЭДС $\varepsilon=55$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}5$ Ом, хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U=\frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком наименьшем значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет не менее 50 В? Ответ выразите в омах.

11. Моторная лодка в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв в пункте В 2 часа 30 минут, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки, если известно, что скорость течения реки 1км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y=2x^3+2x^2-10x+1$ на отрезке $[-1;2]$.

13. 1)Решите уравнение $\sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1$.

2)Укажите корни, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 6, а боковые рёбра равны 12. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку C и середину ребра MA параллельно прямой BD.

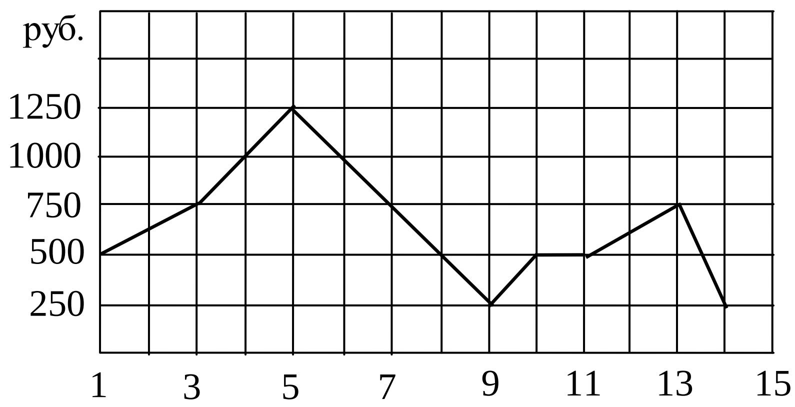
15. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{3-x}(x+1)\cdot\log_{x+5}(4-x) \ge 0, \\ \left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right|^{x-1,2} + \left|\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}\right|^{1,2-x} \le 2. \end{cases}$

16. *ABCD* – равнобедренная трапеция, *AD*=10, *BC*=2, *AB*=*CD*=5. Биссектриса угла *BAD* пересекает продолжение стороны *BC* в точке *K*. Требуется найти длину биссектрисы угла *B* в треугольнике *ABK*.

Вариант 23

1. Теплоход рассчитан на 1100 пассажиров и 35 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 90 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и членов команды?

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели июня. В первую неделю бизнесмен купил 12 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить?



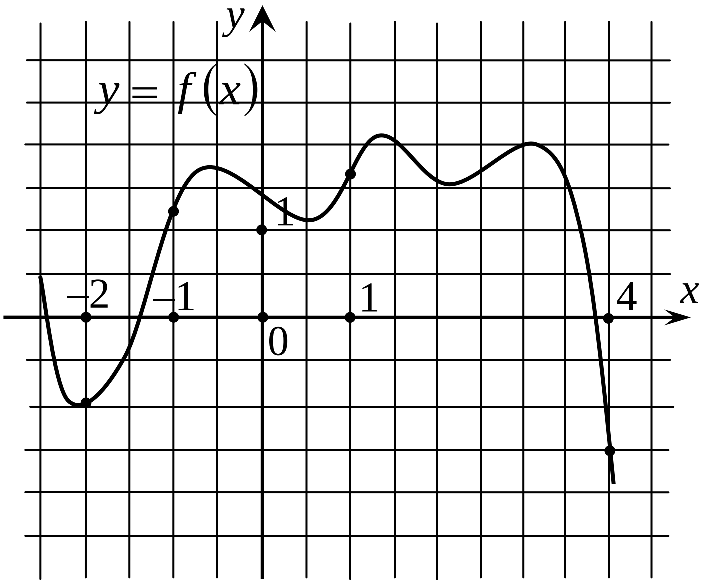
3. Основания трапеции равны 1 и 3, высота – 1. Найдите площадь трапеции.

4. Игральный кубик бросают дважды. Какова вероятность того, что шестёрка выпадет только один раз? Ответ округлите до тысячных.

5. Решите уравнение $x^2 - 15 = (15 - x)^2$.

6. Градусные меры углов треугольника относятся как 2:3:5. Найдите градусную меру меньшего из углов треугольника.

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки –2, –1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



8. Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы, описанной около цилиндра, радиус основания которого равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2.

9. Найдите значение выражения $\sqrt[3]{4-\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{4+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{121}$.

10. При температуре $0°C$ рельс имеет длину $l_0 = 10м$. При прокладке путей между рельсами оставили зазор в 4,5 мм. При возрастании температуры будет происходить тепловое расширение рельса, и его длина будет меняться по закону $l(t°) = l_0(1+\alpha \cdot t°)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\left(°C^{-1}\right)$ – коэффициент теплового расширения, $t°$ – температура (в градусах Цельсия). При какой минимальной температуре между рельсами исчезнет зазор? (Ответ выразите в градусах Цельсия.)

11. Расстояние между городами А и В равно 150 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С. Ответ дайте в километрах.

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x^2 - 12x + 2\ln x + 3$ на отрезке $\left[\frac{12}{13}; \frac{14}{13}\right]$.

13. Решите уравнение $\sqrt{25 + \frac{12}{\log_x 9}} = 10 \cdot \log_9\left(\frac{1}{3}\sqrt[5]{x^3}\right)$.

14. Дана правильная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC. Сфера с центром в точке O, лежащей на ребре AA_1, пересекает ребро A_1B_1 в точке M и касается плоскостей ABC и BCC_1. Найдите длину стороны основания призмы, если $A_1O : AO = 3:5$ и $A_1M = 2\sqrt{3}$.

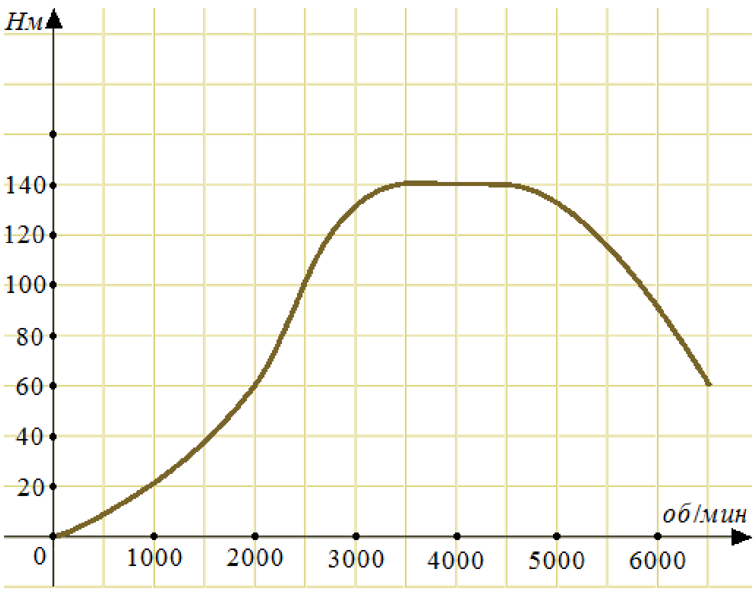
15. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{3-x}\dfrac{x+7}{(x-3)^4} \ge -4, \\ x^3+8x^2+\dfrac{18x^2+5x-15}{x-3} \le 5. \end{cases}$

16. Произвольный четырёхугольник разделен диагоналями на четыре треугольника. Площади трёх из них равны 10, 20 и 30, и каждая из них меньше площади четвертого треугольника. Найти площадь данного четырёхугольника.

Вариант 24

1. Флакон шампуня стоит 170 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1100 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?

2. На графике изображена зависимость крутящего момента автомобильного двигателя от числа его оборотов в минуту. На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту. На оси ординат – крутящий момент в Н·м. Чтобы автомобиль начал движение, крутящий момент должен быть не менее 60 Н·м. Какое наименьшее число оборотов двигателя в минуту достаточно, чтобы автомобиль начал движение?



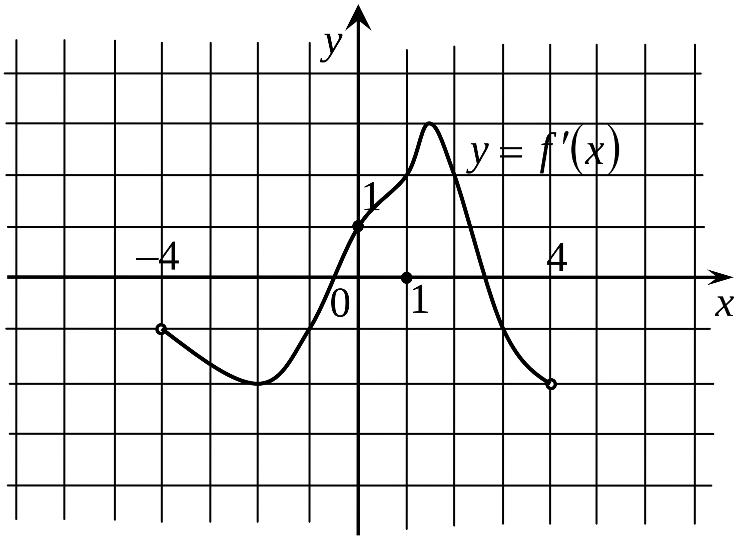
3. Найдите угловой коэффициент прямой, заданной уравнением $3x+4y=6$.

4. Из 10 изготовленных деталей 3 детали оказались с дефектами. Какова вероятность того, что взятые наугад 2 детали будут без дефектов? Ответ округлите до сотых.

5. Решите уравнение $0{,}1^{34-4x}=\frac{1}{10000}$.

6. Сумма двух углов параллелограмма равна $90°$. Найдите градусную меру большего из углов параллелограмма.

7. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-4;4)$. На рисунке изображён график её производной. Вычислите сумму абсцисс всех точек, в которых касательная к графику функции $y=f(x)$ параллельна прямой $y=-x$.



8. Середина ребра куба со стороной 1,9 является центром шара радиуса 0,95. Найдите площадь S части поверхности шара, лежащей внутри куба. В ответе запишите S/π.

9. Найдите значение выражения $8^{\sqrt{3}-9}\cdot 8^{12-\sqrt{3}}$.

10. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi=\omega t+\frac{\beta t^2}{2}$, где t – время в минутах, $\omega=20°/\text{мин}$ – начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta=4°/\text{мин}^2$ – угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $1200°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

11. Мясокомбинат выпускает паштет, состоящий из свинины, говядины и субпродуктов, массы которых относятся как 3:5:2 соответственно. Выпуск этого паштета планируется увеличить в 2,5 раза, при этом расход свинины и говядины планируется увеличить на 100% и 120% соответственно. Определите, сколько процентов от массы паштета будут составлять субпродукты, если реализовать этот план.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 6x + 4\ln x + 2$ на отрезке $[0{,}5;1{,}5]$.

13. 1) Решите уравнение $21^{-\sin x} = 3^{-\sin x} \cdot 7^{\cos x}$.

2) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi/2;0]$.

14. В кубе $A\ldots D_1$ точки E и F – середины рёбер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите тангенс угла между плоскостями AEF и BDD_1.

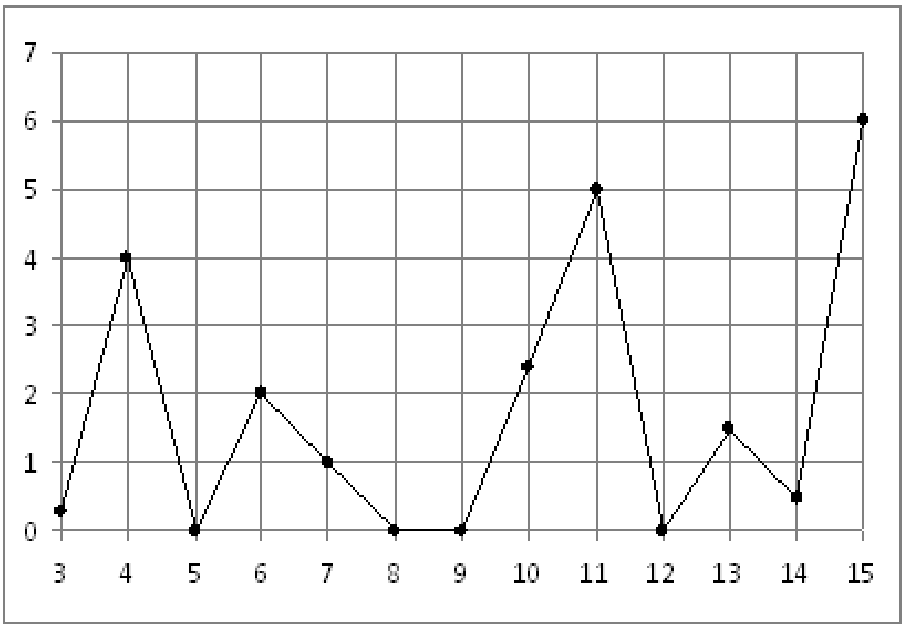
15. Решите неравенство $\dfrac{2\log_3(x+4)+1}{\log_3(x+4)-1} \geq \dfrac{2\log_5(30-x)+1}{\log_5(30-x)-1}$.

16. Точка O_1 – центр вписанной окружности треугольника ABC, а точка O_2 – центр окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Найдите длину BC, если $O_1O_2 = 12$, а $\sin\angle BO_2C = \dfrac{1}{3}$.

Вариант 25

1. В летнем лагере на каждого человека полагается 50 г сахара в день. В лагере 163 человека. Сколько килограммовых пачек сахара понадобится на весь лагерь на 7 дней?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа впервые выпало 5 миллиметров осадков.



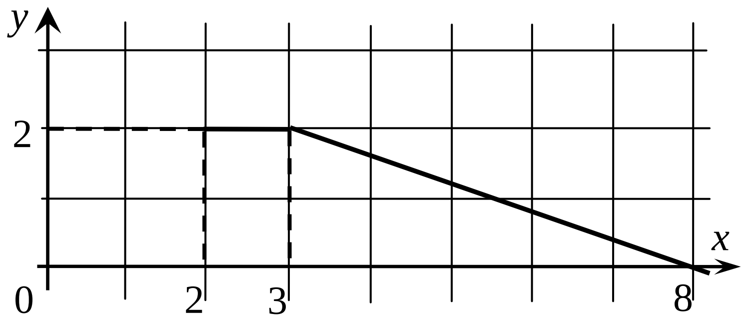
3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (0; 0), (1; 3), (4; 1), (5; 4).

4. Сколько пятизначных чисел можно записать при помощи цифр 5,6,7,8,9 без повторения цифр?

5. Решите уравнение $\sqrt{88+8x}=8$.

6. В треугольнике ABC угол A равен $50°$, внешний угол при вершине B равен $94°$. Найдите градусную меру угла C.

7. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$. Пользуясь рисунком, вычислите $F(8)-F(2)$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$.



8. В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили воду. Высота уровня воды равна 90 см. На какой высоте (в см) будет находиться уровень воды, если её перелить в другой сосуд такой же формы, у которого сторона основания в 3 раза больше, чем у первого?

9. Найдите значение выражения $\left(\frac{5}{6}+2\frac{2}{5}\right)\cdot 7{,}5$.

10. Для поддержания навеса планируется использовать цилиндрическую колонну. Давление P (в паскалях), оказываемое навесом и колонной на опору, определяется по формуле $P=\frac{4mg}{\pi D^2}$, где $m=1200$ кг – общая масса навеса и колонны, D – диаметр колонны (в метрах). Считая ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2, а $\pi=3$, определите наименьший возможный диаметр колонны, если давление, оказываемое на опору, не должно быть больше 400000 Па. Ответ выразите в метрах.

11. Две бригады за час совместной работы могут засеять поле площадью 6 гектар. Работая отдельно, первая бригада может засеять поле площадью 12 гектар на 3 часа быстрее, чем это сделает вторая бригада. За сколько часов, работая отдельно, вторая бригада засеет поле площадью 5 гектар?

12. Найдите наименьшее значение функции $y=3x-\ln(x+3)^3$ на промежутке $(-3;3)$.

13. Решите уравнение $\sqrt{4^x-5\cdot 2^{x+1}+25}+\sqrt{4^x-2^{x+3}+7}=2^x-5$.

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ высота AA_1 в два раза длиннее стороны основания. Найдите объём призмы, если расстояние между серединами рёбер AD и A_1B_1 равно $6\sqrt{2}$.

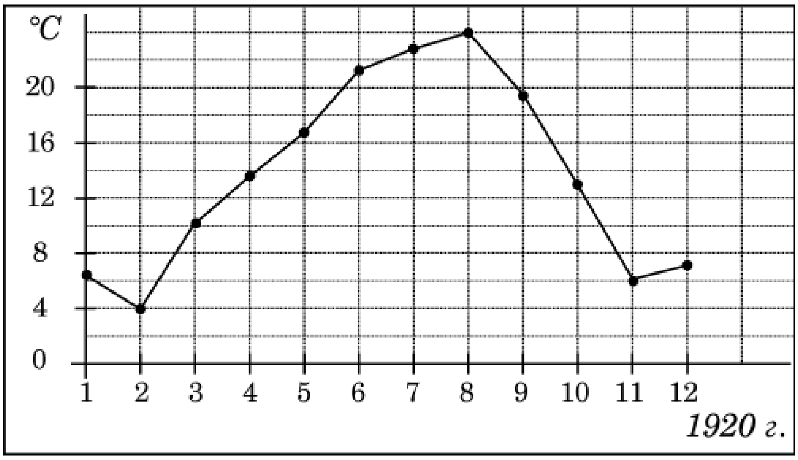
15. Решите неравенство $\dfrac{\log_{4x}(2^x-1)}{\log_{2x}(4^x-1)} \geq 0$.

16. Из вершины B параллелограмма $ABCD$ проведены его высоты BM и BN, H – точка пересечения высот треугольника BMN. Найдите длину отрезка BH, если известно, что $MN=15$, $BD=17$.

Вариант 26

1. Магазин покупает цветочные горшки по оптовой цене 100 рублей за штуку и продаёт с наценкой 30%. Какое наибольшее число горшков можно купить в этом магазине на 1200 рублей?

2. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 1920 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (0; 0), (2; 2), (5; 1), (6; –2).

4. Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

5. Решите уравнение $\log_{1/27}(4x+1)=-1$.

6. В треугольнике ABC внешние углы при вершинах B и C равны $106°$ и $131°$ соответственно. Найдите градусную меру угла A.

7. На рисунке изображён график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ – одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

8. Цилиндр и конус имеют общее основание, вершина конуса лежит на оси цилиндра, высота конуса относится к высоте цилиндра как 3:4. Найдите объём цилиндра, если объём конуса равен 30.

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{3\frac{1}{3}} - \sqrt{7\frac{1}{2}}\right) : \sqrt{\frac{5}{24}}$.

10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана – Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P = \sigma S T^4$, где $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}$ – постоянная, площадь измеряется в квадратных метрах, температура – в градусах Кельвина, а мощность – в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{648} \cdot 10^{20} м^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $1{,}824 \cdot 10^{26}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды.

11. Две конвейерные линии по упаковке готовой продукции за час совместной работы упаковывают 6000 единиц продукции. Первой из этих линий для упаковки 6000 единиц продукции требуется на час больше, чем требуется второй линии для упаковки 8000 единиц продукции. Сколько единиц продукции упаковывает за час вторая линия?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 4x + \ln(2 - x)^4$ на отрезке $[-1{,}5; 1{,}5]$.

13. Решите уравнение $5x - |x| \cdot \sqrt{25 - \frac{60}{x+4}} + 6 = 0$.

14. Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в основании которой лежит квадрат, а боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом $60°$. Боковая грань AA_1D_1D перпендикулярна плоскости основания, а её площадь равна $3\sqrt{3}$. Найдите площадь боковой грани AA_1B_1B.

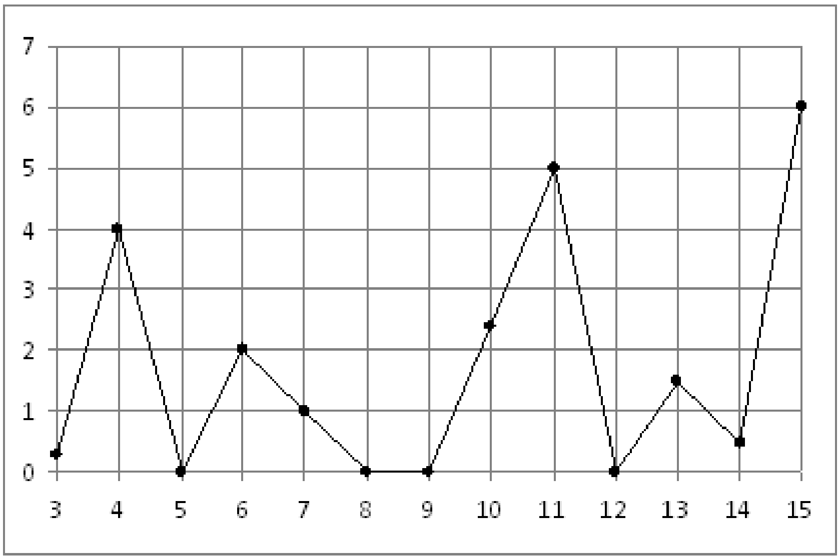
15. Решите неравенство $3^{x^2-4x-5}+\log_3\dfrac{x-3}{6}\le 0$.

16. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB=20,\ BC=8$ на стороне AB взята точка L так, что $AL=4$. На стороне AD взяты такие точки M и N, что $AM=3,\ DN=1$. Найдите площадь треугольника MNP, где P – точка пересечения отрезков LN и CM.

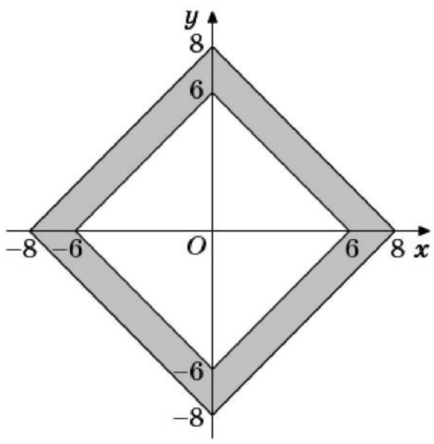
Вариант 27

1. В городе N живёт 300000 жителей. Среди них 20% детей и подростков. Среди взрослых 35% не работает (пенсионеры, студенты, домохозяйки и т.п.). Сколько взрослых работает?

2. На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, сколько дней из данного периода не выпадало осадков.



3. Найдите площадь закрашенной фигуры на координатной плоскости.

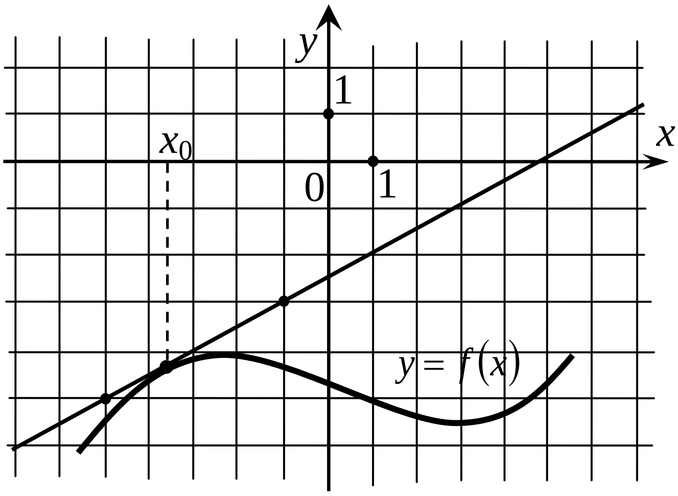


4. В классе 26 человек, среди них два близнеца – Андрей и Сергей. Класс случайным образом делят на две группы по 13 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Андрей и Сергей окажутся в одной группе.

5. Решите уравнение $9^{x+5} = 0{,}03 \cdot 10^{2x+11}$.

6. Больший из острых углов прямоугольного треугольника равен $62°$. Найдите градусную меру угла между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла.

7. На рисунке изображён график функции f и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



8. Объём куба равен 8. Найдите площадь его поверхности.

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[3]{b} \cdot \sqrt[6]{b}}{b\sqrt{b}}$ при $b = 1{,}6$.

10. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1{,}2 + 10t - 5t^2$ м. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более трёх метров?

11. Вере надо подписать 640 открыток. Ежедневно она подписывает на одно и то же количество открыток больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Вера подписала 10 открыток. Определите, сколько открыток было подписано за четвертый день, если вся работа была выполнена за 16 дней.

12. Найдите точку максимума функции $y = (x-6)^2\, e^{x-5}$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x - 2^y = 3 + \sqrt{5x - x^2}, \\ y - \log_2\left(x^2 - 1\right) = 0. \end{cases}$

14. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, точки E, F – середины ребер SB и SC. Найдите косинус угла между прямыми AE и BF.

15. Решите неравенство $\frac{1}{2}\log_{4+x}\left(x^2+2x+1\right)+\log_{-x-1}\left(-x^2-5x-4\right)\leq 3$.

16. Четырёхугольник $ABCD$ – параллелограмм. Окружность, проходящая через вершины B, C и D, касается прямой AD и пересекает прямую AB в точках B и E. AD=4, CE=5. Требуется найти длину отрезка AE.

17. Пакет ценных бумаг состоит из акций двух компаний. Если стоимость акций первой компании увеличится на 30%, а второй – уменьшится на 20%, то общая стоимость пакета увеличится на 10%. На сколько процентов изменится общая стоимость пакета, если стоимость акций первой компании уменьшится на 20%, а стоимость акций второй компании увеличится на 30%?

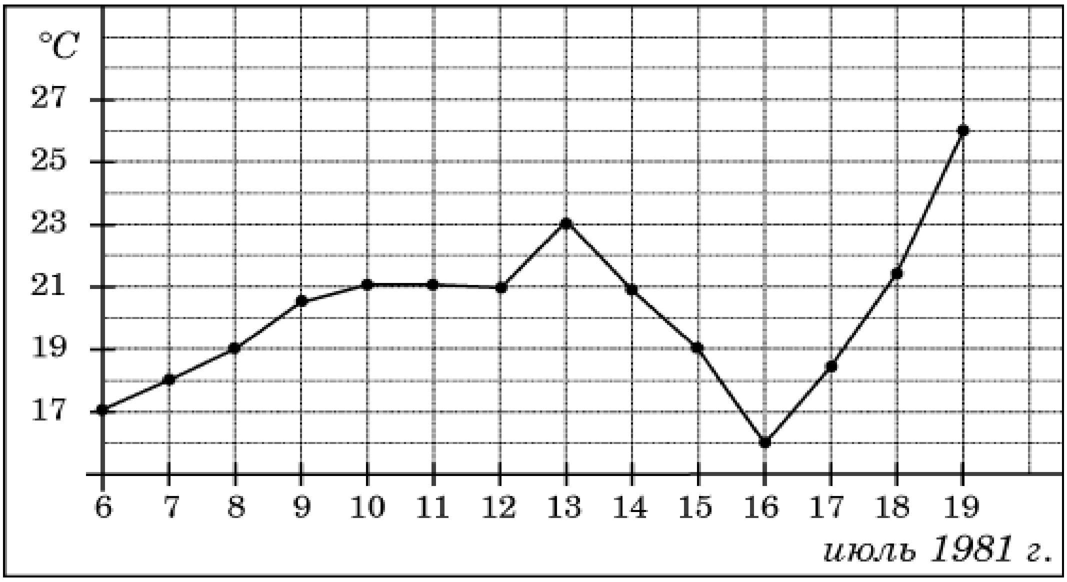
18. Найдите все целые a и b, для которых один из корней уравнения $3x^2+ax^2+bx+12=0$ равен $1+\sqrt{3}$.

19. Найдите все натуральные числа, являющиеся степенью двойки, такие, что после зачёркивания первой цифры их десятичной записи снова получается десятичная запись числа, являющегося степенью двойки.

Вариант 28

1. Цена на электрический чайник была повышена на 22% и составила 1830 рублей. Сколько рублей стоил чайник до повышения цены?

2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку, какая была температура 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. Найдите абсциссу точки пересечения прямых, заданных уравнениями $y=x$ и $3x+2y=6$.

4. В Волшебной стране бывает два типа погоды: хорошая и отличная, причём погода, установившись утром, держится неизменной весь день. Известно, что с вероятностью 0,8 погода завтра будет такой же, как и сегодня. Сегодня 3 июля, погода в Волшебной стране хорошая. Найдите вероятность того, что 6 июля в Волшебной стране будет отличная погода.

5. Решите уравнение $\log_{1-2x}\dfrac{9}{4}=2$.

6. Длины двух сторон прямоугольника относятся как 8:15, а его периметр равен 138. Найдите диагональ прямоугольника.

7. В точке A графика функции $y=-x^2+4x+11$ проведена касательная к нему, параллельная прямой $y=1-2x$. Найдите сумму координат точки A.

8. Объём правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равен 65. Точка E лежит на ребре SB и делит его в отношении 3:2, считая от вершины S. Найдите объём треугольной пирамиды $EABC$.

9. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{16\dfrac{9}{10}}+\sqrt{19\dfrac{6}{10}}\right):\dfrac{1}{\sqrt{250}}$.

10. Операционная прибыль предприятия в краткосрочном периоде вычисляется по формуле $\pi(q)=q(p-v)-f$. Компания продаёт свою продукцию по цене $p=400$ руб. за штуку, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v=200$ руб., постоянные расходы предприятия $f=200000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объём производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше 300 000 руб. в месяц.

11. Товарный поезд каждую минуту проезжает на 750 метров меньше, чем скорый, и на путь в 180 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y=12x-3x^2-2x^3+5$ на отрезке $[-4;1]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^2+3^x=4+\sqrt{y^2-y+3}, \\ x-\log_3(1-y)=0. \end{cases}$

14. В правильной четырёхугольной пирамиде *SABCD*, все рёбра которой равны 1, точки *E, F* – середины рёбер *SB* и *SD*. Найдите косинус угла между прямыми *AE* и *CF*.

15. Решите неравенство $\log_{1-x}\left(1+x-2x^2\right)+\dfrac{1}{4}\log_{1+2x}\left(x^2-2x+1\right)^2\geq -1$.

16. Высоты треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Известно, что *CH=AB*. Найдите угол *ACB*.

17. Пенсионер хранит сбережения в двух коммерческих банках. Если величину вклада, хранящегося в первом банке, увеличить на 20%, а величину вклада, хранящегося во втором банке, увеличить на 40%, то общая сумма сбережений пенсионера возрастёт на 25%. На сколько процентов возрастёт общая сумма сбережений, если сумму вклада в первом банке увеличить на 40%, а сумму вклада во втором банке увеличить на 20%?

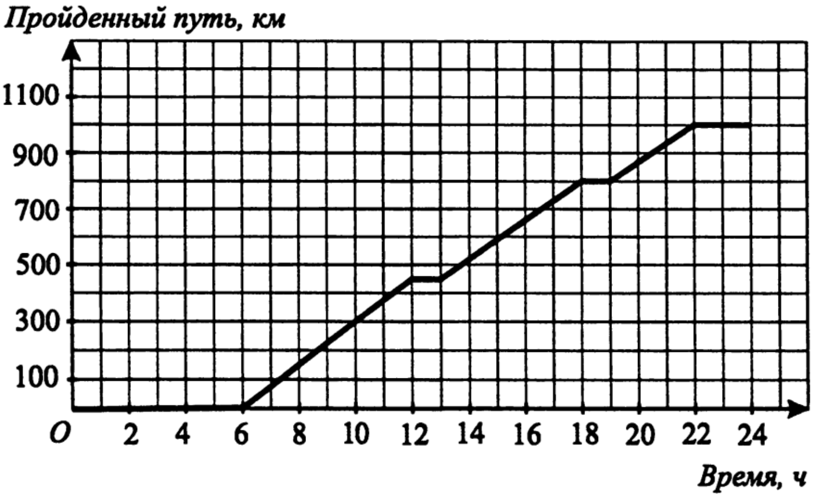
18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $3x+\left|2x+|a-x|\right|=7|x+2|$ имеет хотя бы один корень.

19. Решите в натуральных числах уравнение $n!+5n+13=k^2$, где $n!=1\cdot 2\cdot ...\cdot n$ – произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

Вариант 29

1. Футболка стоила 900 рублей. После снижения цены она стала стоить 684 рубля. На сколько процентов была снижена цена на футболку?

2. На рисунке приведён график движения автомобиля по трассе Ростов-на-Дону – Красноярск в течение первых суток. Какое расстояние (в км) прошёл автомобиль с 12:00 до 19:00?



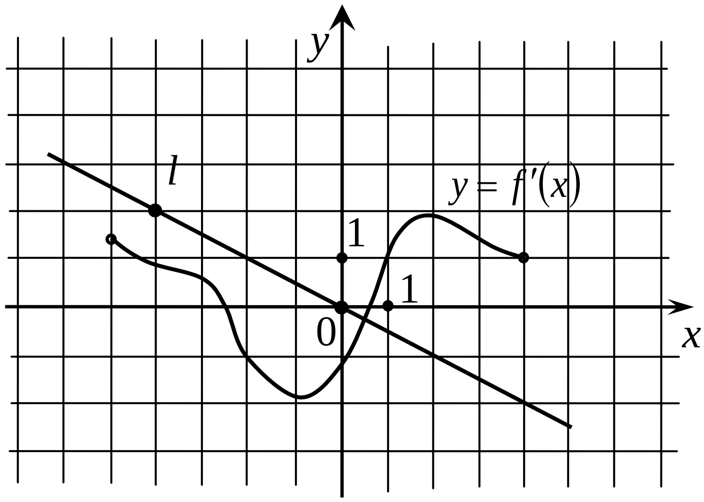
3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты (1; 3), (6; 1), (7; 5), (9; 2).

4. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10 (из них 3 стандартные), а во втором – 15 (из них 6 стандартные). Из каждого ящика наугад берут по одной детали. Какова вероятность того, что среди выбранных деталей окажется хотя бы одна нестандартная?

5. Решите уравнение $\log_{1/7}(7-3x)=-2$.

6. Большее основание равнобедренной трапеции равно 12. Боковая сторона равна 5, синус острого угла равен 0,8. Найдите меньшее основание.

7. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-5;4)$. На рисунке изображён график её производной и прямая l. Найдите число касательных к графику функции $y=f(x)$, которые параллельны прямой l.



8. Около шара описан цилиндр, площадь поверхности которого равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

9. Найдите значение выражения $49^2 \cdot 4^3 : 196$.

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T}$, где m_0 – начальная масса изотопа, t (мин) – прошедшее от начального момента время, T – период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 40$ мг изотопа Z, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа будет не меньше 5 мг?

11. Смешали 70% раствор кислоты с 40% раствором той же кислоты и добавили 15 кг воды. Получили 37% раствор. Если бы вместо воды взяли 15 кг 20% раствора, то концентрация полученного раствора составила бы 43%. Сколько килограммов 70% раствора было взято?

12. Найдите наименьшее значение функции $y = 6\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ на отрезке $\left[\frac{7\pi}{12}; \pi\right]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + 2x^2 - \sqrt{2x^2 + x - 1} = 7, \\ 2\sin y = x. \end{cases}$

14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона BC основания равна $2\sqrt{3}$, а высота SH пирамиды равна 3. Точки M и N – середины рёбер CD и BC соответственно, а NT – высота пирамиды с вершиной N и основанием SCD.

а) Докажите, что точка T является серединой отрезка SM.

б) Найдите расстояние между прямыми NT и SC.

15. Решите неравенство $\log_{x-1}\left(-x^2 + 8x - 7\right) - \frac{1}{16}\log^2_{x-1}(x-7)^2 \geq 2$.

16. Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD*, точка *O* является точкой пересечения его диагоналей, *AB*=*AD*, *CA* – биссектриса угла *C*, $\angle BAD = 140°$, $\angle BOA = 110°$. Найдите величину угла *CDB*.

17. Стоимость товара сначала повысили на p%, а затем понизили на $p/2$%. Найдите наибольшее значение p, при котором в результате изменения цен стоимость товара уменьшится по сравнению с первоначальной не более чем на 37,5%.

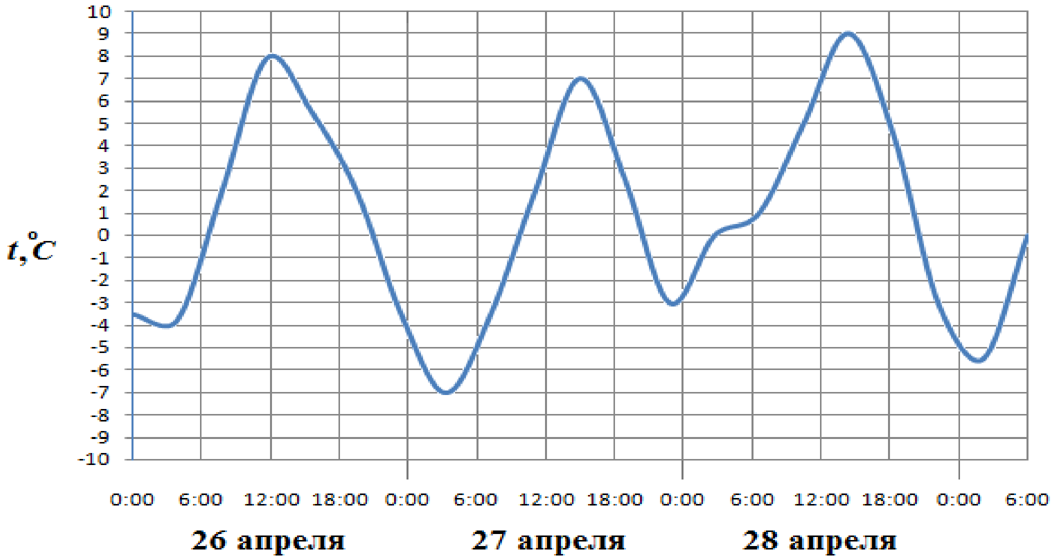
18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{-27 - 12x - x^2} = 7x + 3$ имеет единственный корень.

19. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и b на 42.

Вариант 30

1. Павел Иванович купил американский автомобиль, на спидометре которого скорость измеряется в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 20 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 27 апреля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



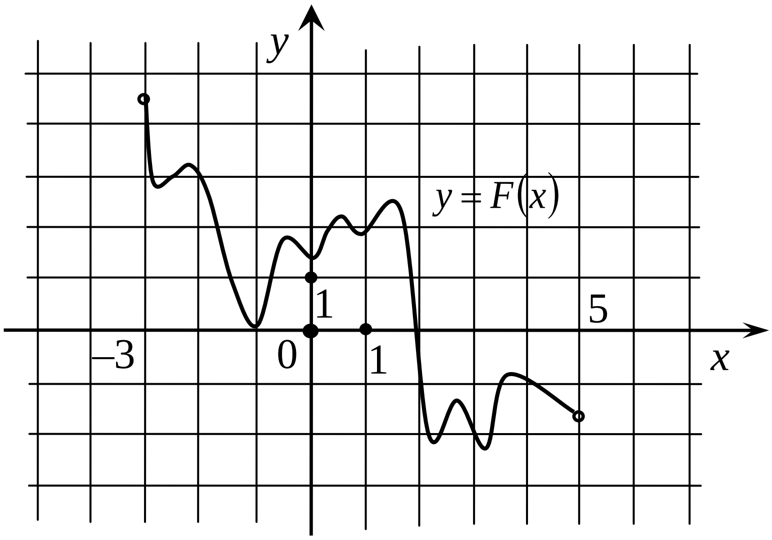
3. Найдите площадь треугольника, вершины которого имеют координаты (1;5), (5;6), (6;1).

4. В ящике лежат 8 белых и 12 красных одинаковых на ощупь шаров. Наугад выбирают 3 шара. Какова вероятность того, что хотя бы один из них белый? Результат округлите до десятых.

5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\frac{2\pi x}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 6. Высота трапеции равна 10. Тангенс острого угла равен 2. Найдите большее основание.

7. На рисунке изображён график функции $y=F(x)$ – одной из первообразных некоторой функции $y=F(x)$, определённой на интервале $y=F(x)$. Пользуясь рисунком, определите количество решений уравнения $f(x)$ на отрезке $[-2;4]$.



8. Стороны основания правильной шестиугольной пирамиды равны 10, боковые рёбра равны 13. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

9. Найдите значение выражения $x+3+\sqrt{x^2-6x+9}$ при $x=0{,}31$.

10. Точка движется по координатной прямой по закону $S(t)=0{,}25t^4-12t^2-3t+8$ (S – расстояние в сантиметрах, t – время в секундах, прошедшее с момента начала движения). В какой момент времени после начала движения ускорение точки будет равно $3 см/с^2$?

11. Магазин выставил на продажу товар с некоторой наценкой по отношению к закупочной цене. После продажи $4/5$ всего товара магазин снизил назначенную цену на 40% и распродал оставшийся товар. В результате прибыль магазина составила 38% от закупочной цены товара. Сколько процентов от закупочной цены составляла первоначальная наценка магазина?

12. Найдите наибольшее значение функции $y=7-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{5}-x\right)$ на отрезке $\left[-\frac{7\pi}{15};-\frac{\pi}{20}\right]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^4 - 2x^3y - 8x + 16y = 0, \\ \sqrt{x-4y} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{2y-1}. \end{cases}$

14. Точка M – середина ребра SC правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S. Высота SH пирамиды равна 12, а расстояние между прямыми SH и AB равно 4. Найдите тангенс угла между плоскостью ABM и плоскостью основания пирамиды.

15. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2}}{81^x - 28 \cdot 3^{2x+1} + 243} \geq 0$.

16. Около прямоугольника *ABCD* описана окружность. На окружности взята точка *M*, равноудалённая от вершин *A* и *B*. Отрезки *MC* и *AB* пересекаются в точке *E*.

1) Докажите равенство углов *BCM* и *ABM*.

2) Найдите площадь четырёхугольника *AMBC*, если $ME = 2$, $EC = 16$.

17. В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере *S* тыс. рублей.
– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остаётся равным *S* тыс. рублей;
– выплаты в 2020 и 2021 годах равны по 360 тыс. рублей;
– к июлю2021 года долг будет выплачен полностью.

Найдите общую сумму выплат за пять лет.

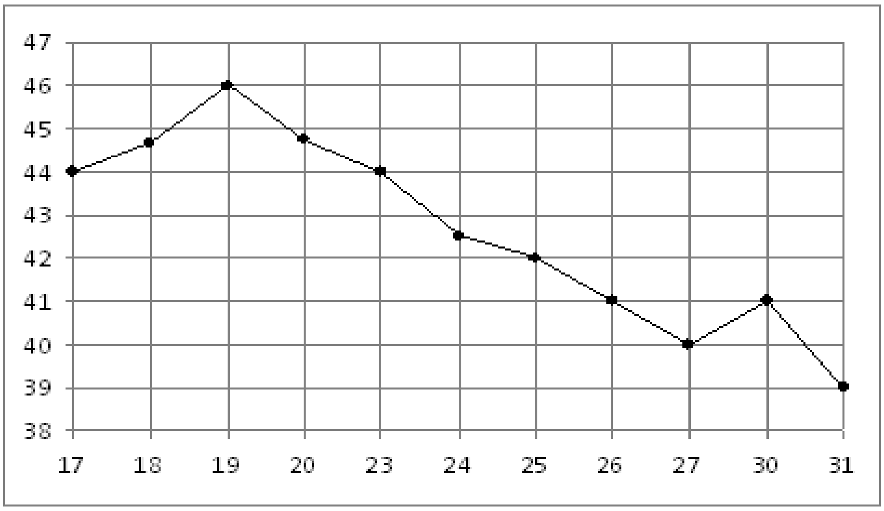
18. Найдите все значения параметра a, при которых для любого x из отрезка $[-5;5]$ справедливо неравенство $|a \cdot |x| - 6x + 12| \geq 2$.

19. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых выполнено равенство $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Вариант 31

1. Среди 40000 жителей города 60% не интересуются футболом. Среди футбольных болельщиков 80% смотрели по телевизору финал Лиги чемпионов. Сколько жителей города смотрело этот матч?

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали – цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



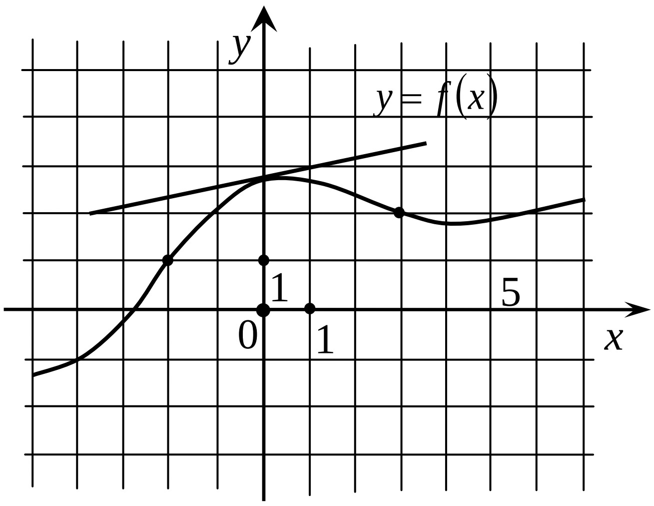
3. На координатной плоскости даны точки $A(2;3)$, $B(6;5)$, $C(9;9)$. Найдите тангенс угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

4. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос на тему «Параллелограмм», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

5. Решите уравнение $\dfrac{x+8}{x^2+5x}=\dfrac{x+8}{6x^2+7x}$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите больший из них.

6. В треугольнике ABC угол C равен $20°$, AD – биссектриса угла A, угол B больше угла ADB в шесть раз. Найдите градусную меру угла B.

7. На рисунке изображены участки графика функции $y=f(x)$ и касательной к нему в точке с абсциссой $x=0$. Известно, что данная касательная параллельна прямой, проходящей через точки графика с абсциссами $x=-2$ и $x=3$. Используя это, найдите значение производной $f'(0)$.



8. Площадь поверхности шара равна 1. Найдите площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр.

9. Найдите значение выражения $\dfrac{g(3-x)}{g(3+x)}$, где $g(x)=\sqrt[5]{x\cdot(6-x)}$, $|x|\neq 3$.

10. От старта отъезжают две игрушечные машинки и некоторое время движутся по законам $S_1(t)=0{,}25t$ и $S_2(t)=1{,}25t-0{,}25t^2$. На каком расстоянии от старта они поравняются?

11. Из чаши, содержащей 300 граммов 6% раствора уксусной кислоты, отлили некоторое количество этого раствора и добавили такое же количество воды. Определите, сколько граммов воды было добавлено, если известно, что в результате получился 2% раствор.

12. Найдите наименьшее значение функции $y=5x-\ln(5x)+10$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{15};\dfrac{2}{5}\right]$.

13. Найдите все решения уравнения $\left|\cos x-\dfrac{1}{4}\right|=8\cos^2\dfrac{x}{2}-5$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

14. В единичном кубе $A\ldots D_1$ найдите расстояние между прямыми BA_1 и AC.

15. Решите систему неравенств $\begin{cases}\log_2(21-x)+\log_{0,5}(x-1)\geq\log_{\sqrt{2}}3,\\ 0{,}5^{\sqrt{2x+3}}<2^{-x}.\end{cases}$

16. Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC.

17. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\dfrac{1}{9}$% и, наконец, 12,5% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\dfrac{1}{6}$%. Определите срок хранения вклада.

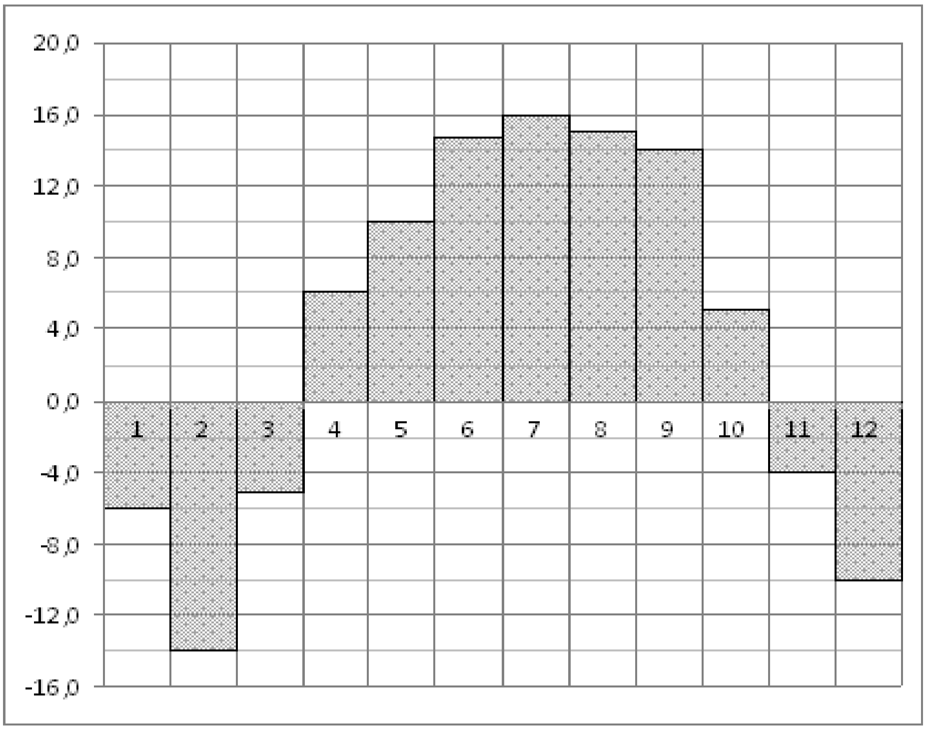
18. Найдите все положительные a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\ (x-2)^2+y^2=a^2\end{cases}$ имеет единственное решение

19. Найдите все пары пятизначных чисел x, y, такие, что число $\overline{xy}$, полученное приписыванием десятичной записи числа y после десятичной записи числа x, делится на xy.

Вариант 32

1. В доме, в котором живёт Миша, 9 этажей и несколько подъездов. На каждом этаже находится по 4 квартиры. Миша живёт в квартире № 130. В каком подъезде живёт Миша?

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



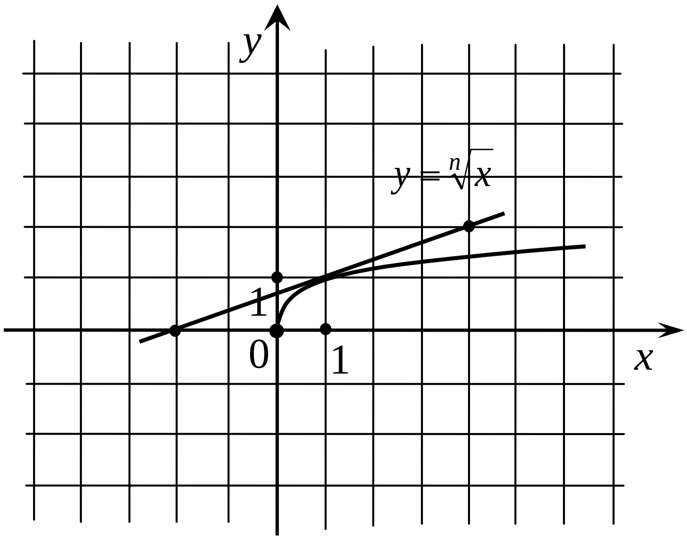
3. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки с координатами (–2, 0) и (0, 2).

4. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 16 очков. Результат округлите до сотых.

5. Решите уравнение $\log_7\left(\dfrac{3x+8}{7}\right)=5\log_7 2$.

6. В окружности проведены диаметр AB и пересекающая этот диаметр хорда CD. Угол ABC равен $55°$. Найдите градусную меру угла BAC.

7. На рисунке изображён участок графика функции $y=\sqrt[n]{x}$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой $x=1$. Используя данный рисунок, определите, чему равно n.



8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 2 раза?

9. Найдите значение выражения $\dfrac{x^2+10x}{x^2+x-90}$ при $x=8{,}98$.

10. При игре в бадминтон высота (в метрах), на которой находится волан, описывается формулой $h(t)=2+4t-t^2$. Сколько секунд волан находится на высоте не менее 5 метров?

11. В бидоне было 3 литра молока жирностью 8%. Через сутки из бидона слили 0,5 литра выделившихся сливок. Определите жирность оставшегося в бидоне молока, если жирность сливок составила 12 %.

12. Найдите наибольшее значение функции $y=1-6x+\ln(6x)$ на отрезке $\left[\dfrac{1}{12};\dfrac{1}{3}\right]$.

13. Найдите все решения уравнения $\left|\dfrac{3}{5}-\sin^2\dfrac{x}{2}\right|=5\cos x+1$ на отрезке $[-\pi;\pi]$.

14. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, стороны основания которой равны 6. Угол между прямыми DM и AL, L – середина ребра MB, равен $60°$. Найдите высоту данной пирамиды.

15. Решите неравенство $\log_2^2\left(x^2-2x\right)+\log_{0,5}\left(x^2-2x\right)^3+2\le 0$.

16. В равнобочной трапеции $ABCD$ с высотой 12 точка O лежит на середине меньшего основания BC. При этом OA биссектриса угла A и $OA=20$. Найдите меньшее основание трапеции.

17. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

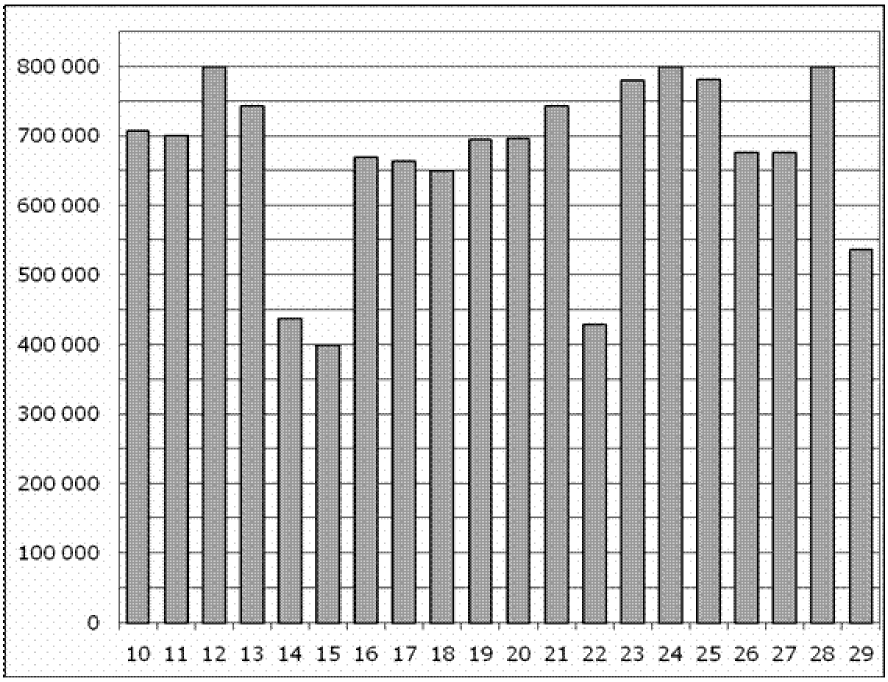
18. Найти все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} y - x^2 = a, \\ x - y^2 = a \end{cases}$ имеет ровно два решения.

19. Найдите все пары натуральных чисел m и n, для которых выполнено равенство $3^m + 7 = 2^n$.

Вариант 33

1. Только 94% из 27 500 выпускников города правильно решили задачу В1. Сколько человек правильно решили задачу В1?

2. На диаграмме показано количество посетителей сайта РИА «Новости» во все дни с 10 по 29 ноября 2009 года. По горизонтали указываются дни месяца, по вертикали – количество посетителей сайта за данный день. Определите по диаграмме, какого числа количество посетителей сайта РИА «Новости» впервые приняло наименьшее значение.



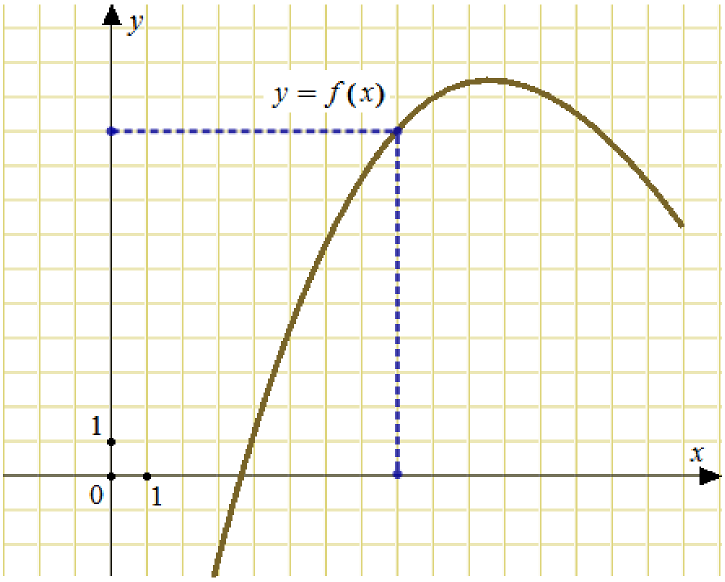
3. Найдите площадь квадрата, если его диагональ равна 1.

4. В коробке с новогодними украшениями лежат 15 красных, 3 зелёных, 6 жёлтых и 9 лиловых шаров. Какое наименьшее число красных шаров нужно вынуть из этой коробки, чтобы после этого вероятность наугад достать лиловый шар была больше 0,4?

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{\pi(x+1)}{12} = -\frac{1}{2}$.

6. Градусные меры углов четырёхугольника относятся как 3:4:5:6. Найдите градусную меру меньшего из углов четырёхугольника.

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f'(8)$.



8. Радиус окружности, вписанной в основание правильной четырёхугольной пирамиды, равен $4\sqrt{5}$, а длина бокового ребра пирамиды равна 14. Найдите высоту пирамиды.

9. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[5]{22}\cdot\sqrt[20]{22}}{\sqrt[4]{22}}$.

10. Два тела массой $m = 2$ кг каждое движутся с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, определяется выражением $Q = mv^2 \sin^2 \alpha$. Под каким наименьшим острым углом (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось не менее 50 джоулей?

11. Семья состоит из мужа, жены и их дочери–студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8$ на отрезке $\left[\dfrac{13}{14}; \dfrac{15}{14}\right]$.

13. Решите уравнение $\log_3^2(3x^2 + x + 1) - \log_{1/9}(9x^2 + 3x + 3) = 18{,}5$.

14. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, точка D – середина ребра A_1B_1. Найдите косинус угла между прямыми AD и BC_1.

15. Решите систему неравенств $\begin{cases} 9^x \le 5\cdot 3^{x+1}+16, \\ \log_2\left(x^2+2x-3\right) \ge 1+\log_2 \dfrac{x+3}{x-1}. \end{cases}$

16. Окружность касается сторон MN и MK прямоугольника $MNPK$ и проходит через вершину P. Сторону KP она пересекает в точке A. Найдите площадь трапеции $MNAK$, если $MN = 9$ и $NK = \sqrt{145}$.

17. Фирма решила повышать с 1 января цену на один и тот же товар в двух магазинах разными способами. В одном магазине – в начале каждого месяца (начиная с февраля) на 2%, в другом – через каждые два месяца, в начале третьего (начиная с марта) на одно и то же число процентов, причём такое, чтобы через полгода (1 июля) цены снова стали одинаковыми. На сколько процентов надо повышать цену товара через каждые два месяца во втором магазине?

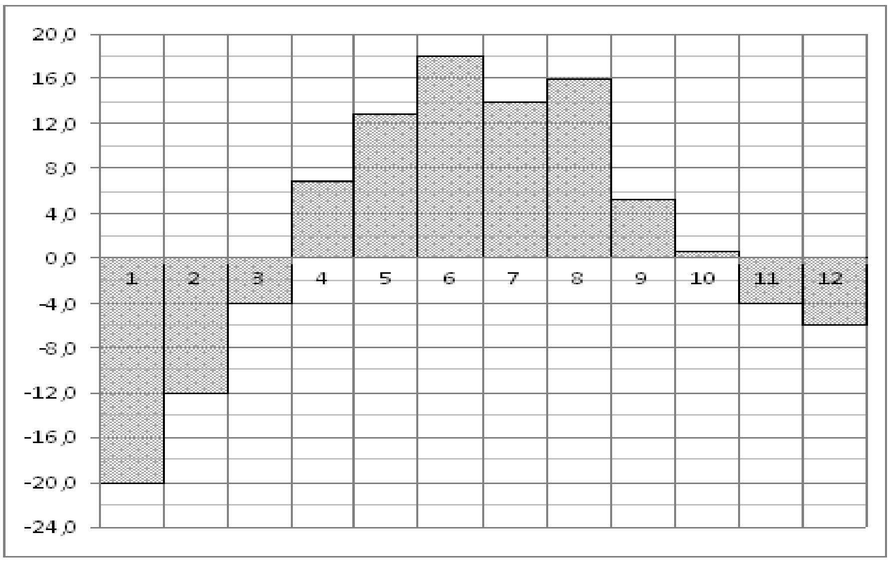
18. Найдите все такие значения a, что наименьшее значение функции $\left|x^2-(1+a)x+a\right|+(a-1)\left|x+1\right|$ меньше 2.

19. На экзамене группа студентов получила оценки 2, 3, 4, 5. Сумма всех оценок равна 58. Пятёрок на 2 меньше, чем четверок, а троек – на 4 больше, чем двоек. Определить, сколько студентов получили каждую из оценок.

Вариант 34

1. В школе 800 учеников, из них 30 % – ученики начальной школы. Среди учеников средней и старшей школы 20 % изучают немецкий язык. Сколько учеников в школе изучают немецкий язык, если в начальной школе немецкий язык не изучается?

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами в 1973 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 2.

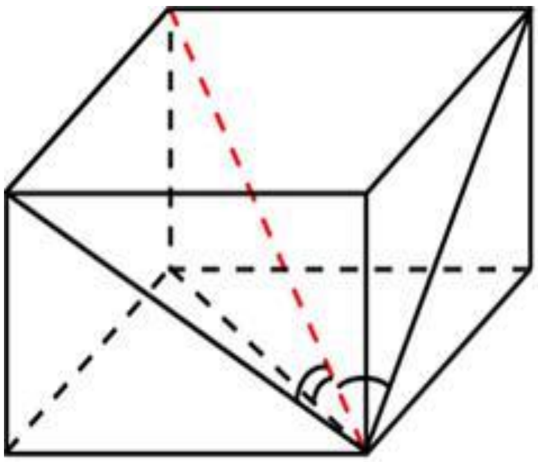
4. Трое стрелков, для которых вероятности попадания в цель соответственно равны 0,8, 0,75 и 0,7, делают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что только один из них попадёт в цель?

5. Решите уравнение $(x-6)^2=-24x$.

6. В треугольнике ABC $AC=BC=8\sqrt{5}, AB=16$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

7. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y=\varphi(x)$ в точке $T(4;10)$. Найти $\varphi'(4)$.

8. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует углы $30°$, $30°$ и $45°$ с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объём параллелепипеда.



9. Найдите значение выражения $\sin 945°\cdot\sin(-675°)$.

10. Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$ (м), где $v_0=20\,м/с-$ начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g=10\,м/с^2$). При каком наименьшем значении угла (в градусах) мячик перелетит реку шириной 20 м?

11. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена, если холодильник, выставленный на продажу за 20 000 рублей, через два года был продан за 15 842 рублей.

12. Найдите точку максимума функции $y=(x-2)^2e^{x-6}$.

13. Решите уравнение $\log_5\left(15+\sqrt{x-5}\right)+\log_{\sqrt{x-5}+15}\left(25\left(\sqrt{x-5}+15\right)\right)=4$.

14. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1, причём $BE = 1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

15. Решите неравенство $\dfrac{2^{\sqrt{x-1}} - 3^{\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{4}}}{|x+1| - |x-13|} \geq 0$.

16. Четырёхугольник $MNPK$ вписан в окружность, его диагонали пересекаются в точке A. Найдите AP, если $NP = 6$, $MA = 9$, MP – биссектриса угла NMK и в четырёхугольник $MNPK$ можно вписать окружность.

17. Бизнесмен под офис отвел участок в виде прямоугольника. Однако затем он решил длину этого участка увеличить на 35% , а ширину уменьшить на 14% . На сколько процентов изменилась площадь офиса?

18. Найдите все значения a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} \left|x^2 - 7x + 6\right| + x^2 + 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-2)x + a(a-4) = 0. \end{cases}$$

19. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, встречается несколько раз, то на доске остаётся одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8.

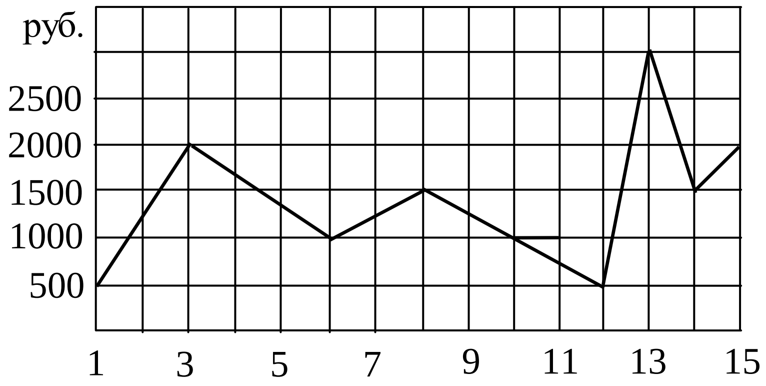
б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, при которых на доске будет записан набор 9, 10, 11, 19, 20, 21, 22, 30, 31, 32, 33, 41, 42, 43, 52.

Вариант 35

1. Сырок стоит 6 руб. 60 коп. Какое наибольшее число сырков можно купить на 80 рублей?

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций золотодобывающей компании в первой половине июля. 6 июля бизнесмен приобрёл пакет акций, а 14 июля продал его. В результате этих операций его прибыль составила 8000 рублей. Сколько акций было в пакете?



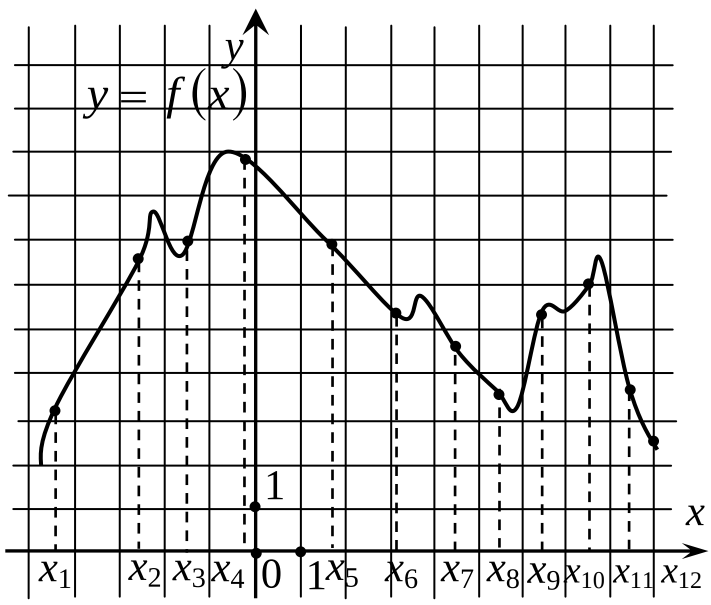
3. Прямая a проходит через точки с координатами (0, 4) и (6, 0). Прямая b проходит через точку с координатами (0, 8) и параллельна прямой a. Найдите абсциссу точки пересечения прямой b с осью Ox.

4. Два охотника стреляют одновременно и независимо друг от друга по мишени. Вероятность попадания равна соответственно 0,7 и 0,8. Какова вероятность того, что оба охотника попадут в мишень?

5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\cos\frac{\pi(8x+1)}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. В треугольнике ABC угол C равен $90°$, CH – высота, $AH=15$, $\operatorname{tg} A=0{,}6$. Найдите BH.

7. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8. Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 2. Найдите объём конуса.

9. Найдите значение выражения $\frac{f(x-4)}{f(x-7)}$, где $f(x)=3^x$.

10. Колебания грузика на пружине описываются формулой $l = 20 + 5\cos t$ (где l – длина пружины в сантиметрах, t – время, прошедшее с начала колебаний в секундах). Определите, сколько раз за первые 12 с длина пружины становилась равной 18 см.

11. Из городов А и В, расстояние между которыми равно 330 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 3 часа на расстоянии 180 км от города В. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города А. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наибольшее значение функции $y = 8\cos x + 4\sqrt{2}x - \sqrt{2}\pi + 4 - 4\sqrt{2}$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{2\pi^2 - x^2} - \sqrt{\pi^2 - 2y^2} = 0, \\ \sin(x - y) - \sin(x + y) = 0. \end{cases}$

14. Основанием прямой призмы является параллелограмм, стороны которого равны 3 и $2\sqrt{3}$, а один из углов равен $30°$. Найдите объём призмы, если известно, что её меньшая диагональ равна $\sqrt{6}$.

15. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{36 - 9^{-x}}{9 - 3^{-x}} \geq 4, \\ \log_{x^2}(x + 2) \leq 1. \end{cases}$

16. Квадрат $ABCD$ вписан в окружность. Хорда CE пересекает его диагональ BD в точке K.

а) Докажите, что $CK \cdot CE = AB \cdot CD$.

б) Найдите отношение CK к KE, если $\angle BCD = 15°$.

17. Домохозяйка, желая за 3 года накопить средства на покупку нового телевизора, поместила в банк вклад в размере 5000 рублей под 20% годовых. В конце каждого из первых двух лет домохозяйка после начисления ей банком процентов наметила дополнительно вносить на свой счёт одну и ту же фиксированную сумму. Какую сумму необходимо ежегодно вносить вкладчице, чтобы окончательный размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным вкладом на 284%?

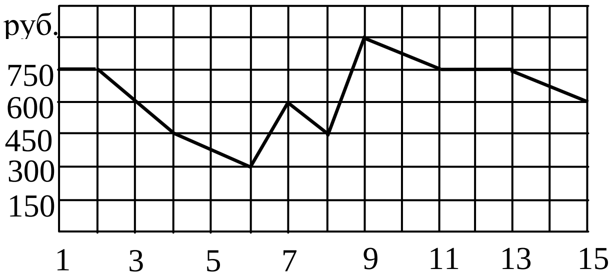
18. Найти все значения a, при каждом из которых функция $f(x) = x^2 + 4x + \left|x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1\right| - a$ принимает только неотрицательные значения.

19. Найдите все такие натуральные числа n, что десятичная запись каждого из чисел $\dfrac{1}{n}$ и $\dfrac{1}{n+4}$ содержит конечное число знаков.

Вариант 36

1. Рост Гарри 5 футов 7 дюймов. Выразите рост Гарри в сантиметрах, если 1 фут равен 0,305 м, а 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтедобывающей компании в первой половине декабря. 5 декабря бизнесмен приобрёл пакет акций, а 10 декабря продал его. В результате этих операций его прибыль составила 6750 рублей. Сколько акций было в пакете?



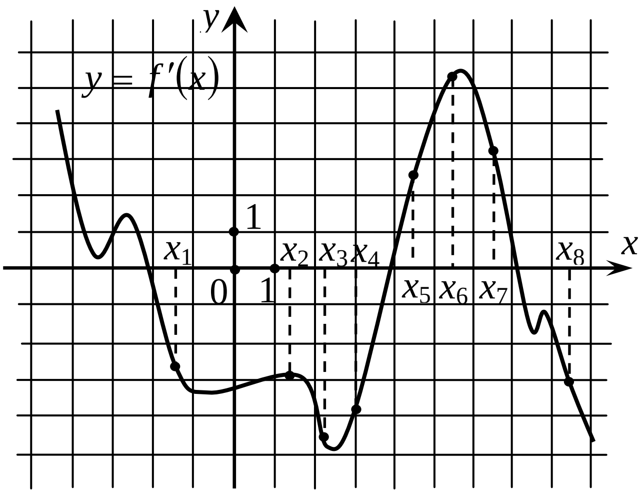
3. Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого имеют координаты $(1;4),(4;6),(8;1),(11;3)$.

4. В коробке 6 белых и 5 чёрных шаров. Из коробки вынимают один шар и откладывают его в сторону, он оказывается белым. После этого из коробки вынимают ещё один шар. Какова вероятность того, что он тоже окажется белым?

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin\frac{5\pi x}{9}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. Основания трапеции относятся как 3:4, а средняя линия равна 28. Найдите большее основание трапеции.

7. На рисунке изображён график $y=f'(x)$ производной функции $f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_8$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ убывает?



8. Объём шара равен $32\sqrt{3}\pi$. Найдите отношение площади сечения шара плоскостью, проходящей через его центр, к числу π.

9. Найдите значения выражения $x\cdot\left(100-9x^2\right)\cdot\left(\frac{1}{3x+10}-\frac{1}{3x-10}\right)$ при $x=14{,}5$.

10. Мяч ударился о стенку на высоте 3 метра, после этого мяч упал на землю по такой траектории, что расстояние до земли как функция расстояния до стенки выражалась формулой $h(d)=3-0{,}48d^2$ (все величины указаны в метрах). На каком расстоянии от стенки мяч коснулся земли (ответ также укажите в метрах)?

11. Стоимость приготовления клубничного джема складывается из стоимости клубники и стоимости сахара. В июне клубника подешевела на 60 %, а сахар подорожал на 20 %, по сравнению с апрелем, в результате чего стоимость приготовления джема снизилась на 50 %. Сколько процентов от стоимости приготовления джема в апреле составляла стоимость клубники?

12. Найдите наименьшее значение функции $y=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{2\pi}{3}+4x-\frac{8\sqrt{3}}{3}\sin x$ на отрезке $[0;\pi]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 81^{\sin y}-30\cdot 9^{\sin y}+81=0, \\ \sqrt{x}+2\cos y=0. \end{cases}$

14. Основанием прямой призмы является ромб, длина стороны которого равна 2, а больший из углов равен $120°$. Найдите длину меньшей диагонали призмы, если известно, что объём призмы равен 12.

15. Решите неравенство $\frac{\log_2\log_4(x+1)}{x^2-6x+8}\cdot\left(25^x-130\cdot 5^x+625\right)\geq 0$.

16. Окружность радиуса 12 вписана в равнобедренную трапецию. Точка касания окружности с боковой стороной трапеции делит эту сторону в отношении 1:4. Найдите периметр трапеции.

17. В январе численность сотрудников НИИОХ составила 25% от численности сотрудников НИИАХ. К декабрю того же года число сотрудников НИИАХ уменьшилось на 16%, а суммарное число сотрудников двух институтов уменьшилось на 18%. На сколько процентов уменьшилось число сотрудников НИИОХ?

180. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x\left(x^2+y^2-y-2\right)=|x|(y-2), \\ y=x+a \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

19. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку – целое число баллов от 1 до 14 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивая рейтинг кинофильма – это среднее арифметическое всех оценок эксперта. По новой системе оценивая рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{49}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{2}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Вариант 37

1. Тетрадь стоит 40 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 750 рублей после понижения цены на 10 %?

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций нефтедобывающей компании в первые две недели сентября. 3 сентября бизнесмен приобрёл 10 акций. Шесть из них он продал 10 сентября, а 12 сентября продал остальные 4. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?

3. В прямоугольнике $ABCD$ известны стороны $AB = 14,\ BC = 21$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

4. В магазине стоят два платёжных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,05 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

5. Решите уравнение $10^{21-6x} = 0{,}001$.

6. Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $150°$. Боковая сторона треугольника равна 20. Найдите площадь этого треугольника.

7. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $ax^2 + 2x + 3$. Найдите a.

8. Радиус окружности, вписанной в основание правильной шестиугольной пирамиды, равен 6, а длина бокового ребра пирамиды равна 7. Найдите высоту пирамиды.

9. Найдите значение выражения $\frac{24}{3^{\log_3 2}}$.

10. Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t – время в минутах, $\omega = 20°/мин$ – начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 4°/мин^2$ – угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $1200°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

11. Имеется два сплава. Первый сплав содержит 10 % никеля, второй – 30 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 200 кг, содержащий 25 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

12. Найдите наибольшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 9x - 7$ на отрезке $[-3;3]$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \cos y\sqrt{\sin x} = 0, \\ 2\sin^2 x = 2\cos^2 y + 1. \end{cases}$

14. В кубе $A \ldots D_1$ точки E, F – середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1D_1. Найдите синус угла между плоскостями AEF и BCC_1.

15. Решите неравенство $\frac{\log_2\left(3 \cdot 2^{x-1} - 1\right)}{x} \geq 1$.

16. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и углом α при вершине A. Точка D – середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке C относительно прямой BD. Найдите угол AC_1B.

17. Стоимость товара сначала понизили на p%, а затем повысили на $5p/4$%. Найдите наименьшее значение p, при котором в результате изменения цен стоимость товара уменьшится по сравнению с первоначальной не менее чем на 10%.

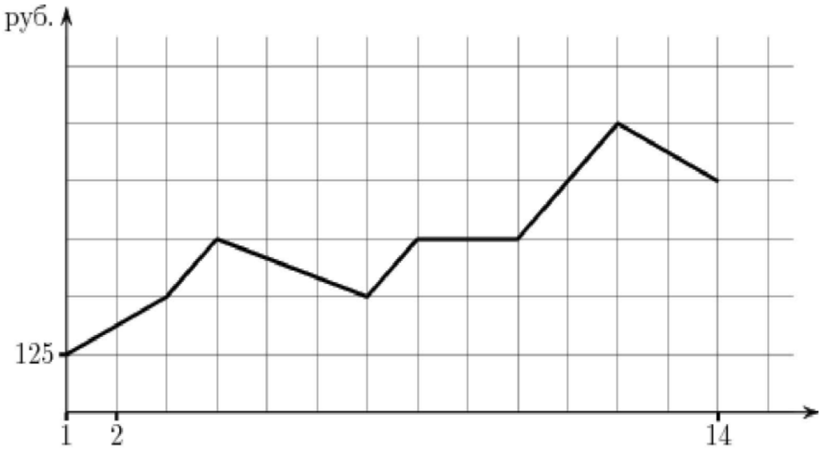
18. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2-6x+8\right|+\left|x^2-6x+5\right|=a$ имеет ровно три корня.

19. Найдите все такие целые a и b, что корни уравнения $x^2+(2a+9)x+3b+5=0$ являются различными целыми числами, а коэффициенты $2a+9$ и $3b+5$ – простыми числами.

Вариант 38

1. В сентябре 1 кг слив стоил 60 рублей. В октябре сливы подорожали на 25%. Сколько рублей стоил 1 кг слив после подорожания в октябре?

2. На графике, изображённом на рисунке, представлено изменение биржевой стоимости акций газодобывающей компании в первые две недели апреля. В первую неделю бизнесмен купил 14 акций, а потом продал их на второй неделе. Какую наибольшую прибыль он мог получить?



3. Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 10. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AF}$.

4. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.

5. Решите уравнение $2012^{-x}=0{,}1\cdot 10^{1-x}$.

6. Основания трапеции равны 7 и 14. Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции.

7. Прямая $y=-5x+8$ является касательной к графику функции $28x^2+bx+15$. Найдите b, учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

8. В цилиндрический сосуд налили 2000 см^3 воды. Уровень воды при этом достигает высоты 12 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 9 см. Чему равен объем детали? Ответ выразите в см^3.

9. Найдите значение выражения $7\cdot\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[6]{16}$.

10. Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R=6400$ км – радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 4 километров? Ответ выразите в метрах.

11. Рабочие прокладывают тоннель длиной 500 метров, ежедневно увеличивая норму прокладки на одно и то же число метров. Известно, что за первый день рабочие проложили 3 метра тоннеля. Определите, сколько метров тоннеля проложили рабочие в последний день, если вся работа была выполнена за 10 дней.

12. Найдите точку максимума функции $y=5+9x-\frac{x^3}{3}$.

13. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^y+2\cos x=0, \\ 2\sin^2-3\sin x-2=0. \end{cases}$

14. В правильной шестиугольной призме $A\ldots F_1$, все ребра которой равны 1, точка G – середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AG и плоскостью BDD_1.

15. Решите неравенство $\log_x\left(\log_9\left(3^x-9\right)\right)<1$.

16. Дана трапеция $ABCD$ с боковыми сторонами $AB=36, CD=34$ и верхним основанием $BC=10$. Известно, что $\cos\angle ABC=-\frac{1}{3}$. Найдите BD.

17. Герой романа И.А.Гончарова «Обломов» Илья Обломов за весну похудел на 25%, затем за лето прибавил 20%, за осень похудел на 10%, а за зиму прибавил 20%. Похудел или поправился за год Обломов и на сколько процентов?

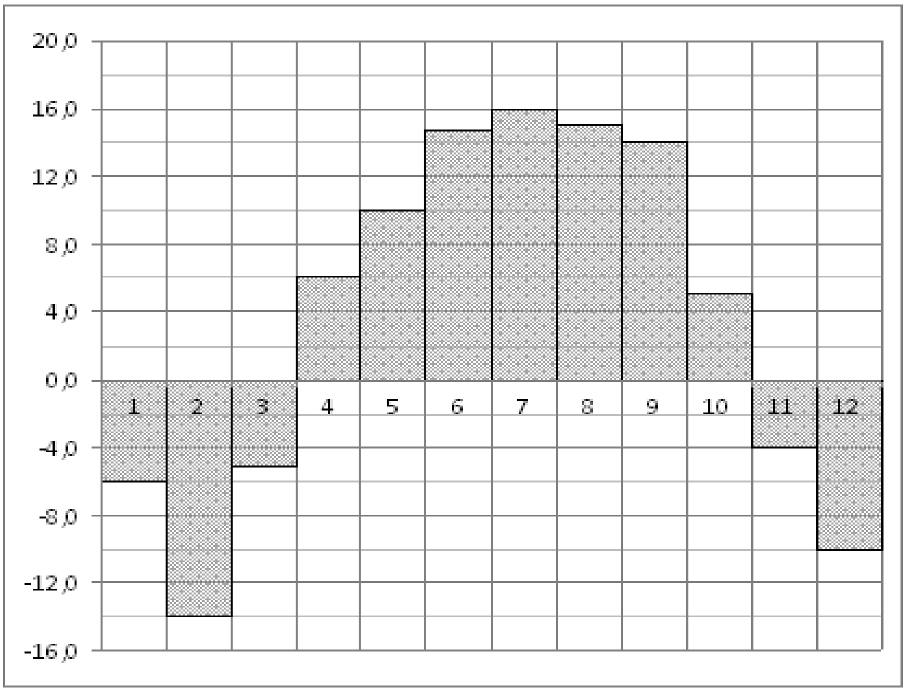
18. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $\left(a+4x-x^2-1\right)\left(a+1-|x-2|\right)=0$ имеет ровно три различных корня.

19. Квадратный трёхчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет два различных корня. Один из корней трёхчлена и его значение в точке $x=11$ являются простыми числами. Найдите корни трёхчлена.

Вариант 39

1. В квартире, где проживает Валерий, установлен прибор учёта расхода холодной воды. 1 марта счётчик показывал расход 182 м^3 воды, а 1 апреля – 192 м^3. Какую сумму должен заплатить Валерий за холодную воду за март, если цена за 1 м^3 холодной воды составляет 23 руб. 10 коп.? Ответ дайте в рублях.

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 г. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев с положительной среднемесячной температурой.



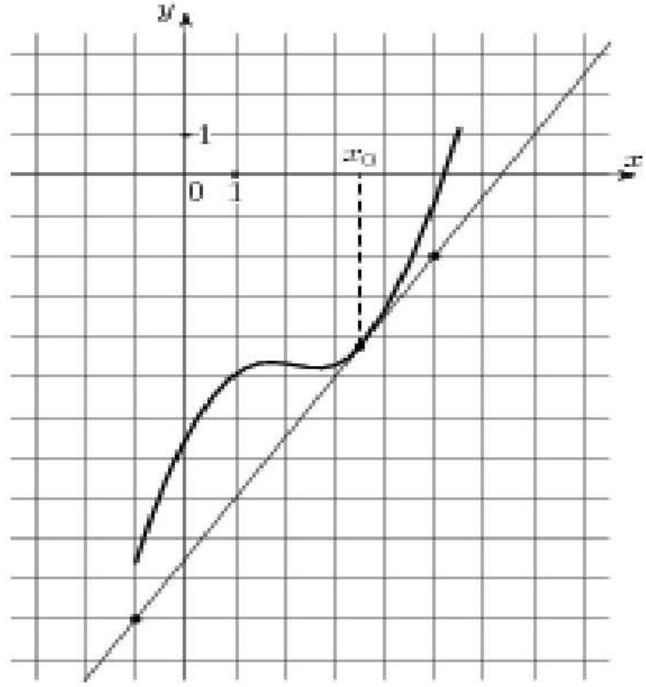
3. Найдите ординату середины отрезка, соединяющего точки $A(6;8)$ и $B(-2;2)$.

4. Вероятность того, что новый DVD-проигрыватель в течение года поступит в гарантийный ремонт, равна 0,045. В некотором городе из 1000 проданных DVD-проигрывателей в течение года в гарантийную мастерскую поступила 51 штука. На сколько отличается частота события «гарантийный ремонт» от его вероятности в этом городе?

5. Решите уравнение $\sqrt{2x+3}=x$. Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из корней.

6. Один из углов параллелограмма больше другого на $78°$. Найдите градусную меру большего из углов параллелограмма.

7. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной $f(x)$ в точке x_0.



8. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 6, а тангенс угла между боковой гранью и плоскостью основания равен $2\sqrt{11}$. Найдите сторону основания пирамиды.

9. Найдите значение выражения $\sqrt[4]{5-\sqrt{13}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{13}+5}\cdot\sqrt[4]{108}$.

10. Трактор тащит сани с силой $F=50$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность (в кВт) трактора при скорости $v=3$ м/с равна $N=Fv\cos\alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) эта мощность будет не менее 75 кВт?

11. Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 15 часов. Через 3 часа после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

12. Найдите наименьшее значение функции $y=(x-8)e^{x-7}$ на отрезке $[6;8]$.

13. Решите уравнение $7\sin^2 x+4\sin x\cos x-3\cos^2 x=0$.

Найдите корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

14. Диаметр окружности основания цилиндра равен 20, образующая равна 28. Плоскость пересекает его основания по хордам длины 12 и 16. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания цилиндра.

15. Решите систему неравенств $\begin{cases}\log_{5x} x^2+\log_{x^2} 5x\le 2,\\ \log^4_{x-3}\left(x^2-17\right)+\log^2_{x^2-17}(x-3)-\log_{5x} 25>79.\end{cases}$

16. Около треугольника ABC описана окружность с центром O, $\angle AOC=60^\circ$. В треугольник ABC вписана окружность с центром M. Найдите угол AMC.

17. Число 76,8 дважды увеличивали на одно и то же число процентов, а затем дважды уменьшали на одно и то же самое число процентов. В результате получилось число 67,5. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали это число?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right| = ax-1$ на промежутке $(0;+\infty)$ имеет более двух корней.

19. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них сходил и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $2/11$ учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $2/5$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

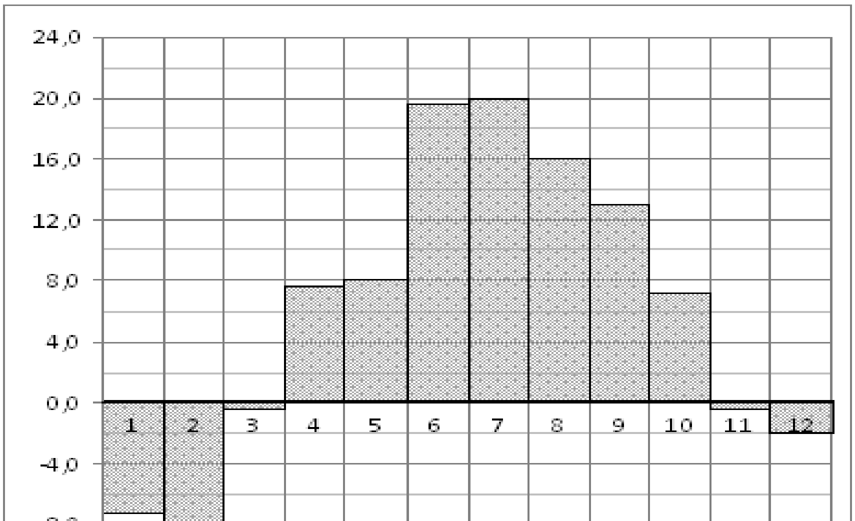
б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что в группе было 20 учащихся?

в) Какую наибольшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а и б?

Вариант 40

1. Мобильный телефон стоил 3500 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 2800 рублей. На сколько процентов была снижена цена?

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Санкт-Петербурге за каждый месяц 1999 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали – температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура не превышала 4 градусов Цельсия.



3. Найдите абсциссу точки, симметричной точке $A(6,\ 8)$ относительно начала координат.

4. Монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что первые два броска закончатся одинаково.

5. Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}=2^x$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB=16$, $AC=8\sqrt{3}$. Найдите $\sin A$.

7. Прямая $y=-2x+6$ является касательной к графику функции $y=x^3-3x^2+x+5$. Найдите абсциссу точки касания.

8. Если каждое ребро куба увеличить на 2, то площадь поверхности куба увеличится на 27. Найдите ребро этого куба.

9. Найдите значение выражения $p(x-2)-p(x+2)$, где $p(x)=5x$.

10. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I=\frac{\varepsilon}{R+r}$, где ε – ЭДС источника (в вольтах), $r=1$ Ом – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20 % от силы тока короткого замыкания $I_{кз}=\frac{\varepsilon}{r}$?

11. Первые 190 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 180 км — со скоростью 90 км/ч, а затем 170 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12. Найдите наименьшее значение функции $y=5x-\ln(x+5)^5$ на отрезке $[-4{,}5;0]$.

13. 1) Решите уравнение $4\cos^2 x+8\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)+1=0$.

2) Найдите корни, принадлежащие промежутку $[3\pi;9\pi/2]$.

14. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE:EC_1=1:3$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

15. Решите систему неравенств $\begin{cases} 9^{-x}-3^{4-x}\le 82, \\ \log_{4-x}\left(\frac{x+4}{x}\right)^2+\log_{4-x}\frac{x}{x+4}\le 1. \end{cases}$

16. Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC=7$, $AF=2$, угол BAC равен $60°$.

17. Клиент А сделал вклад в банке в размере 7700 рублей. Проценты по вкладу начисляются раз в год и прибавляются к текущей сумме вклада. Ровно через год на тех же условиях такой же вклад в том же банке сделал клиент Б. Еще ровно через год клиенты А и Б закрыли вклады и забрали все накопившиеся деньги. При этом клиент А получил на 847 рублей больше клиента Б. Какой процент годовых начислял банк по этим вкладам?

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-4x} = a - 3|x|$ имеет более двух корней.

19. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ состоит из натуральных чисел, причём каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним) членов.

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырёх членов, сумма которых равна 50.

б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 10$?

ОТВЕТЫ

№ варианта	Номера заданий					
	1	2	3	4	5	6
1	7150	4500	0,5	0,096	18	38,75
2	7	5	2,5	0,58	7	0,6
3	15	7	50	0,17	18	0,2
4	35	11	9	0,2	14	–0,28
5	320	10	2	0,817	–2	–0,9
6	7	17400	0,25	0,7	0,025	55
7	10	11	1	0,62	–1	65
8	105	9	12	0,425	–29	2
9	9	12	30	0,985	–1	60
10	5	72	90	0,36	–3	69
11	320	2	200	0,83	2,375	70
12	400	4	160	0,64	2	140
13	13 000	28	–49	210	6	24
14	15 660	7	8	0,38	–4	0,2
15	22	1	–11	0,11	607	24
16	7 560	17	2	0,5	0,375	1,5
17	3	–10	17	0,008	6,5	49
18	90	3	8	0,16	–0,25	96
19	19	12	48	0,01	–0,6	60
20	6	4	8	0,2	0,2	108
21	1 770	12	24	0,02	17	0,4
22	404	16	5,625	0,16	–3	56
23	13	3 000	2	0,278	8	36
24	9	2 000	–0,75	0,47	7,5	135
25	58	11	11	120	–3	44
26	9	6	12	0,32	6,5	57
27	156 000	4	56	0,48	–4,5	17
28	1500	19	1,2	0,392	–0,25	51
29	24	350	16,5	0,88	–14	6
30	32	–7	10,5	0,8	–0,5	16
31	12 800	39	0,25	0,35	–0,4	150
32	4	–14	1	0,03	72	35
33	25 850	15	0,5	11	13	60
34	112	38	12	0,14	–6	2
35	12	16	12	0,56	–0,25	5,4
36	170	15	23	0,5	0,6	32
37	20	3 200	42	0,9975	4	100
38	75	7 000	–50	0,98	0	3 .5
39	231	7	12	0,006	3	129
40	20	5	–6	0,5	3	0,5

№ варианта	Номера заданий					
	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
1	–0,25	6	1,2	2,8	15	–2
2	0,25	39	81	2	30	7
3	0	18	9	6	6	–12
4	3	2	–2,5	30	24	21
5	1	17	0,5	20	56	6
6	4	11	4	300	12	6
7	14	24	–50	30	8	4
8	2	3	–100	2	20	–17
9	60	20	0,04	1000	21	18
10	7	10	4	5	530 000	0,5
11	1,35	0,25	14,2	36	47 088	–26
12	8	48	5,5	7	20	1
13	8	75	2	40	18	4
14	–10	4,5	8	4	16	–4,75
15	6,75	16	8	2,6	3	–10,8
16	2	7	5 001	48	14	5
17	5	2	63	120	20	–3
18	1	180	–1,61	751	59	8
19	–0,25	30	1 024	2	3	5
20	1	12	352	2,5	38,4	208
21	25	12	1,5	390	22	5,4
22	3	3	333	5	11	–5
23	4	36	11	37,5	90	–4
24	2	0,9025	512	20	32	–3
25	7	10	24,25	0,2	2,5	–6
26	4	120	–2	12 000	4 000	4
27	0,5	24	0,625	1,6	22	4
28	17	13	135	2 500	45	52
29	2	2	784	30	15	–3
30	10	360	6	3	50	6
31	0,2	0,25	1	1	200	11
32	3	4	–449	2	7,2	0
33	1,25	6	1	60	27	–3
34	2,5	4	–0,5	15	11	0
35	7	0,5	27	4	50	4
36	5	12	290	2,5	87,5	2
37	0,125	1	12	20	100	11
38	–33	1 500	28	1,25	97	3
39	1,5	3	6	60	9	–1
40	1	0,125	–20	4	72	–20

№ варианта	Номера заданий		
	13	14	15
9	$\arcsin\frac{2}{3}+2\pi n, n\in Z$	$\frac{3}{5}$	–
10	$-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	–
11	0,9	0,9	–
12	$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\sqrt{3}}{2}\right), n\in Z$	$\frac{\sqrt{15}}{10}$	–
13	а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi n;-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$; б) $\frac{7\pi}{3}$	$\frac{3\sqrt{10}}{20}$	$(-8{,}5;-8)\cup(-8;-4)\cup$ $\cup(0;2]\cup\{-1\}$
14	$\pi/2$	0,8	$(2;3)\cup(3;5]\bigcup[7;8)$
15	$(2\pi n;3),\ n\in Z$	0,9	$(-7;-6)\cup[2;2{,}5)\cup$ $\cup(4;4{,}5]$
16	$\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z;\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z;$ $-\frac{15\pi}{4};-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}$	1	3
17	$-\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$	$\arccos\frac{1}{6}$	$(0;1]\cup(2;8)\cup(8;32]$
18	$2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ n,k\in Z$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$[0;4)\cup(4;7]$
19	1) $\frac{\pi}{2}+\pi n;(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ n,k\in Z$; 2) $\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2};\frac{17\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$(2;2+\log_5 12]$
20	1) $\frac{\pi}{2}+\pi n;(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ n,k\in Z$; 2) $\frac{5\pi}{2};\ \frac{11\pi}{6}$	30	$\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup(\sqrt{3};4]\cup$ $\cup[8;+\infty)$
21	1) $\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ n,k\in Z$; 2) $-2\pi;\ -\frac{7\pi}{6};\ -\frac{11\pi}{6}$	$\mathrm{arctg}\frac{21}{40}$	$\left(0;\frac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup[\sqrt{5};3)\bigcup$ $\cup(9;+\infty)$

№ варианта	Номера заданий		
	13	14	15
22	1) $2\pi n; (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\quad n,k\in Z$; 2) $-2\pi;\ -\dfrac{5\pi}{6}$	24	1,2
23	81	5	$-6;\ 0;\ [1;2)$
24	5	$\sqrt{2}/4$	$(-1;5]\cup(25;30)$
25	$\log_2 7$	128	$\left(0;\dfrac{1}{4}\right)\cup[1;+\infty)$
26	$-\dfrac{4}{5}$	6	$(3;5]$
27	$(4;\ \log_2 15)$	$\dfrac{1}{6}$	$\{-2,5\}\cup(-4;-3)\cup\cup(-2;-1)$
28	$(1;\ -2)$	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
29	$\left(2;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right),\ n\in Z$	$\dfrac{\sqrt{15}}{5}$	3
30	$\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$	1	$\left(0;\dfrac{1}{2}\right)\cup\{1\}\cup[4;+\infty)$
31	$\pm\arccos\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$(1;3)$
32	$\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{5}\right)$	$\sqrt{6}$	$[1-\sqrt{5};1-\sqrt{3}]\cup\cup[1+\sqrt{3};1+\sqrt{5}]$
33	$5;\ -\dfrac{16}{3}$	$\dfrac{3\sqrt{10}}{20}$	$(-\infty;-3)\cup[1+\sqrt{2};\log_3 16]$
34	105	arctg2	$[1;2]\cup(6;+\infty)$
35	$(\pi;0),\ (-\pi;0)$	9	$[-\log_3 4;-1);(-1;0);(0;1);[2;+\infty)$
36	$\left(3;\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\right),\ n\in Z$	4	$[1;2)\cup\{3\}\cup(4;+\infty)$
37	$\left((-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right),\ n,k\in Z$	$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$	$\left(\log_2\dfrac{2}{3};0\right)\cup[1;+\infty)$
38	$\left(-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{1}{2}\right).\ n\in Z$	$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$	$(\log_3 10;+\infty)$

№ варианта	Номера заданий		
	13	14	15
39	$-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{7}+\pi k, n,k\in Z$; $\frac{11\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}\frac{3}{7}+3\pi$	2; 14	5
40	1) $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$; 2) $\frac{25\pi}{6}$	$\arccos\frac{5\sqrt{51}}{51}$	$[-\log_3 82;-4)\cup$ $\cup(3;4)$

№ варианта	Номера заданий			
	16	17	18	19
17	10; 36	–	–	–
18	1; 7	–	–	–
19	$\frac{27\sqrt{3}}{2}$; $27\sqrt{3}$	–	–	–
20	$\frac{25}{8}$; $\frac{5\sqrt{5}}{4}$; $\frac{5\sqrt{5}}{2}$	–	–	–
21	13/7; 4	–	–	–
22	$\sqrt{10}/2$	–	–	–
23	16	–	–	–
24	4	–	–	–
25	8	–	–	–
26	4	–	–	–
27	13; 2	0%	$a=-9$; $b=12$	32; 64
28	$45°$; $135°$	35%	$a\le-12$; $a\ge 8$	$n=2$; $k=5$
29	$50°$	150%	$\left[-\frac{3}{10};-\frac{3}{16}\right)$; 0	$(5,2)$; $(9,6)$; $(17,8)$; $(33,9)$
30	97,2	1 050 000	$a\ge 4$	$m=4, n=7$; $m=3, n=5$
31	$30°$; $150°$	7	$a=2$; $a=\sqrt{65}+3$	(16667, 33334)
32	25	3 993 000	$-\frac{3}{4}\le a<\frac{1}{4}$	$m=2,\ n=4$
33	40	4,04 %	$a<2$	4, 8, 4, 2

№ варианта	Номера заданий			
	16	**17**	**18**	**19**
34	3	увеличилась на 16,1%	$a=-3$; $a=-2$; $1<a<2$; $2<a<5$; $6<a\le 10$	а) 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 9, 10, 11, 11, 11 или 9, 10, 11, 22.
35	б) 2:1	4000	$a\le -\frac{57}{32}$	$1;\ 4;\ 16$
36	$20\sqrt{6}$	26%	$a=1-\sqrt{2}$; $0\le a<2$; $2<a<2\sqrt{2}$	а) нет; б) да; в) 1
37	$\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	40%	5	$a=-3,\ b=-1$
38	$36;\ 8\sqrt{19}$	похудел на 2,8%	-1	12; 13
39	$105°;\ 165°$	25%	$3/5<a<4/5$	а) **да**; б) 9; в) $9/17$
40	$\frac{5\sqrt{3}}{3};\ 3\sqrt{3}$	10%	$1<a<\frac{13}{12}$	а) 1;12;17;20; б) **да**; в) 70

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия 8–9. – М.: Просвещение, 1991.
2. Амелькин В.В., Рабцевич Т.И., Тимохович В.Л. Геометрия на плоскости: Теория, задачи, решения: учеб. пособие по математике. – Минск: ООО «Асар», 2003.
3. Атанасян Л.С. и др. Геометрия: учебник для 7–9 классов общеобразовательных учреждений. – М.: Просвещение, 1995.
4. Баранова О.Е. Задачи с параметрами. Расположение корней квадратного трёхчлена: учебное пособие / О. Е. Баранова, А. И. Гусев. – Тверь: Тверской государственный университет, 2013. –112 с.
5. Баранова О.Е., Романова С.А. Математический диктант как форма контроля знаний, умений, навыков в условиях реализации ФГОС ООО. В сборнике: ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛАХ ТВЕРСКОГО РЕГИОНА Сборник материалов в помощь учителю. Под редакцией Голубева А.А., Барановой О.Е. – Министерство образования Российской Федерации; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тверской государственный университет»; Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области». Тверь, 2016. С. 232-241.
6. Бутузов В.Ф., Кадомцев С.В. и др. Планиметрия: пособие для углубленного изучения математики. – М.: Физматлит, 2005.
7. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.И., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра: справочное пособие. – М.: Наука, 1987.
8. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.И., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства: справочное пособие. – М.: Наука, 1987.
9. Габович И. Г. Алгоритмический подход к решению геометрических задач: кн. для учащихся. – М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996.
10. Гарбарук В.В., Родин В.И., Соловьёва И.М., Шварц М.А. Математика: пособие для учащихся факультета довузовской подготовки. – СПб.: Петербургский государственный ун-т путей и сообщения, 2008.
11. Голубев А.А. Практикум по математике для старшей школы: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2013. – 140 с.
12. Голубев А.А. Роль внутрипредметных связей при обучении математике в школе на примере метода интервалов // Новая наука: Опыт, традиции, инновации. – 2016. – № 3-2 (71). – С. 52-55.
13. Голубев А.А. Роль и развитие метода интервалов в школьном курсе математики / А. А. Голубев, Г. Н. Столярова // Традиции и новации в профессиональной подготовке и деятельности педагога: сборник

научных трудов Всероссийской научно-практической конференции. – Тверь, 2015. – С. 283-290.
14. Голубев А.А. Сборник заданий по математике: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2015. – 160 с.
15. Голубев А.А. Стандартные и нестандартные задачи по геометрии. Часть 1: Планиметрия: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2013. – 96 с.
16. Голубев А.А. Уравнения и неравенства в школьном курсе математики: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2013. – 160 с.
17. Голубев А.А., Баранова О.Е. О подготовке школьников к ОГЭ и ЕГЭ: обсуждение и решение задач повышенного уровня сложности. В сборнике: ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛАХ ТВЕРСКОГО РЕГИОНА Сборник материалов в помощь учителю. Под редакцией Голубева А.А., Барановой О.Е. – Министерство образования Российской Федерации; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тверской государственный университет»; Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области». Тверь, 2016. С. 208-231.
18. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы. – 3-е изд., испр. – М.: МЦНМО, 2006.
19. Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения: пособие для учащихся. – М.: Просвещение, АО «Учеб. лит.», 1996.
20. Гусев В. А., Орлов Ф. И., Розенталь Ф. Л. Внеклассная работа по математике в 6–8 классах. – М.: Просвещение, 1977.
21. Делоне Б., Житомирский О. Задачник по геометрии. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
22. Евстафьева Л. П. Пособие по математике. – М.: Московский авиационный институт, 2009.
23. ЕГЭ 2016. Открытый банк заданий по математике Ч. В1–В14. URL http://mathege.ru/or/ege/Main
24. Зеленяк О. П. Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal. – Киев; М.: ДиаСофтЮП, ДМК Пресс, 2008.
25. Зетель С. И. Новая геометрия треугольника. – М.: Учпедгиз, 1962.
26. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад. – М.: Просвещение, 1971.
27. Коксетер Г. С., Грейтцер С. Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.

28. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии. – 4-е изд. – М.: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2008.
29. Куланин Е.Д, Федин С.Н. Геометрия треугольника в задачах: учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. – М: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009.
30. Никулин А.В., Кукуш А.Г., Татаренко Ю.С. Планиметрия. Геометрия на плоскости. – Висагинас: Альфа, 1998.
31. Петерсен Ю. Методы и теории для решения геометрических задач на построение. – М.: Типография Э. Лисснера и Ю. Романа, 1892.
32. Погорелов А. В. Геометрия 7–11. – М.: Просвещение, 1996.
33. Полонский В.Б., Рабинович Е.М., Якир М.С. Учимся решать задачи по геометрии. – Киев: «Магистр-S», 1996.
34. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: учеб. пособие. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: МЦНМО: ОАО «Московские учебники», 2006.
35. Пржевальский Е. Собрание геометрических теорем и задач. – М., 1909.
36. Рыбкин Н. Сборник задач по геометрии для 6–9 классов средней школы. Ч. I: Планиметрия. – М.: Просвещение, 1964.
37. Самое полное издание типовых вариантов реальных заданий ЕГЭ: 2010: Математика / авт.-сост. И.Р. Высоцкий, Д.Д. Гущин, П.И. Захаров и др.; под ред. А.Л. Семёнова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2010.
38. Сборник задач по математике для поступающих в вузы под ред. А.И. Прилепко. – М.: Высшая школа, 1982.
39. Сборник задач по математике для поступающих во втузы под ред. М. И. Сканави – М.: Высшая школа, 1988.
40. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. – М.: МЦНМО, 2008.
41. Факультативный курс по математике / сост. И.Л. Никольская. – М.: Просвещение, 1991.
42. Фискович Т. Т. Геометрия без репетитора. – М.: УНЦ ДО МГУ, 1998.
43. Цыпкин А.Г., Пинский А.И., Справочное пособие по математике с методами решения задач для поступающих в вузы. – М.: Оникс, Мир и Образование, 2007.
44. Шарыгин И. Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. – М.: Наука, 1986.
45. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (планиметрия). – 3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000.
46. Ястребинецкий Г.А. Уравнения и неравенства, содержащие параметры: пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1972.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ГОЛУБЕВ Александр Анатольевич,
СПАССКАЯ Татьяна Александровна

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ – 2017

Учебное пособие

Отпечатано с оригинала авторов

Подписано в печать 09.01.2017. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 9,25. Тираж 500. Заказ № 1.
Редакционно-издательское управление
Тверского государственного университета
Адрес: 170100, г. Тверь, Студенческий пер. 12, корпус Б.
Тел. РИУ (4822) 35-60-63.