Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Тверской государственный университет
Кафедра математического моделирования
и вычислительной математики

Е.Г. ШЕСТАКОВА

Курсовая работа по дисциплине «АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ» Методические рекомендации

ТВЕРЬ – 2018

УДК 519.62
ББК 22.143
Ш 99

Шестакова Е. Г.
Ш 99 **Курсовая работа по дисциплине «Алгебра и геометрия». Методические рекомендации** – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2018. – 18 с.

Курсовая работа – одна из форм учебно-исследовательской работы. Выполнение курсовой работы предусматривается учебным планом и является обязательным для всех студентов. Методические рекомендации определяют требования к содержанию, структуре, правилам оформления курсовой работы по дисциплине «Алгебра и геометрия».

Методические рекомендации предназначены для студентов 1 курса факультета прикладной математики и кибернетики.

УДК 519.62
ББК 22.143

СОДЕРЖАНИЕ

1. Общие положения

Курсовая работа – форма самостоятельной работы студентов по изучению учебной дисциплины «Алгебра и геометрия». Одной из важнейших задач линейной алгебры является исследование и решение систем линейных алгебраических уравнений. Выполнение курсовой работы способствует:

1) закреплению, углублению и систематизации знаний, полученных за время теоретического обучения;

2) овладению методикой исследования;

3) развитию определенных умений и навыков и применению их на практике:

- умению работать с литературой, справочным материалом;
- умению логически обосновывать полученные результаты;
- умению корректно оформлять свои мысли и полученные результаты с использованием общенаучной и математической терминологии.

Выполнение курсовой работы направлено на формирование и проверку освоения компетенций, предусмотренных рабочей программой дисциплины.

2. Структура и содержание курсовой работы

Структурно курсовая работа должна состоять из следующих составных частей:

- введения;
- двух глав с выделением параграфов;
- заключения;
- списка использованной литературы;
- приложений.

Материал в курсовой работе располагается в следующей последовательности:

1) титульный лист (Приложение 1);
2) содержание;

3) введение;

4) текст работы (разбитый на главы с параграфами);

5) заключение;

6) список использованной литературы;

7) приложения.

Во введении (2-3 страницы) раскрывается практическое значение темы исследования, формулируются цель и основные задачи работы. Также введение должно содержать объект и предмет исследования.

Обоснование актуальности и практического значения должно быть кратким. Начинать описание издалека нет особой необходимости. Достаточно в пределах страницы текста показать главное – суть проблемной ситуации, из чего и будет видна актуальность темы и практическая значимость.

От формулировки темы логично перейти к формулировке цели курсовой работы, а также указать конкретные задачи, которые предстоит решить в соответствии с этой целью. Задачи указываются в форме перечисления (изучить..., исследовать…, описать..., проанализировать..., выявить..., сформулировать... и т.п.).

Формулировки этих задач необходимо делать тщательно, поскольку описание их решения должно составлять содержание разделов и подразделов курсовой работы. Четкая формулировка задач поможет правильно разделить работу на главы и параграфы.

Необходимо сделать обзор литературы по теме, который должен показать знакомство студента с литературой, его умение систематизировать источники. Не обязательно указывать все рассмотренные источники, надо привести лишь те, которые имеют прямое и непосредственное отношение к теме работы.

В первой главе должен быть представлен теоретический аспект исследования по теме курсовой работы. Очень важно последовательно, четко и логично изложить теоретический материал, который необходим для выполнения работы.

Вторая глава курсовой работы должна включать обоснование и разработку методики исследования, проведение практических расчетов. Результатом этой практической части работы должны стать конкретные решения поставленной задачи и выводы, сделанные студентом по решению.

В заключении (1-2 страницы) целесообразно кратко представить основные результаты, полученные в процессе исследования, подвести итоги всей курсовой работы.

В список литературы включаются источники, которые использовались при выполнении курсовой работы.

Приложения включают в себя вспомогательные материалы, использованные при выполнении работы.

3. Требования к оформлению курсовой работы

Курсовая работа должна быть представлена в переплетенном печатном виде. Текст курсовой работы печатается на компьютере на одной стороне стандартного листа формата А4 белой писчей бумаги. Объем работы установлен в пределах 12-15 страниц машинописного текста (без учета списка литературы и приложений).

Текст на странице должен располагаться следующим образом: размер левого поля – 30 мм, правого – 15 мм, верхнего и нижнего – 20 мм. Текст и другие элементы работы должны быть черными, контуры букв и знаков – четкими, шрифт Times New Roman – 14, интервал – 1,5. Курсив и подчеркивание в работе не допускаются. Названия разделов, глав и параграфов выделяются жирным шрифтом.

Каждая глава начинается с нового листа (страницы), а параграфы продолжаются на той же странице, отступив от названия главы или текста предыдущего параграфа на 20 мм (1 строка). Между текстом и названием параграфа отступ отсутствует.

Нумерация страниц текста проставляется в середине нижнего поля. Проставлять номер страницы необходимо с первой страницы введения, на которой ставится номер «3». После этого нумеруются все страницы, включая приложения.

Практическая часть работы должна быть представлена подробно. Все вычисления должны быть явными. Формулы выполняются студентом в редакторе формул, совместимом с MS Word.

В работе должны быть ссылки на первоисточники. Ссылки на литературу следует давать в тексте в скобках: сначала указывается номер источника в списке литературы, а затем номер страницы в данном источнике, например, [5, С. 25].

4. Порядок аттестации по курсовой работе

Курсовая работа должна быть выполнена и представлена научному руководителю до начала экзаменационной сессии. По результатам выполнения курсовой работы студенту выставляется оценка, которая фиксируется на титульном листе курсовой работы. Аттестуется курсовая работа научным руководителем. Оценивание выполнения курсовой работы осуществляется по следующим критериям:

- соблюдение сроков сдачи работы;
- внешний вид работы и правильность оформления титульного листа;
- соответствие содержания работы заголовкам в тексте;
- соответствие оформления работы методическим указаниям;
- наличие и качество дополнительных приложений;
- качество введения;
- соответствие содержания работы теме курсовой работы;
- владение понятийным, терминологическим аппаратом;
- качество практических расчетов;
- качество выводов;
- уровень грамотности.

5. Тема работы «Исследование системы линейных уравнений на совместность. Нахождение решения в каждом случае совместности»

Постановка задачи:

Исследовать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на совместность в зависимости от значений параметров. Найти общее решение системы в каждом случае совместности.

Для выполнения поставленной задачи студент должен:

- владеть понятиями матрица, минор матрицы, определитель, система линейных уравнений;
- знать процедуры нахождения ранга матрицы, свойства и способы вычисления определителя;
- знать теорему Кронекера - Капелли;
- знать методы решения систем линейных уравнений;
- уметь последовательно излагать рассматриваемые вопросы;
- уметь оформлять полученные результаты.

Исследовать систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на совместность означает выяснить, есть у этой системы решения, или же решений нет. Если решения есть, то указать сколько их.

Пример 1.

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = \alpha. \end{cases} \qquad (*)$$

Воспользуемся **теоремой Кронекера - Капелли:**

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы.

Число r называется рангом матрицы A, если у матрицы A имеется минор порядка r, отличный от нуля, а все ее миноры более высокого порядка (если такие имеются) равны нулю.

Следствие из теоремы Кронекера - Капелли:

Если ранг матрицы системы отличен от ранга расширенной матрицы, то СЛАУ несовместна (не имеет решений).

Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и ранг меньше числа неизвестных, то СЛАУ является неопределённой (имеет бесконечное количество решений).

Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы и ранг равен числу неизвестных, то СЛАУ является определённой (имеет одно решение).

Составим расширенную матрицу системы

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований упростим матрицу AB:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 * \text{I стр.} \\ -\text{I стр.} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & \alpha-1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при α = -1 получаем две одинаковые строки. Соответственно, любой минор третьего порядка матрицы AB будет равен нулю. В качестве базисного минора можем взять, например, минор второго порядка $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $1 \neq 0$, следовательно rang A = rang AB =2 при α = -1.

Найдем общее решение системы при α = -1. Третье уравнение системы можно отбросить, так как оно является следствием первых двух. Количество неизвестных n=4, r=2 и n-r=4-2=2 – количество свободных неизвестных. В качестве свободных неизвестных будут x_1 и x_4, так как базисныме неизвестными являются x_2, x_3. Из второго уравнения системы найдем выражение x_3 через x_4; подставив его в первое уравнение, найдем выражение x_2 через x_1 и x_4.

$$\begin{cases} x_2 = -2 + 2x_1 - x_4, \\ \quad x_3 = 1 - x_4. \end{cases}$$

Положим $x_1 = C_1$, $x_4 = C_2$.

Общее решение системы при α=-1 будет иметь вид

X=$\{(C_1;\ -2 + 2C_1 - C_2; 1 -\ C_2;\ C_2)\ C_1, C_2\ \in R\}$.

Проверка:

Положим $C_1 = 1, C_2 = -2$, получим X= (1, 2, 3, -2). Подставим полученный X в исходную систему уравнений (*), получим

$$\begin{cases} 2 * 1 - 2 + 3 * 3 + 4 * (-2) = 1, \\ 4 * 1 - 2 * 2 + 5 * 3 + 7 * (-2) = 1, \\ 2 * 1 - 1 * 2 + 3 + 2 * (-2) = \alpha. \end{cases}$$

Так как α = -1, получаем верные равенств.

В случае, если α ≠ -1, в расширенной матрице есть минор третьего порядка отличный от нуля.

$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} +3 * \text{II стр.} \\ = \\ -2 * \text{II стр.} \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ = (раскладываем по элементам первого столбца) = 3

Получили rang A = 2 ≠ rang AB =3. Из этого следует, что исходная СЛАУ несовместна при α ≠ -1, соответственно, решения у системы нет.

Пример 2.

Исследовать СЛАУ на совместность в зависимости от значений параметров α и β.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + \beta x_2 - 6x_3 = 4, \\ \alpha x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 10, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = -4. \end{cases} \qquad (**)$$

Систему уравнений можем записать в матричном виде AX=B, где

A=$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & \beta & -6 \\ \alpha & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица системы, X= $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – вектор-столбец неизвестных,

B= $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$ – столбец неоднородности в правой части.

И снова воспользуемся теоремой Кронекера-Капелли: для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы равнялся рангу расширенной матрицы системы.

Упростим расширенную матрицу системы AB с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & \beta & -6 & 4 \\ \alpha & 4 & -5 & 10 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2*\text{I стр.} \\ +\text{I стр.} \\ -\text{I стр.} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & \beta+4 & 4 & 4 \\ \alpha\text{-}1 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & -4 & -4 & -4 \end{array}\right) * \left(\frac{-1}{4}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & \beta+4 & 4 & 4 \\ \alpha\text{-}1 & 6 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -2*\text{IV стр.} \\ -4*\text{IV стр.} \\ -6*\text{ IV стр.} \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ \alpha\text{-}1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Заметим, что матрица системы $A_{4\times3}$, расширенная матрица системы $AB_{4\times4}$. Вести речь о совместности системы можно только в случае, когда ранг расширенной матрицы меньше 4. В противном случае система будет несовместной. Найдем ранг матрица AB, для этого рассмотрим определитель:

$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ \alpha\text{-}1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =(воспользуемся формулой разложения определителя по элементам второй строки)= $\beta * (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ \alpha-1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ + 2*I стр.=

$= \beta * \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ \alpha - 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ (определитель третьего порядка вычислим с помощью «хороших» произведений) = β * (2 * (α – 3) * 1 – 3 * (α – 3)) = β * (2α – 6 – 3α + 9) = β * (3 – α).

Таким образом, определитель матрицы АВ будет равен нулю тогда и только тогда, когда β * (3 – α) = 0 ⇒ $\left[\begin{aligned} \beta &= 0, \\ \alpha &= 3. \end{aligned}\right.$

Рассмотрим возможные случаи.

1) α ∈ R \ {3}, β ∈ R \ {0}.

В этом случае rang (AB) = 4. Rang (A) = 3, так как существует минор третьего порядка, неравный нулю:

$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\beta \neq 0.$

Таким образом, rang (A) ≠ rang (AB), следовательно, по теореме Кронекера – Капелли СЛАУ несовместна, решений нет.

2) Подставим полученные значения α = 3 и β = 0 в упрощенную расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3-1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) +2*I \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ (удаление/добавление нулевой строки не влияет на значение ранга матрицы).

Тогда rang (A) = rang (AB) = 2, так как существует минор второго порядка, отличный от нуля.

$M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

Делаем вывод, СЛАУ совместна. Так как rang = 2 < n=3, исходная СЛАУ является неопределенной, т.е. имеет бесконечное множество решений.

3) Рассмотрим случай α ∈ R \ {3}, β = 0.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha-1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) +2*I \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ \alpha-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Существует минор 3-го порядка, неравный нулю:

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ \alpha-3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 * (\alpha - 3).$$

Следовательно, rang (A) = rang (AB) = 3⇒ СЛАУ является совместной определенной.

4) Рассмотрим СЛАУ при $\alpha = 3$ и $\beta \in R \setminus \{0\}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 3-1 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) +2*I \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Существует минор 3-го порядка, неравный нулю

$$M_3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\beta.$$

Следовательно, rang (A) = rang (AB) = 3⇒ СЛАУ является совместной определенной.

Найдем решение СЛАУ в каждом случае совместности.

Теорема Кронекера – Капелли и следствие из неё не указывают, как найти решение СЛАУ. С их помощью можно лишь выяснить, существуют эти решения или нет, и если существуют – то сколько.

1) $\alpha = 3$, $\beta = 0$.

Выпишем систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные x_1 и x_2 через свободную x_3

$$\begin{cases} x_1 = -2 - 3x_3, \\ x_2 = 1 - x_3. \end{cases}$$

Пусть $x_3 = C$, где $C \in R$.

Общее решение системы запишем в виде: $X = \left\{ \begin{pmatrix} 2 + 3C \\ 1 - C \\ C \end{pmatrix},\ C \in R \right\}.$

Проверка.

Подставим вектор-столбец X в исходную систему. Получим верное равенство.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2+3\,C \\ 1-C \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2) $\alpha \in R \setminus \{3\}$, $\beta = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ \alpha-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Выпишем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ 3x_3 = -2, \\ x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow x_3 = \frac{-2}{3},\ x_2 = \frac{5}{3}$$

Решением системы будет $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

Проверка.

Подставим вектор-столбец X в исходную систему. Получим верное равенство.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & -6 \\ \alpha & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

3) $\alpha = 3$, $\beta \in R \setminus \{0\}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Выпишем систему уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 3 * x_3 = -2, \\ x_2 = 0, \\ x_2 + x_3 = 1. \end{cases} \Rightarrow x_3 = 1,\ x_1 = 5/$$

Решением этой системы будет $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Проверка.

Подставим вектор-столбец X в исходную систему. Получим верное равенство.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & \beta & -6 \\ 3 & 4 & -5 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

В ходе исследования СЛАУ на совместность в зависимости от значений параметров получены следующие результаты:

1) при $\alpha \in R \setminus \{3\}$ и $\beta \in R \setminus \{0\}$ rang (A) = 3, а rang (AB) = 4 система несовместна, решений нет;

2) при $\alpha = 3$ и $\beta = 0$, rang (A) = rang (AB) = 2 система является совместной неопределенной– имеет бесконечное количество решений: X = $\left\{\begin{pmatrix} 2 + 3\,C \\ 1 - C \\ C \end{pmatrix},\ C \in R\right\}$.

3) при $\alpha \in R \setminus \{3\}$, $\beta = 0$, rang (A) = rang (AB) = 3 система является совместной определенной – имеет одно единственное решение X = $\begin{pmatrix} 0 \\ 5/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$.

4) при $\alpha = 3$, $\beta \in R \setminus \{0\}$ rang (A) = rang (AB) = 3 система является совместной определенной – имеет одно единственно решение X = $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Образец титульного листа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

Факультет прикладной математики и кибернетики
Направление ____________________________________
Профиль подготовки ______________________________

КУРСОВАЯ РАБОТА по дисциплине
«АЛГЕБРА и ГЕОМЕТРИЯ»

Тема: ____

Автор:
студент 1 курса ___группы
ФИО (полностью)

Научный руководитель:
ФИО, ученая степень, должность

Оценка: _________________

Тверь, 2018

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Образец оформления содержания

Содержание

Учебное издание

Шестакова Елена Григорьевна

Курсовая работа по дисциплине «Алгебра и геометрия»

Методические рекомендации

Отпечатано с авторских оригиналов
Отпечатано с оригинала авторов
Отпечатано с оригинала автора

Подписано в печать 19,07.2018. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 1,2. Тираж 100. Заказ № 173
Редакционно-издательское управление
Тверского государственного университета
Адрес: 170100, г. Тверь, Студенческий пер. 12, корпус Б.
Тел. РИУ (4822) 35-60-63.