Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

Е. Г. Шестакова

# Линейные преобразования: практикум по дисциплине «Алгебра и геометрия»

Тверь 2018

УДК 577.951
ББК 22,1я96
Ш51

Шестакова Е. Г.

**Ш51 Линейные преобразования: практикум по дисциплине «Алгебра и геометрия»** – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2018. - 40 с.

Назначение практикума – способствовать усвоению, закреплению пройденного материала, способствовать организации самостоятельной работы студентов и развитию их навыков и умений. В пособии излагается материал по разделу «Линейные преобразования». Большое внимание уделяется разбору примеров, иллюстрирующих основной теоретический материал. Каждый раздел содержит задания для самостоятельной работы. Приведены типовые варианты расчетно-графической и контрольной работ.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика».

УДК 577.951
ББК 22,1я 96

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии изложены краткие теоретические сведения из курса линейной алгебры – определения, способы задания, действия над линейными преобразованиями, основные свойства линейных преобразований. Изложение материала подробно иллюстрируется решенными задачами. Для самостоятельной работы предлагаются аналогичные задания и задачи, требующие знаний по другим разделам линейной алгебры.

Практикум по дисциплине «Алгебра и геометрия» является частью учебно-методического комплекса, служит дополнением к базовым учебникам. Пособие предназначено для проведения практических занятий со студентами бакалаврами 1 курса факультета прикладной математики и кибернетики.

Цель данного пособия – помощь студенту в приобретении навыков решения типовых задач по разделу «Линейные преобразования».

# 1 ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

## 1.1 Определение линейного преобразования

Пусть $N$ – некоторое линейное пространство. Векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – элементы пространства $N$. Преобразование – это правило (закон), по которому каждому элементу $\vec{x}$ ставится в соответствие единственный элемент $\vec{y}$.

Пусть в пространстве $N$ задано преобразование φ. Записывать это будем следующим образом $\varphi: N \to N \;\; \forall\, \vec{x} \in N\ \exists!\ \vec{y} \in N: \vec{y} = \varphi(\vec{x})$. Назовем элемент $\vec{y}$ – образом элемента $\vec{x}$ при действии на него преобразования φ, а элемент $\vec{x}$ – прообразом элемента $\vec{y}$. Преобразование φ будет взаимно-однозначным, если для каждого образа имеется единственный прообраз.

Преобразование φ называется линейным, если для любых векторов $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ пространства и произвольного числа λ выполняются следующие условия:

1. $\varphi(\vec{x}_1+\vec{x}_2) = \varphi(\vec{x}_1) + \varphi(\vec{x}_2)$,
2. $\varphi(\lambda\vec{x}_1) = \lambda\varphi(\vec{x}_1)$. (1.1)

<u>Пример 1.</u>

Выяснить, является ли линейным преобразование φ, переводящее всякий вектор $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_2-2\alpha_3, \alpha_2+\alpha_1, \alpha_1)$.

<u>Решение:</u>

Проверим выполнение условий (1.1).

Пусть $\vec{x}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{x}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, тогда, согласно условию задачи, $\varphi(\vec{x}_1) = (\alpha_2-2\alpha_3, \alpha_2+\alpha_1, \alpha_1)$ и $\varphi(\vec{x}_2) = (\beta_2-2\beta_3, \beta_2+\beta_1, \beta_1)$.

Вектор $\vec{x}_1+\vec{x}_2 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)+ (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1+ \beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)$.

Найдем образ полученного вектора:

$\boldsymbol{\varphi(\vec{x}_1+\vec{x}_2)}=(\alpha_2+\beta_2-2(\alpha_3+\beta_3), \alpha_2+\beta_2+\alpha_1+ \beta_1, \alpha_1+\beta_1)=(\alpha_2-2\alpha_3+\beta_2-2\beta_3, \alpha_2 +\alpha_1+ \beta_1+\beta_2, \alpha_1+\beta_1)$.

Рассмотрим сумму образов:

$\boldsymbol{\varphi(\vec{x}_1) + \varphi(\vec{x}_2)} = (\alpha_2-2\alpha_3, \alpha_2+\alpha_1, \alpha_1) + (\beta_2-2\beta_3, \beta_2+\beta_1, \beta_1) = (\alpha_2-2\alpha_3+\beta_2-2\beta_3, \alpha_2+\alpha_1+ \beta_2+\beta_1, \alpha_1+\beta_1)$.

Убеждаемся, что выполняется первое условие – образ суммы элементов равен сумме образов элементов.

Вектор $\lambda\vec{x}_1 = \lambda\ (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$. Найдем образ полученного вектора

$\boldsymbol{\varphi\ (\lambda\vec{x}_1)} = (\lambda\alpha_2\text{-}2\ \lambda\alpha_3, \lambda\alpha_2 + \lambda\alpha_1, \lambda\alpha_1)$.

Рассмотрим $\boldsymbol{\lambda\varphi\ (\vec{x}_1)} = \lambda(\alpha_2\text{-}2\alpha_3, \alpha_2+\alpha_1, \alpha_1) = (\lambda(\alpha_2\text{-}2\alpha_3), \lambda(\alpha_2+\alpha_1), \lambda\alpha_1)$.

Убеждаемся, что и второе условие выполняется – образ элемента, умноженного на число, равен произведению числа на образ элемента.

Можно сделать вывод, что преобразование

$\varphi: R^3 \to R^3\ \ \forall\ \vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in R^3\ \exists!\ \varphi(\vec{x}) \in R^3 : \varphi(\vec{x}) = (\alpha_2\text{-}2\alpha_3, \alpha_2+\alpha_1, \alpha_1)$

является линейным.

### 1.1.1 Самостоятельная работа

Выяснить, являются ли преобразования φ, переводящие всякий вектор $\vec{x}$ в вектор $\varphi(\vec{x})$ линейными:

1. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_3+\alpha_1, \alpha_2\text{-}2\alpha_1, \alpha_2)$.
2. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\text{-}\alpha_3+3\alpha_2, \alpha_1\text{-}\alpha_2, \alpha_3)$.
3. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (4\alpha_2+\alpha_1, \alpha_2\text{-}\alpha_3, 2\alpha_1)$.
4. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_1\text{-}\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_3, \alpha_2)$.
5. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_1+\alpha_2, 5\alpha_2\text{-}\alpha_3, 3\alpha_3)$.
6. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_2, \alpha_2\text{-}2\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2)$.
7. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_3, 2\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2)$.
8. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_1, \alpha_2\text{-}2\alpha_1, 3\alpha_2)$.
9. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_2, 3\alpha_3+\alpha_1, \alpha_2+\alpha_3)$.
10. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (4\alpha_3, \alpha_2+2\alpha_1, \alpha_3+\alpha_1)$.
11. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_3\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1)$.
12. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_3, \alpha_2\alpha_1, \alpha_2)$.
13. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_1, \alpha_2,\alpha_3\alpha_2)$.
14. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_2, 2\alpha_2\alpha_3, \alpha_1)$.

15. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (3\alpha_3\alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_2)$.

16. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_1^2, \alpha_2, \alpha_3)$.

17. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_3^2, 2\alpha_1, \alpha_2)$.

18. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_1, -2\alpha_1, \alpha_2\alpha_3)$.

19. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_2+\alpha_1, \alpha_2\alpha_1, \alpha_3)$.

20. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_3+\alpha_1+\alpha_2, \alpha_3, \alpha_2)$.

21. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_3+\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2+\alpha_3)$.

22. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_2+\alpha_1, \alpha_1, \alpha_3+\alpha_1)$.

23. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_2\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2)$.

24. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2\alpha_2)$.

25. $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_1\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1)$.

## 1.2 Матрица линейного преобразования

Пусть $\varphi$ – линейное преобразование n-мерного пространства $\varphi: R^n \to R^n$. Пусть $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ – некоторый фиксированный базис в $R^n$. Разложим векторы $\varphi(e_k)$, $k=\overline{1,n}$ по базису E: $\varphi(e_k) = a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + \ldots + a_{nk}e_n$. Матрица $A_\varphi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица линейного преобразования $\varphi$ в базисе E. Заданием матрицы преобразование определяется однозначно.

Если $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$, то матричная форма записи будет следующей

$$Y = A_\varphi X, \tag{1.2}$$

где X, Y – столбцы координат векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в базисе E, $A_\varphi$ – матрица преобразования в базисе E. Каждому линейному преобразованию соответствует матрица преобразования в данном базисе. Обратно: всякой матрице порядка n соответствует линейное преобразование n-мерного пространства.

В примере 1 получили, что преобразование φ, переводящее всякий вектор $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ в вектор $\varphi(\vec{x}) = (\alpha_2 - 2\alpha_3, \alpha_2 + \alpha_1, \alpha_1)$ является линейным. Выпишем матрицу преобразования φ. Запишем соотношение (1.2)

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 - 2\alpha_3 \\ \alpha_2 + \alpha_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = A_{\varphi} * \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица преобразования φ в том же базисе, в котором заданы координаты векторов $\vec{x}$ и $\varphi(\vec{x})$.

Пример 2.

Пусть линейное преобразование φ в базисе $E = (e_1, e_2)$ задано матрицей

$A_{\varphi} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Найти образ элемента $x = 2e_1 + e_2$.

Решение:

Дано преобразование $\varphi: R^2 \to R^2$ $\forall \vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2) \in R^2$ $\exists!$ $Y = \varphi(\vec{x}) \in R^2$,

$x = 2e_1 + e_2$, соответственно вектор-столбец координат $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Имеем $Y = A_{\varphi}X$ или

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, образ элемента x

$$\varphi(\vec{x}) = 9e_1 + 4e_2.$$

### 1.2.1 Самостоятельная работа

В задачах 1-25 пункта 1.1.1

1) найти матрицу линейного преобразования в том же базисе, в котором даны координаты векторов $\vec{x}$ и $\varphi(\vec{x})$;

2) найти в том же базисе координаты образа элемента $x = 2e_1 - e_2 + 4e_3$;

3) найти в том же базисе координаты вектора φ ($\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}$), x = $-e_1+3e_2+5e_3$, y = $e_1+4e_2-e_3$, α=2, β=-1.

## 1.3 Действия над линейными преобразованиями

Пусть φ и ψ – преобразования некоторого пространства $N$. Сумма преобразований φ и ψ – это преобразование σ такое, что

$$\forall\, \vec{x} \in N\ \sigma(x)= \varphi(\vec{x})+\psi(\vec{x}).$$

Сумма линейных преобразований – линейное преобразование.

Пример 3.

Пусть линейное преобразование φ в базисе E= ($e_1$, $e_2$) задано матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, а преобразование ψ – матрицей $B_\psi = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу преобразования:

a) φ + ψ;

b) 2φ – ψ.

Решение:

a) Пусть $\vec{y}$ = φ ($\vec{x}$), $\vec{y}_1$= ψ($\vec{x}$), запишем σ($\vec{x}$) = φ($\vec{x}$)+ψ($\vec{x}$) = (φ+ψ)( $\vec{x}$) = $\vec{y}$ +$\vec{y}_1$.

Воспользуемся соотношением (1.2)

$$Y = A_\varphi X,\ \ Y_1 = B_\psi X,$$

тогда

$$Y + Y_1 = C_\sigma\, X,$$

где

$$C_\sigma = A_\varphi + B_\psi.$$

Зная матрицу $A_\varphi$ и матрицу $B_\psi$, находим матрицу $C_\sigma$ базисе E:

$$C_\sigma = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

b) Найдем

$$2A_\varphi = 2\cdot\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix},\ (-1)\ B_\psi = -1\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$C_\sigma = 2A_\varphi + (-1)\, B_\psi = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть преобразование φ переводит вектор $\vec{x}$ в вектор $\vec{y}$ : $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$. Применим к вектору $\vec{y}$ преобразование ψ , переводящее вектор $\vec{y}$ в вектор $\vec{y}_1$: $\vec{y}_1 = \psi(\vec{y})$. Последовательное применение преобразований φ и ψ называется произведением преобразования φ на преобразование ψ и обозначается $\psi\circ\varphi$.

Действие произведения преобразований запишем так

$$(\psi\circ\varphi)(\vec{x}) = \psi(\varphi(\vec{x})).$$

Произведение линейных преобразований – линейное преобразование.

Пример 4.

Пусть линейное преобразование φ в базисе E= ($e_1$, $e_2$) задано матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, а преобразование ψ – матрицей $B_\psi = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Найти в базисе E матрицу преобразования:

a) $\psi\circ\varphi$;

b) $\varphi\circ\psi$.

Решение:

a) Пусть $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$, $\vec{y}_1 = \psi(\vec{y})$, следовательно, $\vec{y}_1 = (\psi\circ\varphi)(\vec{x})$.

Воспользуемся соотношением (1.2)

$$Y = A_\varphi X,\ \ Y_1 = B_\psi\, Y,\ Y_1 = C\, X,$$

где C – матрица преобразования $\psi\circ\varphi$.

Тогда

$$Y_1 = B_\psi A_\varphi X\ ,$$

Таким образом, получаем

$$C = B_\psi A_\varphi.$$

Зная матрицу $A_\varphi$ и матрицу $B_\psi$, находим матрицу C базисе E:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 7 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

b) Матрицу D преобразования $\varphi\circ\psi$ найдем из соотношения

$$Y_1 = A_\varphi B_\psi X.$$

$$D = A_\varphi B_\psi = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 21 \\ 7 & 23 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы преобразований φ и ψ в примерах 3, 4 – невырожденные, так как $\det A_\varphi = 13 \neq 0$, $\det B_\psi = 17 \neq 0$.

Линейное преобразование называется невырожденным, если матрица преобразования невырожденная. Следовательно, преобразования φ и ψ, заданные соответственно матрицами $A_\varphi$ и $B_\psi$ являются невырожденными.

Рассмотрим преобразование, обратное данному линейному преобразованию.

Линейное преобразование φ будет обратным линейному преобразованию ψ, если для любого вектора $\vec{x}$ выполняется равенство

$$(\psi\circ\varphi)(\vec{x}) = (\varphi\circ\psi)(\vec{x}) = \vec{x}.$$

Если преобразование φ является обратным преобразованию ψ , то преобразование ψ – обратное преобразованию φ. Преобразования φ и ψ называются взаимно-обратными.

<u>Пример 5.</u>

В двумерном пространстве задано преобразование

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 3x_2, \\ y_2 = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Найти, если существует, преобразование, обратное данному.

<u>Решение:</u>

Выпишем матрицу преобразования

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица преобразования невырожденная, так как $\det A_\varphi = 5 \neq 0$.

Матрица обратного преобразования

$$A_\varphi^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразование, обратное данному, будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}x_1 - \frac{3}{5}x_2, \\ x_2 = -\frac{1}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2. \end{cases}$$

### 1.3.1 Самостоятельная работа

Заданы два линейных преобразования φ и ψ соответственно матрицами A и B в некотором базисе.

Найти матрицу преобразования:

a) $\varphi + \psi$;

b) $-3\varphi + 5\psi$;

c) $\varphi \circ \psi$;

d) $\psi \circ \varphi$;

e) преобразование, обратное φ;

f) преобразование, обратное φ.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
8. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.
10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$.

15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

16. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$.

17. $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

19. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

22. $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.

23. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

24. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

25. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

## 1.4 Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базиса

Пусть φ – линейное преобразование $\varphi\colon R^n \to R^n$, пусть $E=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $E'=(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ – некоторые фиксированные базисы в $R^n$.
$A_\varphi$ – матрица преобразования φ в базисе E. Найти матрицу преобразования φ в базисе E′.

Пусть X, Y – столбцы координат векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в базисе E. $X'$, $Y'$ – столбцы координат векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$ в базисе $E'$. Тогда

$$X=TX',\ Y=TY', \tag{1.3}$$

где T – матрица перехода от базиса E к базису $E'$.

Подставим (1.3) в соотношение (1.2), получим

$$TY'=A_\varphi TX'. \tag{1.4}$$

Умножив равенство (1.4) слева на матрицу $T^{-1}$, получим

$$T^{-1}TY'=T^{-1}A_\varphi TX' \text{ или } Y'=T^{-1}A_\varphi TX'.$$

Учитывая соотношение (1.2), получим

$$B_\varphi = T^{-1}A_\varphi T, \tag{1.5}$$

где $B_\varphi$ – матрица преобразования φ в базисе $E'$. Формула (1.5) – изменение матрицы линейного преобразования при изменении базиса.

<u>Пример 6.</u>

В базисе $E=(e_1, e_2)$ преобразование φ имеет матрицу $A_\varphi=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$.

Найти матрицу этого преобразования в базисе $E'=(e_1', e_2')$, где $e_1'=e_1+e_2$, $e_2'=e_1+2e_2$.

<u>Решение:</u>

Матрица перехода от базиса E к базису $E'$

$$T_{E\to E'}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix},$$

обратная матрица

$$T^{-1}_{E\to E'}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрицу преобразования φ в базисе $E'$ найдем по формуле (1.5)

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}5 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 4\end{pmatrix}.$$

<u>Пример 7.</u>

В базисе $F=(f_1, f_2)$, где $f_1=(-1,2)$, $f_2=(2,1)$ линейное преобразование φ задано матрицей $A_\varphi=\begin{pmatrix}4 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

Найти:

a) матрицу этого преобразования в базисе $G=(g_1,g_2)$, где $g_1=(3,-1)$, $g_2=(2,1)$;
b) образ вектора $b = (1,1)$ в базисе F и в базисе G;
c) выполнить проверку правильности нахождения матрицы преобразования в базисе G.

<u>Решение:</u>

a) Для нахождения матрицы преобразования в новом базисе воспользуемся формулой (1.5)

$$A_{\varphi}^{G} = T_{F\to G}^{-1} A_{\varphi}^{F}\, T_{F\to G}, \qquad (*)$$

Чтобы получить матрицу $A_{\varphi}^{G}$, нам надо найти матрицу перехода от базиса F к базису G. Будем считать, что векторы $f_1$, $f_2$, $g_1$, $g_2$ заданы своими координатами в стандартном базисе $E=(e_1, e_2)$.

$$T_{F\to G} = T_{E\to F}^{-1} * T_{E\to G}, \text{ где}$$

$$T_{E\to F}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ T_{E\to G}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$T_{F\to G} = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$A_{\varphi}^{G} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} * \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Вектор $b=(1,1)$ задан своими координатами в базисе E $b = e_1 + e_2$.

Найдем координаты вектора b в базисе F по формуле $b'=T_{E\to F}^{-1} * b$.

Имеем

$$b' = \frac{-1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Искомые координаты образа вектора b в базисе F находим по формуле (1.2). Имеем

$$Y_F=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} \text{ или } y_F = \frac{4}{5} f_1 + \frac{7}{5} f_2.$$

Найдем координаты вектора b в базисе G по формуле $b''=T_{E\to G}^{-1}*b$. Имеем

$$b''=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}.$$

Искомые координаты образа вектора b в базисе G находим по формуле (1.2). Имеем

$$Y_G=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}\frac{-1}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-4}{5}\\ \frac{11}{5}\end{pmatrix} \text{ или } y_G = \frac{-4}{5}g_1+\frac{11}{5}g_2.$$

c) Убедимся в правильности нахождения матрицы линейного преобразования φ в базисе G. Найдем координаты векторов $y_F$ и $y_G$ в базисе $E=(e_1, e_2)$.

$$y_F = \frac{4}{5}f_1 + \frac{7}{5}f_2 \Rightarrow y_E = \frac{4}{5}(-1,2) + \frac{7}{5}(2,1) = (2,3),$$

$$y_G = \frac{-4}{5}g_1 + \frac{11}{5}g_2 \Rightarrow y_E = \frac{-4}{5}(3,-1) + \frac{11}{5}(2,1) = (2,3).$$

Таким образом, можно сделать вывод, что матрица преобразования φ в базисе G найдена верно.

<u>Пример 8.</u>

Пусть линейное преобразование φ в базисе $E= (e_1, e_2)$ задано матрицей

$A_\varphi =\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $E'= (e'_1= e_1-e_2,\ e'_2= e_1+2e_2)$

матрицей $B_\psi =\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Найти матрицу преобразования:

a) φ + ψ в базисе E;

b) φ + ψ в базисе E′.

<u>Решение:</u>

a) Матрица перехода от базиса E к базису E′

$$T_{E\to E'} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},$$

соответственно, матрица перехода от базиса E′ к базису E

$$T_{E'\to E} = T_{E\to E'}^{-1} =\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрицу преобразования ψ в базисе E найдем по формуле (1.5)

$$B_\psi=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}*\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & 2\end{pmatrix}.$$

Матрица

$$C_{\varphi+\psi}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 8 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}10 & 13\\ 5 & 14\end{pmatrix}$$

является матрицей суммы преобразований φ + ψ в базисе E.

b) Согласно (1.5) матрица преобразования φ в базисе E′

$$A_\varphi=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 4\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 19\\ -7 & 20\end{pmatrix}.$$

Матрица

$$C_{\varphi+\psi}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 19\\ -7 & 20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 13\\ -4 & 23\end{pmatrix}$$

является матрицей суммы преобразований φ + ψ в базисе E.

### 1.4.1 Самостоятельная работа

Линейное преобразование φ в базисе E=($e_1, e_2, e_3$) задано матрицей $A$. Найти матрицу этого линейного преобразования в базисе F=($f_1, f_2, f_3$).

1. $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -4\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},\qquad \begin{cases} f_1=e_1-e_2+3e_3,\\ f_2=4e_1+e_2-e_3,\\ f_3=2e_1-3e_2.\end{cases}$

2. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{cases} f_1=2e_1+e_2+4e_3,\\ f_2=e_1-e_2-2e_3,\\ f_3=e_2+2e_3.\end{cases}$

3. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 4 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix},\qquad \begin{cases} f_1=3e_1+2e_2+e_3,\\ f_2=-e_1-e_3,\\ f_3=-e_1+4e_2+e_3.\end{cases}$

4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = -2e_1 + e_3, \\ f_2 = -2e_1 + 3e_2 + 2e_3, \\ f_3 = -2e_1 + 2e_2 + e_3. \end{cases}$

5. $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = -2e_2 - e_3, \\ f_2 = 2e_1 - 3e_2 + 3e_3, \\ f_3 = -e_1 + e_2 + 2e_3. \end{cases}$

6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 3e_1 + 3e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_2 + 2e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2 - 3e_3. \end{cases}$

7. $A=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3, \\ f_2 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3, \\ f_3 = 3e_2 + e_3. \end{cases}$

8. $A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 2e_1 - e_3, \\ f_2 = -2e_1 + e_2 + 2e_3, \\ f_3 = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3. \end{cases}$

9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3, \\ f_2 = e_1 - 3e_2, \\ f_3 = 4e_1 - e_2 + e_3. \end{cases}$

10. $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = e_1 - 4e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_2 + e_3, \\ f_3 = -2e_1 + 2e_2 + e_3. \end{cases}$

11. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = e_1 - 4e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_2 + e_3, \\ f_3 = -2e_1 + 2e_2 + e_3. \end{cases}$

12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3, \\ f_2 = e_1 - 3e_2, \\ f_3 = 4e_1 - e_2 + e_3. \end{cases}$

13. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 2e_1 - e_3, \\ f_2 = -2e_1 + e_2 + 2e_3, \\ f_3 = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3. \end{cases}$

14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3, \\ f_2 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3, \\ f_3 = 3e_2 + e_3. \end{cases}$

15. $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 3e_1 + 3e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_2 + 2e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2 - 3e_3. \end{cases}$

16. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = -2e_2 - e_3, \\ f_2 = 2e_1 - 3e_2 + 3e_3, \\ f_3 = -e_1 + e_2 + 2e_3. \end{cases}$

17. $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = -2e_1 + e_3, \\ f_2 = -2e_1 + 3e_2 + 2e_3, \\ f_3 = -2e_1 + 2e_2 + e_3. \end{cases}$

18. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 3e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_1 - e_3, \\ f_3 = -e_1 + 4e_2 + e_3. \end{cases}$

19. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 2e_1 + e_2 + 4e_3, \\ f_2 = e_1 - e_2 - 2e_3, \\ f_3 = e_2 + 2e_3. \end{cases}$

20. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + 3e_3, \\ f_2 = 4e_1 + e_2 - e_3, \\ f_3 = 2e_1 - 3e_2. \end{cases}$

21. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 3e_1 + 3e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_2 + 2e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2 - 3e_3. \end{cases}$

22. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3, \\ f_2 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3, \\ f_3 = 3e_2 + e_3. \end{cases}$

23. $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ -1 & 4 & -1\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 2e_1 - e_3, \\ f_2 = -2e_1 + e_2 + 2e_3, \\ f_3 = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3. \end{cases}$

24. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ -1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3, \\ f_2 = e_1 - 3e_2, \\ f_3 = 4e_1 - e_2 + e_3. \end{cases}$

25. $A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{cases} f_1 = e_1 - 4e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_2 + e_3, \\ f_3 = -2e_1 + 2e_2 + e_3. \end{cases}$

### 1.4.2 Расчетно-графическая работа

Преобразование φ в базисе ($g_1$, $g_2$) имеет матрицу Ag, а преобразование ψ в базисе ($f_1$, $f_2$) задано матрицей $B_f = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 8\end{pmatrix}$.

Найти:

a) матрицу преобразования φ в базисе ($f_1$, $f_2$);

b) сделать проверку правильности нахождения матрицы $A_f$ для вектора $x_g$= (1, -1);

c) матрицу преобразования φ + ψ в базисе G;

d) матрицу преобразования φ + ψ в базисе F.

1. $g_1$= (3, 2), $g_2$= (1, 1), $f_1$= (3, 1), $f_2$= (-1, 1), $A_g = \begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

2. $g_1$= (4, 1), $g_2$= (3, 1), $f_1$= (1, 1), $f_2$= (1, 4), $A_g = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$.

3. $g_1$= (-1, -1), $g_2$= (2, 1), $f_1$= (3, 2), $f_2$ = (1, 2), $A_g = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -3\end{pmatrix}$.

4. $g_1 = (1, 4)$, $g_2 = (1, 5)$, $f_1 = (3, 2)$, $f_2 = (-3, 1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$/

5. $g_1 = (2, 3)$, $g_2 = (2, 1)$, $f_1 = (3, 4)$, $f_2 = (2, 1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. $g_1 = (3, -1)$, $g_2 = (-3, 2)$, $f_1 = (-1, 1)$, $f_2 = (1, 4)$, $A_g = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

7. $g_1 = (3,-2)$, $g_2 = (-2, 1)$, $f_1 = (-3, 1)$, $f_2 = (-1, 1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

8. $g_1 = (4, -1)$, $g_2 = (3, -1)$, $f_1 = (1, 2)$, $f_2 = (1, 4)$, $A_g = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

9. $g_1 = (-2, 3)$, $g_2 = (2, 1)$, $f_1 = (5, 2)$, $f_2 = (-1, 1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. $g_1 = (4, -1)$, $g_2 = (-3, 2)$, $f_1 = (-3, 1)$, $f_2 = (4, 4)$, $A_g = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

11. $g_1 = (-3, 2)$, $g_2 = (3, 4)$, $f_1 = (3, 2)$, $f_2 = (-1, -1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

12. $g_1 = (2, -7)$, $g_2 = (-1, 4)$, $f_1 = (1, -5)$, $f_2 = (-1, 4)$, $A_g = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

13. $g_1 = (3, 2)$, $g_2 = (1, 1)$, $f_1 = (1, -5)$, $f_2 = (-1, 4)$, $A_g = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $g_1 = (4, 1)$, $g_2 = (3, 1)$, $f_1 = (3, 2)$, $f_2 = (-1, -1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

15. $g_1 = (-1, -1)$, $g_2 = (2, 1)$, $f_1 = (-3, 1)$, $f_2 = (4, 4)$, $A_g = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$.

16. $g_1 = (1, 4)$, $g_2 = (1, 5)$, $f_1 = (5, 2)$, $f_2 = (-1, 1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

17. $g_1 = (2, 3)$, $g_2 = (2, 1)$, $f_1 = (1, 2)$, $f_2 = (1, 4)$, $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

18. $g_1 = (3, -1)$, $g_2 = (-3, 2)$, $f_1 = (-3, 1)$, $f_2 = (-1, 1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

19. $g_1 = (3,- 2)$, $g_2 = (-2, 1)$, $f_1 = (-1, 1)$, $f_2 = (1, 4)$, $A_g = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

20. $g_1 = (4, -1)$, $g_2 = (3, -1)$, $f_1 = (1, 2)$, $f_2 = (1, 4)$, $A_g = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.

21. $g_1 = (-2, 3)$, $g_2 = (2, 1)$, $f_1 = (3, 2)$, $f_2 = (-3, 1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

22. $g_1 = (4, -1)$, $g_2 = (-3, 2)$, $f_1 = (3, 2)$, $f_2 = (1, 2)$, $A_g = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

23. $g_1 = (-3, 2)$, $g_2 = (3, 4)$, $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, 4)$, $A_g = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

24. $g_1 = (2, -7)$, $g_2 = (-1, 4)$, $f_1 = (3, 1)$, $f_2 = (-1, 1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

25. $g_1 = (3, 4)$, $g_2 = (2, 1)$, $f_1 = (2, 3)$, $f_2 = (2, 1)$, $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

## 1.5 Собственные векторы и собственные значения линейного преобразования

Пусть φ – линейное преобразование $\varphi: R^n \to R^n$. Ненулевой вектор $\vec{x}$ n-мерного пространства называется собственным вектором линейного преобразования φ, если существует число λ такое, что

$$\varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x}, \qquad (1.6)$$

число λ называется собственным значением вектора относительно преобразования φ.

Если в пространстве $R^n$ выбран базис, соотношение (1.6) можно записать в матричном виде:

$$A_\varphi X = \lambda X, \qquad (1.7)$$

где $A_\varphi$ – матрица линейного преобразования в некотором базисе, X–вектор-столбец координат вектора $\vec{x}$ в том же базисе.

Пример 9.

Линейное преобразование φ двумерного пространства в базисе $E=(e_1, e_2)$ имеет матрицу $A_\varphi^E = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Вектор $\vec{x}$ =$e_1$-$e_2$ является собственным вектором преобразования φ с собственным значением λ=2. Проверим соотношение (1.7):

$$A_\varphi X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -2X$$

или $\varphi(\vec{x}) = -2\vec{x}$.

Пример 10. Найти собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Выпишем равенство (1.7)

$$\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} X = \lambda X \text{ или}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] X = \overline{0}. \qquad (**)$$

Чтобы линейное преобразование имело собственный вектор с собственным значением λ, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений (**) имела ненулевое решение. Система линейных алгебраических уравнений (**) будет иметь ненулевое решение в случае, когда

$$\det\left[\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

$$\begin{vmatrix} 9-\lambda & 0 \\ 8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)*(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1=9,\ \lambda_2=1.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1$=9.

Для этого рассмотрим систему линейных уравнений (**) при λ=9

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8 & -8 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему, получим X=C(1, 1), где C=const, C≠0 – все собственные векторы, соответствующие собственному значению λ=9.

Аналогично, найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению λ=1.

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему, получим X=C(0, 1), где C=const, C≠0 – все собственные векторы, соответствующие собственному значению λ=1.

Проверим выполнение равенства (1.7).

$$AX = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 9X,$$

$$AX = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1X.$$

### 1.5.1 Самостоятельная работа

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.
5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
6. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.
7. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$.
8. $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
9. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
10. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.
11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
12. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.
13. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -0 & 5 \end{pmatrix}$.
14. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
15. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.
16. $A = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
17. $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
18. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.
19. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.
20. $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
21. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
22. $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$.
23. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.
24. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

25.A = $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

## 1.6 Приведение матрицы преобразования к диагональному виду

Для того чтобы матрица преобразования φ в некотором базисе $E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы каждый базисный вектор был собственным вектором преобразования φ.

<u>Пример 11.</u>

Линейное преобразование φ в некотором базисе задано матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Найти:

a) базис, в котором матрица преобразования будет иметь диагональный вид;

b) диагональную форму матрицы;

c) выполнить проверку.

<u>Решение:</u>

a) Не нарушая общности, будем считать, что преобразование φ задано матрицей $A_\varphi$ в стандартном базисе трехмерного пространства $E = (e_1, e_2, e_3)$.

Составим характеристическое уравнение и найдем собственные значения линейного преобразования

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 6 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для нахождения собственных значений решаем уравнение

$$(1-\lambda)[(5-\lambda)(-4-\lambda)+18]=0.$$

Корни полученного уравнения следующие: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=1$.

Найдем собственный вектор с собственным значением $\lambda_1=-1$.

Для этого рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 6x_1 - 3x_3 = 0, \\ 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы можно записать в виде $X=C_1(1, -1, 2)$. При $C_1 \neq 0$ получим все собственные векторы с собственным значением $\lambda_1=-1$.

Найдем собственный вектор с собственным значением $\lambda_2=2$. Для этого рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы можно записать в виде $X=C_2(1, 1, 1)$. При $C_2 \neq 0$ получим все собственные векторы с собственным значением $\lambda_2=2$.

Найдем собственный вектор с собственным значением $\lambda_3=1$. Для этого рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_3 = 0, \\ \quad\; x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы можно записать в виде $X=C_3(0, 1, 0)$. При $C_3 \neq 0$ получим все собственные векторы с собственным значением $\lambda_3=1$.

Составим базис трехмерного пространства. Положив $C_1=1$, $C_2=1$, $C_3=1$, получим собственные векторы $\nu_1= (1, -1, 2)$, $\nu_2= (1, 1, 1)$, $\nu_3= (0, 1, 0)$, составляющие базис. Тогда имеем

$$T_{E\to V} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $T_{E\to V}$ – невырожденная, соответственно система векторов $V = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – является линейно-независимой.

b) Для нахождения матрицы преобразования в новом базисе воспользуемся формулой (1.5)

$$A_\varphi^V = T_{E\to V}^{-1} A_\varphi^E \, T_{E\to V}.$$

Имеем

$$A_{\varphi}^{V}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}*\begin{pmatrix}5 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 1\\ 6 & 0 & -4\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}*$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, в базисе V = ($\nu_1, \nu_2, \nu_3$), где

$$\begin{cases}\nu_1 = e_1 - e_2 + 2e_3,\\ \nu_2 = e_1 + e_2 + e_3,\\ \nu_3 = e_2,\end{cases}$$

матрица линейного преобразования имеет диагональный вид.

Вывод о том, что матрица преобразования приводится к диагональному виду, можно было сделать сразу после нахождения собственных значений матрицы. Если все собственные значения матрицы попарно различны, то матрица преобразования приводится к диагональному виду.

Пример 12.

Линейное преобразование φ в стандартном базисе E трехмерного пространства задано матрицей $A_{\varphi}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

Найти:

a) собственные значения и собственные векторы линейного преобразования;
b) выяснить, приводится ли матрица преобразования к диагональному виду;
c) в случае приводимости выписать диагональный вид матрицы и выполнить проверку.

Решение:

a) Характеристическое уравнение данного линейного преобразования имеет вид

$$\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & -3\\ 0 & 1-\lambda & -1\\ 2 & 2 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Упростим определитель, пользуясь свойствами.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -3 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ -1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} + \text{I стр.} =$$

- II ст.

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 0 & 3-\lambda & -4 \\ 0 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первого столбца, получим

$$(1-\lambda)*\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для нахождения собственных значений решаем уравнение

$$(1-\lambda)[(3-\lambda)(-3-\lambda)+8]=0 \Rightarrow$$
$$(1-\lambda)*(\lambda^2-1)=0.$$

Корни полученного уравнения следующие: $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$.

Найдем собственные векторы с собственным значением $\lambda_1=\lambda_2=1$. Для этого рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=0, \\ -x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-4x_3=0. \end{cases}$$

Данная система будет эквивалентна следующей системе уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3=0, \\ x_3=0. \end{cases}$$

Решение системы можно записать в виде $X=C_1(1, -1, 0)$. При $C_1\neq0$ получим все собственные векторы с собственным значением $\lambda_1=\lambda_2=1$.

Найдем собственные векторы с собственным значением $\lambda_3=-1$. Для этого рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_2-x_3=0, \\ 2x_1+2x_2-2x_3=0. \end{cases}$$

Данная система будет эквивалентна следующей системе уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-x_3=0, \\ 2x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Решение этой системы можно записать в виде X=$C_2(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$. При $C_2 \neq 0$ получим все собственные векторы с собственным значением $\lambda_3$=-1.

Выпишем линейно-независимые собственные векторы, соответствующие собственным значениям $\lambda_1=\lambda_2$= 1 и $\lambda_3$=-1. Положим $C_1$=1, $C_2$=2, получим, соответственно, собственные векторы $\nu_1$= (1, -1, 0), $\nu_2$= (1, 1, 2).

b) Линейное преобразование задано в трехмерном пространстве. Для того, чтобы матрица линейного преобразования приводилась к диагональному виду необходимо и достаточно, чтобы существовал базис этого пространства, состоящий из собственных векторов данного преобразования.

В рассмотренном примере не можем составить базис из собственных векторов. Следовательно, матрица преобразования $A_\varphi=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ не может быть приведена к диагональному виду.

<u>Пример 13.</u>

Матрицу $A_\varphi$ линейного преобразования φ привести, если это возможно, к диагональному виду:

$A_\varphi=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Решение:</u>

Находим сначала собственные значения, а затем соответствующие им собственные векторы.

Характеристическое уравнение данного линейного преобразования имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} +\text{II стр.} \\ \\ -\text{II стр.} \end{matrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -2 & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & -2 \\ -2+\lambda & 1-\lambda & -1 \\ -2+\lambda & -\lambda & -\lambda \end{vmatrix}$$

- II ст. – III ст.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & -2 \\ -2+\lambda & 2-\lambda & -1 \\ -2+\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \text{III стр.} = \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -1+\lambda \\ -2+\lambda & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Разложим определитель по элементам первого столбца

$$(-2+\lambda)*\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ 2-\lambda & -1+\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Для нахождения собственных значений решаем уравнение

$$(-2+\lambda)*(\lambda^2-\lambda-2)=0.$$

Корни этого уравнения следующие: $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=-1$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda=2$ кратности 2.

Нахождение собственных векторов сводится к решению системы уравнению

$$\begin{cases} -x_1-x_2-x_3=0, \\ -x_1-x_2-x_3=0, \\ -x_1-x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Данная система будет эквивалентна уравнению

$$x_1+x_2+x_3=0. \qquad (***)$$

Решение системы можно записать в виде $X=C_1(1,-1,0)+C_2(1,0,-1)$. Получим два линейно-независимых собственных вектора, соответствующие собственному значению $\lambda=2$ кратности 2.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_3=-1$.

Для этого рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=0, \\ -x_1+2x_2-x_3=0, \\ -x_1-x_2+2x_3=0. \end{cases}$$

Данная система будет эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases} x_2-x_3=0, \\ -x_1+2x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Решение этой системы можно записать в виде $X=C_2(1, 1, 1)$, откуда получим один линейно-независимый собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3=-1$.

Система векторов

$$\begin{cases} \nu_1 = e_1 - e_2, \\ \nu_2 = e_1 - e_3, \\ \nu_3 = e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}$$

линейно-независимая, следовательно, ее можно принять за базис пространства. А так как

$$\varphi\nu_1 = 2\nu_1,$$

$$\varphi\nu_2 = 2\nu_2,$$

$$\varphi\nu_3 = -\nu_3,$$

то матрица линейного преобразования $\varphi$ в базисе $V=(\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ принимает диагональный вид:

$$A_\varphi^V = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрица преобразования $A_\varphi$ – симметричная. Для матрицы симметричного преобразования всегда можно найти необходимое число собственных векторов, в базисе которых матрица принимает диагональный вид.

Заметим также, что векторы $\nu_1$ и $\nu_3$, соответствующие различным собственным значениям, являются ортогональными. Система же векторов $(\nu_1, \nu_2)$ не обязана быть ортогональной, так как они соответствуют одному собственному значению. Однако можно найти ортогональную систему собственных векторов.

Для нахождения второго ортогонального собственного вектора добавим к уравнению (***) условие ортогональности векторов $(\nu_1, \nu_2)=0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему, найдем вектор $\nu_2' = (1, 1, -2)$.

Таким образом, попарно ортогональными собственными векторами преобразования φ являются векторы

$$\begin{aligned} \nu_1 &= e_1 - e_2, \\ \nu_2' &= e_1 + e_2 - 2e_3, \\ \nu_3 &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

(****)

Получим матрицу преобразования φ в базисе $V' = (\nu_1, \nu_2', \nu_3)$. Матрица перехода от базиса E к $V'$

$$T_{E\to V'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$T_{E\to V'}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицу преобразования в базисе $V'$ найдем по формуле (1.5)

$$A_{\varphi}^{V'} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 14.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$.

Вычислить матрицу $A^{160}$.

Решение:

Будем рассматривать матрицу A как матрицу некоторого линейного преобразования в базисе $E = (e_1, e_2)$.

$$A^{160} = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots\cdots\cdots A}_{160 \text{ раз}}. \qquad (*****)$$

Нахождение произведения матриц (*****) – трудоемкий процесс, вручную очень затруднительный.

Приведем матрицу A к диагональному виду. Составим характеристическое уравнение и найдем собственные значения линейного преобразования. Получим собственные значения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$.

Собственным вектором матрицы A с собственным значением $\lambda_1$=1 будет вектор $v_1$= (1, 2). Собственным вектором матрицы A с собственным значением $\lambda_2$=-1 будет вектор $v_2$= (1, 3).

По формуле $A_V = T_{E\to V}^{-1} A_E\ T_{E\to V}$ получим матрицу преобразования в новом базисе $A_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Выразим матрицу $A_E$, получим $A_E = T_{E\to V} A_V T_{E\to V}^{-1}$. Подставим полученное выражение в (*****)

$$A_E^{160} = T_{E\to V} A_V T_{E\to V}^{-1} T_{E\to V} A_V T_{E\to V}^{-1} \cdot\cdot\ T_{E\to V} A_V T_{E\to V}^{-1},$$

откуда, учитывая, что $T_{E\to V}^{-1} T_{E\to V} = E$, получим искомую матрицу

$$A_E^{160} = T_{E\to V} A_V^{160} T_{E\to V}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{160} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 1.6.1 Самостоятельная работа

В задачах 1-25 пункта 1.4.1.

1) Найти базис, в котором матрица линейного преобразования имеет диагональный вид. Выполнить проверку;
2) Вычислить $A^{100}$, $A^{151}$.

## 1.7 Ортогональные преобразования

Линейное преобразование евклидова пространства называется ортогональным, если в некотором ортонормированном базисе его матрица ортогональна.

Чтобы построить ортогональное преобразование n-мерного евклидова пространства, надо найти ортогональную матрицу порядка n. Напомним, матрица порядка n является ортогональной, если соответствующая ей система векторов-столбцов является ортонормированной.

Необходимым и достаточным условием ортогональности матрицы А является условие

$$A^{T} * A = E.$$

Для ортогональной матрицы выполняется условие

$$A^{T} = A^{-1}.$$

## 2 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

1) В линейном арифметическом пространстве $R^4$ векторы $f_1$, $f_2$, $f_3$, $f_4$, заданные как строки матрицы $B_{ef}$, составляют базис. В этом базисе задана матрица линейного оператора φ: $R^4 \to R^4$. Найти матрицу линейного оператора φ в стандартном базисе и, определив $A_e$, для проверки выполнить обратные преобразования.

2) Найти собственные значения и собственные векторы матрицы линейного оператора φ в стандартном базисе и базисе f. Сравнить полученные собственные значения и собственные векторы в разных базисах. Сделать вывод.

3) Выяснить, приводится ли матрица $A_e$ к диагональному виду. Записать диагональный вид матрицы в случае приводимости. Обосновать в случае, если диагонального вида не существует.

1. $B_{ef} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\qquad A_f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. $B_{ef} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A_f = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\quad A_f=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

4. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\-1&0&4&1\\0&1&1&-1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\quad A_f=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&1&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}$.

5. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\-1&1&0&0\\4&0&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\quad A_f=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

6. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&7\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\quad A_f=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

7. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$ $\quad A_f=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

8. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&8\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\quad A_f=\begin{pmatrix}-5&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-5\end{pmatrix}$.

9. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\1&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$ $\quad A_f=\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&-5&1&0\\0&0&-5&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

$$10.\ B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\-1&0&0&1\\0&1&1&-1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\qquad A_f=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&-4&1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}.$$

$$11.\ B_{ef}=\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\-4&0&0&-1\\0&-1&0&1\\1&2&-1&0\end{pmatrix}\qquad A_f=\begin{pmatrix}-4&1&0&0\\0&-4&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$12.\ B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&1&1\\0&-1&1&-1\\-2&0&-1&-1\end{pmatrix}\qquad A_f=\begin{pmatrix}7&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$13.\ B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\qquad A_f=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

$$14.\ B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&4\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\qquad A_f=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$

$$15.\ B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\-1&0&3&1\\0&1&2&-1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\qquad A_f=\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$16.\ B_{ef}=\begin{pmatrix}-1&0&4&1\\1&0&0&2\\0&1&1&-1\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}\qquad A_f=\begin{pmatrix}-2&1&0&0\\0&-2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

17. $B_{ef}=\begin{pmatrix}0&0&-1&-1\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&3\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_f=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

18. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&1&1\\0&-1&1&-1\\-2&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_f=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$.

19. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_f=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

20. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&4\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_f=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

21. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_f=\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.

22. $B_{ef}=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\\-1&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_f=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

23. $B_{ef}=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&5\end{pmatrix}$ $\qquad$ $A_f=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$.

24. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&0&1&1\\0&-1&1&-1\\-2&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\qquad A_f=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

25. $B_{ef}=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\-1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&-1&-1\end{pmatrix}$ $\qquad A_f=\begin{pmatrix}-4&0&0&0\\0&-4&1&0\\0&0&-4&1\\0&0&0&-4\end{pmatrix}$.

## 3 КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Ниже приводятся типовые варианты контрольных работ по теме «Линейные операторы».

Вариант 1.

1. В базисе **g₁, g₂** $\in R^2$ оператор имеет матрицу Ag. Найти матрицу этого оператора в базисе **f₁, f₂** $\in R^2$. Сделать проверку для вектора $x_g$= (1, -1).

$\mathbf{g_1}$ = (3, 2), $\mathbf{g_2}$= (1, 1), $\mathbf{f_1}$= (3, 1), $\mathbf{f_2}$= (-1, 1), $A_g=\begin{pmatrix}3&-2\\1&1\end{pmatrix}$.

2. Дана матрица перехода от базиса E к базису E' $\begin{pmatrix}1&-1&3\\5&1&2\\1&4&-1\end{pmatrix}$. Найти координаты вектора $e_2$ в базисе E'.

3. Отображение $\varphi_A\ :\ R^4\to R^3$ в стандартном базисе задано матрицей $A=\begin{pmatrix}3&2&-5&4\\3&-1&3&-3\\3&5&-13&11\end{pmatrix}$. Найти φ(x), где $x=e_1+2e_2-4e_3-e_4$.

Вариант 2.

1. В стандартном базисе трехмерного пространства преобразование φ: $R^3 \to R^3$ задано матрицей А. Найти базис, в котором матрица А принимает диагональный вид. Убедиться в правильности полученного результата.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений $A$x = $b$.

Найти $Ker\varphi_A$ , $\mathrm{Im}\varphi_A$ отображения $\varphi_A$ : $R^4 \to R^3$ для матрицы $A$, заданной в стандартном базисе

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -3 \\ 3 & 5 & -13 & 11 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практикум соответствует программе по алгебре и геометрии для студентов, обучающихся по направлениям «Прикладная математика и информатика», «Прикладная информатика». Приведен необходимый теоретический материал, рассмотрены примеры решения типовых задач по теме «Линейные преобразования». Предназначено для проведения практических занятий, для самостоятельной работы студентов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. С.-Пб.: Лань, 2008
2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. С.-Пб.: Лань, 2010
3. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. Линейная алгебра в вопросах и задачах. М., 2002

Учебное издание

Шестакова Елена Григорьевна

Линейные преобразования: практикум по дисциплине

«Алгебра и геометрия»

Подписано в печать.03.07.2018. Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 2,5. Тираж 100. Заказ № 324
Редакционно-издательское управление
Тверского государственного университета
Адрес: 170100, г. Тверь, Студенческий пер. 12, корпус Б.
Тел. РИУ (4822) 35-60-63.