Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Тверской государственный
университет

С. М. Дудаков

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

для студентов физико-математических направлений

Тверь — 2019

УДК 512.57
ББК 22.144 я73
Д 81

Тверской государственный университет
Факультет прикладной математики и кибернетики

Дудаков С. М.
Д 81 Универсальная алгебра : Учебное пособие. — Тверь : Твер. гос. ун-т, 2019. — 112 с.

Учебное пособие содержит базовые понятия из универсальной алгебры: сигнатуры, термы, алгебры, морфизмы, подалгебры, вложения, конгруэнтности, фактор-алгебры, произведения, копроизведения, многообразия, свободные алгебры.

Учебное пособие адресовано, прежде всего, студентам младших курсов, обучающихся по направлениям укрупненных групп 01.03.00 «Математика и механика», 02.03.00 «Компьютерные и информационные науки», 09.03.00 «Информатика и вычислительная техника».

УДК 512.57
ББК 22.144 я73

Оглавление

Предисловие

Учебное пособие содержит материал первой части курса «Общая алгебра», который читается студентам физико-математических направлений.

Основной причиной написания данного пособия послужило отсутствие аналогичного издания, доступного для восприятия студентам младших курсов. Большинство учебных изданий, скажем, классические книги [4, 5], сразу ориентировано на изучение конкретного класса алгебр (групп, колец, полей) и не уделяют внимания общим свойствам алгебраических конструкций. Другие имеющиеся издания, например, [3], хотя и не имеют этого недостатка, но с одной стороны уже выпущены достаточно давно, а с другой содержат материал ориентированный на более подготовленного читателя. Ещё одна группа книг, в частности, [6, 8], более ориентирована на логику.

Изложение материала основано на опыте чтения дисциплины «Общая алгебра» в 2009–2018 гг. студентам направлений «Прикладная математика и информатика» и «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Первая часть книги содержит определения и свойства фундаментальных понятий: функции, их композиции, отношения эквивалентности и т. д. Обычно эти понятия должны быть изучены ранее, например, в курсе «Дискретной математики» или подобном ему. Главная цель первой части — это напоминание и унификация используемых далее терминов.

Вторая часть посвящена определению и изложению простейших свойств алгебр и морфизмов. В его изложении мы следуем классической схеме: сначала вводим понятия сигнатур и термов, затем — собственно алгебр и значений термов. В конце приводятся определения морфизмов и их частного случая — изоморфизмов, а также устанавливаются их базовые свойства.

Третья часть книги посвящена изучению основных конструкций общей алгебры. Первая из них — это подалгебры и тесно связанные с ними вложения. Далее более подробно чем во второй части изучаются свойства морфизмов, в частности, приводится одна из самых фундаментальных теорем о связи морфизмов, конгруэнтностей и фактор-алгебр. Наконец, в последнем разделе приводятся конструкции декартового и прямого произведений.

Последняя, четвёртая, часть содержит материал, посвящённый многообразиям. Следом за определением рассматриваются их основные свойства, в частности, свойства замкнутости многообразий относительно изученных ранее алгебраических конструкций, доказывается теорема Биркгофа, связывающая эти понятия. Далее рассматривается ещё одна базовая алгебраическая конструкция: свободные алгебры. В конце приводится понятие копроизведения и доказывается их существование в любом многообразии.

После каждого параграфа приводится набор задач, предложенных для самостоятельного решения. Задачи рекомендуется решать в той последовательности, в которой они приведены, поскольку в ряде случаев решение следующей задачи опирается на решение предыдущей и, если изменить порядок, поиск правильного решения может быть осложнён. Почти для всех задач (кроме чисто технических) в конце приведены или полные решения, или указания, достаточные для того, чтобы это решение можно было легко отыскать.

Список литературы содержит книги, в которых материал излагается на более глубоком уровне. Прежде всего нужно отметить книгу [3]. Другой заслуживающей упоминания в первую очередь книгой является [7], написанная одним из создателей теории категорий. В [2, 4, 1] общая теория универсальных алгебр в основном используется в приложении к решёткам и другим классическим алгебраическим структурам. В изданиях [6, 8] изложение материала более ориентировано на изучение логических языков и связи алгебраических понятий с формулами логики предикатов.

В конце приведён указатель терминов.

Отзывы, замечания и предложения просим направлять на адрес электронной почты

sergeydudakov@yandex.ru

§ 1. Функции и отношения

§ 1.1. Унарные функции

Главный предмет изучения алгебры — это функции (или операции) и их свойства, рассматриваемые безотносительно множеств, на которых эти функции определены.

Определение 1 (Операция). *Пусть A и B — множества. Унарной (или одноместной) функцией (или операцией, отображением) из A в B называется множество f упорядоченных пар такое, что*

1) *если $(a, b) \in f$, то $a \in A$, $b \in B$;*
2) *для любого $a \in A$ существует в точности один $b \in B$ такой, что $(a, b) \in f$.*

Данный факт обозначается с помощью $f : A \to B$. Если $A = B$, то говорят, что f — (унарная) функция на множестве A. Множество A называется областью определения функции f и обозначается с помощью $\operatorname{dom} f$. Если $(a, b) \in f$, то b называется значением функции f на a и обозначается с помощью $f(a)$ или fa. Множество всевозможных значений функции f обозначается с помощью $\operatorname{rng} f$:

$$\operatorname{rng} f = \{f(a) : a \in \operatorname{dom} f\}$$

и называется областью значений функции f.

Пример 1. *Рассмотрим множество $f = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{Z}\}$. Это функция на множестве целых чисел, значением функции на любом $x \in \mathbb{Z}$ будет $2x$.*

Определение 2 (Образ, полный прообраз). *Пусть $f : A \to B$, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$. Образом множества C при отображении f называется множество*

$$f(C) = \{f(x) : x \in C\}.$$

(Полным) прообразом множества D при отображении f

называется множество

$$f^{-1}(D) = \{x \in C : f(x) \in D\}.$$

Пример 2. *Для функции $f(x) = x^2$ на множестве целых чисел получим*

$$f(\{-1, 0, 1\}) = \{0, 1\}$$

$$f^{-1}(\{0, 1, 2, 3, 4\}) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}.$$

Следствие 1. *$f(\varnothing) = f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ для любой функции f.*

Замечание 1. Вообще говоря, может быть так, что $C \in A$ и $C \subseteq A$ одновременно. Тогда обозначение $f(C)$ будет неоднозначно, поскольку может означать значение f на элементе $C \in A$ и одновременно образ множества C при отображении f. Аналогично, если $D \in B$ и $D \subseteq B$, то $f^{-1}(B)$ может быть значением обратной функции f^{-1} на D и прообразом D.

Если такая ситуация может возникнуть, то для образов и прообразов используют обозначение с квадратными скобками: $f[C]$ и $f^{-1}[D]$ соответственно.

Мы будем считать, что такая ситуация невозможна, поэтому используем обычные круглые скобки для значений, образов и прообразов.

Следствие 2. *Пусть A — непустое множество. Тогда*

$$e_A = \{(a, a) : a \in A\}$$

является унарной функцией на множестве A.

Определение 3 (Тождественная функция)**.** *Функция*

$$e_A = \{(a, a) : a \in A\}$$

называется т о ж д е с т в е н н о й ф у н к ц и е й на множестве A.

Для тождественной функции тривиально выполнено свойство: если $e(x) = e(y)$, то $x = y$. Разумеется, другие функции тоже могут удовлетворять такому условию.

Определение 4 (Разнозначная функция)**.** *Унарная функция $f : A \to B$ называется р а з н о з н а ч н о й (или и н ъ е к т и в н о й, и н ъ е к ц и е й), если из $f(a_1) = f(a_2)$ следует $a_1 = a_2$ для любых*

$a_1, a_2 \in A$.

Проиллюстрируем это определение.

Пример 3. *Изменение знака является разнозначной операцией на множестве рациональных чисел, так как*

$$a = b \iff -a = -b$$

для любых $a, b \in \mathbb{Q}$.

Возведение в квадрат на $\mathbb{Q}$ разнозначной функцией на является, например, $-1 \neq 1$, но $(-1)^2 = 1^2$. Однако, если рассматривать возведение в квадрат на множестве неотрицательных чисел, то она будет разнозначной.

Имеется другой важный класс функций.

Определение 5 (Сюръективная функция)**.** *Унарная функция $f : A \to B$ называется сюръективной (или сюръекцией, покрытием), если $\operatorname{rng} f = B$. Также в случае сюръекции говорят функция из A на B.*

Рассмотрим примеры.

Пример 4. *Функция $f(x) = x^2$ сюръективно отражает множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$ на множество неотрицательных действительных чисел $\mathbb{R}_0^+$.*

Логарифмическая функция $f(x) = \ln x$ сюръективно отображает множество положительных действительных чисел $\mathbb{R}^+$ на всё множество $\mathbb{R}$.

Линейная функция $f(x) = 2x$ является сюръекцией, если рассматривать её как отображение множества рациональных или действительных чисел в себя. Но она перестаёт быть таковой, если её же рассматривать на множестве целых чисел, поскольку, например, 1 не входит в область её значений.

Если скомбинировать понятия разнозначной и сюръективной функции, то получим следующее.

Определение 6 (Взаимно однозначная функция)**.** *Говорят, что унарная функция $f : A \to B$ является взаимно однозначной (или биективной, биекцией) и обозначается $f : A \leftrightarrow B$, если она является одновременно разнозначной и сюръективной.*

Следствие 3. *Тождественная функция на множестве A является взаимно однозначной.*

Пример 5. *Функция* $f(x) = e^{2\pi x i}$ *взаимно однозначно отображает полуоткрытый интервал* $[0; 1)$ *на единичный круг на комплексной плоскости.*

Заметим, что любая разнозначная функция $f : A \to B$ будет взаимно однозначной, если рассматривать её как функцию $f : A \to \operatorname{rng} f$.

Над множеством функций в свою очередь можно определять другие операции. Одной из важнейших является композиция.

Определение 7 (Композиция). *Пусть* $f : A \to B$ *и* $g : B \to C$. *Функция* $h : A \to C$ *называется* *композицией* *функций* f *и* g, *если* $h(a) = g(f(a))$ *для всех* $x \in A$. *Это пишут в виде* $h = f \circ g$ *или* $h = gf$.

Пример 6. *Функция* $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2 \ln x$ *может быть получена как композиция двух функций:* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$ *и* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$.

Ту же функцию можно получить иначе, как композицию $g_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g_2(x) = x^2$ *и* f:

$$fg_2(x) = f(g_2(x)) = \ln(x^2) = 2 \ln x.$$

Легко заметить, что в общем случае операция композиции некоммутативна.

Пример 7. *Если* $f(x) = x^2$ *и* $g(x) = 2x$, *то получим* $(gf)(x) = 2x^2$ *и* $(fg)(x) = (2x)^2 = 4x^2$.

Заметим, что композиция тождественной функции с любой функцией f снова даст f.

Следствие 4. *Пусть* $f : A \to B$, e_A *— тождественная функция на* A, *а* e_B *— тождественная функция на* B. *Тогда* $fe_A = e_B f = f$.

Доказательство. Пусть $a \in A$, тогда $f(a) \in B$.

$$(fe_A)(a) = f(e_A(a)) = f(a); \quad (e_B f)(a) = e_B(f(a)) = f(a). \qquad \square$$

Композиция сохраняет введённые нами ранее свойства.

Теорема 5. *Композиция разнозначных (сюръективных, взаимно однозначных) функций снова является разнозначной (сюръективной, взаимно однозначной) функцией.*

Доказательство. Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to C$ — разнозначные функции, $h = gf$. Предположим, $h(a_1) = h(a_2)$. Обозначим $f(a_1) = b_1$ и $f(a_2) = b_2$, тогда $h(a_1) = g(b_1)$ и $h(a_2) = g(b_2)$. Следовательно, $g(b_1) = g(b_2)$. Так как g — разнозначная, то $b_1 = b_2$. Получаем, что $f(a_1) = f(a_2)$. Но f — тоже разнозначная, поэтому $a_1 = a_2$.

Пусть $f : A \to B$ и $g : B \to C$ — сюръективные функции, $h = gf$. Возьмём произвольный $c \in C$. Используя сюръективность g, получаем, что существует $b \in B$ такой, что $g(b) = c$. Используя сюръективность f, получаем, что существует $a \in A$ такой, что $f(a) = b$. Но тогда $h(a) = c$.

Чтобы доказать утверждение для взаимно однозначных функций комбинируем два первых пункта. □

Перейдём к изучению ещё одного действия над функциями, которое нам будет часто встречаться.

Предложение 6. *Функция f является разнозначной тогда и только тогда, когда множество пар $f' = \{(a, b) : (b, a) \in f\}$ тоже является функцией.*

Доказательство. Пусть f разнозначна. Возьмём $A = \operatorname{rng} f$, $B = \operatorname{dom} f$. Если $(a, b) \in f'$, то $(b, a) \in f$, следовательно, $b \in B$, $a \in A$. Это доказывает первый пункт определения функции. Пусть $a \in A$, тогда $a \in \operatorname{rng} f$, следовательно, существует $b \in \operatorname{dom} f = B$ такой, что $(b, a) \in f$, то есть $(a, b) \in f'$. Если при этом $(a, c) \in f'$ для некоторого $c \in B$, то $(c, a) \in f$, что означает $f(b) = a = f(c)$. Из разнозначности f делаем вывод, что $b = c$. Таким образом, указанное b единственно, что доказывает второй пункт определения.

Предположим теперь, что множество $f' = \{(a, b) : (b, a) \in f\}$ является функцией. Если бы f не было разнозначной, то нашлись бы такие $b_1 \neq b_2$, что $f(b_1) = f(b_2) = a$ для некоторого a. Это означает, что $(b_1, a), (b_2, a) \in f$, что влечёт $(a, b_1), (a, b_2) \in f'$. Но тогда f' не может быть функцией, что противоречит условию. □

Определение 8 (Обратная функция)**.** *Если f — разнозначная функция, то функция $\{(a, b) : (b, a) \in f\}$ называется обратной к функции f и обозначается с помощью f^{-1}.*

Сразу из определения получаем несколько простых следствий.

Следствие 7. $\operatorname{dom} f^{-1} = \operatorname{rng} f$, $\operatorname{rng} f^{-1} = \operatorname{dom} f$.

Следствие 8. *Для всякой разнозначной функции f выполняется $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Доказательство.

$$(a, b) \in f \iff (b, a) \in f^{-1} \iff (a, b) \in (f^{-1})^{-1}. \qquad \square$$

Следствие 9. *Если f — разнозначная функция, то функция f^{-1} тоже является разнозначной.*

Доказательство. Согласно предыдущему следствию $(f^{-1})^{-1}$ существует, следовательно, f^{-1} разнозначна. $\square$

Следствие 10. *Тождественная функция на A является обратной сама к себе.*

Тождественная функция не является единственной, обладающей последним свойством.

Пример 8. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$ — такая же: она состоит из всех пар вида $(a, -a)$, $a \in \mathbb{R}$.*

Композиция, обратные и тождественные функции связаны между собой.

Следствие 11. *Если $f : A \leftrightarrow B$, то $f^{-1} f = e_A$, где e_A — тождественная функция на A, а $f f^{-1} = e_B$, где e_B — тождественная функция на B.*

Доказательство. Пусть $a \in A$. Тогда $(a, b) \in f$ для некоторого b, следовательно, $(b, a) \in f^{-1}$. Получаем, $f(a) = b$ и $f^{-1}(f(a)) = a$.

Аналогично для второй части. $\square$

Задачи

1. Построить все унарные функции из множества $A = \{0, 1\}$ в множество $B = \{a, b, c\}$, а также из B в A. Определить, какие из них будут разнозначными, сюръективными?

2. Построить все взаимно-однозначные функции из множества $A = \{0, 1, 2\}$ в множество $B = \{a, b, c\}$.

3. Найти всевозможные композиции функций из задачи 1 на предшествующей странице.

4. Построить пример функции f на множестве натуральных чисел ω такой, что $f(x) \neq x$ для всех $x \in \omega$, но $fff = e_\omega$. ▼

5. Назовём унарную функцию на множестве A *слабо циклической*, если для каждого $x \in A$ существует натуральное $n_x > 0$ такое, что $f^{n_x}(x) = x$, где

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f}_{n\ \text{раз}}(x)\cdots)).$$

Если существует такое $n > 0$, что $f^n(x) = x$ для всех $x \in A$, то будет говорить, что f *сильно циклическая*. Привести пример функции, которая является слабо циклической, но не является сильно циклической. ▼

6. Доказать, что функция f является сильно циклической, если существует такое N, что для любого $x \in A$ найдётся $n_x > 0$, $n_x \leqslant N$, такое, что $f^{n_x}(x) = x$. ▼

7. Пусть натуральные числа $n!$ и m взаимно просты, A — n-элементное множество, f — взаимно-однозначная функция на A такая, что $f^m = e_A$. Доказать, что $f = e_A$. ▼

8. Пусть натуральные числа $n!$ и m не взаимно просты. Доказать, что найдётся n-элементное множество A и функция f на нём, для которой предыдущее утверждение не выполняется. ▼

9. Пусть f — унарная функция на множестве A, $A_0 = A$, $A_{i+1} = f(A_i)$ для $i \in \omega$. Доказать, что $A_{i+1} \subseteq A_i$. ▼

10. В условиях предыдущей задачи пусть $A^* = \bigcap\limits_{i\in\omega} A_i \neq \varnothing$, а функция f разнозначна. Доказать, что ограничение f на A^* будет сюръективной на A^* функцией. Показать, что если убрать условие разнозначности, то утверждение может не выполняться. ▼

§ 1.2. Многоместные функции

Напомним, что декартовым произведением множеств $A_1, \ldots, A_n$ называется множество всех упорядоченных n-ок: $(a_1, \ldots, a_n)$, в которых $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Обозначается такое множество с помощью $A_1 \times \cdots \times A_n$, а если все A_i совпадают с A, то используют знак степени: A^n.

Определение 9 (Многоместная операция)**.** *Пусть n — натуральное число. n-местной функцией (или операцией, отображением) называется унарная функция $f : A_1 \times \cdots \times A_n \to B$, где $A_1, \ldots, A_n, B$ — некоторые множества. Таким образом, аргументами n-местной функции являются упорядоченные n-ки* *вида* $(a_1, \ldots, a_n)$, *для которых* $a_1 \in A_1$, $\ldots$, $a_n \in A_n$. *Если* $((a_1, \ldots, a_n), b) \in f$, *то* b *называется* *з н а ч е н и е м* *функции* f *на наборе* $(a_1, \ldots, a_n)$ *и обозначается с помощью* $f(a_1, \ldots, a_n)$.

В частности, если все множества A_i *равны* A, *то областью определения* f *является* A^n. *Если при этом ещё и* $B = A$, *то говорят, что* f — n-*местная функция на множестве* A.

Двухместная функция называется *б и н а р н о й*.

Пример 9. *Бинарная операция умножения на множестве* $\{-1, 0, 1\}$ *состоит из следующих троек:*

$$\{(-1,-1,1),(-1,0,0),(-1,1,-1),(0,-1,0),(0,0,0),\\ (0,1,0),(1,-1,-1),(1,0,0),(1,1,1)\}.$$

Бинарная операция сложения на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ *состоит из всех троек типа* (a, b, c), *где* $a, b, c \in \mathbb{Q}$ *и* c — *сумма* a *и* b. *Аналогично рассматриваются операции умножения и вычитания.*

Бинарная операция умножения действительного числа на двухмерный вектор $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *состоит из всевозможных троек вида* $\left(a, \binom{b}{c}, \binom{ab}{ac}\right)$, *где* a, b, c — *произвольные действительные числа.*

Деление не является операцией на множестве $\mathbb{Q}$, *так как результат деления на нуль не определён. Однако, если рассмотреть деление на множестве всех ненулевых рациональных чисел, то это — тоже бинарная операция.*

Важным частных случаем n-местной функции является $n = 0$. В этом случае A^0 состоит из одного пустого набора $()$, поэтому нульместная функция должна состоять из единственной пары $((), a)$, $a \in A$. Для упрощения обычно в этом случае отождествляют такую функцию с её значением на пустом наборе, считая, что каждое $a \in A$ является нульместной функцией со значением a. Если требуется подчеркнуть, что речь идёт именно о нульместной функции, а не об её значении, то к a добавляют скобки: $a()$.

Определение 10 (Константа)**.** *Функция нуля аргументов (а также — её значение) называется* *к о н с т а н т о й*.

Иначе говоря, результат такой функции ни от чего не зависит.

Определение 11 (Ассоциативность и коммутативность)**.** *Бинарная функция f на множестве A называется*

- *коммутативной, если $f(a, b) = f(b, a)$ для всех $a, b \in A$;*
- *ассоциативной, если $f(f(a, b), c) = f(a, f(b, c))$ для всех $a, b, c \in A$.*

Эти понятия друг от друга не зависят.

Пример 10. *Сложение и умножение на множестве $\mathbb{R}$ являются коммутативными и ассоциативными функциями.*

Вычитание на множестве $\mathbb{R}$ не является ни коммутативным, ни ассоциативным.

Нахождение среднего арифметического на $\mathbb{R}$: $f(x, y) = {}^{(x+y)}/_{2}$ коммутативно, но не ассоциативно.

Умножение на множестве $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ матриц 2×2 над множеством действительных чисел ассоциативно, но некоммутативно.

Одним из важнейших свойств функций является ассоциативность операции композиции.

Теорема 12. *Пусть F — множество всех унарных функций на множестве A. Тогда операция композиции на F является ассоциативной:*

$$(fg)h = f(gh).$$

Доказательство. Пусть $p = (fg)h$, $q = f(gh)$. Тогда

$$p(a) = ((fg)h)(a) = (fg)(h(a)) = f(g(h(a)));$$

$$q(a) = (f(gh))(a) = f((gh)(a)) = f(g(h(a))).$$

Следовательно, $p(a) = q(a)$ для всех a и $p = q$. $\square$

Для унарных функций мы определили понятие образа множества. Аналогичную конструкцию можно ввести и для функций других местностей.

Определение 12 (Функция на множествах)**.** *Пусть*

$$f : A_1 \times \dots \times A_n \to B \quad \text{и} \quad A'_1 \subseteq A_1, \dots, A'_n \subseteq A_n.$$

Тогда с помощью $f(A'_1, \ldots, A'_n)$ мы будем обозначать следующее множество:

$$f(A'_1, \ldots, A'_n) = \{f(a_1, \ldots, a_n) : a_1 \in A'_1, \ldots, a_n \in A'_n\},$$

то есть множество всевозможных значений функции f, когда аргументы берутся из $A'_1, \ldots, A'_n$ соответственно.

Иными словами, $f(A'_1, \ldots, A'_n)$ — это образ декартова произведения $A'_1 \times \cdots \times A'_n$ при отображении f (см. определение *9 на стр. 12**).*

Рассмотрим несколько частных случаев.

Следствие 13. *$f(A'_1, \ldots, A'_n) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда $A'_i = \varnothing$ для некоторого $i = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Если $A'_i = \varnothing$, то не существует никакого $a_i \in A'_i$, поэтому $f(A'_1, \ldots, A'_n) = \varnothing$. Наоборот, если каждое из A'_i непусто и содержит какое-то $a_i \in A'_i$, то $f(A'_1, \ldots, A'_n) \ni f(a_1, \ldots, a_n)$ и, следовательно, $f(A'_1, \ldots, A'_n) \neq \varnothing$. $\square$

Если множество A'_i является одноэлементным: $A'_i = \{a_i\}$, то i-ый аргумент всегда будет равен a_i. В этом случае вместо $\{a_i\}$ часто пишут просто a_i: $f(B_1, \ldots, B_{i-1}, a_i, B_{i+1}, \ldots, B_n)$. Например, с помощью $2 \times \mathbb{Z}$ (или просто $2\mathbb{Z}$) обозначается множество произведений числа 2 на все целые числа:

$$2\mathbb{Z} = \{2x : x \in \mathbb{Z}\}.$$

Иными словами, $2\mathbb{Z}$ — множество чётных чисел. Аналогичным образом $2\mathbb{Z} + 1$ является множеством нечётных чисел.

Если функция f является константой: $f() = c$, то множество её значений состоит в точности из одного элемента: $\{c\}$.

Пример 11. *Рассмотрим обычные арифметические операции на множестве целых чисел. Пусть $E = 2\mathbb{Z}$ — множество чётных, а $O = 2\mathbb{Z} + 1$ — нечётных целых чисел. Тогда $E + E = E$, поскольку при сложении чётных чисел будет получено чётное число и каждое чётное число можно так получить; $O + O = E$, поскольку при сложении нечётных чисел будет получено чётное число и каждое чётное число можно так получить; $E + O = O$,* *поскольку при сложении чётного и нечётного чисел будет получено нечётное число и каждое нечётное число так получается. Аналогично можно проверить, что $E \cdot E = E \cdot O = E$ и $O \cdot O = O$.*

Пример 12. *С помощью $\mathbb{Z}_{\geqslant x}$ обозначим множество целых чисел больших или равных x. Тогда нетрудно проверить, что $\mathbb{Z}_{\geqslant x} + \mathbb{Z}_{\geqslant y} = \mathbb{Z}_{\geqslant x+y}$. Для вычитания будет выполнено $\mathbb{Z}_{\geqslant x} - \mathbb{Z}_{\geqslant y} = \mathbb{Z}$, поскольку каждое целое число z можно получить как разность $(x+|x|+|y|+y+|z|+z)-(y+|y|+x+|x|+|z|)$, в которое уменьшаемое не меньше x, а вычитаемое не меньше y.*

Заметим, что при распространении функции на множества аргументов ассоциативность и коммутативность сохраняются.

Предложение 14. *Если бинарная операция f на множестве A является коммутативной (ассоциативной), то соответствующая операция на подмножествах A тоже будет коммутативной (соответственно, ассоциативной).*

Доказательство. Пусть $A_1, A_2 \subseteq A$. Тогда

$$f(A_1, A_2) = \{f(a_1, a_2) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\} = \\ = \{f(a_2, a_1) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\} = f(A_2, A_1).$$

Аналогично с ассоциативностью. □

Функция определённая на множестве естественным образом порождает функции, определённые на его подмножествах.

Определение 13 (Ограничение функции)**.** *Пусть $B \subseteq A$, f — унарная функция, для которой $\operatorname{dom} f = A$. Тогда унарная функция g, для которой $\operatorname{dom} g = B$, называется ограничением функции f на B, если $g(b) = f(b)$ для всех $b \in B$.*

Если f — n-местная функция на множестве A, то n-местная функция g на $B \subseteq A$ называется ограничением функции f на B, если $g(b_1, \ldots, b_n) = f(b_1, \ldots, b_n)$ для всех $b_1, \ldots, b_n \in B$.

Заметим, что вторая часть определения требует большего, чем первая, а именно: значения $f(b_1, \ldots, b_n)$ должны принадлежать B для всех $b_1, \ldots, b_n \in B$.

Пример 13. *Рассмотрим функцию модуля $f(x) = |x|$ на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$. Тогда её ограничением на множество натуральных чисел ω будет тождественная на ω функция $g(x) = x$, так как на ω модуль равен самому числу.*

Бинарную функцию вычитания на $\mathbb{Z}$ ограничить на множество натуральных чисел невозможно, так как разность натуральных чисел натуральным числом может не быть.

Следствие 15. *Если c — функция-константа на A, то её ограничением на любое множество $B \subseteq A$ является она сама, если $c \in B$. Ограничений на множества $B \not\ni c$ не существует.*

Задачи

11. Найти все бинарные функции на множестве $A = \{0, 1\}$. ▼

12. Для каждой из функций из предыдущей задачи построить соответствующую функцию на подмножествах A.

13. Определить, будут ли следующие функции на множестве рациональных чисел коммутативными/ассоциативными: а) max, б) min, в) $\frac{x+y}{2}$, г) $x^2 + y^2$. ▼

14. Определить, будут ли следующие функции на множестве целых чисел коммутативными/ассоциативными: а) НОК, б) НОД, в) $x + y + xy$, г) $x + y - xy$. ▼

15. Доказать, что для множеств O и E из примера 11 на стр. 15 выполнено $O \times O = O$, $E \times E = E$ и $O \times E = E$. ▼

16. С помощью $\mathbb{R}_{\geqslant x}$ обозначим множество действительных чисел больших или равных x. Найти $\mathbb{R}_{\geqslant x} \times \mathbb{R}_{\geqslant y}$. ▼

17. Пусть $x, n \in \mathbb{Z}$ и $n > 0$. Тогда $x + n\mathbb{Z}$ означает множество всех целых чисел вида $x + ni$, $i \in \mathbb{Z}$. Доказать, что $(x + n\mathbb{Z}) + (y + n\mathbb{Z}) = (x + y) + n\mathbb{Z}$ и $(x + n\mathbb{Z}) \cdot (y + n\mathbb{Z}) \subseteq xy + n\mathbb{Z}$. Показать, что для умножения включение справа налево может не выполняться. ▼

18. Пусть $\mathbb{M}_n^d$ — множество квадратных матриц с действительными элементами размера $n \times n$ $(n > 1)$, определитель которых равен d. Найти $\mathbb{M}_n^d + \mathbb{M}_n^c$ и $\mathbb{M}_n^d \times \mathbb{M}_n^c$. ▼

19. Пусть $\mathbb{E}_d^n$ — множество действительных n-мерных векторов с нормой d. Найти $\mathbb{E}_d^n + \mathbb{E}_c^n$, $\mathbb{E}_d^n \times \mathbb{E}_c^n$ при $n = 3$, где $\times$ — векторное произведение. ▼

§ 1.3. Отношение эквивалентности

Напомним, что *бинарным отношением на множестве* A называется некоторое множество R упорядоченных пар вида (a, b),

$a, b \in A$. Если $(a, b) \in R$, то говорят, что a и b состоят в отношении R и записывают это в виде $R(a, b)$ или $a\,R\,b$.

Определение 14 (Отношение эквивалентности)**.** *Бинарное отношение $\equiv$ на множестве A называется отношением эквивалентности на A, если оно обладает следующими свойствами:*

- *рефлексивность: $a \equiv a$ для всех $a \in A$;*
- *симметричность: если $a \equiv b$, то $b \equiv a$, для всех $a, b \in A$;*
- *транзитивность: если $a \equiv b$ и $b \equiv c$, то $a \equiv c$, для всех $a, b, c \in A$.*

Пример 14. *Рассмотрим следующее отношение на множестве положительных целых чисел: $x \equiv y$, если x и y делятся на одни и те же простые числа. Например, $12 \equiv 18$ (делятся на 2 и 3), $45 \equiv 75$ (делятся на 3 и 5), но $42 \not\equiv 21$ (42 делится на 2, а 21 — нет). Такое отношение является эквивалентностью: рефлексивность и симметричность очевидны. Если x и y делятся на одни и те же простые числа и y и z делятся на одни и те же простые числа, то, конечно, x и z делятся на одни и те же простые числа. Это доказывает транзитивность.*

Заметим, что отношения эквивалентности можно пересекать.

Предложение 16. *Пусть $E_i, i \in I$ — отношения эквивалентности на множестве A, $I \neq \varnothing$. Тогда их пересечение $E = \bigcap\limits_{i \in I} E_i$ тоже является отношением эквивалентности на A.*

Доказательство. Для любого $a \in A$ выполнено $(a, a) \in E_i$ для всех $i \in I$, поэтому $(a, a) \in E$.

Если $(a, b) \in E$, то $(a, b) \in E_i$ для всех $i \in I$, поэтому $(b, a) \in E_i$ для всех $i \in I$ и $(b, a) \in E$.

Если $(a, b), (b, c) \in E$, то $(a, b), (b, c) \in E_i$ для всех $i \in I$, поэтому $(a, c) \in E_i$ для всех $i \in I$ и $(a, c) \in E$. □

Один способ порождения отношений эквивалентности заключается в следующем.

Предложение 17. *Если $h : A \to B$ — функция, то отношение на A:*

$$a \equiv b \iff h(a) = h(b)$$

является отношением эквивалентности на A.

Доказательство. $a \equiv a$, поскольку $f(a) = f(a)$ для любого a. Если $f(a) = f(b)$, то $f(b) = f(a)$, поэтому из $a \equiv b$ следует $b \equiv a$. Если $a \equiv b$ и $b \equiv c$, то $f(a) = f(b)$ и $f(b) = f(c)$. Отсюда получаем $f(a) = f(c)$ и $a \equiv c$. □

Определение 15 (Класс эквивалентности)**.** *Если $\equiv$ является отношением эквивалентности на множестве A и $a \in A$, то множество*

$$\hat{a} = \{b \in A : b \equiv a\}$$

называется классом эквивалентности элемента a.

Следствие 18. *Каждый класс эквивалентности не пуст.*

Доказательство. Класс $\hat{a}$ содержит a. □

Следствие 19. *Если $a \equiv b$ тогда и только тогда, когда $\hat{a} = \hat{b}$.*

Доказательство. Покажем, что $\hat{a} \subseteq \hat{b}$. Пусть $c \in \hat{a}$, тогда $c \equiv a$ и $a \equiv b$. Используя транзитивность, получаем $c \equiv b$ и $c \in \hat{b}$. Аналогично показывается обратное включение $\hat{b} \subseteq \hat{a}$.

Если $\hat{a} = \hat{b}$, то $a \in \hat{b}$, поэтому $a \equiv b$. □

Следствие 20. *Два класса эквивалентности или совпадают, или не пересекаются.*

Доказательство. Пусть $\hat{a}$ и $\hat{b}$ — два класса эквивалентности. Предположим, они пересекаются, то есть существует $c \in \hat{a} \cap \hat{b}$, следовательно, $c \in \hat{a}$ и $c \in \hat{b}$. По определению класса эквивалентности получаем, что $c \equiv a$ и $c \equiv b$. Используя симметричность и транзитивность, получаем, что $a \equiv b$, следовательно, $\hat{a} = \hat{b}$. □

Оказывается, что способ порождения отношения эквивалентностей из предложения 17 на предыдущей странице является универсальным.

Предложение 21. *Если* $\equiv$ *является отношением эквивалентности на множестве* A, *то существует множество* B *и функция* $h : A \to B$ *такие, что*

$$a \equiv b \iff h(a) = h(b).$$

Доказательство. Пусть B — множество классов эквивалентности. Определим $h(a) = \hat{a}$. Тогда

$$a \equiv b \iff \hat{a} = \hat{b} \iff h(a) = h(b). \qquad \square$$

Задачи

20. Найти, сколько отношений эквивалентности существует на пятиэлементном множестве. ▼

21. Определить, какие из следующих отношений будут отношениями эквивалентности на множестве слов в алфавите $\{a, b, c\}$: а) $|x| = |y|$ ($|w|$ — длина слова w); б) $x = y \dots y$ или $y = x \dots x$; в) $|x|_a = |y|_a$ ($|w|_a$ — количество букв a в слове w); г) $|x|_u = |y|_u$ для каждого $u = a, b, c$; д) $|x|_u = |y|_u$ для некоторого $u = a, b, c$; е) $x^{-1}y$ — палиндром (w^{-1} — «переворачивание» слова w); ж) x входит в y или y входит в x. Построить классы эквивалентности для них. ▼

22. Пусть E — бинарное отношение. Рефлексивным транзитивным замыканием E называется такое бинарное отношение E^* на A: $E^*(x, y)$ тогда и только тогда, когда существуют $a_0, \dots, a_n$ (возможно, что $n = 0$), $a_0 = x$, $a_n = y$ и $E(a_i, a_{i+1})$ для $i = 0, \dots, n - 1$. Доказать, что рефлексивное транзитивное замыкание будет рефлексивным и транзитивным отношением. ▼

23. Доказать, что E^* из предыдущей задачи является наименьшим рефлексивным и транзитивным отношением, включающим E. ▼

24. Доказать, что рефлексивное транзитивное замыкание симметричного отношения снова будет симметричным. ▼

25. Пусть R — бинарное отношение. Обратным к R называется отношение $R^{-1} = \{(a, b) : (b, a) \in R\}$. Доказать, что если отношение R рефлексивно (симметрично, транзитивно), то таким же будет и R^{-1}. ▼

26. Пусть R — любое бинарное отношение на A, а $Q = R \cup R^{-1}$. Доказать, что рефлексивное транзитивное замыкание Q^* будет отношением эквивалентности. ▼

27. Доказать, что Q^* из предыдущей задачи является наименьшим отношением эквивалентности, включающим R. ▼

28. Для отношений из задачи 21 найти наименьшие расширяющие их отношения эквивалентности. ▼

29. Пусть E_1 и E_2 — отношения эквивалентности на A. Доказать, что $E_1 \subseteq E_2$ тогда и только тогда, когда $\hat{a} \subseteq \tilde{a}$ для всех $a \in A$. Здесь $\hat{a}$ и $\tilde{a}$ — классы эквивалентности a по отношениям E_1 и E_2 соответственно.

§ 2. Базовые понятия

§ 2.1. Сигнатуры и термы

Для обозначения функций используются функциональные символы, из которых образуются сигнатуры.

Определение 16 (Сигнатура)**.** *Сигнатура — множество имён функций, с указанием местности. Имя нульместной функции называется также именем константы.*

Мы будем записывать сигнатуры, перечисляя символы операций в круглых скобках и указывая, если необходимо, местность каждого из них в виде верхнего индекса в скобках. Также считаем, что никакая сигнатура не может содержать имена, которые совпадают с разного рода служебными символами: скобки, запятые и т.д.

Для удобства мы всегда полагаем, что местность каждого сигнатурного символа фиксирована, то есть не меняется при переходе от одной сигнатуры к другой, например, символ $+$ всегда бинарный.

Пример 15. *Арифметику целых чисел можно рассматривать, пользуясь сигнатурой* $(+^{(2)}, -^{(2)}, \times^{(2)}, 0^{(0)}, 1^{(0)})$. *Здесь знаки* $+, -, \times$ *используются для обозначения сложения, вычитания и умножения, а* 0 *и* 1 *— символы для обозначения функций-констант, принимающих соответствующие значения.*

Для исследования множества бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ *функций в дополнение к вышеуказанным можно вести символы* $\circ$ *для композиции,* $'$ *для нахождения производной,* $\int$ *для интегрирования.*

Для формальной записи кроме сигнатурных символов мы будем применять ещё один тип символов — переменные. Будем считать, что количество переменных неограничено, и что никакая переменная не может быть элементом никакой сигнатуры. Кроме того, полагаем, что среди переменных, как и среди сигнатурных символов, нет скобок и запятой.

Определение 17 (Терм)**.** *Терм сигнатуры Σ — выражение, составленное из переменных с помощью переменных и сигнатурных имён функций. Точнее, терм — это слово в алфавите $\Sigma \cup V \cup \{$«(», «)», «,»$\}$ (здесь V — множество переменных), определяемое так:*

1) *если x — переменная, то x — терм;*
2) *если $c^{(0)} \in \Sigma$ — символ константы, то c — терм;*
3) *если $f^{(n)} \in \Sigma$ — сигнатурное имя n-местной функции, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $f(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.*

Запись $t(x_1, \ldots, x_k)$ означает, что терм t не содержит никаких других переменных, кроме $x_1, \ldots, x_k$. При этом необязательно, что он содержит все $x_1, \ldots, x_k$.

Пример 16. *Пусть сигнатура содержит имена $f^{(2)}, g^{(1)}, c^{(0)}$, а x и y — переменные. Тогда примеры термов: x, c, $f(x, c)$, $f(g(c), f(x, g(y)))$. Каждый из этих термов мы можем обозначить с помощью $t(x, y)$ или $t(x, y, z)$. Но с помощью $t(x)$ нельзя обозначить последний из перечисленных термов, так как он содержит переменную, отличную от x.*

В определении терма используется префиксная запись, то есть имя функции пишется перед её аргументами. Если функция является унарной, то скобки, окружающие аргументы, часто опускают: пишут $\sin t$ вместо $\sin(t)$. Фактически можно даже обойтись вообще без запятых и скобок (задача 35 на противоположной странице), но это, как правило, затрудняет чтение таких термов.

На практике часто используются и другие формы записи. Так, например, в постфиксной записи имя функции указывается после её аргументов: $(t_1, \ldots, t_n)f$. Таким способом записываются факториал: $x!$, производная: f', и некоторые другие операции.

Если функция является бинарной, то часто применяется инфиксная запись, когда имя функции помещается между аргументами. Примером служат обычные арифметические операции: пишут $t_1 - t_2$ или $t_1 \times t_2$ вместо $-(t_1, t_2)$ и $\times(T_1, t_2)$ соответственно. При этом возникает неоднозначность, если идут несколько имён функций подряд. Например, запись $t_1 - t_2 - t_3$ можно, вообще говоря, интерпретировать двумя способами: $-(t_1, -(t_2, t_3))$ или $-(-(t_1, t_2), t_3)$. Чтобы уточнить какой именно из термов имеется ввиду в таких случаях используют скобки: записывают $t_1 - (t_2 - t_3)$ для первого терма и $(t_1 - t_2) - t_3$ для второго.

Иногда используются другие традиционные способы записи термов, например, индексный: t^s для степени, $\log_t s$ для логарифма; $\sqrt[t]{s}$ для корня и т.д.

Определение 18 (Замкнутый терм)**.** *Терм, не содержащий переменных, называется замкнутым (или базисным).*

Пример 17. *В арифметической сигнатуре (см. пример 16 на предыдущей странице) термы* $0 + 1$ *и* $(1 + 1) \times (1 + 1 + 0)$ *являются базисные, а термы* $x + 1$ *и* $(1 + y) \times x$ *— нет.*

Задачи

30. Записать следующие арифметические термы сигнатуры $\{+^{(2)}, -^{(2)}, \times^{(2)}, !^{(1)}, 1^{(0)}, \sqrt{\ }^{(1)}\}$ в префиксной форме: а) $(x-1)! + 1$; б) $x!(x+y)!$; в) $\sqrt{xy + x} - 1$; г) $(\sqrt{x} + y)!(x - y)$; д) $(x + 1)\sqrt{y! - x! + (xy)!}$. ▼

31. Пусть множество A состоит из всюду бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, а сами действительные числа отождествлены с соответствующими постоянными функциями: $r = f$, где $f(x) = r$ для всех x. Определить, названия какие операции входят в формулу Ньютона-Лейбница и их местность: $\int\limits_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$. ▼

32. Найти в сигнатуре $\{f^{(2)}, g^{(1)}, c^{(0)}\}$ все термы вида $t(x)$, содержащие не больше трёх вхождений сигнатурных символов. ▼

33. Найти в сигнатуре $\{g_1^{(1)}, \dots, g_n^{(1)}, c_1^{(0)}, \dots, c_m^{(0)}\}$ количество термов вида $t(x)$, содержащих в точности k сигнатурных символов. ▼

34. Пусть t и s — произвольные термы сигнатуры Σ, x — переменная, слово r получено из t заменой некоторых вхождений x на терм s. Доказать по определению, что r снова будет термом сигнатуры Σ. ▼

35. Пусть Σ — некоторая фиксированная сигнатура, $t_1, \dots, t_n$ — термы сигнатуры Σ. Пусть слово w получено из слова $(t_1, \dots, t_n)$ удалением всех скобок и запятых. Доказать, что по w можно однозначно определить число n и сами термы $t_1, \dots, t_n$. ▼

36. Пусть T — множество термов сигнатуры Σ. Определим на T бинарную операцию $t * s$, результатом которой является терм, полученный заменой всех переменных в t на s. Определить, будет ли эта операция коммутативной, ассоциативной. ▼

37. На том же множестве T пусть $t * s$ означает результат замены каждого вхождения терма s в терм t на переменную x. Определить, будет ли эта операция коммутативной, ассоциативной. ▼

§ 2.2. Алгебры и морфизмы

Основным объектом изучения будут алгебры.

Определение 19 (Алгебра). *Пусть $\Sigma = (f_i^{(n_i)} : i \in I)$ — произвольная сигнатура. Алгеброй $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ называется пара (A, ν), состоящая из непустого множества A и функции ν. Множество A называется носителем (или основным множеством) алгебры $\mathfrak{A}$ и обозначается с помощью $|\mathfrak{A}|$. Элементы A так же называются элементами алгебры $\mathfrak{A}$. Чтобы не загромождать запись, мы будем писать просто $a \in \mathfrak{A}$ вместо $a \in |\mathfrak{A}|$.*

ν называется интерпретирующей функцией или интерпретацией. Область определения ν включает сигнатуру Σ, и для каждого $f^{(n)} \in \Sigma$ значением $\nu(f)$ является n-местная операция на множестве A. Значение символа f в алгебре $\mathfrak{A}$ мы будем коротко записывать в виде $f^{\mathfrak{A}}$. Функции $f^{\mathfrak{A}}$ называются сигнатурными функциями (или операциями) алгебры $\mathfrak{A}$.

Для удобства будем записывать алгебру, указывая в скобках носитель и значения $\nu(f)$ в том же порядке, в каком символы f перечислены в сигнатуре.

Пример 18. *Рассмотрим сигнатуру $(f^{(2)}, g^{(2)})$. Тогда с помощью $(\omega, +, \times)$ мы будем обозначать алгебру, в которой носителем является множество натуральных чисел ω, символ f означает сложение, а символ g — умножение. Запись $(\omega, \times, +)$ будет обозначать обратный вариант: f интерпретируется как умножение, а g — как сложение на множестве натуральных чисел.*

Отметим, что область определения интерпретирующей функции может быть «больше» сигнатуры Σ.

Пример 19. *Алгебра $(\omega, +, \times)$ из предыдущего примера может рассматриваться и как алгебра сигнатуры $(f^{(2)})$. В этом случае значением символа f будет операция сложения, а операция умножения уже не будет сигнатурной.*

Один из часто встречающихся приёмов работы с алгебрами — это добавление новых символов в сигнатуру без изменения значения уже имеющихся символов.

Определение 20. *Пусть $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ — сигнатуры, а $\mathfrak{A}_1 = (A, \nu)$ и $\mathfrak{A}_2 = (A, \mu)$ — алгебры сигнатур Σ_1 и Σ_2 соответственно с одним и тем же носителем. Алгебра $\mathfrak{A}_2$ называется о б о г а щ е н и е м а л г е б р ы $\mathfrak{A}_1$, если $\mu(f) = \nu(f)$ для всех $f \in \Sigma_1$, то есть символы из Σ_1 интерпретируются в обеих алгебрах одинаково.*

Пример 20. *Пусть $\Sigma_1 = (f^{(2)})$, $\Sigma_2 = (f^{(2)}, g^{(2)})$. Тогда $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. В этом случае алгебра $(\omega; +, \times)$ сигнатуры Σ_2 является обогащением алгебры $(\omega; +)$ сигнатуры Σ_1.*

Аналогично, например, алгебра $(\mathbb{Z}; +, -, \times)$ сигнатуры $(f^{(2)}, g^{(2)}, h^{(2)})$ будет обогащением алгебр $(\mathbb{Z}; +, -)$ или $(\mathbb{Z}; \times)$ сигнатур $(f^{(2)}, g^{(2)})$ или $(h^{(2)})$ соответственно.

Проинтерпретировав значения переменных и функциональных символов, мы получаем возможность вычислять значения произвольных термов.

Определение 21 (Значение терма)**.** *Пусть $t(x_1, \ldots, x_n)$ — терм сигнатуры Σ, $\mathfrak{A} = (A, \nu)$ — алгебра сигнатуры Σ. З н а ч е н и е м терма $t(x_1, \ldots, x_n)$ в алгебре $\mathfrak{A}$ на элементах $a_1, \ldots, a_n \in A$ (обозначается с помощью $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ или просто $t(a_1, \ldots, a_n)$, если алгебра $\mathfrak{A}$ понятна из контекста) называется результат выражения в $\mathfrak{A}$, при подстановке в терм t вместо переменных x_i соответствующих элементов a_i. Точнее:*

1) *если $t(x_1, \ldots, x_n) \eqcirc x_i$, то $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$;*
2) *если $t(x_1, \ldots, x_n) \eqcirc c$, $c^{(0)} \in \Sigma$ — символ константы, то $t^{\mathfrak{A}}$ — это значение функции $c^{\mathfrak{A}}$;*
3) *если*

$$t(x_1, \ldots, x_n) \eqcirc f(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n)),$$

где $f^{(k)} \in \Sigma$ *— символ* k*-местной функции, то*

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k),$$

где $b_\ell = t_\ell^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ *для* $\ell = 1, \ldots, k$.

Пример 21. *Возьмём алгебру* $(\omega, +, \times, 1)$ *и терм* $t(x, y) \Leftrightarrow (x+y) \times (x+1)$. *Тогда* $t(2, 3) = (2+3) \times (2+1) = 15$.

Следствие 22. *Значение базисного терма не зависит от значений переменных.*

Пример 22. *Рассмотрим алгебру* $(\omega, +, \times, 1)$ *и терм* $(1+1) \times (1+1)$. *Его значение в любом случае равно* 2.

Важнейшим способом связи различных алгебр между собой является следующий.

Определение 22 (Морфизм)**.** *Пусть* $\mathfrak{A} = (A, \nu)$ *и* $\mathfrak{B} = (B, \mu)$ *— две алгебры сигнатуры* Σ. *Отображение* $h : A \to B$ *называется* Σ*-морфизмом из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$*, если выполняется*

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_k)) \tag{1}$$

для всех $f^{(k)} \in \Sigma$ *и всех* $a_1, \ldots, a_k \in A$. *Условие* (1) *является основным свойством морфизмов.*

Если сигнатура Σ *понятна из контекста, то мы её не будем указывать, и будем говорить просто «морфизм». Обозначение* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$*, где* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *— алгебры, означает что* h *— морфизм из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$.

Основное свойство морфизмов легко распространяется на любые термы.

Теорема 23. *Если* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *—* Σ*-морфизм из* $\mathfrak{A}$ *в* $\mathfrak{B}$*, то для любого терма* $t(x_1, \ldots, x_n)$ *сигнатуры* Σ *выполнено*

$$h(t_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)) = t_i^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_k))$$

для любых $a_1, \ldots, a_k \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Индукция по сложности термов.

Пусть $t \doteqdot x_i$. Тогда

$$h(t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)) = h(a_i) = t^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_k)).$$

Пусть $t \doteqdot c$, где $c \in \Sigma$ — символ константы. Но по определению морфизма

$$h(t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)) = h(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} = t^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_k)).$$

Пусть

$$t(x_1, \ldots, x_n) \doteqdot f(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n))$$

и $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. По определению

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)),$$

$$\begin{aligned} t^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) &= \\ &= f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)), \ldots, t_k^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))). \end{aligned}$$

По индукционному предположению считаем, что

$$h(t_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = t_i^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

для $j = 1, \ldots, k$, поэтому

$$\begin{aligned} h(t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= h(f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n))) = \\ &= f^{\mathfrak{B}}(h(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)), \ldots, h(t_k^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n))) = \\ &= f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)), \ldots, t_k^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))) = \\ &= t^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)). \quad \square \end{aligned}$$

Свойство морфизмов сохраняется при композиции.

Предложение 24. *Если $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ являются Σ-морфизмами, то $gh : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ тоже будет Σ-морфизмом.*

Доказательство. Проверим основное свойство морфизмов для произвольного $f \in \Sigma$:

$$\begin{aligned} (gh)(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= g(h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n))) = \\ &= g(f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))) = \\ &= f^{\mathfrak{C}}(g(h(a_1)), \ldots, g(h(a_n))) = f^{\mathfrak{C}}((gh)(a_1), \ldots, (gh)(a_n)). \quad \square \end{aligned}$$

Задачи

38. Пусть A — n-элементное множество, $\Sigma = \{f_1^{(m_1)}, \ldots, f_k^{(m_k)}\}$. Найти общее количество алгебр сигнатуры Σ с носителем A. ▼

39. Построить все алгебры сигнатуры $\{c^{(0)}, f^{(1)}\}$ с носителем $\{a, b\}$.

40. Построить все алгебры $\mathfrak{A} = (A, I)$ сигнатуры $\{f^{(1)}, g^{(1)}\}$ с носителем $A = \{a, b, c\}$, в которых функция $f^{\mathfrak{A}}$ разнозначна, а значения функций $f^{\mathfrak{A}}$ и $g^{\mathfrak{A}}$ различны для всех аргументов.

41. Построить все алгебры $\mathfrak{A} = (A, I)$ сигнатуры $\{f^{(2)}\}$ с носителем $A = \{a, b, c\}$, в которых $f^{\mathfrak{A}}(x, x) = x$ для всех $x \in A$ и $f^{\mathfrak{A}}(x, y) \neq f^{\mathfrak{A}}(y, x)$ для всех $x, y \in A$, $x \neq y$.

42. Построить пример алгебры сигнатуры $\{*^{(2)}\}$ с носителем $\mathbb{Z}$, в которой значение термов $(x * y) * z$ и $x * (y * z)$ всегда равно 0, хотя $x * y$ может быть ненулевым. ▼

43. Построить пример алгебры сигнатуры $\{*^{(2)}, c^{(0)}\}$ с носителем $\mathbb{Z}$, в которой терм $(\cdots((c * x_1) * x_2) * \cdots) * x_n$ может иметь ровно n различных значений. ▼

44. Пусть A — множество всех слов в алфавите $\{a, b, c\}$, B — в алфавите $\{a, b\}$, & — операция конкатенации. Определить, какие из следующих операций будут $\{\&\}$-морфизмами из $(A, \&)$ в $(B, \&)$: а) удаление из слова всех букв c; б) замена одинарных вхождений c на a, а кратных — на b; в) замена c на a с последующим «переворачиванием» слова; г) замена вхождений c на чётных позициях на a, а на нечётных — на b; д) замена каждого вхождения c на $abba$. ▼

45. Пусть A — множество всех слов в алфавите $\{a, b, c\}$, B — в алфавите $\{a, b\}$, f — операция удаления из слова всех букв c. Определить, для каких из следующих операций g отображение f будет Σ-морфизмом (A, g) в (B, g): а) $g(w)$ — «переворачивание» слова w; б) $g(w)$ — удаление первой буквы слова w; в) $g(w)$ — удаление всех букв a из слова w; г) $g(w)$ — удаление одиночных вхождений всех букв из слова w; д) $g(w, u)$ — удаление первого вхождения слова u из слова w; е) $g(w)$ — удвоение каждой буквы в слове w. ▼

46. Пусть $\mathfrak{A} = (A, I)$ — произвольная алгебра. С помощью $\exp \mathfrak{A}$ будем обозначать алгебру $(\mathsf{P}(A), J)$, в которой $J(f)$ является распространением $I(f)$ на всевозможные подмножества A (см. определение 12 на стр. 14), то есть $f^{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n) = f^{\mathfrak{A}}[X_1, \ldots, X_n]$ для любых $X_i \subseteq |\mathfrak{A}|$. Доказать, что если $\mathfrak{B} = \exp \mathfrak{A}$, то ▼

$$t^{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n) = \{t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\}.$$

§ 2.3. Изоморфизмы

Самыми сильными являются взаимно однозначные морфизмы.

Определение 23 (Изоморфизм)**.** *Если Σ-морфизм $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ является взаимно однозначным отображением, то h называется Σ-изоморфизмом алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (или просто изоморфизмом, если сигнатура понятна из контекста).*

Пример 23. *Рассмотрим две алгебры $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}^+, \times)$ сигнатуры $(*^{(2)})$. Пусть $h(x) = e^x$. Покажем, что h — изоморфизм между указанными алгебрами. Во-первых, функция e^x взаимно однозначно отображает $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^+$. Во-вторых,*

$$h(a *^{\mathfrak{A}} b) = h(a + b) = e^{a+b} = e^a \times e^b = h(a) \times h(b) = h(a) *^{\mathfrak{B}} h(b),$$

что и требовалось.

Пример 24. *Рассмотрим алгебры $(\mathbb{C}; +, \times)$ и $(\mathbb{M}_2'(\mathbb{R}); +, \times)$. Здесь $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, а $\mathbb{M}_2'(\mathbb{R})$ — множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ над $\mathbb{R}$. Рассмотрим отображение $h : \mathbb{C} \to \mathbb{M}_2'(\mathbb{R})$ такое, что*

$$h(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что h взаимно однозначно. Проверим, что оно является изоморфизмом. Сложение:

$$h((a + bi) + (c + di)) = h((a + c) + (b + d)i) = \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ -(b + d) & a + c \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = h(a + bi) + h(c + di).$$

Умножение:

$$h((a + bi) \times (c + di)) = h((ac - bd) + (ad + bc)i) = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -(ad + bc) & ac - bd \end{pmatrix}$$

С другой стороны

$$h(a + bi) \times h(c + di) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix}.$$

Как видим, $h((a + bi) \times (c + di)) = h(a + bi) \times h(c + di)$.

Фактически изоморфизмы действуют в обе стороны.

Предложение 25. *Если отображение $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ является изоморфизмом, то обратное отображение $h^{-1} : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ тоже будет изоморфизмом.*

Доказательство. В силу взаимной однозначности изоморфизма h обратное отображение h^{-1} тоже будет взаимно однозначным. Поэтому нужно лишь проверить основное свойство морфизмов. Рассмотрим значение $f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)$ для произвольного n-местного сигнатурного символа f и любых $b_1, \ldots, b_n \in |\mathfrak{B}|$. Из взаимной однозначности h получаем, что $b_1 = h(a_1)$, …, $b_n = h(a_n)$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$. По определению изоморфизма

$$f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))) = h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} h^{-1}(f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)) = h^{-1}(f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))) = \\ = h^{-1}(h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n))) = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = \\ = f^{\mathfrak{A}}(h^{-1}(b_1), \ldots, h^{-1}(b_n)), \end{aligned}$$

что и требуется. □

Пример 25. *Функция $h(x) = \ln x$ является изоморфизмом $(\mathbb{R}^+, \times)$ и $(\mathbb{R}, +)$.*

Изоморфизмы сохраняются при композиции.

Предложение 26. *Если $h : \mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$ и $g : \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{C}$ — изоморфизмы, то $gh : \mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{C}$ — изоморфизм.*

Доказательство. Непосредственно получается из теоремы 5 на стр. 9 и предложения 24 на стр. 27. □

Если между алгебрами существует изоморфизм, то они практически не отличаются друг от друга, если не рассматривать природу составляющих их элементов.

Определение 24 (Изоморфные алгебры)**.** *Алгебры, между которыми существует Σ-изоморфизм, называются Σ-изоморфными* *(или просто изоморфными, если сигнатура Σ понятна из контекста).*

Пример 26. *Алгебры $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}^+, \times)$ изоморфны.*

Следствие 27. *Каждая алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфна сама себе.*

Доказательство. Изоморфизмом является тождественная функция на $\mathfrak{A}$. □

Заметим, что изоморфность алгебр далеко не всегда бывает очевидной.

Пример 27. *Рассмотрим алгебры $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{C}, +)$. На первый взгляд, первая из них является одномерным, а вторая — двухмерным линейным пространством, поэтому изоморфными они быть не должны. Однако это не так.*

Рассмотрим обе эти алгебры как линейные пространства над множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Тогда оба они будут бесконечномерными, более того, размерность каждого из них будет одинаковой — мощности континуума. Следовательно, в каждом из этих пространств есть базис континуальной мощности: $\{r_i : i \in I\}$ и $\{c_i : i \in I\}$ соответственно. Каждый элемент этих пространств однозначно представляется суммой вида $\sum_i \alpha_i r_i$ или $\sum_i \alpha_i c_i$, где только конечное количество рациональных коэффициентов α_i не равны нулю. Но тогда существует изоморфизм $\sum_i \alpha_i r_i \mapsto \sum_i \alpha_i c_i$ из $(\mathbb{R}, +)$ в $(\mathbb{C}, +)$.

Рассмотрим теперь примеры неизоморфных алгебр. Самый простой способ установить неизоморфность — различие мощности носителей.

Пример 28. *Алгебры $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{R}, +)$ неизоморфны, так как первая содержит счётное число элементов, а вторая — несчётное.*

В более сложных случаях нужно анализировать свойства операций.

Пример 29. *Алгебры $(\mathbb{Z}; +)$ и $(\mathbb{Z}; \times)$ не изоморфны. Чтобы это доказать, предположим противное: существует h — изоморфизм второй на первую. Пусть $x = h(0)$ и $y = h(1)$. Из-за взаимной однозначности должно быть $x \neq y$. С другой стороны, используя определение изоморфизма, получим:*

$$x = h(0) = h(0 \times 0) = h(0) + h(0) = x + x = 2x,$$

$$y = h(1) = h(1 \times 1) = h(1) + h(1) = y + y = 2y.$$

Но из этих равенств следует, что $x = 0$ и $y = 0$, то есть $x = y$. Противоречие.

Пример 30. *Алгебры $(\mathbb{Q}; +)$ и $(\mathbb{Q}^+; \times)$ не изоморфны. Как и в предыдущем примере, предположим противное: существует h — изоморфизм первой на вторую. Тогда $h(x) = 2$ для некоторого рационального x. Поскольку ${}^x/_2$ — тоже рациональное число, то $h\left({}^x/_2\right) = y$ для некоторого рационального y. Используем определение изоморфизма, получим:*

$$y^2 = y \times y = h\left(\frac{x}{2}\right) \times h\left(\frac{x}{2}\right) = h\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = h(x) = 2.$$

Но рационального числа, квадрат которого был бы равен 2, не существует. Получили противоречие.

Как нами уже было отмечено, в изоморфных алгебрах операции обладают одними и теми же свойствами. Возникает естественный вопрос: верно ли обратное утверждение? Ответ на него не так прост, поскольку требует уточнения понятия «свойство». Например, если ограничиться так называемыми элементарными свойствами (которые для своего описания не требуют привлечения произвольных отношений или функций), то обратное неверно, существуют неизоморфные алгебры, которые обладают одними и теми же элементарными свойствами.

Пример 31. *Алгебры $(\mathbb{Z}, +1)$ и $(\mathbb{Z}' \cup \mathbb{Z}'', +1)$ неизоморфны. Здесь $\mathbb{Z}'$ и $\mathbb{Z}''$ — две непересекающиеся «копии» множества целых чисел, на каждой из которой определена операция прибавления единицы. В самом деле, в первой из них выполнено следующее: любые два элемента x и y либо равны, либо один из них получается из другого с помощью конечного числа операций $+1$. Во второй алгебре это неверно, если взять x и y из разных «копий».*

Однако можно показать, что элементарные свойства этих алгебр одинаковы. Дело в том, что понятие «конечное число», которое мы употребили, нельзя определить без привлечения произвольных множеств, то есть оно не является элементарным.

Тождественное отображение является изоморфизмом алгебры с собой же. Но в общем случае могут существовать и другие изоморфизмы с тем же свойством.

Определение 25 (Автоморфизм)**.** *Изоморфизм алгебры с собой называется автоморфизм.*

Пример 32. *Рассмотрим алгебру* $(\mathbb{R}, +)$ *и функцию* $h(x) = 2x$. *Тогда* h *— взаимно однозначное отображение* $\mathbb{R}$ *на* $\mathbb{R}$ *и*

$$h(x + y) = 2(x + y) = 2x + 2y = h(x) + h(y).$$

Следовательно, h *— автоморфизм алгебры* $(\mathbb{R}, +)$.

Нетождественных автоморфизмов может не быть.

Определение 26 (Жёсткая алгебра)**.** *Алгебра, которая не имеет нетождественных автоморфизмов, называется жёсткой.*

Пример 33. *Алгебра* $(\mathbb{R}, +)$ *как показано в предыдущем примере не является жёсткой.*

Пример 34. *Рассмотрим алгебру* $(\omega, +)$. *Возьмём любой автоморфизм* h *этой алгебры. Докажем, что* $h(x) = x$ *для всех* x.

Пусть $y = h(0)$, *тогда*

$$y = h(0) = h(0 + 0) = h(0) + h(0) = y + y = 2y,$$

то есть $y = 2y$ *и* $y = 0$.

Предположим, что $h(1) = y \neq 1$. *Тогда для любого* $n \in \omega$ *имеем*

$$h(n) = h(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}) = \underbrace{y + \cdots + y}_{n} = ny \neq 1,$$

то есть h *не является взаимно-однозначным. Следовательно,* $h(1) = 1$.

Для всех других чисел аналогично получаем

$$h(x) = h(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} = x.$$

Итак, в $(\omega, +)$ *не существует нетождественных автоморфизмов, то есть эта алгебра является жёсткой.*

Рассмотрим более сложный случай.

Пример 35. *Покажем, что алгебра* $(\mathbb{R}; +, \times)$ *тоже является жёсткой. Будем рассуждать от противного, пусть* h *— нетождественный автоморфизм. Используем свойство морфизма для сложения:*

$$h(0) = h(0 + 0) = h(0) + h(0) = 2h(0),$$

откуда $h(0) = 0$. *Аналогично для умножения:*

$$h(1) = h(1 \times 1) = h(1) \times h(1) = (h(1))^2,$$

откуда $h(1) = 0$ *или* $h(1) = 1$. *Но поскольку* h *взаимно однозначно и* $h(0) = 0$, *то единственно возможный вариант:* $h(1) = 1$.

Рассмотрим $h(-1)$:

$$1 = h(1) = h((-1) \times (-1)) = h(-1) \times h(-1) = (h(-1))^2.$$

Следовательно, $h(-1) = \pm 1$, *но из взаимной однозначности и* $h(1) = 1$ *получаем,* $h(-1) = -1$.

Для любого натурального числа n *мы получим*

$$h(n) = h(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}) = \underbrace{h(1) + \cdots + h(1)}_{n} = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} = n.$$

Аналогично для целых отрицательных получается

$$h(-n) = h(\underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n}) = \underbrace{h(-1) + \cdots + h(-1)}_{n} = \\ = \underbrace{(-1) + \cdots + (-1)}_{n} = -n.$$

Для любого рационального числа $^m/_n$, *где* m *и* n *— целые числа, выполнено* $^m/_n \times n = m$, *применяя определение изоморфизма получим:*

$$m = h(m) = h\left(\frac{m}{n} \times n\right) = h\left(\frac{m}{n}\right) \times h(n) = h\left(\frac{m}{n}\right) \times n$$

откуда сразу выводим, что $h\left(^m/_n\right) = {}^m/_n$.

Итак, мы доказали, что для любого рационального числа q *выполнено* $h(q) = q$. *Поскольку автоморфизм* h *не является тождественным, то* $h(a) \neq a$ *для некоторого действительного* a. *Предположим, что* $a < h(a)$ *(обратный случай рассматривается аналогично). Выберем рациональное число* q *между* a *и* $h(a)$: $a < q < h(a)$. *Пусть* $x = \sqrt{q - a}$, *тогда* $q = a + x^2$. *Получаем:*

$$h(q) = h(a + x^2) = h(a) + (h(x))^2 \geqslant h(a) > q.$$

Но мы уже доказали, что для любого рационального q *выполнено* $h(q) = q$, *противоречие.*

Задачи

47. Доказать, что алгебры $(\mathbb{F}, \circ)$ и $(\mathbb{C}, x^2 - y)$ неизоморфны. $(\mathbb{F}, \circ)$ — множество всех функций на $\mathbb{R}$ с операцией композиции. ▼

48. Доказать, что алгебры $(P(\omega), \cup)$ и $(\mathbb{R}^+ \cup \{0\}, +)$ неизоморфны. $(P(\omega), \cup)$ — множество всех подмножеств ω с операцией объединения. ▼

49. Доказать, что алгебры $(\mathbb{G}, \cap)$ и $(\mathbb{R}, \times)$ неизоморфны. $(\mathbb{G}, \cap)$ — множество геометрических фигур на плоскости с операцией пересечения. ▼

50. Доказать, что алгебры $(\mathbb{R}, -)$ и $(\mathbb{R}^3, \times)$ (множество трёхмерных векторов с операцией векторного умножения) неизоморфны. ▼

51. Доказать, что алгебры $(\mathbb{Q}, \frac{x+y}{2})$ и $(\mathbb{Q}^+, \frac{x+y}{2})$ неизоморфны. $\mathbb{Q}^+$ — множество положительных рациональных чисел. ▼

52. Доказать, что алгебры $(P(\omega), \cup)$ (множество всех подмножеств ω) и $(\mathbb{R}, \max)$ неизоморфны. ▼

53. Доказать, что алгебры $(\mathbb{C}_1, \times)$ и $(\mathbb{R}, +)$ неизоморфны. $(\mathbb{C}_1, \times)$ — множество комплексных чисел равных по модулю 1 с операцией умножения. ▼

54. Доказать, что алгебры $(\mathbb{R}_{>1}, \times)$ и $(\mathbb{R}_{<1}, \times)$ неизоморфны. $\mathbb{R}_{>1}$ — множество действительных чисел бóльших 1, $\mathbb{R}_{<1}$ — множество ненулевых действительных чисел по модулю меньших 1. ▼

55. Доказать, что алгебры $(\mathbb{R}_{>1}, \times)$ и $(\mathbb{R}_{<-1}, +)$ неизоморфны. $\mathbb{R}_{>1}$ — множество действительных чисел бóльших 1, $\mathbb{R}_{<-1}$ — множество действительных чисел меньших -1. ▼

56. Доказать, что алгебры $(\mathbb{R}_{>1}, \times)$ и $(\mathbb{R}_{<1}, \times)$ изоморфны. $\mathbb{R}_{>1}$ — множество действительных чисел по модулю бóльших 1, $\mathbb{R}_{<1}$ — множество ненулевых действительных чисел по модулю меньших 1. ▼

57. Доказать, что алгебры $(\mathbb{Z}^+, \times)$ и $(\mathbb{Z}_1^+, \times)$ изоморфны. $\mathbb{Z}^+$ — множество положительных целых чисел, $\mathbb{Z}_1^+$ — нечётных положительных целых чисел. ▼

§ 3. Основные конструкции

§ 3.1. Подалгебры, порождающие элементы, вложения

Одна из важнейших алгебраических конструкций связана с рассмотрением некоторых частей алгебр.

Определение 27 (Подалгебра)**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебры сигнатуры Σ. Алгебра $\mathfrak{B}$ называется Σ-подалгеброй $\mathfrak{A}$ (или просто подалгеброй $\mathfrak{A}$, когда понятно, о какой сигнатуре Σ идёт речь), если $|\mathfrak{B}| \subseteq |\mathfrak{A}|$ и для каждого сигнатурного символа $f \in \Sigma$ функция*

$f^{\mathfrak{B}}$ является ограничением функции $f^{\mathfrak{A}}$ на множество $|\mathfrak{B}|$. Запись $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ означает, что $\mathfrak{A}$ — подалгебра $\mathfrak{B}$.

Из определения вытекает ряд тривиальных следствий.

Следствие 28. *Каждая алгебра является своей подалгеброй.*

Следствие 29. *Если $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ и e — тождественная функция на $|\mathfrak{B}|$, то e — морфизм из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Для любых $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}$ и любого $f \in \Sigma$ будет выполнено

$$e(f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)) = f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n) = \\ = f^{\mathfrak{B}}(e(b_1), \ldots, e(b_n)) = f^{\mathfrak{A}}(e(b_1), \ldots, e(b_n)).$$

Здесь первое и второе равенство вытекают из тождественности e, а последнее — из определения подалгебры. □

Следствие 30. *Любая подалгебра содержит значения всех функций-констант.*

Доказательство. Вытекает из следствия 15 на стр. 17. □

Следствие 31. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, а $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ — её подалгебры с одним и тем же носителем. Тогда $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}_2$.*

Доказательство. Ограничения одной и той же функции $f^{\mathfrak{A}}$ на одно и тоже множество B равны, поэтому $f^{\mathfrak{B}_1} = f^{\mathfrak{B}_2}$ для всех сигнатурных функций. □

Пример 36. *Алгебра $(\omega, +, \times)$ является подалгеброй $(\mathbb{Z}, +, \times)$, а она, в свою очередь, — подалгеброй $(\mathbb{Q}, +, \times)$.*

Ещё одно свойство, которое легко получить:

Предложение 32. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, $\mathfrak{B}$ — её Σ-подалгебра. Тогда для любого терма $t(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ и любых $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}$ выполнено*

$$t^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) = t^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Доказательство. Пусть e — тождественное отображение на $\mathfrak{B}$, которое, согласно следствию 29 является Σ-морфизмом из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$.

Тогда из теоремы 23 на стр. 26 для любого Σ-терма $t(x_1, \ldots, x_n)$ и любых $b_1, \ldots, b_k \in \mathfrak{B}$ получаем

$$t^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k) = t^{\mathfrak{A}}(e(b_1), \ldots, e(b_k)) = e(t^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_k)) = t^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_k),$$

что и требуется. $\square$

На носители подалгебр накладываются некоторые ограничения, не всякое подмножество может им быть.

Определение 28 (Замкнутость относительно функции)**.** *Пусть A — множество, а f — некоторая n-местная функция на нём. Множество $B \subseteq A$ называется з а м к н у т ы м о т н о с и т е л ь н о ф у н к ц и и f, если каждый раз, когда все аргументы функции f принадлежат B, её значение тоже принадлежит B:*

$$b_1, \ldots, b_n \in B \Rightarrow f(b_1, \ldots, b_n) \in B.$$

Введённое свойство является необходимым и достаточным, чтобы выделить подалгебру с носителем B.

Предложение 33. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра сигнатуры Σ. Тогда непустое множество $B \subseteq |\mathfrak{A}|$ является носителем некоторой Σ-подалгебры $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда B замкнуто относительно $f^{\mathfrak{A}}$ для всех $f \in \Sigma$.*

Доказательство. Если B является носителем Σ-подалгебры $\mathfrak{B}$, то для любого $f^{(n)} \in \Sigma$ и любых $b_1, \ldots, b_n \in B$ получаем:

$$f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) = f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n) \in B,$$

то есть B замкнуто относительно всех $f^{\mathfrak{A}}$.

В обратную сторону. Пусть B замкнуто относительно всех $f^{\mathfrak{A}}$, $f \in \Sigma$. Определим интерпретирующую функцию J для B так, чтобы

$$f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n) = f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)$$

для любого функционального символа $f^{(n)} \in \Sigma$ и любых $b_1, \ldots, b_n \in B$. Поскольку $f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in B$, то $f^{\mathfrak{B}}$ является n-местной функцией на B и ограничением $f^{\mathfrak{A}}$. Следовательно, $\mathfrak{B}$ — Σ-подалгебра $\mathfrak{A}$. $\square$

Пример 37. *При сложении и умножении чётных целых чисел снова получается чётное целое число. Поэтому в алгебре* $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *чётные числа образуют* $(+, \times)$*-подалгебру* $(2\mathbb{Z}, +, \times)$*. Нечётные числа этим свойством не обладают: при сложении нечётных чисел получается чётное. Следовательно, нечётные числа не образуют* $(+, \times)$*-подалгебры в* $(\mathbb{Z}, +, \times)$*.*

Однако, если рассмотреть из операций только умножение, то нечётные числа тоже будут образовывать $(\times)$*-подалгебру: при умножении нечётных чисел будет получаться нечётное число.*

Заметим, что носители подалгебр можно пересекать и получать таким образом новые подалгебры.

Определение 29 (Пересечение подалгебр)**.** *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— алгебра, а* $\mathfrak{B}_i$*,* $i \in I$ *— некоторые её подалгебры. Подалгебра* $\mathfrak{B}$ *называется* пересечением подалгебр $\mathfrak{B}_i$*,* $i \in I$*, если её носитель является пересечением носителей алгебр* $\mathfrak{B}_i$*,* $i \in I$*.*

Покажем, что такая подалгебра $\mathfrak{B}$ существует всегда, если только пересечение носителей непусто.

Предложение 34. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— алгебра,* $\mathfrak{B}_i$*,* $i \in I$ *— её подалгебры, и пересечением носителей алгебр* $\mathfrak{B}_i$*,* $i \in I$ *непусто. Тогда существует и единственно пересечение подалгебр* $\mathfrak{B}_i$*,* $i \in I$*.*

Доказательство. Пусть $B = \bigcap\limits_{i \in I} |\mathfrak{B}_i|$. Согласно предложению 33 на предшествующей странице, нам будет достаточно доказать, что B замкнуто относительно сигнатурных операций. В самом деле, пусть f — n-местный функциональный символ, $b_1, \ldots, b_n \in B$. Тогда $b_1, \ldots, b_n \in |\mathfrak{B}_i|$ для всех $i \in I$. Так как $\mathfrak{B}_i$ — подалгебры $\mathfrak{A}$, то $f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in |\mathfrak{B}_i|$ для всех $i \in I$, следовательно, $f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) \in B$.

Единственность получается из следствия 31 на стр. 36. □

Пример 38. *Рассмотрим в алгебре целых чисел* $(\mathbb{Z}, +, \times)$ *подалгебры чётных чисел* $(2\mathbb{Z}, +, \times)$ *и кратных трём чисел* $(3\mathbb{Z}, +, \times)$*. Тогда их пересечение будет равно* $(6\mathbb{Z}, +, \times)$*.*

Произвольное подмножество носителя, как мы уже отметили, подалгебру может не образовывать. Но при очень слабых ограничениях существует наименьшее его расширение до некоторой подалгебры.

Определение 30 (Порождённая подалгебра)**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ — подмножество её носителя, $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$ — всевозможные подалгебры $\mathfrak{A}$, носитель которых включает X: $X \subseteq |\mathfrak{B}_i|$, $i \in I$. Тогда пересечение подалгебр $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$ (если оно существует) называется подалгеброй $\mathfrak{A}$, порождённой множеством X.*

Например, если X непусто, то условие выполнено.

Следствие 35. *Если $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ непусто, то подалгебра, порождённая X, существует.*

Доказательство. В этом случае, носители всех $\mathfrak{B}_i$ будут включать в себя X, поэтому их пересечение тоже будет включать в себя X. Поскольку X непусто, то и пересечение носителей $\mathfrak{B}_i$ тоже непусто, поэтому нужная подалгебра существует согласно предложению 34 на противоположной странице. □

Другой подходящий случай возникает, если сигнатура содержит символы констант.

Следствие 36. *Если сигнатура содержит хотя бы один символ константы, то подалгебра, порождённая X, существует для любого множества X.*

Доказательство. Носители всех $\mathfrak{B}_i$ будут содержать значения сигнатурных констант, поэтому их пересечение тоже будет их содержать. Следовательно, оно не пусто и нужная подалгебра существует согласно предложению 34 на предыдущей странице. □

Изучим, как устроена подалгебра, порождённая множеством, в двух указанных выше случаях.

Предложение 37. *Предположим, сигнатура содержит константы или множество $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ непусто. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра, $X \subseteq |\mathfrak{A}|$ — подмножество её носителя, и существует подалгебра $\mathfrak{B}$, порождённая X. Тогда носитель $\mathfrak{B}$ состоит в точности из значений всевозможных термов t, когда значения переменных принадлежат X:*

$$|\mathfrak{B}| = \{t^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) : t \text{ — терм}, b_1, \ldots, b_n \in X\}.$$

Доказательство. Обозначим для краткости

$$B = \{t^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) : t \text{ — терм, } b_1, \ldots, b_n \in X\}.$$

Покажем, что $B \subseteq |\mathfrak{B}|$. Пусть $\mathfrak{B}_i$, $i \in I$ — все подалгебры $\mathfrak{A}$, носитель которых включает X. Тогда $X \subseteq |\mathfrak{B}_i|$ для всех $i \in I$ и $Y \subseteq |\mathfrak{B}_i|$. Следовательно, для любого терма $t(x_1, \ldots, x_n)$ и для любых $b_1, \ldots, b_n \in X$ выполнено

$$t^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) = t^{\mathfrak{B}_i}(b_1, \ldots, b_n) \in |\mathfrak{B}_i|.$$

Из этого следует, что $t^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)$ принадлежит пересечению всех $|\mathfrak{B}_i|$, то есть $|\mathfrak{B}|$.

Теперь покажем обратное включение: $|\mathfrak{B}| \subseteq B$. Прежде всего следует отметить, что B непусто: оно будет содержать все значения всех сигнатурных констант и все элементы X, а по условию, хотя бы одно из этих множеств непусто. Множество B замкнуто в $\mathfrak{A}$ относительно сигнатурных операций. В самом деле: возьмём любые $f \in \Sigma$ и $c_1, \ldots, c_m \in B$. По определению B получаем, что $c_i = t_i^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)$ для некоторых термов t_i и $c_1, \ldots, c_n \in X$, $i = 1, \ldots, m$. Следовательно,

$$f^{\mathfrak{A}}(c_1, \ldots, c_k) = f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n), \ldots, t_k^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)).$$

Но последнее является значением терма

$$s(x_1, \ldots, x_n) = f(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n))$$

на элементах $b_1, \ldots, b_n \in X$, поэтому оно тоже принадлежит B по определению последнего.

Согласно предложению 33 на стр. 37, B является носителем некоторой подалгебры $\mathfrak{B}'$ алгебры $\mathfrak{A}$. Мы получили, что $\mathfrak{B}'$ — это подалгебра $\mathfrak{A}$, носитель которой включает X. Но тогда она совпадает с одной из $\mathfrak{B}_i$, поэтому $|\mathfrak{B}| \subseteq B$, так как $|\mathfrak{B}|$ получает пересечением всех $|\mathfrak{B}_i|$, в том числе и B. □

Пример 39. *В алгебре* $(\mathbb{Z}, \times)$ *множество* $\{1, 2\}$ *порождает все степени двойки.*

Заметим, что указанное в предложении 37 на стр. 39 условие не является необходимым для того, чтобы X порождало некоторую подалгебру.

В частном случае множество X может породить подалгебру, которая совпадёт со всей алгеброй.

Определение 31 (Множество образующих)**.** *Если в алгебре $\mathfrak{A}$ множество элементов X порождает всю алгебру $\mathfrak{A}$, то X называется* м н о ж е с т в о м о б р а з у ю щ и х *элементов для алгебры $\mathfrak{A}$.*

Алгебра, образованная одним элементом (то есть, когда $|X| = 1$), называется ц и к л и ч е с к о й.

Пример 40. *Для алгебры $(\mathbb{Z}; +)$ множеством образующих является, например, $\{1, -1\}$.*

Из определения очевидным образом получаем

Следствие 38. *Если алгебра $\mathfrak{A}$ образована множеством X, то в $\mathfrak{A}$ нет собственных подалгебр, включающих X.*

Мы уже рассмотрели один вид морфизмов — изоморфизмы, когда отображение является взаимно однозначным. Если потребовать всего лишь разнозначности, то получается более слабое понятие.

Определение 32 (Вложение)**.** *Пусть дан разнозначный Σ-морфизм $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$. Морфизм h называется* Σ- в л о ж е н и е м *(или* Σ- м о н о м о р ф и з м о м*) $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.*

Если алгебра $\mathfrak{A}$ сама имеет сигнатуру Σ, то говорят, что она в к л а д ы в а е т с я *в $\mathfrak{B}$.*

Следствие 39. *Если $\mathfrak{B}$ является Σ-подалгеброй $\mathfrak{A}$, то тождественное отображение на $\mathfrak{B}$ является Σ-вложением $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Тождественное отображение разнозначно и, согласно 29 на стр. 36, является морфизмом. □

Следствие 40. *Каждая алгебра вкладывается сама в себя с помощью тождественного отображения.*

Следствие 41. *Если h — изоморфизм $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, то h — вложение $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. Изоморфизм является разнозначным отображением и удовлетворяет основному свойству морфизмов. □

Обратное утверждение тоже верно.

Предложение 42. *Если* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *— вложение, то* h *является изоморфизмом* $\mathfrak{A}$ *и некоторой подалгебры* $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$.

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{rng} h$ замкнуто относительно всех сигнатурных операций и является таким образом носителем искомой подалгебры. Пусть $b_1, \ldots, b_k \in \operatorname{rng} h$, тогда $b_i = h(a_i)$ для некоторых $a_i \in |\mathfrak{A}|$. Получаем

$$f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_k) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_k)) = h(f_i^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)) \in \operatorname{rng} h. \quad \square$$

Как и для изоморфизмов, свойства вложений сохраняются при композиции.

Предложение 43. *Если* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *и* $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ *являются вложениями, то* $gh : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ *— тоже вложение.*

Доказательство. Получается из теоремы 5 на стр. 9 и предложения 24 на стр. 27. □

Пример 41. *Рассмотрим алгебры* $(\mathbb{R}; +, \times)$ *и* $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +, \times)$. *Определим отображение* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *следующим образом:* $h(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. *Легко видеть, что* h *разнозначно,* $h(a + b) = h(a) + h(b)$ *и* $h(ab) = h(a) \times h(b)$. *Следовательно,* h *является изоморфизмом между алгеброй* $(\mathbb{R}; +, \times)$ *и подалгеброй* $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +, \times)$, *состоящих из матриц вида* $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. *Значит,* h *— вложение* $(\mathbb{R}; +, \times)$ *в* $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}); +, \times)$.

Заметим, что взаимная вложимость алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не означает их изоморфности.

Пример 42. *Пусть* $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}^+, \times)$ *— алгебра положительных целых чисел с умножением, а* $\mathfrak{Z}' = (\mathbb{Z}', \times)$ *алгебра с умножением, где* $\mathbb{Z}'$ *— множество положительных целых чисел, которые являются нечётными или делятся на 4. Очевидно,* $\mathfrak{Z}' \subseteq \mathfrak{Z}$. *Покажем обратную вложимость. Пусть* p_i *—* i*-ое простое число. Тогда определим*

$$h(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}) = p_2^{n_1} p_3^{n_2} \ldots p_{m+1}^{n_m}.$$

Так как разложение натуральных чисел на простые множители однозначно, то данная функция корректно определена и разнозначна. При этом, как нетрудно видеть, $h(xy) = h(x) \times h(y)$:

$$h(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m} \times p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}) = h(p_1^{n_1+k_1} p_2^{n_2+k_2} \dots p_m^{n_m+k_m}) =$$
$$= p_2^{n_1+k_1} p_3^{n_2+k_2} \dots p_{m+1}^{n_m+k_m} = p_2^{n_1} p_3^{n_2} \dots p_{m+1}^{n_m} \times p_2^{k_1} p_3^{k_2} \dots p_{m+1}^{k_m} =$$
$$= h(p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_m^{n_m}) \times h(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}).$$

Таким образом, алгебры $\mathfrak{Z}$ *и* $\mathfrak{Z}'$ *вкладываются друг в друга.*

Тем не менее алгебры $\mathfrak{Z}$ *и* $\mathfrak{Z}'$ *не изоморфны. Чтобы это доказать, предположим обратное: существует изоморфизм* h *между* $\mathfrak{Z}'$ *и* $\mathfrak{Z}$. *Пусть* $h(4) = a$ *и* $h(8) = b$. *Так как* $64 = 4 \times 4 \times 4 = 8 \times 8$, *то* $a \times a \times a = b \times b$, $a^3 = b^2$. *Но это означает, что* a *является квадратом некоторого* c: $c^2 = a$. *Тогда для* $h^{-1}(c)$ *должно выполняться* $(h^{-1}(c))^2 = h^{-1}(a) = 4$, *Но в алгебре* $\mathfrak{Z}'$ *это невозможно.*

Задачи

58. Найти в алгебре $(\mathbb{C}, +, \times)$ пересечение подалгебр, которые порождены элементами i и $1/2$ соответственно. ▼

59. Найти в алгебре $(\mathbb{Q}, +, \times)$ пересечение подалгебр, которые порождены элементами $1/4$ и $1/6$ соответственно. ▼

60. Показать, что подалгебра, порождённая X, может существовать, даже если X пусто, а сигнатура не содержит констант. ▼

61. Доказать, что подалгебра, порождённая в алгебре $\mathfrak{A}$ пустым множеством, существует тогда и только тогда, когда имеется элемент $a \in \mathfrak{A}$ и для любого $b \in \mathfrak{A}$ существует терм $t(x)$ такой, что $t^{\mathfrak{A}}(b) = a$. ▼

62. Найти какое-нибудь минимальное множество порождающих для алгебры $(\omega, x^2 + y)$. Доказать, что меньшего множества порождающих не существует. ▼

63. Найти какое-нибудь минимальное множество порождающих для алгебры $(\omega, xy + 2)$. Доказать, что меньшего множества порождающих не существует. ▼

64. Найти подалгебру, которая порождается в алгебре $(\mathbb{R}, +, -, \times)$ множеством $\{\sqrt{2}, 5\}$. ▼

65. Найти подалгебру, которая порождается в алгебре $(\mathbb{R}, +, \times)$ множеством $\{-1, 2\}$. ▼

66. Найти в алгебре $(\mathbb{Q}^+, /)$ (положительные рациональные числа с делением) все подалгебры, порождённые одним элементом. ▼

67. Доказать, что в алгебре $(\mathbb{Q}^+, \times)$ (положительные рациональные числа с умножением) никакое конечное множество не порождает всю алгебру. ▼

68. Доказать, что в алгебре $(\mathbb{Q}^+, +, /)$ (положительные рациональные числа со сложением, умножением и делением) любой элемент порождает всю алгебру. ▼

69. Найти подалгебру, которая порождается в алгебре $(\mathbb{R}, +, -, \times)$ множеством $\{\frac{5}{2}, 3\}$. ▼

70. Доказать, что $\mathfrak{A}$ вкладывается в $\exp\mathfrak{A}$. ▼

71. Доказать, что непустые множества образуют в $\exp\mathfrak{A}$ подалгебру (будем обозначать её с помощью $\exp^*\mathfrak{A}$). ▼

72. Доказать, что конечные (непустые) множества образуют в $\exp\mathfrak{A}$ подалгебру (будем обозначать их с помощью $\exp_{\text{fin}}\mathfrak{A}$ или, соответственно $\exp^*_{\text{fin}}\mathfrak{A}$). ▼

73. Доказать, что даже если $\mathfrak{A}$ образована множеством X, то $\exp\mathfrak{A}$ может не быть образована множеством $\mathsf{P}(X)$. ▼

74. Пусть K — множество алгебр, линейно упорядоченных отношением «быть подалгеброй», то есть для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in K$ выполнено $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ (такое множество K называется *цепью* алгебр). Пусть алгебра $\mathfrak{C}$ устроена так: носитель $\mathfrak{C}$ — объединение носителей всех алгебр из K, $f^{\mathfrak{C}}(a_1, \ldots, a_n) = b$, если $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b$ для некоторой алгебры $\mathfrak{A} \in K$. Доказать, что а) алгебра $\mathfrak{C}$ корректно определена, б) все $\mathfrak{A}$ являются её подалгебрами и в) $\mathfrak{C}$ является наименьшей из алгебр, удовлетворяющих свойству б). Алгебра $\mathfrak{C}$ называется *объединением цепи* K и обозначается $\bigcup K$. ▼

§ 3.2. Гомоморфизмы

Если на морфизм не накладывать условие разнозначности, то получится ещё более общее понятие.

> **Определение 33** (Гомоморфизм, эпиморфизм, гомоморфный образ)**.** *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебры одной сигнатуры Σ. Σ-морфизм $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{B}|$ называется гомоморфизмом $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.*
>
> *Если при этом h — сюръекция, то такой гомоморфизм называется эпиморфизмом или гомоморфизмом из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$, а алгебра $\mathfrak{B}$ в этом случае называется гомоморфным образом $\mathfrak{A}$.*

Следствие 44. *Если $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — гомоморфизм, то $\operatorname{rng} h$ образует подалгебру $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ и h является эпиморфизмом $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{C}$.*

Доказательство. Замкнутость области значений h относительно всех сигнатурных функций доказывается точно так же как в предложении 42 на стр. 42. □

Пример 43. *Функция модуля является эпиморфизмом алгебры* $(\mathbb{Z}, \times)$ *на* $(\omega, \times)$*:* $|x \times y| = |x| \times |y|$.

Следствие 45. *Всякое вложение является гомоморфизмом.*

Следствие 46. *Всякий изоморфизм является эпиморфизмом.*

Из общих свойств функций легко получаем

Предложение 47. *Если* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *— разнозначный эпиморфизм, то* h *— изоморфизм.*

Доказательство. Эпиморфизм по определению является сюръективной функцией. Из разнозначности получаем, что h взаимно-однозначно. □

Как и прочие морфизмы, гомоморфизмы можно подвергать композиции.

Предложение 48. *Если* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *и* $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ *— гомоморфизмы (эпиморфизмы), то* $gh : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ *— гомоморфизм (эпиморфизм).*

Доказательство. Сразу следует из теоремы 5 на стр. 9 и предложения 24 на стр. 27. □

Порождающие алгебру элементы накладывают ограничения на гомоморфизмы.

Предложение 49. *Предположим, что множество* X *непусто или сигнатура содержит константы. Пусть алгебра* $\mathfrak{A}$ *порождена множеством* X, f *— отображение* X *в алгебру* $\mathfrak{B}$*. Тогда существует не более одного гомоморфизма* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$*, продолжающего* f*.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{A}$ порождается множеством X, то, согласно предложению 37 на стр. 39, каждый $a \in \mathfrak{A}$ является значением некоторого терма $t(x_1, \ldots, x_n)$, когда значения переменных x_i берутся из X: $a = t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n \in X$. По теореме 23 на стр. 26 мы должны получить

$$h(a) = h(t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = t^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = t^{\mathfrak{B}}(f(a_1), \ldots, f(a_n)),$$

что означает, $h(a)$ однозначно определено, если оно существует. □

Заметим, что в условиях предложения таких гомоморфизмов может вообще не существовать.

Пример 44. *Мы уже отмечали, что алгебра $(\mathbb{Z}, +)$ порождается множеством $\{-1, 1\}$. Пусть $f : \{-1, 1\} \to \omega$, причём $f(-1)$ или $f(1)$ не равно нулю. Покажем, что такое f до гомоморфизма в $(\omega, +)$ продолжено быть не может. Пусть, например, $f(1) > 0$. Предположим, что гомоморфизм h продолжает f. Тогда получим*

$$h(1) = h(1 + 1 + (-1)) = h(1) + h(1) + h(-1) > h(1),$$

противоречие.

При гомоморфизмах подалгебры исходной и полученной алгебры тоже переходят друг в друга.

Предложение 50. *Пусть $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — гомоморфизм. Тогда*

1) *образом любой подалгебры $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$ будет некоторая подалгебра $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$;*
2) *полным прообразом любой подалгебры $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$ будет некоторая подалгебра $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$.*

Доказательство. 1) Пусть $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$, рассмотрим образ $D = h[C]$. Для любой сигнатурной операции $f^{(n)}$ и $d_1, \ldots, d_n \in D$ получаем

$$f(d_1, \ldots, d_n) = f(h(c_1), \ldots, h(c_n)) = h(f(c_1, \ldots, c_n)) \in D,$$

если $h(c_i) = d_i$. Следовательно, D замкнуто относительно сигнатурных операций, поэтому является носителем подалгебры согласно предложению 33 на стр. 37.

2) Пусть теперь $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B}$, рассмотрим полный прообраз $C = h^{-1}[D]$. По аналогии получим

$$h(f(c_1, \ldots, c_n)) = f(h(c_1), \ldots, h(c_n)) \in D,$$

если $h(c_i) \in D$, то есть $c_i \in C$. Следовательно, $f(c_1, \ldots, c_n) \in C$, и C является носителем подалгебры в $\mathfrak{A}$. □

Следует отметить, что в обратную сторону, для расширений алгебр, аналогичное утверждение не выполнено: если есть некоторый гомоморфизм $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$, то может быть так, что h нельзя продолжить на $\mathfrak{C}$.

Пример 45. *Пусть $\mathfrak{Z}'$ — это расширение алгебры $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, \times)$, в которое добавлен ещё один элемент a такой, что $a \times a = a$ и $a \times x = x \times a = x - 1$ для всех $x \in \mathbb{Z}$. Тогда $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, \times) \subseteq \mathfrak{Z}'$.*

Рассмотрим гомоморфизм $\operatorname{sign} : \mathfrak{Z} \to \{-1, 0, 1\}$. Предположим, что его можно расширить до гомоморфизма h, определённого на $\mathfrak{Z}'$. Тогда

$$h(1) = h(a \times 2) = h(a) \times h(2) = h(a) \times 1,$$

и аналогично

$$h(0) = h(a \times 1) = h(a) \times h(1) = h(a) \times 1.$$

Получили, что $h(1) = h(0)$, поэтому h не является расширением sign.

Само свойство «порождения алгебры» тоже сохраняется при гомоморфизмах.

Предложение 51. *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ порождена множеством X, тогда гомоморфный образ $\mathfrak{A}$ порождается образом X.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = h(\mathfrak{A})$ для эпиморфизма h. Так как множество X порождает всю алгебру $\mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{A}$ нет собственных подалгебр, включающих X. Если предположить, что $\mathfrak{B}$ не порождается множеством $h(X)$, то в $\mathfrak{B}$ существует собственная подалгебра $\mathfrak{D}$, порождённая $h(X)$. Тогда её полный прообраз $h^{-1}(\mathfrak{D})$, согласно предложению 50 на предыдущей странице, должен быть подалгеброй $\mathfrak{A}$, включающей X. Поскольку собственных подалгебр, обладающих таким свойством в $\mathfrak{A}$ нет, то $h^{-1}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{A}$, откуда $\mathfrak{D} = h(h^{-1}(\mathfrak{D})) = h(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}$, противоречие. $\square$

Ещё одна связь порождающих элементов и гомоморфизмов заключается в следующем.

Предложение 52. *Пусть алгебра $\mathfrak{A}$ порождена множеством X, а функция $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ — гомоморфизм, причём $X \subseteq \operatorname{rng} f$. Тогда $\mathfrak{A} = \operatorname{rng} f$, то есть f — эпиморфизм.*

Доказательство. Образ $\mathfrak{C} = f(\mathfrak{B})$ всегда будет подалгеброй $\mathfrak{A}$. Так как $X \subseteq \operatorname{rng} f = |\mathfrak{C}|$ и $\mathfrak{A}$ порождена X, то $\mathfrak{C}$ не может быть собственной подалгеброй $\mathfrak{A}$, то есть $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$. $\square$

Изоморфизмы являются «предельными» случаями гомоморфизмов, которые сохраняют все различия между элементами. Противоположная ситуация возникает, если морфизм переводит все элементы исходной алгебры в один.

Определение 34 (Единичная алгебра)**.** *Алгебра $\mathfrak{E}$ называется единичной (или тривиальной), если её носитель состоит в точности из одного элемента.*

Пример 46. *Примеры единичных алгебр:* $(\{0\}, +, \times)$ *или* $(\{1\}, \times)$.

Достаточно очевидно

Предложение 53. *Все единичные алгебры одной сигнатуры изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ — две единичные алгебры, с единственными элементами e_1 и e_2 соответственно. Пусть $h(e_1) = e_2$. Тогда для любой сигнатурной функции f выполняется

$$h(f^{\mathfrak{E}_1}(e_1, \ldots, e_1)) = h(e_1) = e_2 = \\ = f^{\mathfrak{E}_2}(e_2, \ldots, e_2) = f^{\mathfrak{E}_2}(h(e_1), \ldots, h(e_1)). \quad \square$$

Нетрудно доказать и следующее утверждение.

Теорема 54. *Единичная алгебра является гомоморфным образом любой алгебры той же сигнатуры.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{E}$ — единичная алгебра с единственным элементом e, а $\mathfrak{A}$ — любая алгебра той же сигнатуры. Определим $h(a) = e$ для всех $a \in |\mathfrak{A}|$. Тогда для любой сигнатурной функции $f^{(n)}$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{A}|$ выполняется

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = e = f^{\mathfrak{E}}(e, \ldots, e) = f^{\mathfrak{E}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)). \quad \square$$

Мы уже видели, что различные морфизмы можно комбинировать с помощью композиции. Эти комбинации бывает удобно иллюстрировать с помощью графов.

Определение 35 (Диаграмма морфизмов). *Диаграммой морфизмов назовём ориентированный размеченный мультиграф (допускается несколько рёбер между двумя вершинами), вершины которого помечены алгебрами, а рёбра — гомоморфизмами между ними: метка f на ребре из вершины $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ означает, что f — гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.*

Диаграмма называется коммутативной, если для любых двух вершин $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (не обязательно различных) и любых двух путей из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$, проходящих последовательно по рёбрам $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_m$ соответственно, композиции указанных морфизмов равны:

$$f_1 \circ \cdots \circ f_n = g_1 \circ \cdots \circ g_m.$$

Пример 47. *Пусть $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, \times)$, $\mathfrak{N} = (\omega, \times)$. Тогда функция модуля, как было отмечено в примере 43 на стр. 45 является гомоморфизмом из $\mathfrak{Z}$ в $\mathfrak{N}$ (а также эндоморфизмом $\mathfrak{Z}$). С другой стороны, тождественная функция e на ω может рассматриваться и как автоморфизм $\mathfrak{N}$, и как вложение $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{Z}$. Коммутативной будет такая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Z} \arrow[loop left, "|x|"] \arrow[r, bend left, "|x|"] & \mathfrak{N} \arrow[l, bend left, "e"] \arrow[loop right, "e"]
\end{tikzcd}$$

В самом деле: $e(|x|) = |x| = |e(x)|$, а коммутативность композиции двух одинаковых функций очевидна.

Задачи

75. Найти все гомоморфизмы из алгебры $(\mathbb{C}, \times)$ в алгебру $(\mathbb{Q}, \frac{x+y}{2})$. Доказать, что других гомоморфизмов нет. Построить гомоморфные образы. ▼

76. Найти все гомоморфизмы из алгебры $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ (матрицы 2×2 над множеством действительных чисел с умножением) в алгебру $(\mathbb{R}^3, \times)$ (трёхмерные вектора с векторным умножением). Доказать, что других нет. ▼

77. Найти все гомоморфизмы из алгебры $(\mathbb{Z}, +)$ в алгебру $(\omega, \times)$. Доказать, что других гомоморфизмов нет. Построить гомоморфные образы. ▼

78. Найти все гомоморфизмы из алгебры $(\mathbb{C}, +)$ в алгебру $(\omega, \min)$. Доказать, что других гомоморфизмов нет. Построить гомоморфные образы. ▼

79. Найти все гомоморфизмы из алгебры $(\omega, \times)$ в алгебру $(\omega, +)$. Доказать, что других гомоморфизмов нет. Построить гомоморфные образы. ▼

80. Найти все гомоморфизмы из алгебры $(\mathbb{R}, \times)$ в алгебру $(\mathbb{Z}, \left[\frac{x+y}{2}\right])$ (целая часть среднего арифметического). Доказать, что других нет. ▼

81. Найти все гомоморфизмы из алгебры $(\mathbb{Q}, \max)$ в алгебру $(\mathbb{R}, \times)$. Доказать, что других гомоморфизмов нет. Построить гомоморфные образы. ▼

82. Показать, что для пустого множества X и в отсутствие констант предложение 49 на стр. 45 может быть неверным. ▼

83. Построить диаграмму всех морфизмов между алгебрами $(\mathbb{Z}, \times)$ и $(\mathbb{Z}, +)$. ▼

§ 3.3. Фактор-алгебры, конгруэнтности

Напомним, что если f — функция, определённая на множестве A, то отношение, означающее $f(a) = f(b)$ будет отношением эквивалентности на A. Если же на множестве A определена структура универсальной алгебры, а f является гомоморфизмом, то это отношение будет обладать ещё одним свойством: при выполнении действий над эквивалентными аргументами мы должны получить эквивалентные значения.

Определение 36 (Отношение конгруэнтности)**.** *Рассмотрим произвольную алгебру $\mathfrak{A} = (A, \nu)$ сигнатуры Σ. Двухместное отношение $\equiv$ на A называется о т н о ш е н и е м к о н г р у э н т н о с т и н а а л г е б р е $\mathfrak{A}$, если*

1) *$\equiv$ является отношением эквивалентности на A;*
2) *если $a_1 \equiv b_1, \ldots, a_k \equiv b_k$, то $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) \equiv f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k)$ для любого символа $f^{(k)} \in \Sigma$, любых $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k \in A$.*

Следствие 55. *Отношение равенства является отношением конгруэнтности на любой алгебре.*

Следствие 56. *Всюду истинное отношение является отношением конгруэнтности на любой алгебре.*

Пример 48. *Рассмотрим отношение $\equiv$ из примера 14 на стр. 18. Покажем, что оно является конгруэнтностью в алгебре $(\mathbb{Z}^+, \times)$. Пусть $x_1 \equiv x_2$ и $y_1 \equiv y_2$. Это означает, что x_1 и x_2 делятся на одни и те же простые числа $p_1, \ldots, p_n$, и y_1 и y_2 делятся на одни и те же простые числа $q_1, \ldots, q_m$. Но тогда и $x_1 y_1$ и $x_2 y_2$ тоже делятся на одни и те же простые числа: $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_m$ (за вычетом возможных повторений).*

Как и любые эквивалентности, конгруэнтности можно пересекать.

Предложение 57. *Пусть $E_i, i \in I$ — отношения конгруэнтности на алгебре $\mathfrak{A}$, $I \neq \varnothing$. Тогда их пересечение $E = \bigcap\limits_{i\in I} E_i$ тоже является отношением конгруэнтности на $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. В силу 16 на стр. 18 E будет отношением эквивалентности.

Пусть $(a_j, b_j) \in E$ для всех $j = 1, \ldots, k$. Получим, что $(a_j, b_j) \in E_i$ для всех $j = 1, \ldots, k$, $i \in I$. Рассмотрим любой функциональный символ $f^{(k)} \in \Sigma$. Так как E_i являются отношениями конгруэнтности, то $(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k), f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k)) \in E_i$ для всех $i \in I$, откуда получаем $(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k), f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k)) \in E$. □

Условия конгруэнтности можно распространить с сигнатурных функций на произвольные термы.

Предложение 58. *Пусть $\equiv$ является отношением конгруэнтности на алгебре $\mathfrak{A}$ сигнатуры Σ, $t(x_1, \ldots, x_k)$ — терм, $a_1 \equiv b_1, \ldots, a_k \equiv b_k$. Тогда $t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) \equiv t^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k)$.*

Доказательство. Используем индукцию по сложности терма t. Если $t = x_i$, то

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = a_i \equiv b_i = t^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k).$$

Если $t = c$, где c символ константы, то

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k) = t^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k) = c(),$$

поэтому эквивалентность следует из рефлексивности.

Рассмотрим третий случай:

$$t(x_1, \ldots, x_n) = f(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

По индукционному предположению

$$t_i(a_1, \ldots, a_n) \equiv t_i(b_1, \ldots b_n)$$

для $i = 1, \ldots, k$. Но тогда по определению конгруэнтности для f получим

$$f(t_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_k(a_1, \ldots, a_n)) \equiv \\ \equiv f(t_1(b_1, \ldots, b_n), \ldots, t_k(b_1, \ldots, b_n)),$$

что и требуется. □

Мы видели, что отношения эквивалентности на множестве A универсально задаются функциями, определёнными на A. Отношения конгруэнтности на алгебре аналогично задаются гомоморфизмами.

Теорема 59. *Если $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — гомоморфизм, то отношение на $|\mathfrak{A}|$:*

$$a \equiv b \iff h(a) = h(b)$$

является отношением конгруэнтности.

Доказательство. То, что $\equiv$ — отношение эквивалентности, следует из предложения 17 на стр. 18.

Пусть f — сигнатурная функция и $a_1 \equiv b_1$, …, $a_n \equiv b_n$. По определению отношения $\equiv$ получаем $h(a_1) = h(b_1)$, …, $h(a_n) = h(b_n)$. Поэтому

$$f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(b_1), \ldots, h(b_n)).$$

По определению гомоморфизма имеем

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = \\ = f^{\mathfrak{B}}(h(b_1), \ldots, h(b_n)) = h(f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)),$$

откуда получаем $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \equiv f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n)$. □

Определение 37. *Если $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — гомоморфизм, то отношение конгруэнтности на $\mathfrak{A}$:*

$$a \equiv b \iff h(a) = h(b)$$

будем называть п о р о ж д ё н н ы м г о м о м о р ф и з м о м h.

В обратную сторону предыдущее утверждение не выполняется.

Пример 49. *Рассмотрим отображение $f : \omega \to \omega$, $f(x) = 1$ для всех x. Тогда оно порождает отношение $x \equiv y$, истинное для всех x, y, поэтому оно является конгруэнтностью для любых операций на ω. Но f не является, например, гомоморфизмом $(\omega, +)$ в себя.*

Порождённая гомоморфизмом конгруэнтность однозначно описывает гомоморфный образ.

Теорема 60. *Если $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ и $g : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ — эпиморфизмы, которые порождают одно и то же отношение конгруэнтности $\equiv$ на $\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}$.*

Доказательство. Определим функцию $r : \mathfrak{B} \leftrightarrow \mathfrak{C}$ следующим образом, $r(b) = c$, если $h(a) = b$ и $g(a) = c$ для некоторого $a \in |\mathfrak{A}|$.

Покажем, что такое определение корректно. Поскольку $b \in \operatorname{rng} h$, то существует $a \in |\mathfrak{A}|$, для которого $h(a) = b$, следовательно, нужный элемент $c \in |\mathfrak{C}|$ существует и равен $g(a)$. Пусть для $b \in |\mathfrak{B}|$ элементы c_1 и c_2 из $\mathfrak{C}$ удовлетворяют приведённому условию. Тогда существуют $a_1, a_2 \in |\mathfrak{A}|$ такие, что $h(a_1) = b$, $h(a_2) = b$, $g(a_1) = c_1$ и $g(a_2) = c_2$. Получаем, что $a_1 \equiv a_2$ и, следовательно, $c_1 = c_2$. Таким образом, для каждого b существует в точности один c. Аналогично показывается обратное: для каждого c существует в точности один b, следовательно, отображение r является взаимно-однозначным.

Пусть $b = f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)$ для сигнатурной функции f. Тогда существуют $a, a_1, \ldots, a_n$, для которых $b = h(a), b_1 = h(a_1), \ldots, b_n = h(a_n)$. По свойству гомоморфизма

$$h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Так как $h(a) = h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n))$, то $a \equiv f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. По свойству гомоморфизма

$$g(a) = g(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{C}}(g(a_1), \ldots, g(a_n)).$$

Но поскольку $r(b) = g(a)$ и $r(b_i) = g(a_i)$ для $i = 1, \ldots, n$, то получаем $r(b) = f^{\mathfrak{C}}(r(b_1), \ldots, r(b_n))$, то есть

$$r(f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)) = f^{\mathfrak{C}}(r(b_1), \ldots, r(b_n)). \qquad \square$$

Изучим подробнее, как именно влияет конгруэнтность на гомоморфный образ.

Предложение 61. *Пусть* $\equiv$ *является отношением конгруэнтности на алгебре* $\mathfrak{A}$ *сигнатуры* Σ. *Для любых* $a, a_1, \ldots, a_k \in |\mathfrak{A}|$ *и любого* $f^{(k)} \in \Sigma$ *если* $a = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$, *то* $f^{\mathfrak{A}}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k) \subseteq \hat{a}$ *(по определению 12 на стр. 14).*

Доказательство. Предположим, $b_1 \in \hat{a}_1, \ldots, b_k \in \hat{a}_k$, тогда получим $b_1 \equiv a_1, \ldots, b_k \equiv a_k$. По определению отношения конгруэнтности $f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k) \equiv f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_k)$. Но это означает, что $f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_k) \in \hat{a}$. Следовательно, $f^{\mathfrak{A}}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k) \subseteq \hat{a}$. □

Следствие 62. *Существует и единственный класс эквивалентности* $\hat{a}$ *такой, что* $f^{\mathfrak{A}}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k) \subseteq \hat{a}$.

Доказательство. Существование прямо следует из предложения.

Все классы эквивалентности непусты, поэтому $f^{\mathfrak{A}}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k) \neq \varnothing$ (следствие 13 на стр. 15). С другой стороны, разные классы эквивалентности не пересекаются, поэтому больше одного $\hat{a}$ для которого $f^{\mathfrak{A}}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k) \subseteq \hat{a}$ существовать не может. □

Функции $f^{\mathfrak{A}}$ определённые на классах эквивалентности дают новую алгебру.

Определение 38 (Фактор-алгебра)**.** *Пусть* $\equiv$ *является отношением конгруэнтности на алгебре* $\mathfrak{A} = (A, \nu)$, $\hat{A}$ *— множество классов эквивалентности множества* A *по отношению* $\equiv$. *Алгебра* $\mathfrak{B}$ *с носителем* $\hat{A}$ *называется* ***фактор-алгеброй*** $\mathfrak{A}$ ***по*** $\equiv$ *и обозначается с помощью* $\mathfrak{A}/{\equiv}$, *если функции в* $\mathfrak{B}$ *определены так, что* $f^{\mathfrak{B}}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k) = \hat{a}$, *когда* $f^{\mathfrak{A}}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k) \subseteq \hat{a}$ *для любых классов* $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_k, \hat{a} \in \hat{A}$. *Следствие 62 влечёт, что это условие определяет* $f^{\mathfrak{B}}$ *однозначно.*

Теперь можно доказать аналог предложения 21 на стр. 20 для конгруэнтностей.

Теорема 63. *Если* $\equiv$ *— отношение конгруэнтности на* $\mathfrak{A}$, *то существует алгебра* $\mathfrak{B}$ *и гомоморфизм* $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *такие, что:*

$$x \equiv y \iff h(x) = h(y). \tag{2}$$

Доказательство. Возьмём в качестве $\mathfrak{B}$ фактор-алгебру $\mathfrak{A}/\equiv$. Определим h как в предложении 21 на стр. 20, сопоставив каждому элементу $a \in |\mathfrak{A}|$ его класс эквивалентности $\hat{a}$: $h(a) = \hat{a}$. Тогда сразу получаем (2). То, что h является гомоморфизмом непосредственно следует из определения фактор-алгебры и предложения 61 на противоположной странице. □

Определение 39 (Естественный гомоморфизм)**.** *Если $\equiv$ является отношением конгруэнтности на алгебре $\mathfrak{A}$, а $\hat{a}$ — класс эквивалентности элемента a, то гомоморфизм $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\equiv$ такой, что $h(a) = \hat{a}$, называется естественным гомоморфизмом.*

Из доказанных ранее утверждений можно сделать

Следствие 64. *Пусть $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — эпиморфизм, а $\equiv$ — порождённая им конгруэнтность на $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}/\equiv$.*

Доказательство. Для естественного гомоморфизма $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}/\equiv$ будет порождено то же самое отношение конгруэнтности, согласно (2). Но тогда образы f и h (то есть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}/\equiv$) изоморфны по теореме 60 на стр. 53. □

Таким образом, можно изучать гомоморфные образы алгебры $\mathfrak{A}$ «не покидая её», все возможные гомоморфизмы из $\mathfrak{A}$ можно построить в фактор-алгебры.

Заметим, что при работе с фактор-алгеброй часто бывает удобнее оперировать не с классами эквивалентности, а с отдельными их представителями. Для этого каким-либо способом в каждом классе A фиксируется элемент x_A и вместо $f(A_1, \ldots, A_n)$ рассматривают $f(x_{A_1}, \ldots, x_{A_n})$. Такой способ действий имеет ещё и то удобство, что для разных целей элементы x_A можно выбирать по разному.

Пример 50. *Пусть p — нечётное натуральное число, а отношение $x \equiv y$ на множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ определено как $p \mid (x - y)$. Нетрудно показать, что $\equiv$ будет конгруэнтностью в алгебре $\mathfrak{Z} = (\mathbb{Z}, +, -, \times)$, поэтому существует фактор-алгебра $\mathfrak{Z}/\equiv$. Её элементами будут классы эквивалентности вида $p\mathbb{Z} + k$.*

В каждом классе $p\mathbb{Z} + k$ можно однозначно зафиксировать элемент из интервала $[0, p)$. Тогда фактор-алгебру можно мыслить как множество *остатков от деления на p, в котором все операции выполняются по модулю p: $(x+y) \bmod p$, $(x-y) \bmod p$, $(x \times y) \bmod p$.*

Но в ряде случаев представители классов выбираются иначе. Например, при рассмотрении некоторых вопросов теории чисел представители классов выбираются из отрезка $\left[-\frac{p-1}{2}, \frac{p-1}{2}\right]$. Такой способ выбора облегчает работу с квадратами, так как $x^2 = (-x)^2$.

Гомоморфизмы являются мощнейшим инструментом, который позволяет изучать как общие свойства алгебр вообще, так и детали устройства конкретных алгебр. Дело в том, что если мы имеем эпиморфизм $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}$ можно рассматривать как «упрощённый» вариант алгебры $\mathfrak{A}$. В самом деле, $\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{A}/{\equiv}$, поэтому можно считать, что мы получили $\mathfrak{B}$ «склеив» некоторые из элементов $\mathfrak{A}$, то есть «упростили» её, перестав считаться с различиями «склеиваемых» элементов. И наоборот, $\mathfrak{A}$ можно рассматривать как «усложнение» алгебры $\mathfrak{B}$, в котором мы каждый из элементов «разлагаем» на несколько, делая их различными.

Последнее, что мы изучим в этом параграфе — это связь конгруэнтностей между собой и с другими бинарными отношениями, а также — простейшие следствия из этой конструкции.

Предложение 65. *Если для двух отношений конгруэнтности на $\mathfrak{A}$ выполнено $E_1 \subseteq E_2$, то $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}/E_2$ является гомоморфным образом $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}/E_1$.*

Доказательство. Поскольку $E_1 \subseteq E_2$, то из $E_1(a,b)$ следует $E_2(a,b)$, поэтому каждый класс эквивалентности $\hat{a}$ по E_1 включается в некоторый класс эквивалентности $\hat{a}'$ по E_2. Определим отображение $h : \hat{a} \mapsto \hat{a}'$. Очевидно, оно будет сюръекцией. Покажем, что оно будет и гомоморфизмом. Пусть $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a$, тогда по свойствам естественных гомоморфизмов получим $f^{\mathfrak{A}_1}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n) = \hat{a}$ и $f^{\mathfrak{A}_2}(\hat{a}'_1, \ldots, \hat{a}'_n) = \hat{a}'$. Далее

$$h(f^{\mathfrak{A}_1}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n)) = h(\hat{a}) = \hat{a}' = \\ = f^{\mathfrak{A}_2}(\hat{a}'_1, \ldots, \hat{a}'_n) = f^{\mathfrak{A}_2}(h(\hat{a}_1), \ldots, h(\hat{a}_n)). \quad \square$$

Теперь покажем, что каждое бинарное отношение можно расширить до подходящей конгруэнтности.

Теорема 66. *Пусть B — бинарное отношение на алгебре $\mathfrak{A} = (A, \nu)$ сигнатуры Σ. Тогда существует наименьшее отношение конгруэнтности E, расширяющее B.*

Доказательство. Пусть $E_i : i \in I$ — все отношения конгруэнтности, расширяющие B. Это множество непусто, так как содержит как минимум всюду истинное отношение A^2. Тогда $\bigcap\limits_{i \in I} E_i$, согласно 57 на стр. 51, снова будет отношением конгруэнтности, причём расширяющим B и наименьшим возможным из таких. □

Эти результаты позволяют нам показать, что в любой алгебре мы можем подходящим образом «склеить» нужные нам элементы.

Предложение 67. *Пусть B — произвольное бинарное отношение на алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда существует гомоморфизм h из алгебры $\mathfrak{A}$ такой, что*

1) *из $B(a, b)$ следует $h(a) = h(b)$;*
2) *любой гомоморфизм f из $\mathfrak{A}$, который обладает свойством 1), представляется в виде $f'h$ для некоторого гомоморфизма f'.*

Доказательство. Пусть $\equiv$ — отношение конгруэнтности, построенное из B по теореме 66. Возьмём естественный гомоморфизм h из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A}/\equiv$. Тогда из $B(a, b)$ получим $a \equiv b$ и $h(a) = h(b)$.

Пусть теперь f — ещё один гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{C}$ обладающий свойством 1). Пусть E' — отношение конгруэнтности на $\mathfrak{A}$, которое порождает f. По следствию 64 на стр. 55 существует изоморфизм g между $\mathfrak{A}/E'$ и $\mathfrak{C}$.

Поскольку $\equiv$ является наименьшим, то $(\equiv) \subseteq E'$. Согласно предложению 65 на предыдущей странице, фактор-алгебра $\mathfrak{A}/E'$ является гомоморфным образом фактор-алгебры $\mathfrak{A}/\equiv$. Пусть f'' — этот гомоморфизм.

Положим $f' = gf''$ и получим $f = gf''h = f'h$. □

Задачи

84. Доказать, что отношение «существуют нечётные m и n, для которых $mx = ny$» является конгруэнтностью в алгебре $(\omega, \times)$, построить фактор-алгебру. ▼

85. Доказать, что отношение $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$ не является конгруэнтностью в алгебре $(\mathbb{R}^+, +)$. Проверить, является ли оно эквивалентностью. ▼

86. Доказать, что отношение «x и y отличаются конечным числом элементов» является конгруэнтностью в алгебре $(P(\omega), \cap, \cup)$. $(P(\omega), \cap, \cup)$ — множество всех подмножеств ω с операциями пересечения и объединения. ▼

87. Доказать, что отношение $x - y \in \mathbb{R}$ не является конгруэнтностью в алгебре $(\mathbb{C}, \times)$. Проверить, является ли оно эквивалентностью. ▼

88. Доказать, что отношение $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} y$ является конгруэнтностью в алгебре $(\mathbb{R}, \times)$, построить фактор-алгебру. ▼

89. Доказать, что отношение $|x - y| < 1$ не является конгруэнтностью в алгебре $(\mathbb{R}, +)$. Проверить, является ли оно эквивалентностью. ▼

90. Доказать, что отношение $|x| = |y|$ является конгруэнтностью в алгебре $(\Omega^*, \&)$, построить фактор-алгебру. $(\Omega^*, \&)$ — множество слов в алфавите $\Omega = \{a, b, c\}$ с операцией конкатенации. ▼

91. Доказать, что отношение «$x - y$ — составное число» не является конгруэнтностью в алгебре $(\mathbb{Z}, +)$. Проверить, является ли оно эквивалентностью. ▼

92. Доказать, что отношение $[x] = [y]$ ($[x]$ — целая часть числа x) является конгруэнтностью в алгебре $(\mathbb{Q}, \min, \max)$, построить фактор-алгебру. ▼

93. Доказать, что отношение $\operatorname{fr}(x) = \operatorname{fr}(y)$ (равенство дробных частей) не является конгруэнтностью в алгебре $(\mathbb{Q}, \frac{x+y}{2})$. Проверить, является ли оно эквивалентностью. ▼

94. Проверить будет ли отношение $\operatorname{fr}(x) = \operatorname{fr}(y)$ конгруэнтностью в алгебре $(\mathbb{Q}, \times)$, если да, то построить фактор-алгебру. ▼

95. Доказать, что отношение $x - y \in \mathbb{Z}$ является конгруэнтностью в алгебре $(\mathbb{Q}, +)$, построить фактор-алгебру. ▼

§ 3.4. Произведения алгебр

Ещё одним способом порождения новых алгебр являются декартовы и прямые произведения. Начнём с наиболее простого случая — произведения двух алгебр.

Определение 40 (Декартово произведение)**.** *Пусть $\mathfrak{A} = (A, \nu)$ и $\mathfrak{B} = (B, \mu)$ — алгебры одной сигнатуры Σ. Декартовым произведением алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называется алгебра $\mathfrak{C} = (C, \lambda)$ такая, что*

1) *$C = A \times B$, то есть носитель $\mathfrak{C}$ состоит из всевозможных пар вида (a, b), где $a \in A, b \in B$;*
2) *для любого $f^{(n)} \in \Sigma$ выполнено*

$$f^{\mathfrak{C}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = (f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)).$$

Обозначается декартово произведение: $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$.

Пример 51. *Перемножим две алгебры: $(\mathbb{R}^+, \times)$ и $(\{-1, 1\}, \times)$. Декартово произведение будет состоять из всевозможных пар вида (a, b), где $a \in \mathbb{R}^+$ и $b = \pm 1$. Операция определяется так: $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$.*

Новая алгебра изоморфна $(\mathbb{R}^\pm, \times)$, изоморфизмом является функция $h(a, b) = ab$. a и b в этом случае можно рассматривать как модуль и знак ненулевого действительного числа.

Таким образом, можно сказать, что алгебра $(\mathbb{R}^\pm, \times)$ разлагается в декартово произведение $(\mathbb{R}^+, \times) \times (\{-1, 1\}, \times)$. Подобные разложения, если они существуют, являются одним из наиболее важных способов описания строения алгебр. Но, разумеется, так бывает не всегда. Например, одна из полученных в последнем примере множители дальнейшего разложения в произведение уже не допускает: алгебра $(\{-1, 1\}, \times)$ содержит два элемента, поэтому какой-то из сомножителей будет содержать один элемент и быть единичной алгеброй. Тогда второй будет изоморфен самой алгебре (см. следствие 70 на стр. 61).

Как в случае подалгебр и гомоморфизмов условие 2) из определения можно распространить на произвольные термы.

Предложение 68. *Если $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то*

$$t^{\mathfrak{C}}((a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_n)) = (t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), t^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n))$$

для любого терма $t(x_1, \ldots, x_n)$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Для термов-переменных вида x_i непосредственно получаем $(a_i, b_i) = (a_i, b_i)$. Для термов-констант c по аналогии имеем $(c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}}) = (c^{\mathfrak{A}}, c^{\mathfrak{B}})$.

Для термов вида $f(t_1(x_1,\dots,x_n),\dots,t_m(x_1,\dots,x_n))$ по индукционному предположению считаем, что

$$t_i^{\mathfrak{C}}((a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)) = (t_i^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n), t_i^{\mathfrak{B}}(b_1,\dots,b_n)).$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
t^{\mathfrak{C}}&((a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)) = \\
&= f^{\mathfrak{C}}(t_1^{\mathfrak{C}}((a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n)),\dots,t_m^{\mathfrak{C}}((a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n))) = \\
&\quad= f^{\mathfrak{C}}((t_1^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n), t_1^{\mathfrak{B}}(b_1,\dots,b_n)),\dots, \\
&\qquad\qquad (t_m^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n), t_m^{\mathfrak{B}}(b_1,\dots,b_n))) = \\
&\quad= (f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n),\dots,t_m^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)), \\
&\qquad\qquad f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(b_1,\dots,b_n),\dots,t_m^{\mathfrak{B}}(b_1,\dots,b_n)) = \\
&\qquad\qquad\qquad = (t^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n), t^{\mathfrak{B}}(b_1,\dots,b_n)). \quad \square
\end{aligned}$$

Множества $A \times B$ и $B \times A$ различны, поэтому, строго говоря, декартово произведение зависит от порядка сомножителей. Однако при перестановке множителей мы получим изоморфную алгебру: изоморфизмом, очевидно, будет соответствие $(a,b) \mapsto (b,a)$. С точки зрения алгебры изоморфные системы ничем не отличаются, поэтому мы полагаем, что декартово произведение алгебр коммутативно.

Гомоморфизмы являются обратными к декартовому произведению операциями.

Предложение 69. *Если $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\times\mathfrak{B}$, то $h_A(x,y) = x$ и $h_B(x,y) = y$ — эпиморфизмы $\mathfrak{C}$ на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно.*

Доказательство. Рассмотрим h_A. Очевидно, что h_A — сюръективное отображение $A \times B$ на A, так как каждый $a \in A$ получается из некоторой пары (a,b) (B не пусто).

Далее

$$\begin{aligned}
h_A(f((a_1,b_1),\dots,(a_n,b_n))) &= h_A(f(a_1,\dots,a_n), f(b_1,\dots,b_n)) = \\
&= f(a_1,\dots,a_n) = f(h_A(a_1,b_1),\dots,h_A(a_n,b_n)). \quad \square
\end{aligned}$$

Следствие 70. *Если $\mathfrak{E}$ — единичная алгебра, то $\mathfrak{A} \times \mathfrak{E} \simeq \mathfrak{A}$.*

Доказательство. В этом случае отображение $h_A(a, e) = a$ будет разнозначным, то есть изоморфизмом. □

Обратное к предложению 69 на предыдущей странице в произвольном случае неверно, по гомоморфным образам помощью декартовых произведений исходную алгебру восстановить можно не всегда.

Пример 52. *Существует три неизоморфных двухэлементные алгебры с единственной одноместной функцией:*

1) $f(a) = a$, $f(b) = b$;
2) $f(a) = b$, $f(b) = b$;
3) $f(a) = b$, $f(b) = a$.

Единственным гомоморфным образом (отличным от исходной алгебры) во всех трёх случаях будет единичная, а произведение единичных алгебр снова даст единичную.

Декартово произведение можно однозначно определить и в терминах морфизмов.

Предложение 71. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебры. Тогда декартово произведение $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ — единственная с точностью до изоморфизма алгебра, которая обладает следующими свойствами:*

1) *$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ являются гомоморфными образами $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ при некоторых гомоморфизмах h_A и h_B соответственно;*
2) *для любой алгебры $\mathfrak{C}$ и любых гомоморфизмов f_A и f_B из $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно существует и единственный гомоморфизм g из $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ такой, что $f_A = h_A g$ и $f_B = h_B g$. Другими словами, существует единственный гомоморфизм g делающий*

следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{A} & \\
\mathfrak{C} \arrow[ur, "f_A"] \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f_B"'] & & \mathfrak{A}\times\mathfrak{B} \arrow[ul, "h_A"'] \arrow[dl, "h_B"] \\
& \mathfrak{B} &
\end{tikzcd}$$

Доказательство. В качестве h_A и h_B возьмём естественные гомоморфизмы: $h_A : (a, b) \mapsto a$, $h_B : (a, b) \mapsto b$ для произвольных $a \in |\mathfrak{A}|$ и $b \in |\mathfrak{B}|$. Тогда пункт 1) выполнен согласно предложению 69 на стр. 60.

Докажем пункт 2). Рассмотрим произвольную алгебру $\mathfrak{C}$ и пару гомоморфизмов: $f_A : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ и $f_B : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$. Определим гомоморфизм $g : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ следующим образом: $g(c) = (f_A(c), f_B(c))$ для произвольного $c \in |\mathfrak{C}|$. Основное свойство морфизмов нетрудно проверить:

$$\begin{aligned}
g(f^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n)) &= (f_A(f^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n)), f_B(f^{\mathfrak{C}}(c_1, \ldots, c_n))) = \\
&= (f^{\mathfrak{A}}(f_A(c_1), \ldots, f_A(c_n)), f^{\mathfrak{B}}(f_B(c_1), \ldots, f_B(c_n))) = \\
&= f^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((f_A(c_1), f_B(c_1)), \ldots, (f_A(c_1), f_B(c_1))) = \\
&= f^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}(g(c_1), \ldots, g(c_1)).
\end{aligned}$$

Здесь первое и последнее равенства в цепочке получены по определению g, второе — по свойству морфизмов, третье — декартовых произведений.

Учитывая определение h_A и h_B мы получаем:

$$(h_A g)(c) = h_A(f_A(c), f_B(c)) = f_A(c),$$

$$(h_B g)(c) = h_B(f_A(c), f_B(c)) = f_B(c)$$

для произвольного $c \in |\mathfrak{C}|$, то есть $f_A = h_A g$ и $f_B = h_B g$, что и требуется.

Докажем единственность такого g. Предположим, что некоторый g' отличается от g, но обладает тем же свойством. Пусть

$$g(c) = (a, b) \neq (a', b') = g'(c)$$

для некоторого $c \in \mathfrak{C}$. Для определённости считаем, что $a \neq a'$, случай, когда $b \neq b'$, рассматривается аналогично. Но тогда

$$f_A(c) = (h_A g)(c) = h_A(a, b) = a,$$

а с другой стороны —

$$f_A(c) = (h_A g')(c) = h_A(a', b') = a' \neq a,$$

противоречие.

Чтобы доказать единственность $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ с точностью до изоморфизма, предположим, что некоторая алгебра $\mathfrak{D}$ обладает свойствами 1) и 2), то есть существуют гомоморфизмы h_A^D и h_B^D из $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно, а любая пара гомоморфизмов $f_A^D : \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}$ и $f_B^D : \mathfrak{C} \to \mathfrak{B}$ может быть представлена в виде $f_A^D = h_A^D g^D$ и $f_B^D = h_B^D g^D$ для некоторого $g^D : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, который является единственным.

Возьмём в качестве алгебры $\mathfrak{C}$ само декартово произведение: $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, $f_A^D = h_A$ и $f_B^D = h_B$. Тогда согласно условию должно выполняться $(h_A^D g^D)(a, b) = h_A(a, b) = a$ и $(h_B^D g^D)(a, b) = h_B(a, b) = a$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A} & \\
\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \arrow[ur, "h_A"] \arrow[rr, "g^D"] \arrow[dr, "h_B"'] & & \mathfrak{D} \arrow[ul, "h_A^D"'] \arrow[dl, "h_B^D"] \\
 & \mathfrak{B} &
\end{tikzcd}$$

Сначала покажем, что $\mathfrak{D}$ содержит подалгебру $\mathfrak{K}$, которая изоморфна $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Если бы отображение g^D не было разнозначным, то для некоторого $d \in \mathfrak{D}$ и некоторых различных пар (a_1, b_1) и (a_2, b_2) мы бы получили $g^D(a_1, b_1) = g^D(a_2, b_2)$, но тогда было бы

$$\begin{aligned} a_1 = h_A(a_1, b_1) = (h_A^D g^D)(a_1, b_1) = h_A^D(g^D(a_1, b_1)) = \\ = h_A^D(g^D(a_2, b_2)) = (h_A^D g^D)(a_2, b_2) = h_A(a_2, b_2) = a_2 \end{aligned}$$

и аналогичным образом получается $b_1 = b_2$. Следовательно, $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$, что противоречит тому, что пары (a_1, b_1) и (a_2, b_2) различны. Итак, g^D — разнозначно, поэтому образ $g^D[\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}] = \mathfrak{K}$ изоморфен $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$.

Теперь покажем, что $\mathfrak{K} = \mathfrak{D}$. Предположим противное: $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{D}$. «Поменяем местами» $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{D}$ — должен существовать гомоморфизм $g : \mathfrak{D} \to \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, для которого $h_A^D = h_A g$ и $h_B^D = h_B g$:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A} & \\
\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \arrow[ur, "h_A"] \arrow[dr, "h_B"'] & & \mathfrak{D} \arrow[ll, "g"] \arrow[ul, "h_A^D"'] \arrow[dl, "h_B^D"] \\
 & \mathfrak{B} &
\end{tikzcd}$$

Тогда гомоморфизм $g^D g$ отображает $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{K}$ и мы получаем

$$h_A^D = h_A g = h_A^D g^D g \quad \text{и} \quad h_B^D = h_B g = h_B^D g^D g. \tag{3}$$

Но с другой стороны,

$$h_A^D = h_A^D e \quad \text{и} \quad h_B^D = h_B^D e, \tag{4}$$

где e — тождественный автоморфизм $\mathfrak{D}$. Поскольку областью значений e является $\mathfrak{D}$, а областью значений $g^D g$ — $\mathfrak{K} \neq \mathfrak{D}$, то $g^D g \neq e$.

Наконец, возьмём в качестве обеих алгебр $\mathfrak{D}$. Но тогда получаем, что будет нарушена единственность из пункта 2), различные гомоморфизмы $g^D g$ (3) и e (4) из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{D}$ удовлетворяют этому условию:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A} & \\
\mathfrak{D} \arrow[ur, "h_B^D"] \arrow[dr, "h_B^D"'] & & \mathfrak{D} \arrow[ul, "h_A^D"'] \arrow[dl, "h_B^D"] \arrow[ll, bend right, "g^D g"'] \arrow[ll, bend left, "e"] \\
 & \mathfrak{B} &
\end{tikzcd}$$

Таким образом, мы доказали, что $\mathfrak{D} = \mathfrak{K} \simeq \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. □

Итерируя определение декартова произведения двух алгебр, можно дать следующее определение для большего числа сомножителей.

Определение 41 (Декартово произведение)**.** *Предположим, что $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, \ldots, m$ — алгебры одной сигнатуры. Декартовым произведением $\mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_m$ называется:*

1) *$\mathfrak{A}_1$, если $m = 1$;*
2) *$(\mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_{m-1}) \times \mathfrak{A}_m$, если $m > 2$ (по индукции считаем $\mathfrak{A}_1 \times \cdots \times \mathfrak{A}_{m-1}$ уже определённым).*

Если все множители равны, то используют степенную нотацию: $\mathfrak{A}^m$.

Заметим, что для $m = 2$ мы получим то же самое, что и в предыдущем определении.

Пример 53. *Рассмотрим алгебру $\mathfrak{B} = (\{0, 1\}, \wedge, \vee, \neg)$. Рассмотрим $\mathfrak{B}^n$, покажем, что эта алгебра изоморфна алгебре $\mathfrak{A} = (A, \cap, \cup, C)$, где A — множество всех множеств, составленных из элементов $a_1, \ldots, a_n$, с операциями пересечения, объединения и дополнения. Для этого рассмотрим изоморфизм $h(b_1, \ldots, b_n) = \{a_i : b_i = 1\}$. Тогда*

$$h((b'_1, \ldots, b'_n) \wedge (b''_1, \ldots, b''_n)) = h(b'_1 \wedge b''_1, \ldots, b'_n \wedge b''_n) =$$
$$= \{a_i : b'_i \wedge b''_i = 1\} = \{a_i : b'_i = 1 \text{ и } b''_i = 1\} =$$

$$= \{a_i : b'_i = 1\} \cap \{a_i : b''_i = 1\} = h(b'_1, \ldots, b'_n) \cap h(b''_1, \ldots, b''_n).$$

Аналогично рассматриваются случаи с дизъюнкцией/объединением и отрицанием/дополнением.

Понятие декартова произведения можно распространить на бесконечное число сомножителей. Чтобы это сделать заметим, что упорядоченная n-ка $(a_1, \ldots, a_n)$ может быть рассмотрена как одноместная функция, определённая на множестве $\{1, \ldots, n\}$, значение которой на каждом из чисел $i = 1, \ldots, n$ равняется соответствующему a_i. Таким образом, произведение $A = A_1 \times \cdots \times A_n$ можно рассматривать как множество функций, областью определения которых является множество $\{1, \ldots, n\}$, множеством значений $A_1 \cup \cdots \cup A_n$, и выполняется условие $f(i) \in A_i$. Второе условие в определении декартова произведения тогда превращается в следующее: $g^{\mathfrak{A}}(f_1, \ldots, f_k)(i) = g^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_k(i))$, то есть i-ый элемент результата получается из i-ых элементов аргументов с помощью операции из i-ой алгебры.

Если теперь вместо множества $\{1, \ldots, n\}$ взять произвольное I, то мы получим следующее.

Определение 42 (Прямое произведение)**.** *Пусть $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$ — алгебры одной сигнатуры Σ. Прямым произведением алгебр $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$ (обозначается $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$) называется следующая алгебра $\mathfrak{A}$:*

1) *носитель $\mathfrak{A}$ — это множество всех функций f таких, что $\operatorname{dom} f = I$, $f(i) \in |\mathfrak{A}_i|$ для всех $i \in I$;*

2) *для каждого $g^{(n)} \in \Sigma$ выполнено $g^{\mathfrak{A}}(f_1, \ldots, f_n) = f$, если $f(i) = g^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i))$ для всех $i \in I$.*

На прямые и произвольные декартовы произведения можно соответствующим образом перенести все результаты, доказанные нами для декартова произведения двух алгебр. Например, предложение 68 на стр. 59 превращается в следующее.

Предложение 72. *Пусть* $\mathfrak{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$. *В этом случае для любого терма* $t(x_1, \ldots, x_n)$ *и любых* $f_1, \ldots, f_n, f \in |\mathfrak{A}|$ *выполнено*

$$t^{\mathfrak{A}}(f_1, \ldots, f_n) = f \iff t^{\mathfrak{A}_i}(f_1(i), \ldots, f_n(i)) = f(i) \text{ для всех } i \in I.$$

Аналогом предложения 69 на стр. 60 будет такое.

Предложение 73. *Пусть* $\mathfrak{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$. *Тогда отображение* h_i *такое, что* $h_i(f) = f(i)$, *является эпиморфизмом* $\mathfrak{A}$ *на* $\mathfrak{A}_i$.

Задачи

96. Доказать, что $(\mathbb{Z}^+, \times) \times (\omega, +) \simeq (\mathbb{Z}^+, \times)$. ▼

97. Доказать, что $(\mathbb{Z}^+, \times)^2 \simeq (\mathbb{Z}^+, \times)$. ▼

98. Доказать, что $(\mathbb{Z}, \times)^2 \not\simeq (\mathbb{Z}, \times)$. ▼

99. Найти $(\mathsf{P}(A), \cap, \cup) \times (\mathsf{P}(B), \cap, \cup)$ для произвольных множеств A и B. ▼

100. Доказать, что алгебру $(\omega, +)$ нельзя представить в виде произведения двух неединичных алгебр. ▼

101. Доказать аналогичное утверждение для алгебры $(\mathbb{Q}, \max^{(2)})$. ▼

102. Пусть декартово произведение неединичных алгебр изоморфно одному из множителей: $\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$. Доказать, в $\mathfrak{A}$ есть собственная подалгебра изоморфная $\mathfrak{A}$. ▼

103. В условиях предыдущей задачи доказать, что существует гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ в $\prod\limits_{i \in \omega} \mathfrak{B}$. ▼

104. Доказать, что декартово (прямое) произведение содержит единичную подалгебру тогда и только тогда, когда такая подалгебра есть в каждом из сомножителей. ▼

105. Пусть $\mathfrak{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ — прямое произведение, $F \subseteq \mathsf{P}(I)$ — непустое множество, которое обладает такими свойствами: если $x, y \in F$ и $x \subseteq z$, то $x \cap y \in F$ и $z \in F$ (такое множество называется ф и л ь т р о м на множестве I). Доказать, что отношение $f \equiv g$, означающее $\{i \in I : f(i) = g(i)\} \in F$, является конгруэнтностью в алгебре $\mathfrak{A}$. ▼

106. Пусть в условиях предыдущей задачи $F = \{x \subseteq I : i_0 \in x\}$. Проверить, что F — фильтр, доказать, что $(\mathfrak{A}/\equiv) \simeq \mathfrak{A}_{i_0}$. ▼

107. Пусть все алгебры $\mathfrak{A}_i$ одинаковы, $\mathfrak{A} = \prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ — прямое произведение, $V \subseteq \mathsf{P}(I^2)$ — фильтр на множестве I^2, B состоит из таких $f \in \mathfrak{A}$, что $\{(i, j) \in I^2 : f(i) = f(j)\} \in V$. Доказать, что B является носителем подалгебры $\mathfrak{A}$. ▼

108. Пусть $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ для всех $i \in I$. Доказать, что $\mathfrak{A}$ вкладывается в прямую степень $\prod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}$.

§ 4. Многообразия

§ 4.1. Тождества, многообразия

Поскольку алгебры содержат сигнатурные операции, но не имеют никаких в явном виде никаких отношений, кроме обычного сравнения, то естественно изучать свойства, которые можно записать таким способом.

Определение 43 (Равенство, тождество)**.** *Равенством в алгебре $\mathfrak{A}$ называется формула вида $t_1(\bar{x}, \bar{a}) = t_2(\bar{x}, \bar{a})$, где t_1, t_2 — термы, $\bar{x}$ — набор переменных, $\bar{a} \in \mathfrak{A}$. Равенство, не содержащее элементов алгебры, называется тождеством.*

Равенство $t_1(\bar{x}, \bar{a}) = t_2(\bar{x}, \bar{a})$ выполняется в алгебре $\mathfrak{A}$, если оно верно для любых значений из $\mathfrak{A}$ переменных $\bar{x}$.

Классы алгебр, свойства которых постулируются с помощью тождеств, часто встречаются в математике.

Определение 44 (Многообразие)**.** *Пусть X — множество тождеств. Многообразие, определяемое X, — это класс всех алгебр, в которых выполняются все тождества из X.*

Рассмотрим несколько простых примеров.

Пример 54. *Пусть сигнатура состоит из двух символов — одноместного и константного: $\{f^{(1)}, c^{(0)}\}$, а тождество, задающее многообразие $\mathcal{M}$, имеет вид $f(c) = c$. Тогда примерами алгебр из $\mathcal{M}$ будут, например, такие:* $(\mathbb{Z}, -^{(1)}, 0)$, $(\mathbb{R}, x^2, 1)$, $(\mathbb{Q}, x^2 - x, 2)$ *и т.д.*

Пусть теперь сигнатура состоит из двухместного и константного символов: $\{*^{(2)}, e^{(0)}\}$, а многообразие задаётся тремя тождествами:

$$x * x = x; \quad x * e = x; \quad e * x = x.$$

Примерами алгебр из этого многообразия будут: $(\mathbb{N}^+, \text{НОК}, 1)$, $(\mathsf{P}(A), \cap, A)$ *и* $(\mathsf{P}(A), \cup, \varnothing)$ *для любого множества A ($\mathsf{P}(A)$ — множество всех подмножеств A),* $(\{0, 1\}, \wedge, 1)$ *и т.д.*

Отметим, что разные множества тождеств могут определять одно и то же многообразие.

Пример 55. *В последнем примере можно взять другие три тождества:*

$$x * x = x; \quad x = x * e; \quad e * x = x * e,$$

с, очевидно, тем же результатом.

Определение 45. *Будем говорить, что тождество $t = s$ **выполнено в многообразии** $\mathcal{M}$, если оно выполнено во всех алгебрах этого многообразия.*

Пример 56. *В любой алгебре многообразия из последнего примера будет выполнено тождество $(x * e) * e = e * (e * x)$. В самом деле, $x * e = x$, поэтому $(x * e) * e = x * e = x$. Аналогично, $e * x = x$, поэтому $e * (e * x) = e * x = x$.*

Для алгебры $\mathfrak{A}$ в многообразии $\mathcal{M}$ в общем случае может существовать много различных гомоморфных образов алгебры $\mathfrak{A}$. Но оказывается, что среди них есть один, «универсальный», который порождает все остальные.

Предложение 74. *Для каждой алгебры $\mathfrak{A}$ и каждого многообразия $\mathcal{M}$ существует алгебра $\mathfrak{B}$ из $\mathcal{M}$ такая, что*

1) *существует гомоморфизм h из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$;*
2) *для любой алгебры $\mathfrak{C} \in \mathcal{M}$ и любого гомоморфизма $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ существует единственный гомоморфизм $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$ такой что $f = gh$, то есть коммутативна следующая диаграмма:*

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A} \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathfrak{B} \arrow[r, "g"'] & \mathfrak{C}
\end{tikzcd}$$

Доказательство. Пусть X — множество тождеств, задающих многообразие $\mathcal{M}$. Определим на $\mathfrak{A}$ бинарное отношение E: $E(a, b)$ тогда и только тогда, когда $a = t^{\mathfrak{A}}(\bar{c})$, $b = s^{\mathfrak{A}}(\bar{c})$ для некоторого тождества $t(\bar{x}) = s(\bar{x})$ из X и некоторых элементов $\bar{c}$ из $\mathfrak{A}$. Согласно теореме 66 на стр. 57, существует наименьшее отношение конгруэнтности $\equiv$, расширяющее E. Пусть $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}/\!\equiv$ и h — естественный гомоморфизм $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$.

Прежде всего докажем, что $\mathfrak{B} \in \mathcal{M}$. Рассмотрим любое тождество $t(x_1, \ldots, x_n) = s(x_1, \ldots, x_n)$ из X и любые элементы $\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n \in \mathfrak{B}$. Тогда мы получим

$$\begin{aligned} t^{\mathfrak{B}}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n) &= t^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = h(t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = \\ &= h(s^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = s^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = s^{\mathfrak{B}}(\hat{a}_1, \ldots, \hat{a}_n). \end{aligned}$$

Среднее равенство мы получаем за счёт того, что

$$E(t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), s^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)),$$

откуда получаем

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \equiv s^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$$

и

$$h(t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = h(s^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)).$$

Следовательно, все тождества из X выполнены в $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B} \in \mathcal{M}$.

Теперь возьмём любую $\mathfrak{C} \in \mathcal{M}$ и гомоморфизм $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$. Образ $\mathfrak{A}$ при гомоморфизме f будет подалгеброй $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$, в силу замкнутости многообразий относительно подалгебр, получаем $\mathfrak{C}' \in \mathcal{M}$. Тогда $\mathfrak{C}'$ — гомоморфный образ $\mathfrak{A}$ и мы без ограничения общности считаем, что f — естественный гомоморфизм на фактор-алгебру. Пусть $\equiv_f$ — отношение конгруэнтности на $\mathfrak{A}$, которое порождает f. Покажем, что $E \subseteq (\equiv_f)$. В самом деле, если $E(a, b)$, то $a = t^{\mathfrak{A}}(c_1, \ldots, c_n)$, $b = s^{\mathfrak{A}}(c_1, \ldots, c_n)$ для некоторого тождества $t(\bar{x}) = s(\bar{x})$ из X и некоторых элементов $\bar{c}$ из $\mathfrak{A}$. Но тогда мы получим

$$\begin{aligned} f(a) &= f(t^{\mathfrak{A}}(c_1, \ldots, c_n)) = t^{\mathfrak{C}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)) = \\ &= s^{\mathfrak{C}}(f(c_1), \ldots, f(c_n)) = f(s^{\mathfrak{A}}(c_1, \ldots, c_n)) = f(b). \end{aligned}$$

Среднее равенство имеет место, так как $\mathfrak{C}' \in \mathcal{M}$. Следовательно, $a \equiv_f b$. Но $\equiv$ — наименьшее отношение конгруэнтности, включающее E, поэтому из $E \subseteq (\equiv_f)$ сразу следует, что $(\equiv) \subseteq (\equiv_f)$.

Согласно предложению 65 на стр. 56, $\mathfrak{A}/{\equiv_f}$ является гомоморфным образом $\mathfrak{A}/{\equiv}$, причём гомоморфизмом служит отображение $g : \hat{a} \mapsto \hat{a}'$, где $\hat{a}$ — класс эквивалентности a по $\equiv$, а $\hat{a}'$ — класс эквивалентности a по $\equiv_f$. Тогда получаем $f(a) = \hat{a}' = g(\hat{a}) = g(h(a))$, то есть $f = gh$. Единственность g следует из требования $g(\hat{a}) = f(a)$. $\square$

Задачи

109. Пусть многообразие $\mathcal{M}$ сигнатуры $\{+^{(2)}, \times^{(2)}, -^{(2)}, 0^{(0)}\}$ содержит следующие алгебры: $(\omega, +, \times, -, 0)$, $(\mathbb{Q}, +, \times, -, 0)$, $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R}), +, \times, -, 0)$, $(\mathsf{P}(\omega), \cup, \cap, \setminus, \varnothing)$. Определить, какие из следующих тождеств могут/не могут определять $\mathcal{M}$: а) $x+y = y+x$; б) $x \times y = y \times x$; в) $x+0 = x$; г) $x \times 0 = 0$; д) $x \times (y+z) = x \times y + x \times z$; е) $x \times (y-z) = x \times y - x \times z$; ж) $x + (y-x) = y$; з) $y - y = 0$; и) $0 - (0-x) = x$; к) $(x-y)+(y-x) = 0$. ▼

110. Пусть многообразие $\mathcal{M}$ сигнатуры $\{\Cap^{(2)}, \Cup^{(2)}, -^{(1)}, 0^{(0)}, 1^{(0)}\}$ задано тождествами:

$$(x \Cup y) \Cup z = x \Cup (y \Cup z), \quad x \Cup y = y \Cup x, \quad x \Cup x = x, \quad x \Cup 0 = x, \quad x \Cup 1 = 1, \quad -0 = 1,$$

$$(x \Cap y) \Cup z = (x \Cup y) \Cap (x \Cup z), \quad -(x \Cup y) = (-x) \Cap (-y), \quad -(-x) = x, \quad x \Cup (-x) = 1.$$

Элементы этого многообразия называют *булевыми алгебрами*. Определить, какие из следующих тождеств будут выполнены в булевых алгебрах: а) $x \Cap y = y \Cap x$; б) $(x \Cup y) \Cup x = x \Cup y$; в) $(-x) * y = x * (-y)$; г) $x \Cap 0 = 0$; д) $(-x) * y = -(x * y)$; е) $-(x \Cap y) = (-x) \Cup (-y)$ ж) $(-x) \Cap (-y) = -(x \Cap y)$; з) $(-x) \Cup (-y) = x \Cup y$; и) $(x \Cap y) \Cup (x \Cap (-y)) = x$. ▼

111. Пусть многообразие $\mathcal{M}$ задано тождеством $x \,\&\, y = y \,\&\, x$, а алгебра $\mathfrak{A}$ представляет собой множество слов в алфавите $\{a, b\}$ с операцией конкатенации. Построить алгебру $\mathfrak{B}$ из предложения 74 на стр. 69. ▼

112. Пусть многообразие $\mathcal{M}$ задано тождеством $x \times x = x$, а алгебра $\mathfrak{A}$ представляет собой множество действительных чисел с умножением. Построить алгебру $\mathfrak{B}$ из предложения 74 на стр. 69. ▼

113. Пусть многообразие $\mathcal{M}$ задано тождеством $x * (y * z) = (x * y) * z$, а алгебра $\mathfrak{A}$ представляет собой множество рациональных чисел с бинарной операцией нахождения среднего арифметического. Построить алгебру $\mathfrak{B}$ из предложения 74 на стр. 69. ▼

114. Если существуют множества X и Y равенств вида $t(\bar{a}, \bar{x}) = s(\bar{a}, \bar{x})$ и набор $\bar{a}$ является единственным в алгебре $\mathfrak{A}$, для которого выполняются все равенства из X и не выполняются все равенства из Y, то элементы $\bar{a}$ называются (базисно) определимыми в $\mathfrak{A}$. Найти множества определимых элементов в следующих алгебрах: а) $(\omega, +)$; б) $(\omega, \times)$; в) $(\omega, +, \times)$; г) $(\mathbb{Q}, \times)$; д) $(\mathbb{Q}, +, \times)$; е) $(\mathsf{P}(A), \cup, \cap)$; ж) $(\Sigma^*, \&)$; з) $(\mathbb{Q}, , \max, \min)$. ▼

115. Доказать, что множество определимых в $\mathfrak{A}$ элементов образует подалгебру $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. ▼

116. Доказать, что при автоморфизмах $\mathfrak{A}$ все определимые элементы остаются неподвижными. ▼

117. Показать, что при переходе к а) подалгебрам, б) гомоморфным образам, в) декартовым произведениям определимые в исходной алгебре элементы могут перестать быть определимыми. ▼

§ 4.2. Замкнутые классы алгебр

В предыдущем разделе мы изучили несколько способов образования новых алгебр из уже имеющихся: построение подалгебр, гомоморфных образов (фактор-алгебр) и прямых (в том числе — декартовых) произведений. Покажем, что ни один из этих способов не может вывести за пределы многообразия.

Теорема 75. *Если алгебра $\mathfrak{A}$ принадлежит многообразию $\mathcal{M}$, то и любая её подалгебра $\mathfrak{B}$ принадлежит $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть многообразие $\mathcal{M}$ задаётся множеством тождеств X. Рассмотрим произвольное из них: $t(\bar{x}) = s(\bar{x})$. Выберем произвольные $\bar{b}$ — значения для $\bar{x}$ из $\mathfrak{B}$. Но тогда $\bar{b}$ являются элементами $\mathfrak{A}$, поэтому выполняется $t^{\mathfrak{A}}(\bar{b}) = s^{\mathfrak{A}}(\bar{b})$. Из предложения 32 на стр. 36 получаем, что $t^{\mathfrak{B}}(\bar{b}) = s^{\mathfrak{B}}(\bar{b})$. Таким образом, в $\mathfrak{B}$ выполнены все тождества из X, поэтому $\mathfrak{B} \in \mathcal{M}$. □

Теорема 76. *Если алгебра $\mathfrak{A}$ принадлежит многообразию $\mathcal{M}$, то любой её гомоморфный образ $\mathfrak{B}$ принадлежит $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Предположим, что h — гомоморфизм из $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$. Пусть многообразие $\mathcal{M}$ задаётся множеством тождеств X и $t(\bar{x}) = s(\bar{x})$ — любое из них. Пусть $\bar{b}$ — произвольные значения для $\bar{x}$ из $\mathfrak{B}$. Поскольку $\mathfrak{B}$ является гомоморфным образом $\mathfrak{A}$, то каждый

b_i является образом некоторого a_i: $b_i = h(a_i)$. Согласно теореме 23 на стр. 26,

$$t^{\mathfrak{B}}(b_1,\ldots,b_n) = t^{\mathfrak{B}}(h(a_1),\ldots,h(a_n)) = h(t^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)).$$

Аналогично получаем

$$s^{\mathfrak{B}}(b_1,\ldots,b_n) = s^{\mathfrak{B}}(h(a_1),\ldots,h(a_n)) = h(s^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)).$$

Но так как $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$, то $t^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n) = s^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots a_n)$. Поэтому

$$t^{\mathfrak{B}}(b_1,\ldots,b_n) = h(t^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n)) = h(s^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots a_n)) = s^{\mathfrak{B}}(b_1,\ldots,b_n).$$

Следовательно, тождество $t(\bar{x}) = s(\bar{x})$ выполнено в $\mathfrak{B}$.

Получаем, что в $\mathfrak{B}$ выполнены все тождества из X, поэтому $\mathfrak{B} \in \mathcal{M}$. □

Следствие 77. *Если алгебра $\mathfrak{A}$ принадлежит многообразию $\mathcal{M}$ и $\equiv$ — отношение конгруэнтности на $\mathfrak{A}$, то фактор-алгебра $\mathfrak{A}/\equiv$ принадлежит $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Фактор-алгебра является гомоморфным образом. □

Следствие 78. *Каждое многообразие содержит единичную алгебру.*

Доказательство. Единичная алгебра является гомоморфным образом любой другой. □

Теорема 79. *Если алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ принадлежат многообразию $\mathcal{M}$, то $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$ тоже принадлежит $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Аналогично предыдущим теоремам, предположим, что $t(\bar{x}) = s(\bar{x})$ — любое из тождеств, задающих $\mathcal{M}$. Выберем произвольные значения для $\bar{x}$ в $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$: (a_1, b_1), …, (a_n, b_n). Согласно предложению 68 на стр. 59,

$$t^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) = (t^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n), t^{\mathfrak{B}}(b_1,\ldots,b_n)).$$

Точно так же:

$$s^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) = (s^{\mathfrak{A}}(a_1,\ldots,a_n), s^{\mathfrak{B}}(b_1,\ldots,b_n)).$$

Но $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{M}$, поэтому

$$t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = s^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \quad \text{и} \quad t^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n) = s^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n).$$

Но тогда

$$t^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = (t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), t^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)) = \\ = (s^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n), s^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)) = s^{\mathfrak{A}\times\mathfrak{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)).$$

Следовательно, тождество $t(\bar{x}) = s(\bar{x})$ выполнено в $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$.

Поскольку тождество выбрано произвольно, то все тождества, задающие $\mathcal{M}$ выполнены в $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, поэтому $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} \in \mathcal{M}$. □

Заметим, что аналогичное утверждение можно доказать и для прямых произведений:

Теорема 80. *Если алгебры $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, принадлежат многообразию $\mathcal{M}$, то их прямое произведение $\prod\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ тоже принадлежит $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Аналогично теореме 79 на предыдущей странице с использованием предложения 72 на стр. 66. □

Свойства, которые мы только что доказали для многообразий, могут быть сформулированы и в общем случае для произвольных классов и носят специальное название.

Определение 46 (Замкнутый класс)**.** *Пусть O — какой-либо способ построения одних алгебр из других (не обязательно однозначный), K — некоторый класс алгебр. Если в результате O над алгебрами из K всегда получается снова алгебра из K, то такой класс K называется з а м к н у т ы м (или у с т о й ч и в ы м) относительно O.*

Следствие 81. *Любое многообразие замкнуто относительно подалгебр, гомоморфных образов и прямых (декартовых) произведений.*

Следствие 82. *Пусть многообразие $\mathcal{M}$ содержит хотя бы одну неединичную алгебру. Тогда для любого множества I в $\mathcal{M}$ найдётся алгебра $\mathfrak{B}$, для которой существует разнозначное отображение $I \to \mathfrak{B}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — неединичная алгебра из $\mathcal{M}$. Пусть, $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ для всех $i \in I$. Тогда, согласно теореме 80 на предыдущей странице, $\mathfrak{B} = \prod_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ тоже принадлежит $\mathcal{M}$.

Предположим, что $a, b \in \mathfrak{A}$ и $a \neq b$. Рассмотрим отображение h, которое сопоставляет каждому $j \in I$ следующую функцию $f_j \in \mathfrak{B}$:

$$f_j(i) = \begin{cases} a, & \text{при } i = j, \\ b, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для разных j эти функции различны: если $j_1 \neq j_2$, то

$$f_{j_1}(j_1) = a \neq b = f_{j_2}(j_1).$$

Следовательно, отображение $h : I \to \mathfrak{B}$ разнозначно. □

Итак, многообразия замкнуты относительно подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Оказывается эти свойства замкнутости являются и достаточными для того, чтобы произвольный класс алгебр был многообразием.

Теорема 83 (Биркгофа)**.** *Класс $\mathcal{M}$ алгебр является многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений.*

Доказательство. Доказательство утверждения в прямую стороны непосредственно получается из теорем 75 на стр. 72, 76 на стр. 72 и 80 на противоположной странице.

Рассмотрим теперь произвольный класс алгебр $\mathcal{M}$, который замкнут относительно подалгебр, гомоморфных образов и прямых произведений. Пусть X — множество всех тождеств, которые выполнены во всех алгебрах из класса $\mathcal{M}$. Покажем, что $\mathcal{M}$ — это многообразие, задаваемое тождествами из X. Если $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$, то все тождества из X выполнены в $\mathfrak{A}$ по определению X. Следовательно, нам остаётся доказать, что если в алгебре $\mathfrak{A}$ выполнены все тождества из X, то $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$.

Итак, пусть в алгебре $\mathfrak{A} = (A, I)$ выполнены все тождества из X.

Рассмотрим следующее множество:

$$Y = \{(t, s, \bar{a}) : \bar{a} \in \mathfrak{A}, \text{ элементы } \bar{a} \text{ попарно различны,} \\ t, s \text{ — термы и } t(\bar{a}) \neq s(\bar{a})\}$$

В частности, это означает, что если $(t, s, \bar{a}) \in Y$, то тождество $t = s$ не принадлежит X. Отсюда сразу следует, что существует такая алгебра $\mathfrak{B}_{t,s,\bar{a}} = (B_{t,s,\bar{a}}, J_{t,s,\bar{a}})$ из класса $\mathcal{M}$, в которой это тождество не выполнено. Значит, найдётся такой набор $\bar{b}_{t,s,\bar{a}} \in \mathfrak{B}_{t,s,\bar{a}}$, для которого $t(\bar{b}_{t,s,\bar{a}}) \neq s(\bar{b}_{t,s,\bar{a}})$. Определим отображение (не обязательно гомоморфизм) $g_{t,s,\bar{a}} : A \to B_{t,s,\bar{a}}$ так, чтобы $g_{t,s,\bar{a}}(\bar{a}) = \bar{b}_{t,s,\bar{a}}$. Значение $g_{t,s,\bar{a}}$ на других элементах множества A может быть произвольным.

Рассмотрим прямое произведение

$$\mathfrak{B} = \prod_{(t,s,\bar{a}) \in Y} \mathfrak{B}_{t,s,\bar{a}}.$$

В силу замкнутости $\mathcal{M}$ относительно прямых произведений получаем, что $\mathfrak{B} \in \mathcal{M}$.

Напомним, что прямое произведение $\mathfrak{B}$ состоит из функций f, определённых на множестве Y, таких, что $f(t, s, \bar{a}) \in B_{t,s,\bar{a}}$. Определим отображение $g : A \to B$ следующим образом: $g(u) = f$, если $f(t, s, \bar{a}) = g_{t,s,\bar{a}}(u)$ для всех $(t, s, \bar{a}) \in Y$. Пусть $\mathfrak{C} = (C, J)$ — подалгебра $\mathfrak{B}$, порождённая образом $g(A)$. В силу замкнутости класса $\mathcal{M}$ относительно подалгебр получаем $\mathfrak{C} \in \mathcal{M}$.

Напомним, что подалгебра, порождённая множеством $g(A)$, состоит из значений всевозможных термов, когда значения переменных пробегают множество $g(A)$. Следовательно, все элементы алгебры $\mathfrak{C}$ имеют вид $t(g(a_1), \ldots, g(a_n))$ для каких-то терма $t(\bar{x})$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$. Заметим, можно считать, что $a_1, \ldots, a_n$ попарно различны. В противном случае, если, например, $a_i = a_j$ при $i \neq j$, то вместо терма $t(\bar{x})$ и набора $\bar{a} \in A$ следует рассмотреть терм

$$t'(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

и набор $\bar{a}' = (a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_n)$.

Определим отображение $h : C \to A$ следующим образом:

$$h(t(g(a_1), \ldots, g(a_n)) = t(a_1, \ldots, a_n).$$

В частности, $h(g(a)) = a$ для всех $a \in A$, поэтому h является сюръекцией на A.

Покажем, что определение h корректно, то есть значение h на элементах C не зависит от того, как эти элементы получены. Будем рассуждать от противного. Пусть существуют такие термы t, s и набор $\bar{a} \in A$, что $t(g(\bar{a})) = s(g(\bar{a}))$, но при этом $t(\bar{a}) \neq s(\bar{a})$. Тогда тройка $(t, s, \bar{a})$ должна попасть в Y, поэтому будет выполнено

$$t(\bar{b}_{t,s,\bar{a}}) \neq s(\bar{b}_{t,s,\bar{a}}) \tag{5}$$

в алгебре $\mathfrak{B}_{t,s,\bar{a}}$. С другой стороны, если $f = t(g(\bar{a})) = s(g(\bar{a}))$, то по предложению 72 на стр. 66 получаем

$$f(t, s, \bar{a}) = t(g(\bar{a})(t, s, \bar{a})) = s(g(\bar{a})(t, s, \bar{a})).$$

Но $g(\bar{a})(t, s, \bar{a}) = g_{t,s,\bar{a}}(\bar{a}) = \bar{b}_{t,s,\bar{a}}$, поэтому получаем $t(\bar{b}_{t,s,\bar{a}}) = s(\bar{b}_{t,s,\bar{a}})$, что противоречит (5). Значит, наше исходной предположение неверно и таких $t, s, \bar{a}$ не может существовать, а определение h корректно.

Покажем, наконец, что h — гомоморфизм. Пусть $c_i = t_i(g(\bar{a}))$, тогда $h(c_i) = h(t_i(g(\bar{a}))) = t_i(\bar{a})$. Для сигнатурной операции o получаем:

$$\begin{aligned} h(o(c_1, \ldots, c_n)) = h(o(t_1(g(\bar{a})), \ldots, t_n(g(\bar{a})))) = \\ = o(t_1(\bar{a}), \ldots, t_n(\bar{a})) = o(h(c_1), \ldots, h(c_n)). \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что $\mathfrak{A}$ — гомоморфный образ $\mathfrak{C}$, поэтому $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$. □

Задачи

118. Используя теоремы 75 на стр. 72, 76 на стр. 72 и 80 на стр. 74, проверить, что следующие классы алгебр сигнатуры $\Sigma = \{*^{(2)}\}$ не образуют многообразий: а) конечные алгебры; б) бесконечные алгебры; в) алгебры, в которых есть нейтральный элемент e (выполнены равенства $e * x = x * e = x$); г) алгебры, в которых есть единичная подалгебра; д) алгебры, в которых нет единичной подалгебры; е) алгебры, в которых есть коммутирующие элементы: $a * b = b * a$; ж) алгебры, в которых нет коммутирующих элементов; з) алгебры, в которых нет собственных подалгебр; и) жёсткие алгебры; к) нежёсткие алгебры; л) циклические алгебры. ▼

119. Определить, относительно каких из следующих операций замкнуты любые многообразия: а) прообразов эпиморфизмов; б) пересечения подалгебр (некоторой фиксированной алгебры); в) вложений; г) добавления аннулятора, то есть элемента a такого, что $f(\bar{b}, a, \bar{c}) = a$ для любых f, $\bar{b}$, $\bar{c}$; д) дублирования элементов $X \subseteq |\mathfrak{A}|$, то есть добавления a' для каждого $a \in X$ так, что

$$f(\bar{b}_0, a_1', \bar{b}_1, a_2', \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_{k-1}, a_k', \bar{b}_k) = f(\bar{b}_0, a_1, \bar{b}_1, a_2, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_{k-1}, a_k, \bar{b}_k)$$

для любых f, $\bar{b}_i$, a_i; е) инверсных эпиморфизмов, то есть таких $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, что $h(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(h(a_n), \ldots, h(a_1))$; ж) объединения цепей. ▼

120. Пусть сигнатура имеет вид $\{*^{(2)}\}$. Определить, какие из следующих классов алгебр замкнуты относительно прообразов эпиморфизмов: а) конечные алгебры; б) бесконечные алгебры; в) алгебры с идемпотентом (т.е. элементом a, для которого $a * a = a$); г) алгебры без идемпотентов; д) алгебры с конечным числом идемпотентов; е) алгебры с бесконечным числом идемпотентов; ж) жёсткие алгебры; з) нежёсткие алгебры; и) алгебры с левым аннулятором (т.е. элементом a, для которого $a * x = a$ для любых x); к) алгебры без левого аннулятора. ▼

121. В условиях задачи 120 определить, какие из классов будут замкнуты относительно вложений. ▼

122. В условиях задачи 120 определить, какие из классов будут замкнуты относительно объединения цепей. ▼

123. Доказать, что любое многообразие замкнуто относительно exp ($\exp^*$, $\exp_{\mathrm{fin}}$, $\exp^*_{\mathrm{fin}}$). ▼

124. Определить, какие из классов в задаче 120 замкнуты относительно exp и $\exp^*$. ▼

125. Для алгебры $\mathfrak{A}$ с помощью $\operatorname{symm}\mathfrak{A}$ будем обозначать следующую алгебру $\mathfrak{B}$: носитель $\mathfrak{B}$ — множество непустых конечных подмножеств $|\mathfrak{A}|$,

$$f^{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n) = \{f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) : \\ a_1 \in X_{i_1}, \ldots, a_n \in X_{i_n} \text{ и } i_1, \ldots, i_n \text{ попарно различны}\}.$$

Доказать, что любое многообразие замкнуто относительно symm. ▼

§ 4.3. Свободные алгебры

В общем случае, конечно, разные термы в одной и той же алгебре могут иметь одинаковое значение. Но существует особый класс алгебр, в которых такое невозможно.

Определение 47 (Свободная алгебра)**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — алгебра, $A \subseteq F$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ — свободная алгебра, порождённая множеством A, если*

1) *A является множеством образующих для $\mathfrak{F}$;*
2) *для любой алгебры $\mathfrak{B}$ любое отображение $f : A \to \mathfrak{B}$ продолжается до гомоморфизма из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{B}$.*

Последнее из условий означает, что для всякого отображения $f : A \to \mathfrak{B}$ найдётся гомоморфизм $h : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$, делающий коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\subseteq"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathfrak{F} \arrow[r, "h"'] & \mathfrak{B}
\end{tikzcd}$$

Теорема 84. *Пусть множество A непусто или сигнатура Σ содержит символы констант. Тогда существует свободная алгебра $\mathfrak{T}$ сигнатуры Σ, порождённая множеством A.*

Доказательство. Для каждого элемента $a \in A$ зафиксируем некоторую уникальную переменную x_a. Пусть X_A — множество всех этих переменных: $X_A = \{x_a : a \in A\}$. Рассмотрим алфавит $\Omega = \Sigma \cup X_A \cup \{[,], (,), , \}$ и слова вида $[t]$, где t — терм сигнатуры Σ с переменными из множества X_A. Обозначим множество таких слов с помощью T, оно будет носителем нашей алгебры $\mathfrak{T}$.

Чтобы закончить определение алгебры $\mathfrak{T}$ определим на T сигнатурные операции «естественным» способом:

$$f^{\mathfrak{T}}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)]$$

для произвольных $[t_1], \ldots, [t_n] \in T$ и n-местного символа функции f.

Индукцией по построению термов докажем следующее утверждение: $t^{\mathfrak{T}}([x_{a_1}], \ldots, [x_{a_n}]) = [t(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})]$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in A$ и любого терма $t(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})$. Для термов-переменных вида x_{a_i} равенство принимает вид $[x_{a_i}] = [x_{a_i}]$ и, естественно, выполнено. Для термов-констант — аналогично. Для термов вида $f(t_1, \ldots, t_k)$ утверждение непосредственно следует из индукционного предположения и определения $f^{\mathfrak{T}}$:

$$t^{\mathfrak{T}}([x_{a_1}], \ldots, [x_{a_n}]) = f^{\mathfrak{T}}(t_1^{\mathfrak{T}}([x_{a_1}], \ldots, [x_{a_n}]), \ldots, t_k^{\mathfrak{T}}([x_{a_1}], \ldots, [x_{a_n}])) =$$
$$= f^{\mathfrak{T}}([t_1(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})], \ldots, [t_k(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})]) = [t(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})].$$

Отождествим теперь элемент $[x_a]$ из T с a.

Покажем, что так определённая алгебра $\mathfrak{T}$ будет свободной. Пусть $\mathfrak{B}$ — любая алгебра той же сигнатуры, и имеется произвольное отображение $h : A \to \mathfrak{B}$. Продолжим h на T:

$$h'([t(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})]) = t^{\mathfrak{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$$

для всех термов t указанного вида. Заметим, что в силу отождествления $[x_a] = a$ отображение h' является продолжением отображения h: $h'(a) = h'([x_a]) = h(a)$. Тогда для любого k-местного функционального символа f и любых термов $t_1, \ldots, t_k$ получаем

$$h'(f^{\mathfrak{T}}([t_1(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})], \ldots, [t_k(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})])) =$$
$$= h'([f(t_1(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n}), \ldots, t_k(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n}))]) =$$
$$= f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(h'(a_1), \ldots, h'(a_n)), \ldots, t_k^{\mathfrak{B}}(h'(a_1), \ldots, h'(a_n)))) =$$
$$= f^{\mathfrak{B}}(h'([t_1(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})]), \ldots, h'([t_k(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})])),$$

то есть h' — гомоморфизм. □

Использованный в доказательстве последней теоремы приём широко используется и для других целей.

Определение 48 (Эрбрановский универсум)**.** *Алгебра $\mathfrak{T}$, построенная в доказательстве теоремы* 84 на стр. 79*, называется* ***эрбрановским универсумом сигнатуры*** *Σ.*

Покажем теперь, что свободная алгебра действительно обладает продекларированным в самом начале параграфа свойством.

Лемма 85. *Если $\mathfrak{F}$ — свободная алгебра, порождённая A, то для любых термов $t(\bar{x})$ и $s(\bar{x})$ и любых наборов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, составленных их элементов A, равенство $t^{\mathfrak{F}}(\bar{a}) = s^{\mathfrak{F}}(\bar{b})$ имеет место тогда и только тогда, когда $t = s$ и $\bar{a} = \bar{b}$.*

Доказательство. Пусть e — тождественное отображение на множестве A. Поскольку эрбрановский универсум $\mathfrak{T}$ включает A, то e является отображением A в $\mathfrak{T}$. По определению свободной алгебры e можно продолжить до гомоморфизма h из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{T}$. Тогда получим

$$h(t^{\mathfrak{F}}(a_1, \ldots, a_n)) = t^{\mathfrak{T}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)) = [t(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})];$$

$$h(s^{\mathfrak{F}}(b_1, \ldots, b_m)) = s^{\mathfrak{T}}(h(b_1), \ldots, h(b_m)) = [s(x_{b_1}, \ldots, x_{b_m})].$$

Но из равенства $t^{\mathfrak{F}}(\bar{a}) = s^{\mathfrak{F}}(\bar{b})$ следует $h(t^{\mathfrak{F}}(\bar{a})) = h(s^{\mathfrak{F}}(\bar{b}))$, то есть

$$[t(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})] = [s(x_{b_1}, \ldots, x_{b_m})].$$

Значит, слова $[t(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})]$ и $[s(x_{b_1}, \ldots, x_{b_m})]$ одинаковы, откуда сразу получаем, что $n = m$, $a_i = b_i$ для $i = 1, \ldots, n$ и $t = s$.

В обратную сторону утверждение общезначимо: из $t = s$ и $\bar{a} = \bar{b}$ всегда следует, что $t^{\mathfrak{F}}(\bar{a}) = s^{\mathfrak{F}}(\bar{b})$. □

Эрбрановский универсум является фактически является единственной свободной алгеброй с точностью до изоморфизма.

Предложение 86. *Для того, чтобы $\mathfrak{F}$ была свободной алгеброй, порождённой A, необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм $h : \mathfrak{T} \leftrightarrow \mathfrak{F}$, для которого $h(a) = a$ для всех $a \in A$.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм h из $\mathfrak{T}$ в $\mathfrak{F}$, построенный как в теореме 84 на стр. 79:

$$h([t(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})]) = t^{\mathfrak{F}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Он удовлетворяет условию $h(a) = a$, так как мы положили $[x_a] = a$. Из леммы 85 на предшествующей странице следует, что это отображение разнозначно. С другой стороны, поскольку $\mathfrak{F}$ порождена A, то все элементы $\mathfrak{F}$ имеют некоторый вид $t^{\mathfrak{F}}(a_1, \ldots, a_n)$ (предложение 37 на стр. 39), поэтому h и сюръективно. Следовательно, h — изоморфизм.

Достаточность очевидна: если гомоморфизм $g : \mathfrak{T} \to \mathfrak{B}$ продолжает $f : A \to \mathfrak{B}$, то гомоморфизм $gh^{-1} : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$ тоже продолжает f, так как $h^{-1}(a) = a$ при $a \in A$. □

Следствие 87. *Свободная алгебра, порождённая A, единственна с точностью до изоморфизма.*

Рассмотрим частный случай сигнатуры.

Пример 57. *Пусть сигнатура Σ состоит из одноместных функциональных символов f_i, $i \in I$. Рассмотрим свободную алгебру, порождённую одним элементом a. Согласно предложению 86 на предшествующей странице, можно считать, что она является эрбрановским универсумом $\mathfrak{T}$, то есть состоит из слов вида $[f_{i_1}(f_{i_2}(\ldots f_{i_n}(x_a)\ldots))]$, а операции определены так:*

$$f_i^{\mathfrak{T}}([f_{i_1}(f_{i_2}(\ldots f_{i_n}(x_a)\ldots))]) = [f_i([f_{i_1}(f_{i_2}(\ldots f_{i_n}(x_a)\ldots)))].$$

Пусть теперь F — множество всех слов в алфавите Σ. Построим алгебру $\mathfrak{F}$, определив на F операции так: $f_i^{\mathfrak{F}}(w) = f_i w$. Тогда отображение

$$h(f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_n}) = [f_{i_1}(f_{i_2}(\ldots f_{i_n}(x_a)\ldots))]$$

будет изоморфизмом $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{T}$. В самом деле, сюръективность и взаимная однозначность очевидны. Кроме того,

$$h(f_i^{\mathfrak{F}}(f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_n})) = h(f_i f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_n}) = [f_i(f_{i_1}(f_{i_2}(\ldots f_{i_n}(x_a)\ldots)))] = \\ = f_i^{\mathfrak{T}}([f_{i_1}(f_{i_2}(\ldots f_{i_n}(x_a)\ldots))]) = f_i^{\mathfrak{T}}(h(f_{i_1} f_{i_2} \ldots f_{i_n})).$$

Следовательно, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{T}$ изоморфны и $\mathfrak{F}$ — тоже свободная алгебра.

Обобщим понятие свободной алгебры.

Определение 49 (Свободная в многообразии алгебра)**.** *Пусть $\mathfrak{F}$ — алгебра из многообразия $\mathcal{M}$, $A \subseteq F$. Говорят, что $\mathfrak{F}$ — с в о б о д н а я а л г е б р а в м н о г о о б р а з и и $\mathcal{M}$, порождённая множеством A,* *если*

1) *A является множеством образующих для $\mathfrak{F}$;*
2) *для любой алгебры $\mathfrak{B}$ из $\mathcal{M}$ любое отображение $f : A \to \mathfrak{B}$ продолжается до гомоморфизма из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{B}$.*

Заметим, что ранее введённое понятие свободной алгебры является частным случаем свободной в многообразии алгебры, когда в качестве $\mathcal{M}$ берётся класс всех алгебр.

Так как алгебра $\mathfrak{F}$ порождена множеством A, то из предложения 49 на стр. 45 сразу получаем

Следствие 88. *Гомоморфизм в пункте 2 однозначно определяется по f.*

Рассмотрим несложный пример.

Пример 58. *Пусть многообразие $\mathcal{M}$ задано тождеством $f(x) = f(y)$, где f — одноместный функциональный символ. Тогда свободная в $\mathcal{M}$ алгебра $\mathfrak{A}$, порождённая множеством $X \neq \varnothing$ имеет носитель $A = X \cup \{b\}$ и при этом $f^{\mathfrak{A}}(a) = b$ для всех $a \in A$. Здесь мы полагаем, что $b \notin X$.*

Очевидно, что алгебра $\mathfrak{A}$ порождена множеством X, потому что $b = f(a)$ для $a \in X$. Если $\mathfrak{B} \in \mathcal{M}$ и задано отображение $h : X \to \mathfrak{B}$, то оно продолжается до гомоморфизма, если положить $h(b) = f^{\mathfrak{B}}(c)$ для какого-либо $c \in \mathfrak{B}$. В самом деле, $h(f^{\mathfrak{A}}(a)) = h(b) = f^{\mathfrak{B}}(h(a))$.

Мы уже видели, что все свободные алгебры изоморфны эрбрановскому универсуму и, следовательно, изоморфны между собой. Аналогичное свойство имеет место и для алгебр свободных в многообразии.

Лемма 89. *Пусть $\mathcal{M}$ — произвольное многообразие, A — любое множество. Тогда в $\mathcal{M}$ может существовать не более одной (с точностью до изоморфизма) свободной алгебры, порождённой A.*

Доказательство. Возьмём две свободные в $\mathcal{M}$ алгебры, порождённые A: $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{A}$. Пусть e' — тождественное отображение на множестве A. Тогда существуют продолжения e' до гомоморфизмов $g : \mathfrak{F} \to \mathfrak{A}$, $h : \mathfrak{A} \to \mathfrak{F}$. Поскольку $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{A}$ порождаются множеством A и $A \subseteq \operatorname{rng} g$, $A \subseteq \operatorname{rng} h$, то по предложению 52 на стр. 47 оба отображения g_A и

g являются сюръективными. Если предположить, что одно из них, например, g не разнозначно: $g(b) = g(c)$ при $b \neq c$, то hg будет сюръективным отображением $\mathfrak{F}$ в себя, причём $(hg)(b) = (hg)(c)$. Пусть e — тождественное отображение на алгебре $\mathfrak{F}$. Тогда hg и e будут различными продолжениями $e : A \to A$ до соответствующих гомоморфизмов. Это противоречит следствию 88 на предыдущей странице. □

Докажем теперь, что свободные в многообразии алгебры всегда существуют.

Теорема 90. *Пусть многообразие $\mathcal{M}$ содержит неединичные алгебры. Тогда для каждого непустого множества A существует свободная в $\mathcal{M}$ алгебра $\mathfrak{F}$, порождённая A. С точностью до изоморфизма такая алгебра единственна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}'$ — свободная алгебра, порождённая множеством A (например, эрбрановский универсум). Рассмотрим алгебру $\mathfrak{F}$ и гомоморфизм $h : \mathfrak{F}' \to \mathfrak{F}$, построенные согласно предложению 74 на стр. 69 для $\mathfrak{F}'$ и $\mathcal{M}$.

Сначала покажем, что ограничение отображения h на множество A является разнозначным. Выберем в $\mathcal{M}$ какую-нибудь бесконечную алгебру $\mathfrak{C}$ так, чтобы существовало разнозначное отображение $f' : A \to \mathfrak{C}$ (это возможно по следствию 82 на стр. 74). По определению свободной алгебры такое отображение f' можно продолжить до гомоморфизма $f : \mathfrak{F}' \to \mathfrak{C}$. Но тогда по предложению 74 на стр. 69 будет $f = gh$ для некоторого g. Если предположить, что $h(a_1) = h(a_2)$ для некоторых $a_1 \neq a_2$ из A, то мы бы получили

$$f'(a_1) = f(a_1) = g(h(a_1)) = g(h(a_2)) = f(a_2) = f'(a_2),$$

что противоречит разнозначности f'.

Таким образом, отождествив каждый элемент $a \in A$ с $h(a)$ мы можем считать, что $A \subseteq |\mathfrak{F}|$. Поскольку свободная алгебра $\mathfrak{F}'$ порождается A, то по предложению 51 на стр. 47 её образ будет порождаться $h[A]$, то есть тем же A.

Для любой алгебры $\mathfrak{B}$ и любого отображения $f : A \to \mathfrak{B}$, существует гомоморфизм f' из $\mathfrak{F}'$ в $\mathfrak{B}$, продолжающий f. Согласно предложению 74 на стр. 69 существует гомоморфизм $g : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$, для которого $f' = gh$. Так как мы считаем, что $h(a) = a$ при $a \in A$, то $f'(a) = g(a)$, и, следовательно, $g(a) = f(a)$. Значит, g является продолжением f на $\mathfrak{F}$. Единственность вытекает из леммы 89 на стр. 83. □

Одним из важнейших свойств свободных алгебр является возможность построения из них любых других.

Теорема 91. *Пусть $\mathfrak{F}$ — свободная в многообразии $\mathcal{M}$ алгебра с образующими A. Тогда любая алгебра $\mathfrak{B}$, образованная A является гомоморфным образом $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Рассмотрим тождественное отображение e на A. Тогда оно является отображением $e : A \to |\mathfrak{B}|$. По определению свободной алгебры e может быть продолжено до гомоморфизма $h : \mathfrak{F} \to \mathfrak{B}$. Так как $\mathfrak{B}$ образована множеством A, то каждый элемент $b \in |\mathfrak{B}|$ может быть представлен в виде $b = t^{\mathfrak{B}}(\bar{a})$ для некоторого терма t и $\bar{a} \in A$. Но тогда получаем

$$h(t^{\mathfrak{F}}(\bar{a})) = t^{\mathfrak{B}}(h(\bar{a})) = t^{\mathfrak{B}}(e(\bar{a})) = t^{\mathfrak{B}}(\bar{a}) = b.$$

Следовательно, h является эпиморфизмом $\mathfrak{F}$ на $\mathfrak{B}$, а $\mathfrak{B}$ — гомоморфным образом $\mathfrak{F}$. □

Задачи

126. Доказать, что в свободной алгебре любые бинарные операции некоммутативны и неассоциативны. ▼

127. Доказать, что алгебра $(\mathbb{R}, \sqrt{x^2 + 2y^2})$ несвободная для любого множества порождающих. ▼

128. Доказать, что алгебра $(\mathbb{Q}, \frac{x-y}{2})$ несвободная для любого множества порождающих. ▼

129. Доказать, что алгебра $(\mathbb{R}^+, \frac{x}{y^2})$ несвободная для любого множества порождающих. ▼

130. Доказать, что алгебра $(\mathbb{R}, xy - x)$ несвободная для любого множества порождающих. ▼

131. Пусть D — множество конечных попарно неизоморфных упорядоченных бинарных деревьев, $d_1 * d_2$ означает дерево, с некоторым корнем r, левым и правым поддеревья которого изоморфны d_1 и d_2 соответственно. Доказать, что $\mathfrak{D} = (D, *)$ — свободная алгебра сигнатуры $\{*^{(2)}\}$), порождённая элементом a (деревом, состоящим из одного корня). ▼

132. Доказать обращение леммы 85 на стр. 81. ▼

133. Доказать, любая алгебра вида $\exp\mathfrak{A}$ несвободная, если сигнатура содержит хотя бы одну операцию местности два или больше. ▼

134. Показать, что в примере 57 на стр. 82 любая подалгебра $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$ будет свободной. ▼

135. Доказать, что если $\mathfrak{F}$ — это свободная алгебра с образующими A, то в $\mathfrak{H} = \exp\mathfrak{F} \setminus \{\varnothing\}$ множество $\mathsf{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ порождает свободную алгебру. ▼

136. Пусть сигнатура имеет вид $\{f^{(1)}, e^{(0)}\}$, а многообразие $\mathcal{M}$ задано тождествами $f(f(x)) = x$ и $f(e) = e$. Построить свободную в $\mathcal{M}$ алгебру, образованную множеством A. ▼

137. Пусть сигнатура имеет вид $\{f^{(1)}, g^{(1)}\}$, а многообразие $\mathcal{M}$ задано тождеством $g(f(x)) = f(g(x))$. Построить свободную в $\mathcal{M}$ алгебру, образованную множеством $\{a\}$. ▼

138. Пусть сигнатура имеет вид $\{f^{(1)}, g^{(1)}\}$, а многообразие $\mathcal{M}$ задано тождествами $g(f(x)) = x$ и $f(g(x)) = x$. Построить свободную в $\mathcal{M}$ алгебру, образованную множеством $\{a\}$. ▼

139. Показать, что без условия «алгебра $\mathfrak{B}$ образована множеством A» теорема 91 на предшествующей странице неверна. ▼

§ 4.4. Копроизведения

При изучении декартовых произведений мы видели, что их можно охарактеризовать в терминах морфизмов (предложение 71 на стр. 61): любой гомоморфизм из произвольной алгебры $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ обязательно «проходит» через их произведение. Если «развернуть стрелки» в обратную сторону, то получим двойственное понятие.

Определение 50 (Копроизведение)**.** *Пусть $\mathcal{M}$ — некоторый класс алгебр, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — алгебры (не обязательно из $\mathcal{M}$). Алгебра $\mathfrak{C} \in \mathcal{M}$ называется* к о п р о и з в е д е н и е м *$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в классе $\mathcal{M}$ (а алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ —* к о м н о ж и т е л я м и*), если*

1) *существуют гомоморфизмы $h_A : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ и $h_B : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$;*

2) *для любой алгебры $\mathfrak{D}$ и любых гомоморфизмов $f_A : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ и $f_B : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ существует и единственный гомоморфизм $g : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, для которого $f_A = gh_A$ и $f_B = gh_B$. Другими словами, существует единственный гомоморфизм g делающий*

следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{A} \arrow[dl, "h_A"'] \arrow[dr, "f_A"] & \\
\mathfrak{C} \arrow[rr, "g"'] & & \mathfrak{D} \\
& \mathfrak{B} \arrow[ul, "h_B"] \arrow[ur, "f_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Копроизведение $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *в* $\mathcal{M}$ *обозначается* $\mathfrak{A}\overset{\mathcal{M}}{\coprod}\mathfrak{B}$ *(или просто* $\mathfrak{A}\coprod\mathfrak{B}$*, если класс* $\mathcal{M}$ *понятен из контекста).*

Если гомоморфизмы h_A *и* h_B *определены неоднозначно и их выбор существенен, то их также включают в определение, называя копроизведением тройку* $(\mathfrak{C}, h_A, h_B)$.

В некоторых случаях копроизведения имеют специальные названия. Например, для групп их называют свободными произведениями, а для абелевых групп — прямыми суммами.

Проиллюстрируем понятие копроизведения, рассмотрев несколько примеров.

Пример 59. *Пусть сигнатура пуста, а класс* $\mathcal{M}$ *состоит из всех непустых множеств, без каких-либо операций в них.*

Рассмотрим любые два таких множества A *и* B*. Выберем равномощное* A *множество* A'*, которое не пересевалось бы с* B*. Пусть функция* $h_A : A \leftrightarrow \leftrightarrow A'$ *взаимно-однозначно отображает* A *на* A'*. Положим* $C = B \cup A'$*, в качестве* h_B *возьмём тождественную функцию на* B*:* $h_B = e_B$*. Покажем, эта конструкция даст копроизведение* A *и* B*.*

Пусть даны два отображения $f_A : A \to D$ *и* $f_B : B \to D$*. Определим* $g : C \to D$ *следующим образом:* $g(a') = f_A(h_A^{-1}(a'))$ *при* $a' \in A'$, $g(b) = f_B(b)$ *при* $b \in B$*. Напомним, что мы специально выбрали* A' *так, чтобы оно не пересекалось с* B*, поэтому такое определение однозначно.*

Тогда для $a \in A$ *мы получаем следующее. Пусть* $a' = h_A(A)$*, тогда* $a = h_A^{-1}(a')$ *и* $(gh_A)(a) = g(h_A(a)) = g(a') = f_A(h_A^{-1}(a')) = f_A(a)$*. Для* $b \in B$

ещё проще: $(gh_B)(b) = g(h_B(b)) = g(e_B(b)) = g(b) = f_B(b)$. *Следовательно, мы показали, что* $f_A = gh_A$ *и* $f_B = gh_B$.

Осталось доказать единственность такого g. *Предположим, существует* g' *обладающий такими же свойствами:* $f_A = g'h_A$ *и* $f_B = g'h_B$ *и отличающийся от* g. *Пусть, например,* $g(a') \neq g'(a')$ *для некоторого* $a' \in A'$ *и* $a' = h_A(a)$. *Тогда получим* $(g'h_A)(a) = g'(a') \neq g(a') = f_A(h_A^{-1}(a')) = f_A(a)$, *то есть не выполняется требование* $f_A = g'h_A$. *Аналогично рассматривается случай, когда* $g(b) \neq g'(b)$ *для некоторого* $b \in B$.

Заметим, что понятие копроизведение задано с точностью до изоморфизма комножителей и результата, поэтому мы сразу бы могли предположить, что A и B не пересекаются (отождествив A' и A). Тогда было бы $h_A = e_A$ и $g(a) = f_A(a)$ для $a \in A$.

Пример 60. *Пусть теперь сигнатура содержит два символа: унарный минус и константу* 0, *а класс* $\mathcal{M}$ *является многообразием, заданным тождествами* $-0 = 0$ *и* $-(-x) = x$. *Например, алгебра целых чисел* $(\mathbb{Z}, -, 0)$ *будет в такое многообразие входить. Другой пример алгебры из* $\mathcal{M}$: *алгебра* $(\mathbb{Q}^{\pm}, {}^1/x, 1)$, *где* $\mathbb{Q}^{\pm}$ *— множество ненулевых рациональных чисел.*

Рассмотрим две алгебры $\mathfrak{A} = (A, -, 0)$ *и* $\mathfrak{B} = (B, -, 0)$ *из* $\mathcal{M}$. *Будем считать, что* 0 *является единственным общим элементом* A *и* B. *Покажем, что в этом случае копроизведением будет алгебра* $\mathfrak{C} = (C, -, 0)$, *где* $C = A \cup B$, *а операция* $-$ *определена как в* $\mathfrak{A}$ *на элементах* A *и как в* $\mathfrak{B}$ *на элементах* B. *Поскольку единственным общим элементом является* 0, *а для него выполнено* $0 = -0$, *то противоречий не возникает. Положим* $h_A = e_A$, $h_B = e_B$ *— тождественные отображения.*

Пусть $f_A : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ *и* $f_B : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$ *— произвольные гомоморфизмы, где* $\mathfrak{D} = (D, -, 0_D) \in \mathcal{M}$. *Заметим, что обязательно должно быть* $-0_D = 0_D$, *так как* $\mathfrak{D} \in \mathcal{M}$, *и* $f_A(0) = f_B(0) =)_D$. *Определим* g *так:* $g(a) = f_A(a)$ *при* $a \in A$ *и* $g(b) = f_B(b)$ *при* $b \in B$. *Тогда тривиально выполнено*

$$(gh_A)(a) = g(h_A(a)) = g(e_A(a)) = g(a) = f_A(a)$$

для $a \in A$ *и*

$$(gh_B)(b) = g(h_B(b)) = g(e_B(b)) = g(b) = f_B(b)$$

для $b \in B$.

Единственность отображения g *доказывается так же, как и в предыдущем примере.*

Отметим несколько свойств копроизведений. Во-первых, оно порождается образами комножителей.

Предложение 92. *Пусть* $(\mathfrak{C}, h_A, h_B)$ *— копроизведение алгебр* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *в классе* $\mathcal{M}$. *Тогда алгебра* $\mathfrak{C}$ *порождена множеством* $h_A[\mathfrak{A}] \cup h_B[\mathfrak{B}]$.

Доказательство. Предположим, что множество $h_A[\mathfrak{A}] \cup h_B[\mathfrak{B}]$ порождает в $\mathfrak{C}$ некоторую подалгебру $\mathfrak{D}$, которая не совпадает с $\mathfrak{C}$. Тогда h_A и h_B одновременно будут и гомоморфизмами в $\mathfrak{D}$ из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ соответственно. По определению копроизведения найдётся такой гомоморфизм $g : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, что $h_A = gh_A$ и $h_B = gh_B$. Этот гомоморфизм g будет одновременно и гомоморфизмом $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{C}$. С другой стороны, тождественное отображение e тоже является гомоморфизмом $\mathfrak{C}$ в $\mathfrak{C}$, причём для него тоже выполнено $h_A = eh_A$ и $h_B = eh_B$. Кроме того, e не совпадает с g, поскольку областью значений e является вся алгебра $\mathfrak{C}$, а g — собственная её подалгебра. Но это противоречит единственности:

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{A} \arrow[dl, "h_A"'] \arrow[dr, "h_A"] & \\
\mathfrak{C} & & \mathfrak{C} \arrow[ll, bend right, "g"'] \arrow[ll, bend left, "e"] \\
& \mathfrak{B} \arrow[ul, "h_B"] \arrow[ur, "h_B"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Второе, что мы докажем, это единственность копроизведения.

Теорема 93. *Любые два копроизведения алгебр* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *в классе* $\mathcal{M}$ *изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим два копроизведения алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в классе $\mathcal{M}$: $(\mathfrak{C}, h_A, h_B)$ и $(\mathfrak{D}, f_A, f_B)$. По определению копроизведения существует единственный гомоморфизм $g : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, для которого

$f_A = gh_A$ и $f_B = gh_B$, то есть коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{A} \arrow[dl, "h_A"'] \arrow[dr, "f_A"] & \\
\mathfrak{C} \arrow[rr, "g"] & & \mathfrak{D} \\
& \mathfrak{B} \arrow[ul, "h_B"] \arrow[ur, "f_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Из этого следует, что $f_A[\mathfrak{A}] = g[h_A[\mathfrak{A}]]$ и $f_B[\mathfrak{B}] = g[h_B[\mathfrak{B}]]$, то есть $f_A[\mathfrak{A}]$ является образом $h_A[\mathfrak{A}]$, а $f_B[\mathfrak{B}]$ — образом $h_B[\mathfrak{B}]$. Согласно предложению 92 на предшествующей странице алгебра $\mathfrak{D}$ порождается множествами $f_A[\mathfrak{A}]$ и $f_B[\mathfrak{B}]$, по предложению 52 на стр. 47 получаем, что $\mathfrak{D}$ является образом g, то есть g сюръективно.

Предположим, что g не разнозначно: $g(c_1) = g(c_2)$ при $c_1 \neq c_2$. Аналогично рассуждая в обратную сторону, можно найти $g' : \mathfrak{D} \to \mathfrak{C}$, для которого $h_A = g' f_A$ и $h_B = g' f_B$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{A} \arrow[dl, "h_A"'] \arrow[dr, "f_A"] & \\
\mathfrak{C} & & \mathfrak{D} \arrow[ll, "g'"'] \\
& \mathfrak{B} \arrow[ul, "h_B"] \arrow[ur, "f_B"'] &
\end{tikzcd}$$

Тогда отображение $g'g : \mathfrak{C} \to \mathfrak{C}$ тоже не будет разнозначным, в частности, будет отличаться от тождественного. Но тогда, как и в доказательстве предложения 92 на предшествующей странице мы получим, что для $\mathfrak{C}$ нарушается условие единственности:

$$\begin{tikzcd}
& \mathfrak{A} \arrow[dl, "h_A"'] \arrow[dr, "h_A"] & \\
\mathfrak{C} & & \mathfrak{C} \arrow[ll, bend right=10, "g'g"'] \arrow[ll, bend left=10, "e"] \\
& \mathfrak{B} \arrow[ul, "h_B"] \arrow[ur, "h_B"'] &
\end{tikzcd}$$

что противоречит определению копроизведения. □

Используя эти утверждения легко показать, что не для каждого класса $\mathcal{M}$ копроизведения существуют.

Пример 61. *Возьмём в качестве $\mathcal{M}$ класс всех неединичных алгебр и сигнатуру, состоящую из трёх констант c, d, e. Пусть алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ состоят из двух элементов каждая и выполнено*

$$c^{\mathfrak{A}} = d^{\mathfrak{A}} \neq e^{\mathfrak{A}}, \quad c^{\mathfrak{B}} \neq d^{\mathfrak{B}} = e^{\mathfrak{B}}.$$

Допустим, что существует копроизведение $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \overset{\mathcal{M}}{\coprod} \mathfrak{B}$. Тогда $c^{\mathfrak{C}} = d^{\mathfrak{C}} = e^{\mathfrak{C}}$. Поскольку $\mathfrak{C} \in \mathcal{M}$, то $\mathfrak{C}$ должна содержать ещё какой-то элемент, например, a. Но тогда алгебра $\mathfrak{C}$ не порождена $h_A[\mathfrak{A}]$ и $h_B[\mathfrak{B}]$, что противоречит предложению 92 на стр. 89.

Тем не менее, если класс $\mathcal{M}$ является многообразием, то в нём копроизведения существуют всегда.

Теорема 94. *Для любого многообразия $\mathcal{M}$ и любых алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ существует копроизведение $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Без ограничения общности мы будем считать, что алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не имеют общих элементов. Обогатим сигнатуру Σ до сигнатуры Σ', включив в Σ' новые символы констант c_a и c_b для каждого $a \in \mathfrak{A}$ и $b \in \mathfrak{B}$ соответственно. Так как носители алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не пересекаются, то все c_a отличаются от всех c_b. Пусть X — множество тождеств, определяющих многообразие $\mathcal{M}$. Построим X', добавив к X всевозможные тождества вида $c_a = f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$, если выполнено $a = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$, и вида $c_b = f(c_{b_1}, \ldots, c_{b_n})$, если $b = f^{\mathfrak{B}}(b_1, \ldots, b_n)$, для каждых $a, a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$, $b, b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{B}$ и всех n-местных символов $f \in \Sigma$. Тогда X' — это множество тождеств в сигнатуре Σ', с помощью $\mathcal{M}'$ обозначим определяемое им многообразие.

Построим свободную алгебру $\mathfrak{F}$ в многообразии $\mathcal{M}'$, порождённую пустым множеством. Это допустимо, так как Σ' имеет символы констант. Порождённость $\mathfrak{F}$ пустым множеством означает, что для любой алгебры $\mathfrak{C} \in \mathcal{M}'$ любое отображение из пустого множества в $\mathfrak{C}$ продолжается до гомоморфизма $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{C}$ и при том единственным способом. Заметим, что поскольку $\mathfrak{F} \in \mathcal{M}'$ и $X \subseteq X'$, то все тождества из X в $\mathfrak{F}$ выполнены, то есть $\mathfrak{F} \in \mathcal{M}$.

Покажем, что $\mathfrak{F}$ является копроизведением $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в $\mathcal{M}$.

Определим два отображения из алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{F}$ соответственно: $h_A : a \mapsto c_A^{\mathfrak{F}}$ и $h_B : b \mapsto c_B^{\mathfrak{F}}$. Покажем, что h_A и h_B будут гомоморфизмами. В самом деле, если выполнено $a = f(a_1, \ldots, a_n)$, то $c_a = f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \in X'$, поэтому $c_a^{\mathfrak{F}} = f^{\mathfrak{F}}(c_{a_1}^{\mathfrak{F}}, \ldots, c_{a_n}^{\mathfrak{F}})$, то есть $h_A(a) = f^{\mathfrak{F}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$. Доказательство для h_B аналогично.

Рассмотрим теперь произвольную алгебру $\mathfrak{D} \in \mathcal{M}$ и пару гомоморфизмов $f_A : \mathfrak{A} \to \mathfrak{D}$ и $f_B : \mathfrak{B} \to \mathfrak{D}$. Обогатим алгебру $\mathfrak{D}$ до $\mathfrak{D}'$, проинтерпретировав в ней символы констант c_a и c_b согласно значениям функций f_A и f_B: $c_a^{\mathfrak{D}'} = f_A(a)$, $c_b^{\mathfrak{D}'} = f_B(b)$ для всех $a \in \mathfrak{A}$ и $b \in \mathfrak{B}$. Покажем, что алгебра $\mathfrak{D}'$ принадлежит многообразию $\mathcal{M}'$. Равенства из X в $\mathfrak{D}'$ выполняются, потому что они были выполнены в алгебре $\mathfrak{D} \in \mathcal{M}$. Рассмотрим любое новое тождество из X', которое должно иметь вид $c_A = f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$. Его наличие в X' означает, что $a = f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. Но тогда

$$
\begin{aligned}
c_a^{\mathfrak{D}'} = f_A(a) = f_A(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = \\
= f^{\mathfrak{D}}(f_A(a_1), \ldots, f_A(a_n)) = f^{\mathfrak{D}}(c_{a_1}^{\mathfrak{D}'}, \ldots, c_{a_n}^{\mathfrak{D}'}).
\end{aligned}
$$

Аналогично проверяются тождества вида $c_b = f(c_{b_1}, \ldots, c_{b_n})$.

Итак, $\mathfrak{D}' \in \mathcal{M}'$, но тогда существует единственный гомоморфизм g из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{D}'$. Для любого $a \in \mathfrak{A}$ мы получим

$$f_A(a) = c_a^{\mathfrak{D}'} = g(c_a^{\mathfrak{F}}) = g(h_A(a)),$$

что и означает $f_A = gh_A$. Аналогично проверяется $f_B = gh_B$. $\square$

Понятие копроизведения можно обобщить на произвольное число комножителей.

Определение 51 (Копроизведение)**.** *Пусть $\mathcal{M}$ — некоторый класс алгебр, $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$ — алгебры (не обязательно из $\mathcal{M}$). Алгебра $\mathfrak{C} \in \mathcal{M}$ называется копроизведением $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$ в классе $\mathcal{M}$ (обозначаем $\coprod\limits_{i\in I}^{\mathcal{M}} \mathfrak{A}_i$), если*

1) *существуют гомоморфизмы $h_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{C}$ для $i \in I$;*
2) *для любой алгебры $\mathfrak{D}$ и любых гомоморфизмов $f_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{D}$, $i \in I$, существует и единственный гомоморфизм $g : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, для которого $f_i = gh_i$ для $i \in I$.*

Для произвольного числа комножителей также выполнены аналоги утверждений с 92 по 94 на стр. 89–91. Доказательства этих утверждений ничем принципиально не отличаются от случая копроизведения двух комножителей.

Рассмотрим более сложный пример.

Пример 62. *Пусть многообразие $\mathcal{M}$ в сигнатуре $\{*^{(2)}\}$ задано тождествами:*

$$x * y = y * z, \quad x * (y * z) = (x * y) * z, \quad x * x = x. \tag{6}$$

Примерами операций, которые удовлетворяют этим равенствам являются пересечение и объединение множеств, НОК *и* НОД *натуральных чисел, нахождение максимума и минимума двух чисел и т.д.*

Пусть $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$ — единичная алгебра с одним элементом a_i. Считаем, что все a_i попарно различны. Найдём копроизведение $\coprod\limits_{i\in I}^{\mathcal{M}} \mathfrak{A}_i$.

Согласно теореме 94 на стр. 91 нам будет достаточно взять свободную алгебру в многообразии, заданном тождествами (6), а также $a_i * a_i = a_i$ (для удобства будем писать a_i вместо c_{a_i}). Однако $a_i * a_i = a_i$ — это частный *случай тождества $x * x = x$, поэтому такие тождества можно в расчёт не брать.*

Итак, нам нужно просто построить свободную в $\mathcal{M}$ алгебру $\mathfrak{F}$, образованную множеством $A = \{a_i : i \in I\}$. Для этого рассмотрим любой терм вида $t(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$, где $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n} \in A$. Благодаря тождествам (6) этот терм можно преобразовать к виду $a_{i_1} * \cdots * a_{i_n}$, затем к

$$(a'_{i_1} * \cdots a'_{i_1}) * \cdots * (a'_{i_m} \cdots * a'_{i_m})$$

и, наконец, к $a'_{i_m} * \cdots * a'_{i_m}$ где все a'_i попарно различны.

Таким образом, мы получили, что значение терма $t(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$ однозначно задаётся конечным множеством $\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq I$ (при условии, что все $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ обязательно входят в $t(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n})$). Тогда значение терма $t(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) * s(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k})$ задаётся множеством $\{i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m\}$. Иными словами, алгебра $\mathfrak{F}$ изоморфна множеству непустых конечных подмножеств I с операцией объединения.

Пример 63. *Рассмотрим то же самое многообразие $\mathcal{M}$, что и в предыдущем примере, но в качестве комножителей возьмём алгебры $\mathfrak{A}_i = (\omega, \max)$, $i \in \omega$. Для удобства будем полагать, что носители $\mathfrak{A}_i$ попарно не пересекаются, то есть $\mathfrak{A}_i = (\omega_i, \max)$, где ω_i — i-ая копия множества натуральных чисел:*

$$\omega_i = \{a^i_j : j \in \omega\}.$$

Согласно таким же рассуждениям, нам потребуется построить образованную объединением всех ω_i свободную алгебру $\mathfrak{F}$ в многообразии, заданном тождествами (6), а также

$$a^i_u * a^i_v = a^i_{\max(u,v)}. \tag{7}$$

Такими же как в предыдущем примере рассуждениями показывается, что произвольный терм $t(\bar{a})$ приводится к виду

$$(a^i_{u^i_1} * \cdots a^i_{u^i_k}) * \cdots * (a^\ell_{u^\ell_1} \cdots * a^\ell_{u^\ell_m}).$$

Учитывая (7), получим

$$a^i_{u^i_1} * \cdots * a^\ell_{u^\ell_1},$$

если считать, что $a^i_{u^i_j}$ упорядочены по убыванию для каждого i. Таким образом, чтобы однозначно задать значение $t(\bar{a})$ мы должны среди всех *элементов $\bar{a}$, принадлежащих одному и тому же ω_i, выбрать наибольший — $a^i_{j_i}$, а затем составить множество из полученных $a^i_{j_i}$.*

Чтобы придать единообразие этому описанию, можно сказать, что каждый элемент $\mathfrak{F}$ задаётся последовательностью натуральных чисел $\{a^i_{j_i}\}_{i\in\omega}$, в которой только конечное число элементов отлично от нуля.

При таком задании элементов $\mathfrak{F}$ операция $*$ определяется следующим способом:

$$\{a^i_{j_i}\}_{i\in\omega} * \{a^i_{j'_i}\}_{i\in\omega} = \{a^i_{\max(j_i,j'_i)}\}_{i\in\omega}.$$

Чтобы придать описанию алгебры $\mathfrak{F}$ более знакомый вид, обозначим при помощи p_i i-ое по порядку простое число ($p_0 = 2$, $p_1 = 3$ и т.д.) и рассмотрим отображение

$$h : \{a^i_{j_i}\}_{i\in\omega} \mapsto \prod_{i\in\omega} p_i^{j_i}.$$

Поскольку только конечное число $a^i_{j_i}$ отлично от нуля, то в правом произведении только конечное число сомножителей отличаются от единицы, следовательно, произведение однозначно определено. Так как каждое положительное натуральное число однозначно разлагается на простые множители, то функция h взаимно однозначно отображает носитель $\mathfrak{F}$ на множество $\mathbb{Z}^+$. Операция $*$ при таком отображении превращается в НОК*:*

$$\text{НОК}(p_1^{j_1}\dots p_n^{j_n}, p_1^{j'_1}\dots p_n^{j'_n}) = p_1^{\max(j_1,j'_1)}\dots p_n^{\max(j_1,j'_1)}.$$

Таким образом, можно считать, что $\coprod\limits_{i\in\omega}^{\mathcal{M}}(\omega,\max) = (\mathbb{Z}^+, \text{НОК})$.

Заметим, что копроизведение свободных (в многообразии) алгебр снова будет свободной (в многообразии) алгеброй.

Теорема 95. *Пусть $\mathcal{M}$ — многообразие, $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$ — свободные в $\mathcal{M}$ алгебры, порождённые попарно непересекающимися множествами A_i соответственно. Тогда копроизведение $\coprod\limits_{i\in I}^{\mathcal{M}}\mathfrak{A}_i$ изоморфно свободной в $\mathcal{M}$ алгебре $\mathfrak{C}$, образованной $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$.*

Доказательство. Пусть e_i — тождественное отображение на множестве A_i. Так как $\mathfrak{A}_i$ — свободная в $\mathcal{M}$ алгебра, порождённая A_i, $\mathfrak{C} \in \mathcal{M}$ и $A_i \subseteq \mathfrak{C}$, то отображение $e_i : A_i \to A_i$ продолжается до некоторого гомоморфизма $h_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{C}$. Таким образом, пункт 1) из определения копроизведения будет выполнен.

Покажем, что выполнено свойство 2) определения. Пусть даны $f_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{D}$ — произвольные гомоморфизмы, $\mathfrak{D} \in \mathcal{M}$. Определим отображение $g' : \bigcup\limits_{i \in I} A_i \to \mathfrak{D}$ так, чтобы

$$g'(a_i) = f_i(a_i) \tag{8}$$

для произвольных $a_i \in A_i$. Так как A_i попарно не пересекаются, то такое определение непротиворечиво. Поскольку $\mathfrak{C}$ — свободная в $\mathcal{M}$ алгебра, порождённая $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$, и $\mathfrak{D} \in \mathcal{M}$, то существует гомоморфизм $g : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, продолжающий g'. Выберем произвольный $a_i \in \mathfrak{A}_i$, тогда $a_i = t^{\mathfrak{A}_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n)$ для некоторых $a_i^1, \ldots, a_i^n \in A_i$ и терма t. Далее получаем

$$\begin{aligned} f_i(a_i) = f_i(t^{\mathfrak{A}_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n)) = t^{\mathfrak{D}}(f_i(a_i^1), \ldots, f_i(a_i^n)) = \\ = t^{\mathfrak{D}}(g'(a_i^1), \ldots, g'(a_i^n)) = t^{\mathfrak{D}}(g(a_i^1), \ldots, g(a_i^n)) = \\ = g(t^{\mathfrak{C}}(a_i^1, \ldots, a_i^n) = g(t^{\mathfrak{C}}(e_i(a_i^1), \ldots, e^A(a_i^n)) = \\ = g(t^{\mathfrak{C}}(h_i(a_i^1), \ldots, h_i(a_i^n)) = g(h_i(t^{\mathfrak{A}_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n)) = g(h_i(a_i)), \end{aligned}$$

то есть $f_i = gh_i$.

Осталось показать, что такое g единственно. Но это следует из того, что $\mathfrak{C}$ порождается $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$: условие (8) для g должно выполняться в любом случае, а продолжение g строится по g' единственным способом (предложение 49 на стр. 45). □

Последнее утверждение даёт описание свободных алгебр.

Следствие 96. *Свободная в многообразии $\mathcal{M}$ алгебра с образующими A изоморфна копроизведению $|A|$ циклических свободных алгебр из $\mathcal{M}$.*

Доказательство. Применим теорему 95 на предшествующей странице к циклическим алгебрам, порождённым множествами $\{a\}$ для $a \in A$. □

Задачи

140. Доказать, что копроизведение единичных алгебр снова будет единичной алгеброй в любом многообразии, если сигнатура содержит константы. ▼

141. Показать, что без констант предыдущее неверно. ▼

142. Показать, что копроизведение бесконечных алгебр может быть конечным. ▼

143. Пусть $f_i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{B}_i$ — эпиморфизмы, $i \in I$. Доказать, что $\mathfrak{D} = \coprod\limits_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ является гомоморфным образом $\mathfrak{C} = \coprod\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$. ▼

144. Показать, что если класс $\mathcal{M}$ не замкнут относительно гомоморфизмов или прямых произведений, то в $\mathcal{M}$ копроизведения могут не существовать. ▼

145. Многообразие $\mathcal{M}$ сигнатуры $\{f^{(1)}, g^{(1)}\}$ задано тождеством $f(x) = g(y)$. Найти $\mathfrak{A} \coprod\limits^{\mathcal{M}} \mathfrak{B}$. ▼

146. Пусть сигнатура содержит хотя бы одну константу, $\mathfrak{F}$ — свободная в многообразии $\mathcal{M}$ алгебра, образованная пустым множеством, $\mathfrak{A} \in \mathcal{M}$. Доказать, что $\mathfrak{A} \coprod\limits^{\mathcal{M}} \mathfrak{F} \simeq \mathfrak{A}$. ▼

147. Показать, что копроизведение подалгебр может не вкладываться в копроизведение алгебр. ▼

148. Показать, что алгебра $\mathfrak{A}$ из многообразия $\mathcal{M}$ может не вкладываться в $\mathfrak{A} \coprod\limits^{\mathcal{M}} \mathfrak{B}$. ▼

149. Показать, что в условиях предыдущей задачи вложимость $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A} \coprod\limits^{\mathcal{M}} \mathfrak{B}$ имеет место, если существует гомоморфизм $f : \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$. ▼

Ответы и решения

4. $f(x) = [x/3] + (x+1) \bmod 3$. **5.** Функция f на ω^2: $f(x,y) = (x, [y/x] + (y+1) \bmod x)$. **6.** Если f сильно циклическая, то $N = n$. Обратно: полагаем $n = N!$, тогда $f^n(x) = f^{N!}(x) = f^{n_x \times N!/n_x}(x) = e^{N!/n_x}(x) = x$. **7.** Функция f сильно циклическая: $f^m(x) = x$ для всех $x \in A$. Пусть $f(x) \neq x$ для некоторого x выберем наименьшее k, для которого $f^k(x) = x$. Очевидно, $k \leqslant n$, поэтому НОД$\{k, m\} = 1$. Тогда $ak + bm = 1 + ckm$ для некоторых положительных a, b, c. Следовательно, $x = f^{ak+bm}(x) = f^{1+ckm}(x) = f(x)$. **8.** Пусть $A = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ и $f(x) = (x+1) \bmod n$. Возьмём $m = n$. **9.** Индукция по i. $A_1 = f(A) \subseteq A$ — очевидно. $A_{i+2} = f(A_{i+1}) \subseteq f(A_i) = A_{i+1}$. **10.** Пусть $x \in A^*$, тогда $x \in A_i$ для всех i. Пусть $f(y) = x$. Из $x \in A_{i+1}$ следует, что $y \in A_i$, то есть $y \in A_i$ для всех i. Значит, $y \in A^*$. Рассмотреть пример функции на $\mathbb{Z}$: $f(x) = x - 1$ при $x \leqslant 0$, $f(x^2) = 0$ при $x \neq 0$ и $f(x) = x + 1$ в остальных случаях. **11.** 16 функций. **13.** Все коммутативны, ассоциативны а), б). **14.** Все коммутативны и ассоциативны. **15.** $(2n+1) \times (2m+1) = 2(2nm + n + m) + 1 \in O$, $2n \times 2m = 4nm \in E$, $2n \times (2m+1) = 2(n(2m+1)) \in E$. **16.** $\mathbb{R}_{\geqslant xy}$, если $x, y \geqslant 0$, иначе $\mathbb{R}$. **17.** Включения слева направо сразу следуют из свойств сложения и умножения. Пусть $z \in (x+y) + n\mathbb{Z}$, то есть $z = x + y + ni$. Тогда $z = (x + n \cdot 0) + (y + ni)$, где $x + n \cdot 0 \in x + n\mathbb{Z}$ и $y + n \cdot i \in y + n\mathbb{Z}$. Пусть $n = 7$, тогда $(2+7\mathbb{Z}) \cdot (2+7\mathbb{Z}) \subseteq 4 + 7\mathbb{Z}$. С другой стороны $11 \in 4 + 7\mathbb{Z}$, но простое число 11 нельзя получить как произведение чисел из множества $2 + 7\mathbb{Z}$, так как $2 + 7\mathbb{Z}$ не содержит ± 1. **18.** $\mathbb{M}_n^d + \mathbb{M}_n^c$ — множество всех матриц, $\mathbb{M}_n^d \times \mathbb{M}_n^c$ — множество матриц с определителем cd. **19.** $\mathbb{E}_d^n + \mathbb{E}_c^n$ — шар радиуса $c + d$, $\mathbb{E}_d^3 \times \mathbb{E}_c^3$ — шар радиуса cd. **20.** Рассмотреть всевозможные способы разбиения на классы эквивалентности: $1+1+1+1+1 = 2+1+1+1 = 2+2+1 = 3+1+1 = 3+2 = 4+1 = 5$, найти количество вариантов для каждого случая: $1 + C_5^2 + C_5^2 C_3^2 + C_5^3 + C_5^3 + C_5^4 + 1$. **21.** а) множество слов одной длины; в) множество слов, содержащих одно и тоже количество вхождений букв a; г) множество слов, содержащих одно и тоже количество вхождений каждой из букв a, b, c. **22.** При $n = 0$ получаем $x = y = a_0$ и $E^*(x, x)$. Если $E^*(x, y)$ и $E^*(y, z)$, то существуют $a_0, \ldots, a_n$ и $b_0, \ldots, b_m$, для которых $a_0 = x$, $a_n = y$, $b_0 = y$, $b_m = z$, $E(a_i, a_{i+1})$ для $i = 0, \ldots, n-1$ и $E(b_i, b_{i+1})$ для $i = 0, \ldots, m-1$. Но тогда последовательность

$x = a_0, \ldots, a_n = b_0, \ldots, b_m = z$ тоже удовлетворяет этим условиям, поэтому $E^*(x, z)$. **23.** Пусть $R \supseteq E$ рефлексивно и транзитивно. Для доказательства $E^* \subseteq R$ используем индукцию по n из предыдущей задачи. При $n = 0$ получаем $(x, x) \in R$ в силу рефлексивности. При $n = 1$ из $(x, y) \in E^*$ получаем $(x, y) \in E \subseteq R$, то есть $(x, y) \in R$. Пусть $n \geqslant 2$ и для $n - 1$ доказано. Тогда $(x, y) \in E^*$ означает $(x, a_{n-1}) \in E^*$ и $(a_{n-1}, y) \in E$. По индукционному предположению $(x, a_{n-1}) \in R$ и $(a_{n-1}, y) \in R$. Из транзитивности получаем $(x, y) \in R$. **24.** Использовать индукцию по n аналогично задаче 23. **25.** Если $(a, a) \in R$, то $(a, a) \in R^{-1}$. Если (a, b) и (b, a) (не) принадлежат R одновременно, то (b, a) и (a, a) (не) принадлежат R^{-1} одновременно. Если $(a, b), (b, c) \in R^{-1}$, то $(b, a), (c, b) \in R$, из транзитивности R получаем $(c, a) \in R$, поэтому $(a, c) \in R^{-1}$. **26.** Отношение Q симметрично. Из задач 22 и 24 получаем, что Q^* будет рефлексивным, симметричным и транзитивным, то есть отношением эквивалентности. **27.** Пусть E — отношение эквивалентности, включающее R. Так как E симметрично и $R \subseteq E$, то $R^{-1} \subseteq E$, поэтому $Q = R \cup R^{-1} \subseteq E$. Так как E рефлексивно и транзитивно, а также $Q \subseteq E$, то из задачи 23 получаем $Q^* \subseteq E$. **28.** а), в), г) — сами отношения. б) $x = w^n$ и $y = w^m$ для одного и того же w. д, е, ж) Всюду истинное отношение. **29.** Если $E_1 \subseteq E_2$, то из $b \in \hat{a}$ получаем $E_1(b, a)$, следовательно, $E_2(b, a)$ и $b \in \tilde{a}$. Значит, $\hat{a} \subseteq \tilde{a}$. Пусть теперь $\hat{a} \subseteq \tilde{a}$ для всех $a \in A$ и $E_1(b, c)$. Тогда $b \in \hat{c} \subseteq \tilde{c}$, что означает $b \in \tilde{c}$ и $E_2(b, c)$. Значит, $E_1 \subseteq E_2$. **30.** а) $+(!(-(x, 1)), 1)$; б) $\times(!(x), !(+(x, y)))$; в) $-(\surd(+(\times(x, y), x)), 1)$; г) $\times(!(+(\surd(x), y)), -(x, y))$; д) $\times(+(x, 1), \surd(+(-(!(y)), !(x)), !(\times(x, y))))$. **31.** $V^{(2)}$: $V(f, x) = y$ означает $f(x) = y$, $\prime^{(1)}$ — взятие производной, $\int^{(3)}$ — определённый интеграл: $\int(f, a, b) = c$, если $\int_a^b f(x)\,dx = c$, $-^{(2)}$ — вычитание. **32.** 0 вхождений — 1 терм: x, 1 вхождение — 4 терма: c, $f(x)$, $g(x, x)$, 2 вхождения — 9 термов (в предыдущих заменяем один из x на эти же термы), 3 вхождения — заменяем в $f(x)$ переменную на терм с двумя символами (9 термов), заменяем в $g(x, x)$ один из x на терм с двумя символами (18 термов) или оба x на термы с одним символом (9 термов). **33.** $g_{i_1}(g_{i_2}(\ldots g_{i_k}(x)))$ — n^k термов, $g_{i_1}(g_{i_2}(\ldots g_{i_{k-1}}(c_j)))$ — mn^{k-1} термов. **34.** Если $t = x$, то $r = s$ — терм. Если $t = y$ — переменная, отличная от x, то $r = y$ — терм. Если $t = c$ — константа, то $r = c$ — терм. Если $t = f(t_1, \ldots, t_n)$, то $r = f(r_1, \ldots, r_n)$, где каждый r_i получен из t_i заменой некоторых вхождений x на s. По индукционному предположению r_i являются термами, поэтому и r является. **35.** Индукция по $|w|$ — длине слова w. Если $|w| = 1$, то либо $w = c$ — константа, либо $w = x$ — переменная. В любом случае $n = 1$ и $t_1 = w$. Пусть $|w| > 1$. Если первым символом w является переменная x: $w = xw'$, то $t_1 = x$. Так как $|w'| < |w|$, то по индукционному предположению по w' однозначно восстанавливаются $t_2, \ldots, t_n$ (и их количество). Если первым символом w является константа, рассуждения аналогичны. Если первым символом w является символ m-местной операции f: $w = fw'$, то $t_1 = f(s_1, \ldots, s_m)$. По индукционному предположению по w' можно однозначно восстановить термы $s_1, \ldots, s_m, t_2, \ldots, t_n$. **36.** Ассоциативна, но не коммутативна. **37.** Не ассоциативна и не коммутативна. **38.** $\prod n^{n^{m_i}}$. **42.** $x * y = 0$, если хотя бы одно из x или y чётно, иначе $x * y = 2$. **43.** $c^{\mathfrak{A}} = 0$, $x * y = x + (y \bmod 2)$. **44.** а) и д). **45.** а), в), е). **46.** Индукция по построению t. Для переменной $t = x$ получаем $X = X$, для константы $t = c^{(0)}$ $c^{\mathfrak{B}} = \{c^{\mathfrak{A}}\}$ аналогично. Для $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ применяем индукционное предположение: $Y_j = t_j^{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n) = \{t_j^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\}$, поэтому $t^{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n) = f^{\mathfrak{B}}(t_1^{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n), \ldots, t_m^{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n)) = f^{\mathfrak{B}}(Y_1, \ldots, Y_m) = f^{\mathfrak{A}}[Y_1, \ldots, Y_m] = \{f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) : b_j \in Y_j, j = 1, \ldots, m\} = \{f^{\mathfrak{A}}(b_1, \ldots, b_n) : b_j \in \{t_j^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\}, j = 1, \ldots, m\} = \{f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_m^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)) : a_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\} = \{t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\}$. **47.** Первая операция ассоциативна. **48.** В первой выполнено $x \cup x = x$ для всех x. **49.** В первой выполнено $x \cap x = x$ для всех x. **50.** В первой выполнено $x - (x - x) = x$. **51.** В первой выполнено: для любых x и z существует y такой, что $\frac{x+y}{2} = z$. **52.** В первой можно найти такие x и y, что $x \neq x \cup y \neq y$. **53.** В первой можно найти $x = -1$ такой, что $x \times x \neq x$, но $(x \times x) \times y = y$ для всех y. **54.** В первой выполнено: для каждого x существует единственный y такой, что $y \times y = x$. **55.** В первой выполнено: для каждого x существует y такой, что $y \times y = x$. **56.** Изоморфизм: $h(x) = {}^1/_x$. **57.** Пусть p_i, $i \in \omega$ — i-ое простое число. Рассмотреть отображение $f : p_0^{a_0} \ldots p_n^{a_n} \mapsto p_1^{a_0} \ldots p_{n+1}^{a_n}$. **58.** $(\mathbb{Z}^+, +, \times)$. **59.** $(\mathbb{Z}^+, +, \times)$. **60.** Рассмотреть алгебру $(\mathbb{Z}, -^{(2)})$. **61.** В прямую сторону. Допустим, условие не выполнено и для каждого $a \in \mathfrak{A}$ существует

$b \in \mathfrak{A}$ такой, что $t^{\mathfrak{A}}(b) \neq a$ для любого терма t. Согласно предложению 37 алгебра $\mathfrak{B}_b$, порождённая b, не содержит a. Но тогда пересечение $\bigcap\limits_b |\mathfrak{B}_b|$ пусто. В обратную сторону. Если $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, то существует $b \in \mathfrak{B}$, поэтому $a = t^{\mathfrak{A}}(b) = t^{\mathfrak{B}}(b) \in \mathfrak{B}$. Следовательно, $a \in \mathfrak{B}$ для всех $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Значит, пересечение $\bigcap\limits_b |\mathfrak{B}_b|$ непусто. **62.** $\{0; 1\}$, ноль нельзя получить из ненулевых чисел, а из нуля нельзя получить ничего другого. **63.** $\{0; 1\}$, ноль и единицу нельзя получить из других чисел. **64.** Алгебра чисел вида $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$. **65.** $(\mathbb{Z}, +, \times)$. **66.** Алгебра чисел вида a^i, $i \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Q}^+$ — константа. **67.** Все числа из конечного множества будут содержать в совокупности конечно много простых сомножителей. Но количество простых чисел бесконечно. **68.** $1 = a/a$, суммируя единицы получаем все натуральные числа, с помощью деления — все рациональные. **69.** Алгебра чисел вида ${}^{n}/_{2^m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \omega$. **70.** Вложение $h : a \mapsto \{a\}$. **71.** Если $a_i \in X_i \neq \varnothing$, то $f(a_1, \ldots, a_n) \in f[X_1, \ldots, X_n] \neq \varnothing$. **72.** Если $\mathfrak{B} = \exp \mathfrak{A}$ и X_i конечны, то $t^{\mathfrak{B}}(X_1, \ldots, X_n) = \{t^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) : a_i \in X_i, i = 1, \ldots, n\}$ тоже конечно. $\exp^*_{\text{fin}} \mathfrak{A} = \exp^* \mathfrak{A} \cap \exp_{\text{fin}} \mathfrak{A}$. **73.** Рассмотреть алгебру $(\{1, -1\}, \times)$, образованную множеством $\{-1\}$. **74.** а) если $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b$ и $a_1, \ldots, a_n \in |\mathfrak{B}|$, то $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ или $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. В любом из этих случаев $f^{\mathfrak{B}}(a_1, \ldots, a_n) = b$ по определению подалгебры. б) $|\mathfrak{A}| \subseteq |\mathfrak{C}|$ и $f^{\mathfrak{A}}$ является ограничением $f^{\mathfrak{C}}$ на $|\mathfrak{A}|$. в) Если $\mathfrak{D}$ удовлетворяет пункту б), то $|\mathfrak{C}| \subseteq |\mathfrak{D}|$. Если $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{C}$, то $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ для некоторого $\mathfrak{A} \in K$, следовательно, $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) = b$ для некоторого $b \in |\mathfrak{A}|$. Из $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{D}$ получаем $f^{\mathfrak{D}}(a_1, \ldots, a_n) = b$, из $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$ получаем $f^{\mathfrak{C}}(a_1, \ldots, a_n) = b$. Следовательно, $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$. **75.** $h(x) = \text{const}$, рассмотреть $h(0)$ и $h(x)$ для других x. **76.** $h(x) = 0$, рассмотреть $h(x \times x)$ для единичной матрицы. **77.** $h_1(x) = 0$ и $h_2(x) = 1$, рассмотреть $h(1)$ и $h(-1)$. **78.** $h(x) = \text{const}$, рассмотреть $h(x + y)$ при $x, y \neq 0$. **79.** $h(x) = 0$, рассмотреть $h(x \times 0)$. **80.** $h(0) = c$, $h(x) \in \{c; c + 1\}$ для произвольных $c \in \mathbb{Z}$. Рассмотреть $h(x \times 0)$. **81.** $h_1(x) = 0$ и $h_2(x) = 1$, рассмотреть $h(\max(x, x))$. **82.** Рассмотреть алгебру $(\mathbb{Z}, f^{(1)}, g^{(1)})$, где $f(x) = x \bmod 2$, $g(x) = (x + 1) \bmod 2$. Тогда каждая из этих функций является эпиморфизмом в подалгебру $\{0, 1\}$: $f(g(x)) = ((x + 1) \bmod 2) \bmod 2 = (x + 1) \bmod 2 = ((x \bmod 2) + 1) \bmod 2 = g(f(x))$. **83.** Тождественные автоморфизмы $e(x) = x$, гомоморфизмы в единичные подалгебры $h_1(x) = 0$ и $h_2(x) = 1$ соответственно, гомоморфизм

$g_2(x) = (-1)^x$. **84.** Рефлексивность: $1x = 1x$. Симметричность очевидна. Транзитивность: если $mx = ny$ и $ay = bz$, то $amx = any = nbz$, причём am и nb нечётны. Конгруэнтность: если $mx = ny$ и $au = bv$, то $(am)(xu) = (bn)yv$. Ноль эквивалентен только себе. Положительное число можно разложить на простые множители: $x = 2^c p_1^{c_1} \ldots p_k^{c_k}$ для нечётных простых $p_1, \ldots, p_k$. Следовательно, $x \equiv 2^c$. Тогда фактор-алгебра изоморфна множеству из степеней двойки и нуля с умножением. **85.** Не транзитивно: $\sqrt[3]{2} \equiv \sqrt[3]{4} \equiv 2\sqrt[3]{2}$, но $\sqrt[3]{2} \not\equiv 2\sqrt[3]{2}$. **86.** x отличается от x нулём элементов. Симметричность очевидна. Если x отличается от y n элементами, а y от z — m элементами, то x от z не более чем $n + m$ элементами. Если x_1 и x_2 отличаются n элементами, y_1 и y_2 — m элементами, то $x_1 \cup y_1$ и $x_2 \cup y_2$ отличаются не более чем $n + m$ элементами. Так же для пересечения. **87.** $2i \equiv 1 + 2i \equiv 2 + 2i$, но $2i(1+2i) = -4+2i \not\equiv (1+2i)(2+2i) = -3+6i$. Эквивалентностью является. **88.** Свойства эквивалентности следуют из предложения 17. Если $\operatorname{sign} x = \operatorname{sign} y$ и $\operatorname{sign} u = \operatorname{sign} v$, то $\operatorname{sign} xu = \operatorname{sign} yv$. Классами эквивалентности будут множества чисел одного знака: $\mathbb{R}^-$, $\{0\}$, $\mathbb{R}^+$. Их можно отождествить с -1, 0 и 1 соответственно. Тогда фактор-алгеброй будет $(\{-1, 0, 1\}, \times)$. **89.** Не транзитивно: $0 \equiv {}^1/2 \equiv 1$, но $0 \not\equiv 1$. **90.** Свойства эквивалентности следуют из предложения 17. Свойства конгруэнтности следуют из равенства $|x\&y| = |x|+|y|$. Классами эквивалентности будут множества слов одинаковой длины. Отождествив каждый класс с этой длиной, получим, что фактор-алгебра изоморфна $(\omega, +)$. **91.** Не транзитивно: $0 \equiv 4 \equiv 13$, но $0 \not\equiv 13$. **92.** Свойства эквивалентности следуют из предложения 17. Свойства конгруэнтности следуют из равенств $\max\{[x], [y]\} = [\max\{x, y\}]$ и $\min\{[x], [y]\} = [\min\{x, y\}]$. **93.** $1 \equiv 2 \equiv 3$, но $\frac{1+2}{2} = {}^1/2 \not\equiv \frac{1+3}{2} = 2$. Эквивалентностью является. **94.** Не будет: $1.5 \times 1.5 = 2.25$, $1.5 \times 0.5 = 0.75$. **95.** $x - y \in \mathbb{Z}$ означает равенство дробных частей x и y: $\operatorname{fr}(x) = \operatorname{fr}(y)$, поэтому свойства эквивалентности следуют из предложения 17. Если $\operatorname{fr}(x_1) = \operatorname{fr}(x_2)$ и $\operatorname{fr}(y_1) = \operatorname{fr}(y_2)$, то, очевидно, $\operatorname{fr}(x_1 + y_1) = \operatorname{fr}(x_2 + y_2)$, так как $\operatorname{fr}(x + y) = \operatorname{fr}(\operatorname{fr}(x) + \operatorname{fr}(y))$. Каждый класс эквивалентности состоит из рациональных чисел с одинаковыми дробными частями. Отождествив их с этими частями получим алгебру $(\mathbb{Q} \cap [0, 1), \oplus)$, где $+$ — сложение по модулю 1: $x \oplus y = \operatorname{fr}(x + y)$. **96.** Рассмотреть изоморфизм f из задачи 57, отображение $g(y) = 2^y$ и их произведение:

$f(x) \times g(y)$. **97.** Рассмотреть отображения $f : p_0^{a_0} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots \mapsto p_0^{a_0} p_2^{a_1} p_4^{a_2} \ldots$ и $g : p_0^{a_0} p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots \mapsto p_1^{a_0} p_3^{a_1} p_4^{a_2} \ldots$. Взять произведение $f(x) \times g(y)$. **98.** 0 единственный элемент, который обладает таким свойством: $0 \times x = 0$ для любого x. Поэтому ему должна соответствовать пара $(0, 0)$. Если $x \neq 0$, получим $(x, 0) \times (0, x) = (0, 0)$, то есть произведение ненулевых элементов даёт нулевой. Но в алгебре $(\mathbb{Z}, \times)$ это невозможно. **99.** $(P(A \cup B), \cap, \cup)$, если A и B не пересекаются. **100.** Предположим, что $(\omega, +) \simeq (A, +) \times (B, +)$, причём натуральное число x соответствует паре (a_x, b_x). Так как $0 + x = x + 0 = x$, то $(a_0 + a_x, b_0 + b_x) = (a_0, b_0) + (a_x, b_x) = (a_x, b_x) = (a_x + a_0, b_x + b_0)$, откуда $a_0 + a_x = a_x + a_0 = a_x$ и $b_0 + b_x = b_x + b_0 = b_x$ для любого x. $(a_1, b_1) = (a_0, b_1) + (a_1, b_0)$, но 1 можно представить только как $1 = 1 + 0$, следовательно, одна из пар (a_0, b_1), (a_1, b_0) равна (a_0, b_0). Пусть, например, $a_0 = a_1$. Тогда для любого натурального n получаем $n = 1 + \cdots + 1$ и $(a_n, b_n) = (a_0, b_1) + \cdots + (a_0, b_1) = (a_0 + \cdots + a_0, b_1 + \cdots + b_1) = (a_0, b_1 + \cdots + b_1)$. Таким образом, числу n соответствует пара вида (a_0, b_n). Но так как это соответствие является взаимно-однозначным, то в A никаких элементов, кроме a_0, быть не может, то есть алгебра $(A, +)$ является единичной. **101.** Пусть $(\mathbb{Q}, \max) \simeq (A, \max) \times (B, \max)$ и при этом A и B содержат больше одного элемента, например, $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$. Пусть $(a_1, b_1) = x \in \mathbb{Q}$, $(a_2, b_2) = y \in \mathbb{Q}$. Очевидно, $x \neq y$, пусть, например, $x < y$. Тогда $\max((a_1, b_1), (a_2, b_2)) = (a_2, b_2)$, следовательно, $\max(a_1, a_2) = a_2$ и $\max(b_1, b_2) = b_2$. Но тогда, $\max((a_1, b_2), (a_2, b_1)) = (a_2, b_2) = y$, в то время как $(a_1, b_2) \neq y$ и $(a_2, b_1) \neq y$, что невозможно. **102.** Если $\mathfrak{A} \overset{f}{\simeq} \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$, то взять образ $h_A(f(\mathfrak{A}))$. **103.** Пусть $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_{i+1} = h_A(f(\mathfrak{A}_i))$. Для каждого $a \in |\mathfrak{A}|$ построим последовательность $a_i \in |\mathfrak{A}_i|$. Полагаем $a_0 = a$, а для $a_i \in |\mathfrak{A}_i|$ мы получим $f(a_i) = (a_{i+1}, b_i)$ для некоторых $a_{i+1} \in |\mathfrak{A}_{i+1}|$ и $b_i \in |\mathfrak{B}|$. Для произвольного $a \in |\mathfrak{A}|$ построим $h(a) = f_a$, где $f_a(i) = b_i$. Индукцией по i показывается, что если $a = o(a^1, \ldots, a^n)$, то $a_i = o(a_i^1, \ldots, a_i^n)$ и $b_i = o(b_i^1, \ldots, b_i^n)$ для всех $i \in \omega$. Следовательно, $f_a = o(f_{a^1}, \ldots, f_{a^n}$. **104.** Если a_i — элемент алгебры $\mathfrak{A}_i$, образующий единичную подалгебру в $\mathfrak{A}_i$, то $(a_1, \ldots, a_n)$ будет образовывать единичную подалгебру в декартовом произведении. Для прямого нужно взять $f : i \mapsto a_i$. Если в некоторой алгебре $\mathfrak{A}_i$ единичной подалгебры нет, то для каждого $a \in |\mathfrak{A}_i|$ найдётся сигнатурный символ g_a

такой, что $g_a(a,\dots,a)\neq a$. Но тогда в произведении для любого набора вида $(\dots,a,\dots)$ мы получим $g_a(\dots,a,\dots)=(\dots,g_a(a,\dots,a),\dots)\neq(\dots,a,\dots)$. Следовательно, никакой элемент произведения единичную алгебру не будет образовывать. Аналогично для прямых произведений. **105.** Рефлексивность: $\{i\in I: f(i)=f(i)\}=I\in F$, поэтому $f\equiv f$. Симметричность очевидна. Транзитивность: если $f\equiv g$ и $g\equiv h$, то $\{i\in I: f(i)=h(i)\}\supseteq\{i\in I: f(i)=g(i)=h(i)\}=\{i\in I: f(i)=g(i)\}\cap\{i\in I: g(i)=h(i)\}\in F$, так как оба пересекаемых множества принадлежат F. Если $f_k\equiv g_k$ для $k=1,\dots,n$ и o — символ n-местной операции, то $\{i\in I: o(f_1,\dots,f_n)(i)=o(g_1,\dots,g_n)(i)\}=\{i\in I: o(f_1(i),\dots,f_n(i))=o(g_1(i),\dots,g_n(i))\}\supseteq\{i\in I: f_1(i)=g_1(i),\dots,f_n(i)=g_n(i)\}=\{i\in I: f_1(i)=g_1(i)\}\cap\dots\cap\{i\in I: f_n(i)=g_n(i)\}\in F$, так как все пересекаемые множества принадлежат F. **106.** Если $x,y\in F$, то $i_0\in x,y$, поэтому $i_0\in x\cap y$ и $i_0\in z$, если $z\supseteq x$. Тогда $\{i\in I: f(i)=h(i)\}\in F$ тогда и только тогда, когда $f(i_0)=g(i_0)$. Следовательно, классом эквивалентности f будет $\{g\in|\mathfrak{A}|: g(i_0)=f(i_0)\}$. Отождествив такой класс с $f(i_0)\in|\mathfrak{A}_{i_0}|$ получим изоморфизм. **107.** Пусть $f_1,\dots,f_n\in B$, $g^{(n)}$ — сигнатурная операция, $h=g^{\mathfrak{A}}(f_1,\dots,f_n)$. Тогда $\{(i,j): h(i)=h(j)\}\supseteq\{(i,j): f_1(i)=f_1(j),\dots,f_n(i)=f_n(j)\}=\{(i,j): f_1(i)=f_1(j)\}\cap\dots\cap\{(i,j): f_n(i)=f_n(j)\}\in V$. **108.** Взять функцию $f(a)=g_a$, где $g_a(i)=a$ для всех $i\in I$. **109.** Могут: а), в), г). д), е), з). **110.** а) $x\Cap y=(-(-x))\Cap(-(-y))=-((-x)\Cup(-y))=-((-y)\Cup(-x))=(-(-y))\Cap(-(-x))=y\Cap x$; б) $(x\Cup y)\Cup x=x\Cup(x\Cup y)=(x\Cup x)\Cup y=x\Cup y$; г) $x\Cap 0=(-(-x))\Cap(-(-0))=-((-x)\Cup(-0))=-((-x)\Cup 1)=-1=0$; е) $-(x\Cap y)=-((-(-x))\Cap(-(-y)))=-(-((-x)\Cup(-y)))=(-x)\Cup(-y)$; и) $(x\Cap y)\Cup(x\Cap(-y))=(x\Cup x)\Cap(x\Cup(-y))\Cap(y\Cup x)\Cap(y\Cup(-y))=x\Cap(x\Cup(-y))\Cap(x\Cup y)\Cap 1=x\Cap x\Cap((-y)\Cup y)\Cap 1=x$. Остальные не выполнены. **111.** Алгебра слов вида a^nb^m с операцией $a^{n_1}b^{m_1}\,\&\,a^{n_2}b^{m_2}=a^{n_1+n_2}b^{m_1+m_2}$. **112.** $(\{0,1\},\times)$. **113.** Единичная алгебра. **114.** а) $\{0\}$, $0+0=0$; б) $\{0,1\}$, $0\times x=0$, $1\times x=x$; в) все к предыдущему добавить $n=1+\dots+1$; г) $\{0,1,-1\}$, $0\times x=0$, $1\times x=x$, $(-1)\times(-1)=1$, $-1\neq 1$; д) все, к предыдущему добавить $n=1+\dots+1$, $(-n)+1+\dots+1=0$, $(n^m/)\times m=n$; е) $\{\varnothing,A\}$, $\varnothing\cup x=x$, $A\cup x=A$; ж) пустое слово, $\Lambda\,\&\,\Lambda=\Lambda$; з) отсутствуют, любые равенства и неравенства выполнены одновременно на двух одинаково упорядоченных наборах. **115.** Если множества X_i, Y_i определяют a_i, то для определения $a = f(a_1, \ldots, a_n)$ взять $X = X_1 \cup \cdots \cup X_n \cup \{a = (a_1, \ldots, a_n)\}$, $X = Y_1 \cup \cdots \cup Y_n$. **116.** Для автоморфизма h выполнено $h(t(\bar{a}, \bar{b})) = t(h(\bar{a}), h(\bar{b})$. Следовательно, равенство $t(\bar{a}, \bar{x}) = s(\bar{a}, \bar{x})$ выполнено тогда и только тогда, когда $t(h(\bar{a}), \bar{x}) = s(h(\bar{a}), \bar{x})$ выполнено. Но так как $\bar{a}$ был единственным набором, то $h(\bar{a}) = \bar{a}$. **117.** Рассмотреть функцию $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ на множестве $\{0, 1, 2\}$. Все элементы определимы: $f(x) \neq 0$, $f(0) = 1$, $f(2) = 2$, $1 \neq 2$. а) Взять подалгебру $\{1, 2\}$; б) взять эндоморфизм $h(0) = h(1) = 1$, $h(2) = 2$; в) взять декартов квадрат. **118.** а, з, и) не замкнуто относительно прямых произведений; б, к) не замкнуто относительно подалгебр и гомоморфизмов; в, г, е) не замкнуто относительно подалгебр; д, ж) не замкнуто относительно гомоморфизмов; и) не замкнуто относительно подалгебр, гомоморфизмов и прямых произведений; л) не замкнуто относительно подалгебр и прямых произведений. **119.** б) пересечение подалгебр снова будет подалгеброй; ж) если $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathfrak{A}_i$, $\bar{a} \in \mathfrak{A}$, то $\bar{a} \in \mathfrak{A}_i$ для некоторого $i \in I$, $t^{\mathfrak{A}}(\bar{a}) = t^{\mathfrak{A}_i}(\bar{a}) = s^{\mathfrak{A}_i}(\bar{a}) = s^{\mathfrak{A}}(\bar{a})$. Контрпримеры: а) многообразие, определяемое $x = y$, единичная алгебра и её неединичный прообраз; в) многообразие, определяемое $x = y$, единичная алгебра и её неединичное расширение; г) многообразие, определяемое $f(x, \ldots, x) = x$, любая алгебра из него; д) как для г); е) многообразие, определяемое $f(x, y) = x$, неединичная алгебра, любое взаимно однозначное отображение. **120.** б) прообраз бесконечного множества бесконечен; г) если $a * a = a$, то $f(a) * f(a) = f(a)$, то есть идемпотенты сохраняются при морфизмах, значит, если их нет в образе, то нет и в прообразе; к) аналогично г). Контрпримеры: а) гомоморфизм из бесконечной алгебры в единичную; в) гомоморфизм из $(\mathbb{Z}^+, +)$ в единичную; д) гомоморфизм из $(\mathsf{P}(A), \cup)$ в единичную для бесконечного A; е) гомоморфизм из $(\mathbb{Z}^+, \times)$ в $(\mathsf{P}(P), \cup)$, где P — множество простых чисел: $f(p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}) = \{p_1, \ldots, p_k\}$. ж) гомоморфизм из $(\mathbb{R}, +)$ в единичную; з) гомоморфизм $f(x) = x \bmod 3$ из $(\omega, +)$, в образе есть автоморфизм, меняющий двойку и единицу местами; и) как в в). **121.** б) бесконечное множество вкладывается только в бесконечное; в) идемпотент при вложении останется идемпотентом; е) как в в), причём вложение разнозначно. Контрпримеры: а) расширение конечной алгебры до бесконечной; г) расширить $(\mathbb{Z}^+, +)$

до $(\mathbb{Z},+)$; д) расширить $(\mathsf{P}(A),\cup)$ до $(\mathsf{P}(B),\cup)$, где $A\subseteq B$, A конечное, B бесконечно; ж) единичную алгебру до $(\mathbb{R},+)$; з) расширить $(\{a,b\},*)$, где $x*y=x$, до $(\{a,b,c\},*)$, где $c*c=a$; и) расширить $(\{a,b\},*)$, где $x*y=x$, до $(\{a,b,c\},*)$, где $c*x=c$; к) единичную алгебру до $(\{a,b\},*)$, где $x*y=x$. **122.** б) если все A_i бесконечны, то $\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ бесконечно; в) если a идемпотент в $\mathfrak{A}_i$, то он останется идемпотентом в любом расширении, в том числе в $\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{A}_i$; г) если a идемпотент в $\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ и $a\in\mathfrak{A}_i$, то он идемпотент в $\mathfrak{A}_i$; е) аналогично г); к) если $a*x=a$ в $\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ и $a\in\mathfrak{A}_i$, то $a*x=a$ в $a\in\mathfrak{A}_i$. Контрпримеры: а) объединение цепи $(A_i,\max)$, $i\in\omega$, где $A_i=\{0,\dots,i\}$, равно $(\omega,\max)$; д) как в а); ж) объединение цепи $(\omega/2^i,+)$, $i\in\omega$, в объединении есть автоморфизм $f(x)=2x$; з) $\mathfrak{A}_0$ — имеет два элемента a_0,b_0, $a_0^2=a_0$, $b_0^2=b_0$, каждая $\mathfrak{A}_{i+1}$ получена из $\mathfrak{A}_i$ добавлением a_{i+1} и b_{i+1}: $a_{i+1}^2=b_{i+1}^2=a_i$. $x*y=x$ при $x\neq y$. В $\mathfrak{A}_i$ есть автоморфизм $a_{i+1}\leftrightarrow b_{i+1}$, в $\bigcup\limits_{i\in I}\mathfrak{A}_i$ автоморфизмов нет; и) как в а). **123.** Пусть $\mathfrak{B}=\exp\mathfrak{A}$, тогда $t^{\mathfrak{B}}[X_1,\dots,X_n]=\{t^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n):a_i\in X_i\}$. Если $t^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)=s^{\mathfrak{A}}(a_1,\dots,a_n)$ для любых $a_1,\dots,a_n\in|\mathfrak{A}|$, то $t^{\mathfrak{B}}(X_1,\dots,X_n)=s^{\mathfrak{B}}(X_1,\dots,X_n)$ для любых $X_1,\dots,X_n\in|\mathfrak{B}|$. Остальные действия приводят к подалгебрам $\exp\mathfrak{A}$. **124.** а) $\mathsf{P}(A)$ конечно, если A конечно; б) $\mathsf{P}(A)$ бесконечно, если A бесконечно; в) $\{a\}$ будет идемпотентом в $\exp^*\mathfrak{A}$, если a им был в $\mathfrak{A}$; е) как в в); з) $g:X\mapsto f[X]$ — автоморфизм $\exp\mathfrak{A}$ и $\exp^*\mathfrak{A}$, если f был автоморфизмом $\mathfrak{A}$; и) $\{a\}$ будет левым аннулятором в $\exp^*\mathfrak{A}$, если a им был в $\mathfrak{A}$. Контрпримеры: г) $\varnothing$ всегда будет идемпотентом в $\exp\mathfrak{A}$, A — в $\exp^*\mathfrak{A}$, если операция сюръективна; д) $(\mathbb{Z},+)$ имеет один идемпотент 0, $\exp^*(\mathbb{Z},+)$ будет иметь идемпотентами все множества вида $k\mathbb{Z}$; ж) алгебра $(\omega,*)$ не имеет нетривиальных автоморфизмов, если $a*b=a+1$, в алгебре $\exp^*(\omega,*)$ можно произвольно переставлять множества, содержащие нуль, и получающиеся из них; к) $\varnothing$ всегда будет левым аннулятором в $\exp\mathfrak{A}$, A — в $\exp^*\mathfrak{A}$, если операция сюръективна. **125.** Доказать равенство аналогично задачам 46 и 123. **126.** Коммутативность и ассоциативность противоречат лемме 85: например, значения терма $x*y$ совпадают на разных наборах: (a,b) и (b,a). **127.** Если $t(\bar a)=0$, то $f(t(\bar a),t(\bar a))=t(\bar a)$. **128.** $f(t(\bar a),t(\bar a))=\mathrm{const}$ для любых $t(\bar a)$. **129.** $f(f(x,x),f(x,x))=x$ для всех x. **130.** Если $t(\bar a)=0$, то $f(t(\bar a),t(\bar a))=t(\bar a)$.

131. Для любой алгебры $\mathfrak{B}$ и её элемента b можно построить гомоморфизм h из $\mathfrak{D}$ в $\mathfrak{B}$: $h(a) = b$, $h(d_1 * d_2) = h(d_1) *^{\mathfrak{B}} h(d_2)$. Отображение определено однозначно, так как D состоит из попарно неизоморфных деревьев, то есть представление каждого дерева в виде $d_1 * d_2$ единственно. **132.** Пусть из равенства $t^{\mathfrak{F}}(\bar{a}) = s^{\mathfrak{F}}(\bar{b})$ следует $\bar{a} = \bar{b}$ и $t = s$ для любых $\bar{a}, \bar{b} \in A$. Возьмём любую алгебру $\mathfrak{B}$ и отображение $f : A \to |\mathfrak{B}|$. Расширим f до h следующим образом: $h(t^{\mathfrak{F}}(\bar{a})) = t^{\mathfrak{B}}(f(\bar{a}))$. Такое продолжение определяется однозначно, так как каждый элемент $\mathfrak{F}$ представляется в виде $t^{\mathfrak{F}}(\bar{a})$ единственным способом. Тогда получаем $h(g(u_1, \ldots, u_n)) = h(f(t_1^{\mathfrak{F}}(\bar{a}), \ldots, t_n^{\mathfrak{F}}(\bar{a}))) = f(t_1^{\mathfrak{B}}(h(\bar{a})), \ldots, t_n^{\mathfrak{B}}(h(\bar{a}))) = f(h(t_1^{\mathfrak{B}}(\bar{a})), \ldots, h(t_n^{\mathfrak{B}}(\bar{a}))) = f(h(u_1), \ldots, h(u_n))$ для любых $u_1, \ldots, u_n \in |\mathfrak{F}|$. **133.** $\exp \mathfrak{A}$ содержит как минимум два элемента A и $\varnothing$. Тогда для операции $*$ получим $A * \varnothing = \varnothing$, что противоречит лемме 85. **134.** Для каждого терма $[t] \in \mathfrak{B}$ включить в множество образующих самый короткий подтерм, принадлежащий $\mathfrak{B}$. **135.** Если термы t и s отличаются, то $t^{\mathfrak{H}}(\bar{X})$ и $s^{\mathfrak{H}}(\bar{Y})$ не могут совпадать ни для каких $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathsf{P}(A) \setminus \{\varnothing\}$ (по лемме 85). Если $\bar{X} \neq \bar{Y}$, например, $a \in X_1 \setminus Y_1$, то $t^{\mathfrak{H}}(\bar{X})$ содержит $t^{\mathfrak{F}}(a, \ldots)$, а $t^{\mathfrak{H}}(\bar{Y})$ — не содержит, то есть $t^{\mathfrak{H}}(\bar{X}) \neq t^{\mathfrak{H}}(\bar{Y})$. Следовательно, выполнены условия задачи 132. **136.** Носитель $\{e\} \cup \{a, a' : a \in A\}$, $f(e) = e$, $f(a) = a'$, $f(a') = a$. **137.** Носитель $\{f^n(g^m(a)) : n, m \in \omega\}$, $f(f^n(g^m(a))) = f^{n+1}(g^m(a))$, $g(f^n(g^m(a))) = f^n(g^{m+1}(a))$. **138.** Носитель $\{a_i : i \in \mathbb{Z}\}$, $a_0 = a$, $f(a_i) = a_{i+1}$, $g(a_i) = a_{i-1}$. **139.** Взять сигнатуру $\{f^{(1)}\}$, рассмотреть свободную алгебру $\mathfrak{F}$, порождённую одним элементом, в качестве $\mathfrak{B}$ — свободную, порождённую двумя элементами. **140.** Для единичных алгебр $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и любых гомоморфизмов $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{C}$ и $g : \mathfrak{B} \to \mathfrak{C}$, выполнено $f(c^{\mathfrak{A}}) = g(c^{\mathfrak{B}}) = c^{\mathfrak{C}}$. Поэтому, в качестве копроизведения можно взять, например, $\mathfrak{A}$: $f = fe$ и $g = fh$, где e — тождественный морфизм на $\mathfrak{A}$, h — изоморфизм $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}$. **141.** Рассмотреть сигнатуру $\{f^{(1)}\}$, алгебру $\mathfrak{C} = (\{0, 1\}, x^2)$ и морфизмы g и h единичных алгебр: $f(a) = 0$, $g(b) = 1$. **142.** Рассмотреть сигнатуру $\{f^{(1)}, c^{(0)}, d^{(0)}, e^{(0)}\}$, и многообразие $\mathcal{M}$, заданное тождеством $f(c) = c$. Алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из $c = d$ и $f^i(e)$, $\mathfrak{B}$ состоит из $c = e$ и $f^i(d)$ для $i \in \omega$. Тогда в $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} \overset{\mathcal{M}}{\coprod} \mathfrak{B}$ должно быть выполнено $c = d = e$, откуда следует, что $\mathfrak{C}$ — единичная алгебра. **143.** Так как существуют гомоморфизмы $h_i^B : \mathfrak{B}_i \to \mathfrak{D}$, то $f_i^A = h_i^B f_i$ являются гомоморфизмами из

$\mathfrak{A}_i$ в $\mathfrak{D}$. По определению существует гомоморфизм $g : \mathfrak{C} \to \mathfrak{D}$, для которого $f_i^A = gh_i^A$. $\mathfrak{D}$ порождается всеми $h_i^B[\mathfrak{B}_i] = h_i^B f_i[\mathfrak{A}_i] = gh_i^A[\mathfrak{A}_i] = g[\mathfrak{C}_i]$, где $\mathfrak{C}_i = h_i^A[\mathfrak{A}_i]$, то есть подалгебра $\mathfrak{C}$. Следовательно, g сюръективен. **144.** Если $\mathcal{M}$ не замкнут относительно гомоморфизмов, взять алгебру из предыдущей задачи и класс $\mathcal{M}$, в котором не все из трёх констант равны. Если $\mathcal{M}$ не замкнут относительно прямых произведений, взять сигнатуру $\{*^{(2)}\}$, класс $\mathcal{M}$ конечных алгебр и две единичные в качестве комножителей. **145.** Аналогично примеру 60, в качестве общего элемента взять значение (единственное) функций f и g. **146.** Согласно определению свободной алгебры, пустое отображение однозначно продолжается до гомоморфизма $h_F : \mathfrak{F} \to \mathfrak{A}$. В качестве h_A берём тождественное отображение на $\mathfrak{A}$. Пусть $f_F : \mathfrak{F} \to \mathfrak{D}$ и $f_A : \mathfrak{F} \to \mathfrak{D}$ — гомоморфизмы. Очевидно, $f_A = f_A h_A$. Каждый элемент $\mathfrak{F}$ является значением замкнутого терма $t^{\mathfrak{F}}(c_1^{\mathfrak{F}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{F}})$. Поэтому $h_F(t^{\mathfrak{F}}(c_1^{\mathfrak{F}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{F}})) = t^{\mathfrak{A}}(h_F(c_1^{\mathfrak{F}}), \ldots, f_F(c_n^{\mathfrak{F}})) = t^{\mathfrak{A}}(c_1^{\mathfrak{A}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{A}})$ и $f_F(t^{\mathfrak{F}}(c_1^{\mathfrak{F}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{F}})) = t^{\mathfrak{D}}(f_F(c_1^{\mathfrak{F}}), \ldots, f_F(c_n^{\mathfrak{F}})) = t^{\mathfrak{D}}(c_1^{\mathfrak{D}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{D}}) = t^{\mathfrak{D}}(f_A(c^{\mathfrak{A}})_1, \ldots, f_A(c_n^{\mathfrak{A}})) = f_A(h_F(t^{\mathfrak{F}}(c_1^{\mathfrak{F}}, \ldots, c_n^{\mathfrak{F}})))$. Получаем, что $f_F = f_A h_F$. **147.** Рассмотреть алгебры $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Z}'$ из примера 45, обогащённые константами -1 и 1, $\mathfrak{E}$ — единичная алгебра, $\mathcal{M}$ состоит из всех алгебр. Тогда $\mathfrak{Z} \coprod \mathfrak{E} = (\omega, \times)$, если $h_Z(x) = |x|e$ — модуль, $h_Z = 1$, так как для любых гомоморфизмов f_Z и f_E выполнено $f_Z(1) = f_E(1) = f_E(-1) = f_Z(-1)$. С другой стороны $\mathfrak{Z}' \coprod \mathfrak{E}$ содержит только элементы $h'_Z(0)$, $h'_Z(1)$, $h'_Z(a)$, так как $h'_Z(-1) = h'_E(-1) = h'_E(1) = h'_Z(1)$, $h'_Z(0) = h'_Z(a \times 1) = h'_Z(a) \times h'_Z(1)$, $h'_Z(-2) = h'_Z(a \times (-1)) = h'_Z(a) \times h'_Z(-1) = h'_Z(a) \times h'_Z(1) = h'_Z(0)$, $h'_Z(2x) = h'_Z((-2) \times (-x)) = h'_Z(-2) \times h'_Z(-x) = h'_Z(0) \times h'_Z(-x) = h'_Z(0 \times (-x)) = h'_Z(0)$, $h'_Z(2x-1) = h'_Z(a \times 2x) = h'_Z(a) \times h'_Z(2x) = h'_Z(a) \times h'_Z(0) = h'_Z(a \times 0) = h'_Z(-1) = h'_Z(1)$. **148.** Взять сигнатуру с двумя константами, причём в $\mathfrak{B}$ значения констант совпадают, а в $\mathfrak{A}$ — нет. **149.** Возьмём тождественный на $\mathfrak{A}$ гомоморфизм f_A и $f_B = f$. Тогда $f_A = gh_A$. Следовательно, f_A обратим, является разнозначным, то есть вложением $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{A} \overset{\mathcal{M}}{\coprod} \mathfrak{F}$.

Указатель терминов

Список литературы

[1] Бахтурин Ю. А. основные структуры современной алгебры / Ю. А. Бахтурин. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1990. — 320 с.

[2] Биркгов Г. Теория решёток / пер. с англ. В. Н. Салий под ред. Л. А. Скорнякова. — М.: Наука, 1984. — 568 с.

[3] Кон П. Универсальная алгебра / П. Кон. Пер. с англ. Т. М. Баранович под ред. А. Г. Куроша. М.: Мир, 1968. — 352 с.

[4] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре / А. Г. Курош. М.: Физматлит, 1962. — 396 с.

[5] Ленг С. Алгебра / С. Ленг. Пер. с англ. Е. С. Голода под ред. А. И. Кострикина. М.: Мир, 1968. — 564 с.

[6] Мальцев А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. — 392/,с. с илл.

[7] Маклейн С. Категории для работающего математика / Перевод с англ. под ред. В. А. Артамонова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 352 с.

[8] Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры / пер. с англ. А. Б. Волынского под ред. А. Д. Тайманова. — М.: Наука, 1967. — 376 с.

Учебное издание

Дудаков Сергей Михайлович

Универсальная алгебра

Учебное пособие

В авторской редакции

Подписано в печать 16.07.2019.
Усл. п. л. 7. Уч.-изд. л. 4,8.
Тираж 10 экз. [электр.].
Заказ № 266 от 16.07.2019.
Тверской государственный университет
Факультет прикладной математики и кибернетики
Адрес: 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33