

517
Г-92

В. ГРЭНВИЛЬ и Н. ЛУЗИН

КУРС
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
И ИНТЕГРАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЙ

ЧАСТЬ I

ОГНЗ • ГОСТЕХИЗДАТ • 1942

В. ГРЭНВИЛЬ и Н. ЛУЗИН

517

Г-92

КУРС
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
И ИНТЕГРАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЙ

ЧАСТЬ I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Издание седьмое

153761



ОГИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва

1942

Ленинград

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

Числа

1. Рациональные числа (9). — 2. Практическое значение рациональных чисел (9). — 3. Сопоставление рациональных чисел с точками прямой линии (9). — 4. Несоизмеримые отрезки (10). — 5. Иррациональные числа (11). — 6. Представление рациональных и иррациональных чисел в виде десятичных дробей (13). — 7. Действительные числа (14). — 8. Абсолютная величина (14). — 9. Деление на нуль невозможно (15).

ГЛАВА II

Переменное и функция

10. О величинах вообще (16). — 11. Переменная величина (17). — 12. Постоянная величина (18). — 13. Геометрическое изображение величин (19). — 14. Область значений переменного (19). — 15. Отрезок и промежуток (20). — 16. Монотонное и колеблющееся изменения величины (22). — 17. Ограниченная величина (23). — 18. Приращение переменной величины (25). — 19. Постоянная величина как переменная (26). — 20. Функция (27). — 21. Зависимое и независимое переменные (27). — 22. Характеристика функции (28). — 23. Вычисление функций (30). — 24. Область изменения аргумента (31). — 25. Приращение функции (32). — 26. Геометрическое изображение функций (33). — 27. Геометрическое изображение приращения функции (35). — 28. Классификация функций (35). — 29. О различном происхождении функций (40). — 30. Функция от функции (42). — 31. Возрастающие и убывающие функции (43). — 32. Обратные функции (45).

ГЛАВА III

Предел. Непрерывность

33. Предел переменного (49). — 34. О способах переменной величины приближаться к своему пределу (52). — 35. Бесконечно малые (54). — 36. Связь понятия предела и бесконечно малого (56). — 37. Основные свойства бесконечно малых (56). — 38. Основные теоремы о пределах (60). — 39. Понятие о бесконечно большом (63). — 40. Связь бесконечно большого и бесконечно малого (66). — 41. Предел функции (67). — 42. Непрерывность функций (69). — 43. Свойства непрерывных функций (78). — 44. Основная теорема о непрерывных функциях (80). — 45. Типы разрывов функций (81). — 46. Устранимый и неустраимый разрывы (84). — 47. Кажущийся разрыв и так называемая „истинная величина“ функции. Раскрытие неопределенностей (85). — 48. Два замечательных предела (88). — 49. Сравнение бесконечно малых друг с другом (101). — 50. Порядки бесконечно малых (105). — 51. Равносильные бесконечно малые (106). — 52. Первый принцип анализа бесконечно малых (110). — 53. Приложение первого принципа (112).

ГЛАВА IV

Дифференцирование

54. Введение (123). — 55. Сравнение приращений (125). — 56. Производная функции одного переменного (127). — 57. Различные обозначения производной (128). — 58. Дифференцируемые функции (132). — 59. Общее правило дифференцирования (132). — 60. Первое приложение производной к геометрии (134).

ГЛАВА V

Правила дифференцирования элементарных функций

61. Важность общего правила (138). — 62. Дифференцирование постоянного (140). — 63. Дифференцирование переменного по переменному (140). — 64. Дифференцирование суммы (алгебраической) (141). — 65. Дифференцирование произведения постоянного на переменное (141). — 66. Дифференцирование произведения двух переменных (142). — 67. Дифференцирование произведений любого конечного числа переменных (142). — 68. Дифференцирование степенной функции с постоянным показателем (143). — 69. Дифференцирование частного (143). — 70. Дифференцирование функции от функции (148). — 71. Дифференцирование функции от функции (продолжение) (151). — 72. Практика дифференцирования функций от функции (153). — 73. Дифференцирование обратной функции (155). — 74. Дифференцирование логарифма (156). — 75. Дифференцирование простой показательной функции (157). — 76. Дифференцирование общей показательной функции (158). — 77. Практика дифференцирования логарифмических функций (160). — 78. Дифференцирование $\sin v$ (164). — 79. Дифференцирование $\cos v$ (165). — 80. Дифференцирование $\operatorname{tg} v$ (165). — 81. Дифференцирование $\operatorname{ctg} v$ (165). — 82. Дифференцирование $\sec v$ (166). — 83. Дифференцирование $\operatorname{cosec} v$ (166). — 84. Замечание (166). — 85. Дифференцирование $\operatorname{arcsin} v$ (169). — 86. Дифференцирование $\operatorname{arccos} v$ (170). — 87. Дифференцирование $\operatorname{arctg} v$ (271). — 88. Дифференцирование $\operatorname{arcctg} v$ (172). — 89. Неявные функции (174). — 90. Дифференцирование неявных функций.

ГЛАВА VI

Простейшие приложения производной

91. Направление кривой (178). — 92. Уравнения касательной и нормали; длины подкасательной и поднормали в прямоугольных координатах (183). — 93. Параметрические уравнения кривой (187). — 94. Угол между радиусом-вектором, проведенным в точку на кривой, и касательной к кривой в этой точке (194). — 95. Длины подкасательной и поднормали в полярных координатах (197). — 96. Отделение кратных корней у многочленов (199). — Приложение производных в механике. 97. Скорость в случае прямолинейного движения (204). — 98. Пример: скорость падающего тела (205). — 99. Ускорение прямолинейного движения (206). — 100. Составляющие скорости в случае криволинейного движения (206). — 101. Ускорение в криволинейном движении (207).

ГЛАВА VII

Последовательное дифференцирование

102. Определение последовательных производных (211). — 103. Обозначения (212). — 104. n -я производная (212). — 105. Формула Лейбница для n -й производной произведения (213). — 106. Последовательное дифференцирование неявных функций (214).

ГЛАВА VIII

Максимумы и минимумы. Точки перегиба. Вычерчивание кривых

107. Введение (217). — 108. Функции возрастающие и убывающие (221). — 109. Признаки возрастания и убывания функций (222). — 110. Максимальное и минимальное значения функции (223). — 111. Первый способ исследования функции на максимум и минимум. Практическое правило (225). — 112. Второй способ исследования функции на максимум и минимум (228). — 113. Общие указания для решения задач на максимум и минимум (236). — 114. Точки перегиба. Определение (245). — 116. Вычерчивание кривых (248).

ГЛАВА IX

Дифференциалы

116. Введение (251). — 117. Определения (251). — 118. Геометрическое изображение дифференциала (252). — 119. Приращение функции и дифференциал функции (252). — 120. Неизменность формулы для дифференциала функции (254). — 121. Производная дуги в прямоугольных координатах (256). — 122. Производная дуги в полярных координатах (258). — 123. Формулы для нахождения дифференциалов функций (259). — 124. Дифференциалы высших порядков (260).

ГЛАВА X

Скорость изменения

125. Производная, рассматриваемая как отношение двух скоростей (265).

ГЛАВА XI

Замена одних переменных другими

126. Замена зависимого и независимого переменных одного другим (271). — 127. Замена зависимого переменного (272). — 128. Замена независимого переменного (273). — 129. Одновременная замена независимого и зависимого переменных (274).

ГЛАВА XII

Кривизна. Радиус кривизны

130. Кривизна (277). — 131. Формула кривизны (279). — 132. Формула кривизны для случая, когда кривая задана уравнениями в параметрической форме (281). — 133. Формула кривизны в полярных координатах (282). — 134. Радиус кривизны (283). — 135. Круг кривизны (284).

ГЛАВА XIII

Теорема о конечном приращении. Неопределенные формы

136. Теорема Ролля (288). — 137. Теорема Лагранжа о конечном приращении (289). — 138. Дальнейшее развитие теоремы о конечном приращении: формула Тейлора (291). — 139. Максимумы и минимумы, рассматриваемые аналитически (292). — 140. Теорема Коши (295). — 141. Неопределенные формы (295). — 142. Вычисление значения функции, принимающей неопределенную форму (296). — Правило Лопиталья. 143. Раскрытие неопределенной формы $\frac{0}{0}$ (297). — 144. Раскрытие неопределенной формы $\frac{0}{\infty}$ (300).

145. Раскрытие неопределенности вида $0 \cdot \infty$ (302). — 146. Раскрытие неопределенности $\infty - \infty$ (302). — 147. Раскрытие неопределенных форм 0^0 , 1^∞ , ∞^0 (304).

ГЛАВА XIV

Круг кривизны. Центр кривизны

148. Круг кривизны. Центр кривизны (306). — 149. Центр кривизны как предельное положение пересечения нормалей в смежных точках (309). — 150. Эволюты (310). — 151. Свойства эволюты (314). — 152. Инволюты и их механическое построение (315).

ГЛАВА XV

Частные производные, частные и полные дифференциалы

153. Непрерывные функции двух и более независимых переменных (317). — 154. Частные производные (318). — 155. Геометрическая интерпретация частных производных (319). — 156. Полное приращение (323). — 157. Полный дифференциал (324). — 158. Производные и дифференциалы сложной функции одного независимого переменного (326). — 159. Дифференцирование неявной функции (330). — 160. Последовательные частные производные (334). — 161. Порядок дифференцирования безразличен (335).

ГЛАВА XVI

Огибающие

162. Семейство кривых. Переменный параметр (337). — 163. Огибающая семейства кривых, зависящих от одного параметра (338). — 164. Эволюта данной кривой, рассматриваемая как огибающая ее нормалей (341). — 165. Два параметра, связанные одним уравнением (342).

ГЛАВА XVII

Ряды

166. Бесконечные последовательности (346). — 167. Признаки существования предела последовательности (347). — 168. Последовательности, не имеющие предела (348). — 169. Ряды (348). — 170. Необходимый признак сходимости (349). — 171. Достаточные признаки сходимости. Сравнение рядов (350). — 172. Признак сходимости Даламбера (351). — 173. Ряды с чередующимися знаками (354). — 174. Абсолютная сходимость (355).

ГЛАВА XVIII

Разложение функций в ряды

175. Ряды функций (358). — 176. Степенные ряды (359). — 177. Разложение функций в ряды (362). — 178. Ряд Тейлора (363). — 179. Формула Маклорена и ряд Маклорена (366). — 180. Вычисления посредством рядов (372). — 181. Приближенные формулы, выводимые из рядов. Интерполяция (374). — 182. Ряд Тейлора для двух и большего числа переменных (377). — 183. Максимумы и минимумы функций двух независимых переменных (380).

ГЛАВА XIX

Асимптоты. Особые точки

184. Прямолинейные асимптоты (386). — 185. Нахождение асимптот по способу стремления к пределу отрезков на осях координат (387). — 186. Способ определения асимптот для алгебраических кривых (388). — 187. Асимптоты в полярных координатах (392). — 188. Особые точки (394). — 189. Определение ка-

сательной к алгебраической кривой и данной на ней особой точке (394). — 190. Узлы (397). — 191. Точка возврата (397). — 192. Уединенные или изолированные точки (399). — 193. Особые точки трансцендентных кривых (399).

ГЛАВА XX

Приложения к геометрии в пространстве

194. Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой двойкой кривизны, уравнения которой даны в параметрической форме (401). — 195. Касательная плоскость к поверхности (404). — 196. Нормаль к поверхности (406). — 197. Другая форма уравнений касательной к кривой двойкой кривизны (408). — 198. Другая форма уравнения нормальной плоскости к кривой двойкой кривизны (409).
