УДК 510.6, 510.64
AMS MSC2020: 03B45

Разрешимые свойства логик[1]

Максимова Л. Л., Юн В. Ф.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Аннотация. Рассматриваются логики над минимальной логикой J и модальными логиками. Изучаются проблема узнаваемости, свойства табличности и предтабличности, различные интерполяционные свойства в классах расширений логики J и модальных логик.

Ключевые слова: минимальная логика, модальная логика, разрешимость, алгоритмические свойства, узнаваемость, различимость, табличность, интерполяционные свойства.

Введение

Рассматриваются логики над минимальной логикой J и модальными логиками.

Свойство логик P *разрешимо* над логикой L_0, если существует алгоритм, проверяющий по любой формуле A, обладает ли логика $L_0 + A$ свойством P; свойство P *сильно разрешимо* над L_0, если такой алгоритм существует для всех конечных множеств Rul, составленных из схем аксиом и правил вывода.

Изучаются проблема узнаваемости, свойства табличности и предтабличности, различные интерполяционные свойства в классах расширений логики J и модальных логик.

1. Различимость и узнаваемость

Пусть L_0 — логика, L — конечно аксиоматизируемая логика, содержащая L_0. Говорим, что L *различима* над L_0, если су-

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № 0314-2019-0002.)

ществует алгоритм, проверяющий по любой формуле A, верно ли включение $L_0 + A \geqslant L$.

Логика L *сильно различима* над L_0, если существует алгоритм, проверяющий соотношение $L_0 + Rul \geqslant L$ для любого конечного множества Rul аксиом и правил вывода. Логика L *узнаваема* над L_0, если существует алгоритм, проверяющий по любой формуле A, верно ли равенство $L_0 + A = L$. Логика L *сильно узнаваема* над L_0, если существует алгоритм, распознающий совпадение L с $L_0 + Rul$.

Заметим, что если свойство P разрешимо над L_0, то любая логика над L_0 со свойством P узнаваема над L_0. Если свойство P сильно разрешимо над L_0, то любая логика над L_0 со свойством P сильно узнаваема над L_0.

Лемма 1 (см. [8, 11]). 1) *Логика L узнаваема над L_0 тогда и только тогда, когда L различима над L_0 и разрешима.*

2) *Если L сильно различима над L_0 и проблема допустимости правил в L разрешима, то L сильно узнаваема над L_0. Из последнего следует, что L различима над L_0 и разрешима по допустимости.*

Доказано, что логика Int узнаваема над J [8], логика $Neg = J+\bot$ сильно узнаваема над J [11].

Неизвестно, является ли Int сильно узнаваемой над J.

2. Интерполяционные свойства

Рассмотрим интерполяционное свойство Крейга CIP:

Если $L \vdash A \to B$, то существует C, содержащая лишь общие переменные A и B и такая, что $L \vdash A \to C$ и $L \vdash C \to B$, и другие варианты этого свойства.

Факты:

1) Слабое интерполяционное свойство WIP разрешимо над J [5], $wK4 = K + \{p \,\&\, \Box p \to \Box\Box p\}$ (Karpenko, 2012). Существует континуум слабо транзитивных модальных логик с WIP и континуум J-логик с WIP.

2) Существует лишь конечное число логик над $S4$ с IPR, все логики над $S4$ с IPR узнаваемы над $S4$. Интерполяционные

свойства CIP, IPR, проективное свойство Бета PBP разрешимы над $S4$.

3) Проблема интерполяции полностью решена над Int. Все с. и. л. с CIP, IPR и PBP полностью описаны. Каждая из них узнаваема и даже сильно узнаваема над Int [3, 12]. Существует точно восемь с. и. л. с CIP. Все с. и. л. имеют WIP.

Описаны все стройные логики, то есть логики над $J + \{(p \to q) \vee (q \to p)\}$ со свойствами CIP, IPR, PBP; получены другие технически сложные результаты. Однако неизвестно, конечно или бесконечно число J-логик со свойством CIP, и проблема интерполяции в расширениях минимальной логики J еще далека от своего решения.

3. Табличность и предтабличность над J и $S4$

Логика *т а б л и ч н а*, если характеризуется конечной алгеброй; *п р е д т а б л и ч н а*, если не является табличной, но любое ее расширение таблично.

Теорема 2. *Табличность и предтабличность разрешимы над J и $S4$.*

Факты:

1) Пусть L — модальная логика или J-логика. Логика L таблична тогда и только тогда, когда L не содержится ни в одной из предтабличных логик.

2) Существует точно три предтабличных с. и. л. [1], пять предтабличных расширений логики $S4$ ([2], Esakia-Meskhi, 1977), семь предтабличных J-логик [9].

3) Все указанные предтабличные логики узнаваемы в соответствующих областях.

Существует континуум предтабличных логик над модальной логикой $K4$ (W. Blok, 1980); проблема табличности неразрешима над $K4$ (A. Chagrov).

Список литературы

[1] *Максимова, Л. Л.* Предтабличные суперинтуиционистские логики // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 5. — С. 558–570.

[2] *Максимова, Л. Л.* Предтабличные расширения логики $S4$ Льюиса // Алгебра и логика. — 1975. — Т. 14, № 1 — С. 28–55.

[3] *Максимова, Л. Л.* Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 6. — С. 643–681.

[4] *Максимова, Л. Л.* Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика. — 1979. — Т. 18, № 5. — С. 556–586.

[5] *Максимова, Л. Л.* Разрешимость слабого интерполяционного свойства над минимальной логикой // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, № 2. — С. 152–188.

[6] *Максимова, Л. Л.* Разрешимость интерполяционного свойства Крейга в стройных J-логиках // Сибирский математический журнал. — 2012. — Т. 53, № 5. — С. 1048–1064.

[7] *Максимова, Л. Л.* Ограниченная интерполяция над модальной логикой $S4$ // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, № 4. — С. 461–501.

[8] *Максимова, Л. Л.* Узнаваемые логики / Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн // Алгебра и логика. — 2015, Т. 54, № 2. — С. 252–274.

[9] *Максимова, Л. Л.* Проблема табличности над минимальной логикой / Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн // Сибирский математический журнал. — 2016. — Т. 57, № 6. — С. 1320–1332.

[10] *Максимова, Л. Л.* Узнаваемые и различимые логики и многообразия // Алгебра и логика. — 2017. — Т. 56, № 3. — С. 567–574.

[11] *Максимова, Л. Л.* Сильная разрешимость и сильная узнаваемость / Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн // Алгебра и логика. — 2017. — Т. 56, № 5. — С. 559–581.

[12] *Maksimova, L.* Strongly decidable properties of modal and intuitionistic calculi. // Logic Journal of the IGPL. — 2000. — Т. 8, № 6. — С. 797–819.

Библиографическая ссылка

Максимова, Л. Л. Разрешимые свойства логик / Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 45–49.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-5

Сведения об авторах

1. Максимова Лариса Львовна
   Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Главный научный сотрудник

   630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
   E-mail: lmaksi@math.nsc.ru
2. Юн Вета Федоровна
   Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН. Старший научный сотрудник

   630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
   E-mail: yun@math.nsc.ru