УДК 510.5
AMS MSC2020: 03D30

Тотальные и кототальные степени перечислимости

Солон Б. Я.

Ивановский государственный университет

Аннотация. Для произвольного множества $A \subseteq \omega$ e-степень множества A и e-степень его дополнения $\bar{A}$ не обязаны быть сравнимы. Чтобы обеспечить сравнимость, можно выделить два класса e-степеней. Первый был введен одновременно с самой сводимостью по перечислимости — это класс тотальных e-степеней. По одному из определений множество $A \subseteq \omega$ тотально, если $\bar{A} \leqslant_e A$, и e-степень тотальна, если она содержит некоторое тотальной множество. Второй класс связан с перестановкой множеств A и $\bar{A}$ в этом отношении e-сводимости. Первыми выделили множества A с свойством $A \leqslant_e \bar{A}$ Ж. Миллер и М. Соскова в 2010 г. Для этих множеств они ввели термин кототальные множества. e-степень называется кототальной, если она содержит некоторое кототальное множество. В докладе будут расмотрены некоторые свойства обоих классов e-степеней.

Ключевые слова: сводимость по перечислимости, e-степень, тотальное множество, кототальное множество.

Введение

Мы будем использовать понятия и терминологию, которые приняты в монографии [7]. В статье [5] авторы впервые всесторонне рассмотрели понятия тотальности множеств и e-степеней, которые появились вполне естественно вместе с понятием e-сводимости, и понятие кототальности, которое впервые использовалось (как термин) в тезисах А. В. Панкратова [6] (в то время — моего аспиранта) и было изучено более широко в статьях автора [1, 8]. В статье [5] для множеств была введена система терминов, характеризующих различные уровни «кототальности» множеств — это граф-кототальность, кототальность и слабая кототальн о с т ь. В связи с предложенной новой терминологией появилась необходимость пересмотреть результаты работ [1,6,8]

1. Основные определения

Кроме определений, приведенных в аннотации, дадим дополнительно те, которые будут использованы в докладе. Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество натуральных чисел, $A \subseteq \omega$. Функция $f : \omega \to \omega$ называется т о т а л ь н о й, если $\mathrm{dom}(f) = \omega$. Обозначим через TF множество всех тотальных функций.

Определение 1. *Множество A называется г р а ф - к о т о т а л ь н ы м, если $A = \overline{\mathrm{graph}(f)}$ для некоторой функции $f \in TF$.*

Определение 2. *Множество A называется с л а б о к о т о т а л ь н ы м, если $\bar{A} \equiv_e \mathrm{graph}(f)$ для некоторой функции $f \in TF$.*

Определение 3. *e-степень $\mathbf{a}$ называется г р а ф - к о т о т а л ь н о й (с л а б о к о т о т а л ь н о й), если она содержит некоторое граф-кототальное (слабо кототальное) множество.*

Определение 4. *e-степень $\mathbf{a}$ называется к в а з и м и н и м а л ь н о й, если она ненулевая и единственная тотальная e-степень ниже $\mathbf{a}$ равна $\mathbf{0} = \deg_e(\varnothing)$.*

2. Основные результаты

Ясно, что каждая кототальная e-степень является слабо кототальной, а граф-кототальная e-степень — кототальной. В [5] показано, что все эти три уровня кототальности являются различными.

Класс граф-кототальных e-степеней лежит строго между тотальными степенями и кототальными степенями. Чтобы увидеть, что каждая тотальная степень является граф-кототальной, достаточно заметить, что каждая тотальная степень содержит график характеристической функции c_A некоторого тотального множества A; она также содержит дополнение графика c_A.

Теорема 1. *Любая тотальная e-степень $\mathbf{a} \geqslant \mathbf{0}'$ содержит функцию $f \in TF$ такую, что $\deg_e(\overline{\mathrm{graph}(f)})$ — квазиминиимальная e-степень.*

Теорема 2. *Для каждой тотальной e-степени $\mathbf{b} \geqslant \mathbf{0}'$ существует граф-кототальная квазиминимальная e-степень $\mathbf{a}$ такая, что $\mathbf{a}' = \mathbf{b}$.*

Замечание 1. *Эта теорема усиливает результат К. Макэвоя [4], который доказал, что квазиминимальные е-степени имеют все возможные е-скачки.*

Теорема 3. *Для каждой тотальной е-степени* **b** *существует граф-кототальная квазиминимальная е-степень* **a** *над* **b**.

Замечание 2. *Эта теорема усиливает результат Л. Гаттериджа [2] о существовании квазиминимальных е-степеней.*

Заключение

В последнее время было опубликовано большое количество результатов, содержащих примеры ко-тотальных множеств и е-степеней. Отмечу результат Жанделя [3] о том, что множество неидентичных слов в конечно порожденной простой группе кототально. Данное направление в изучении е-степеней можно продолжить, рассматривая различные уровни «тотальности» и «кототальности» функций и их частичных степеней.

Список литературы

[1] *Солон, Б. Я.* Тотальные и ко-тотальные степени перечислимости // Известия высших учебных заведений. Математика. — 2005. — № 9. — С. 60–68.

[2] *Gutteridge L.* Some results on enumeration reducibility : Ph. D. Dissertation. — Vancouver : Simon Fraser University, 1971.

[3] *Jeandel E.* Enumeration reducibility in closure spaces with applications to logic and algebra // Proc. 32nd Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS). — 2017. — P. 1–11.

[4] *McEvoy K.* Jumps of quasiminimal enumeration degrees // Journal of Symbolic Logic. — 1985. — Vol. 50, № 3. — P. 839–848.

[5] On cototality and the skip operator in the enumeration degrees / U. Andrews, H. A. Ganchev, R. Kuyper [et al.] // Transactions of the American Mathematical Society. — 2019. — Vol. 372. — P. 1631–1670.

[6] *Pancratov, A. V.* Some properties of e-degrees of cototal sets // Int. conf. «Logic and applications», Proceedings. — Novosibirsk, 2000.

[7] *Rogers, H. Jr.* Theory of Recursive Functions and Effective Computability. — New York : McGraw-Hill, 1967. — 482 p.

[8] *Solon, B.* Co-total Enumeration Degrees // Logical Approaches to Computational Barriers. CiE 2006. LNCS'3988. / Eds. Beckmann A. [et al.] — Berlin : Springer, 2006. — P. 538–545.

Библиографическая ссылка

Солон, Б. Я. Тотальные и кототальные степени перечислимости // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 73–76.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-10

Сведения об авторах

Борис Яковлевич Солон
Ивановский государственный университет. Заведующий кафедрой

Россия, 153025, г. Иваново, ул. Ермака, 39, ЦФО
E-mail: bysolon@gmail.com