

УДК 510.67
AMS MSC2020: 03C30, 03C15, 03C50

Семейства элементарных теорий и их характеристики¹

Судоплатов С. В.

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;
Новосибирский государственный технический университет;
Новосибирский государственный университет

Аннотация. Даётся обзор результатов о семействах элементарных теорий, их комбинациях и основных характеристиках, включая ранги и степени как в абсолютном смысле, так и относительно заданных формул. Исследуются связи между формулами и семействами теорий, а также связи между свойствами теорий при предельных переходах. Приводится механизм построения n -арных теорий через их аппроксимации.

Ключевые слова: элементарная теория, семейство теорий, формула, ранг, степень, n -арная теория.

Введение

Теория моделей [2, 4, 5] сформировалась в 1930–1950-х годах как раздел математической логики [3, 6], в котором изучаются связи между формальным языком, задающим информацию в виде синтаксических объектов, основанных на множествах формул, и его интерпретациями, моделями или структурами, являющимися семантическими объектами. Эти объекты можно использовать для классификации друг друга, создавая структурные классификации теорий и их моделей [7, 19]. При решении вопросов классификации возникают значимые характеристики (размерности, ранги, спектры,

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке в рамках программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1, проект № 0314-2019-0002, и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант № АР08855544.

различные меры сложности, и т.д.) для различных классов структур и их теорий [5, 20]. Универсальность предмета теории моделей позволяет, помимо собственных классификационных результатов, получать структурные результаты в смежных и прикладных областях.

Беря семейство структур (семантических объектов) или теорий (синтаксических объектов), можно определять как их влияние друг на друга через их комбинации [21, 22], так и возможности для построения новых структур/теорий по отношению к естественным операторам [23]. Эти операторы допускают аппроксимацию информации, рассматриваемой на семантическом/синтаксическом уровнях. В этом случае мы можем формировать структуры/теории с требуемыми свойствами, используя заданные аппроксимации и их предельные переходы [7, 24, 25].

Процесс построения новых структур/теорий может варьироваться с точностью до изоморфизма или элементарной эквивалентности. Количество этих вариаций определяет спектры/*e*-спектры для структур/теорий, которые могут иметь достаточно широкие диапазоны в допустимых рамках [5, 21]. Таким образом, с одной стороны, эти операторы могут генерировать новые структуры/теории, а с другой стороны, теоретико-модельные свойства и спектры/*e*-спектры для этих новых структур/теорий имеют границы, зависящие от заданных семейств.

К одной из важнейших характеристик теории T относится значение ее арности $\text{ar}(T)$ [27]. Эта характеристика связана с понятием базируемости теории [15] и исследована для различных теорий унаров и графов [8, 9], для упорядоченных теорий [1, 10].

Исследование семейств элементарных теорий и их характеристик включает следующие основные разделы, по которым получены определенные результаты:

1. Топологическая, спектральная и синтаксическая характеристизация тотальной трансцендентности семейств теорий и их замыканий, как в целом для полных и неполных теорий, так и для семейств теорий абелевых групп [11, 12, 16, 18, 25].
2. Описание ранговых значений и их динамики для различных семейств теорий и их подсемейств [13, 14, 16, 25].
3. Описание аппроксимируемости и аппроксимаций теорий различными семействами [17, 24].

4. Характеризация и описание порождающих множеств, P -замыканий $\text{Cl}_P(\mathcal{T})$ и E -замыканий $\text{Cl}_E(\mathcal{T})$ для семейств теорий \mathcal{T} [12, 23].
5. Характеризация и описание формул для семейств теорий, а также их характеристик [18, 26].
6. Описание арности теорий, их динамики и характеристик при переходе к замыканиям [27].

Список литературы

- [1] Алтаева А. Б. Бинарность почти ω -категоричных вполне о-минимальных теорий / А. Б. Алтаева, Б. Ш. Кулпешов // Сибирский математический журнал. — 2020. — Т. 61, № 3. — С. 484–498.
- [2] Дудаков, С. М. Основы теории моделей / С. М. Дудаков. — Тверь : Издательство Тверского государственного университета, 2013. — 480 с.
- [3] Ершов, Ю. Л. Математическая логика / Ю. Л. Ершов, Е. А. Паллотин. — М. : Физматлит, 2011. — 356 с.
- [4] Кейслер, Г. Теория моделей / Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн. — М. : Мир, 1977. — 616 с.
- [5] Справочная книга по математической логике. Ч. 1. Теория моделей / Под ред. Дж. Барвайса. — М. : Наука, 1982. — 392 с.
- [6] Судоплатов, С. В. Математическая логика и теория алгоритмов : учебник и практикум для вузов / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — Изд. 5-е изд., стер. — М. : Изд-во Юрайт, 2021. — 256 с.
- [7] Судоплатов, С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 1, 2 / С. В. Судоплатов. — Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2018. — 376 + 452 с.
- [8] Судоплатов, С. В. Базируемость стабильных теорий и свойства счетных моделей с мощными типами : дис... канд. физ.-мат. наук : 01.01.06 / С. В. Судоплатов. — Новосибирск, 1990. — 142 с.
- [9] Судоплатов, С. В. Об одной оценке сложности теорий графов / С. В. Судоплатов // Сибирский математический журнал. — 1996. — Т. 37, № 3. — С. 700–703.

-
- [10] *Kulpeshov B. Sh.* Criterion for binarity of \aleph_0 -categorical weakly o-minimal theories / B. Sh. Kulpeshov // Annals of Pure and Applied Logic. — 2007. — Vol. 45. — P. 354–367.
 - [11] *Markhabatov, N. D.* Topologies, ranks, and closures for families of theories. I / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Algebra and Logic. — 2021. — Vol. 59, No. 6. — P. 437–455.
 - [12] *Markhabatov, N. D.* Topologies, ranks, and closures for families of theories. II / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Algebra and Logic. — 2021. — Vol. 60, No. 1. — P. 38–52.
 - [13] *Markhabatov, N. D.* Ranks for families of all theories of given languages / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Eurasian Mathematical Journal. — 2021. — Vol. 12, No. 2. — P. 52–58.
 - [14] *Markhabatov, N. D.* Definable subfamilies of theories, related calculi and ranks / N. D. Markhabatov, S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2020. — Vol. 17. — P. 700–714.
 - [15] *Palyutin, E. A.* Models of superstable Horn theories / E. A. Palyutin, J. Saffe, S. S. Starchenko // Algebra and Logic. — 1985. — Vol. 24, No. 3. — P. 171–210.
 - [16] *Pavlyuk, In. I.* Ranks for families of theories of abelian groups / In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2019. — Vol. 28. — P. 95–112.
 - [17] *Pavlyuk, In. I.* Approximations for theories of abelian groups / In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov // Mathematics and Statistics. — 2020. — Vol. 8, No. 2. — P. 220–224.
 - [18] *Pavlyuk, In. I.* Formulas and properties for families of theories of Abelian groups / In. I. Pavlyuk, S. V. Sudoplatov // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2021. — Vol. 36. — P. 95–109.
 - [19] *Shelah, S.* Classification theory and the number of non-isomorphic models / S. Shelah. — Amsterdam : North-Holland, 1990. — 705 p.
 - [20] *Sudoplatov, S. V.* Spectra for generative classes / S. V. Sudoplatov // Siberian Advances in Mathematics. — 2021. — Vol. 31, No. 1. — P. 53–68.

-
- [21] *Sudoplatov, S. V.* Combinations of structures / S. V. Sudoplatov // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2018. — Vol. 24. — P. 82–101.
 - [22] *Sudoplatov, S. V.* Combinations of structures and of their theories (an informative survey) / S. V. Sudoplatov // Algebra and model theory 12. Collection of papers. — Novosibirsk : Edition of NSTU, 2019. — P. 86–127.
 - [23] *Sudoplatov, S. V.* Closures and generating sets related to combinations of structures / S. V. Sudoplatov // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. — 2016. — Vol. 16. — P. 131–144.
 - [24] *Sudoplatov, S. V.* Approximations of theories / S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2020. — Vol. 17. — P. 715–725.
 - [25] *Sudoplatov, S. V.* Ranks for families of theories and their spectra / S. V. Sudoplatov // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2021. — Vol. 42, No. 12. — P. 2959–2968.
 - [26] *Sudoplatov, S. V.* Formulas and properties, their links and characteristics / S. V. Sudoplatov // Mathematics. — 2021. — Vol. 9, Issue 12. 1391. — 16 pp.
 - [27] *Sudoplatov, S. V.* Arities and arizabilities of first-order theories / S. V. Sudoplatov. — Preprint, Novosibirsk, 2021.

Библиографическая ссылка

Судоплатов, С. В. Семейства элементарных теорий и их характеристики // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 77–82.

<https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-11>

Сведения об авторах

СЕРГЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ СУДОПЛАТОВ

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН;

Новосибирский государственный технический университет;
Новосибирский государственный университет. Ведущий научный
сотрудник; Заведующий кафедрой; Профессор

*Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4, ИМ СО
РАН*

E-mail: sudoplat@math.nsc.ru