УДК 510.62, 510.52
AMS MSC2020: 68N17

Неподвижная точка для логических программ

Авхимович Н. В.

Тверской государственный университет

Аннотация. В данной работе рассматривается понятие частичной неподвижной точки для нормальных логических программ. Мы показываем, как при помощи неподвижной точки можно сократить запись логической программы, причем экспоненциально. Также исследуем задачу о вычислении неподвижной точки в общем случае и доказываем для нее PSPACE-полноту.

Ключевые слова: логическая программа, вычислительная сложность, неподвижная точка.

Введение

Логические программы широко применяются для описания тех или иных процессов обработки информации [2]. Одним из методов применения логических языков является неподвижная точка.

В этой работе мы исследуем задачу построения частичной неподвижной точки для логических программ. Показываем, что в некоторых случаях, благодаря неподвижной точке, можно представлять информацию в более коротком виде.

Однако, задача о вычислении неподвижной точки для нормальных логических программ в общем случае, является более сложной: она полная в классе PSPACE.

1. Основные определения

Определение 1 (Нормальная логическая программа). *Нормальная логическая программа (см. [2]) — это конечное множество, состоящее из нормальных предложений, то* *есть предложений вида*

$$y \leftarrow l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n,$$

где y — переменная без отрицания, а l_i — переменная с отрицанием или без.

В данной работе мы рассматриваем только нормальные логические программы. В дальнейшем, для краткости, будем называть их просто логическими программами, опуская слово нормальные.

Для логической программы L, все переменные, которые в ней встречаются, мы делим на две группы: входные и выходные. При наличии предложения

$$y \leftarrow l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$$

в программе L и истинности формулы $l_1 \wedge l_2 \wedge \ldots \wedge l_n$ на входных данных, считаем, что значение переменной y должно быть равно единице. Если значение переменной y не равняется единице ни в одном из предложений программы L, где y стоит в левой части, то считаем его равным нулю.

Мы рассматриваем только стратифицированные логические программы, точнее, программы не содержащие циклов в определении значений переменных.

Определение 2 (Частичная неподвижная точка). *Набор $\bar{y}$ называется частичной неподвижной точкой программы L на входе $\bar{x}$, если $L^i(\bar{x}) = L^{i+1}(\bar{x}) = \bar{y}$ для некоторого входного набора $\bar{x}$ и для некоторого натурального числа i.*

Рассмотрим следующую задачу (см. [3]). Пусть $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ — некоторая формула логики высказываний, находящаяся в дизъюнктивной нормальной форме. Пусть $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — это наборы длины n. Построим по формуле φ граф следующим образом: вершинами будут значения наборов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, то есть наборы из нулей и единиц. Ребро между вершинами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ существует тогда и только тогда, когда $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) = 1$. Длина формулы φ полиномиальна от n. Граф же имеет экспоненциальный размер относительно длины формулы φ.

Рассмотрим множество

$$\text{TRACK} = \{(\varphi, \bar{u}, \bar{v}) : \text{в графе, построенном по формуле } \varphi,$$

есть путь из $\bar{u}$ в $\bar{v}$ и из каждой вершины графа
исходит не более одного ребра}.

Известен следующий факт (см. [3]): множество TRACK является PSPACE-полным.

2. Основные результаты

Пусть у нас есть программа $K(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$:

$$y_1 \leftarrow x_1 \oplus \ldots \oplus x_n.$$

Построим программу $L(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1 &\leftarrow x_1 \oplus x_n; \\ y_i &\leftarrow x_{i-1}, \quad i = \overline{3, n}. \end{aligned}$$

Теорема 1. *Существует натуральное число m такое, что*

$$K(\bar{x}) = L^m(\bar{x}) = L^{m+1}(\bar{x})$$

для любого набора $\bar{x}$.

Таким образом, результат, выдаваемый программой K, можно получить при помощи построения неподвижной точки для программы L, то есть многократным ее применением. Оценим длины программ для обоих случаев. Поскольку мы рассматриваем только нормальные логические программы, необходимо представить K и L в нужном виде. Программа K будет состоять из 2^{n-1} нормальных предложений. Программа L будет состоять из n нормальных предложений и будет применяться $n-1$ раз. Получаем:

$$\begin{aligned} |K| &= O(2^n); \\ |L^{n-1}| &= O(n^2). \end{aligned}$$

Неподвижная точка позволяет в некоторых случаях длинную программу записать коротко: например, это справедливо для программы экспоненциальной длины, приведенной в работе [1].

Если же разрешить использование нахождения частичной неподвижной точки произвольных программ, это может привести к большому времени работы.

Рассмотрим задачу о достижимости неподвижной точки

$$PFP = \{(L, \bar{x}, \bar{y}) : \bar{y} \text{ — частичная неподвижная точка логической программы } L \text{ для набора } \bar{x}\}$$

Теорема 2. *Задача PFP является PSPACE-полной.*

Заключение

Мы рассмотрели понятие частичной неподвижной точки для логических программ: показали как с помощью неподвижной точки можно сократить запись логической программы определенного вида, имеющей экспоненциальную длину, а также рассмотрели задачу о достижимости неподвижной точки в общем случае.

Было бы интересно найти более широкий класс логических программ, длины которых можно сократить за счет применения неподвижной точки.

Список литературы

[1] *Avkhimovich, N.* Logic program invertibility in cryptography problems // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1902 — p. 012049.

[2] *Kifer, M.* Declarative Logic Programming: Theory, Systems, and Applications / M. Kifer, Y. A. Liu. — New York, N. Y. : Association for Computing Machinery and Morgan & Claypool, 2018. — 615 p.

[3] *Tantau, T.* A Note on the Complexity of the Reachability Problem for Tournaments // Electronic Colloquium on Computational Complexity. — 2001. — Vol. 8. — TR01-092.

Библиографическая ссылка

Авхимович, Н. В. Неподвижная точка для логических программ // Всероссийская научная конференция «Математические основы ин-

форматики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 91–95.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-14

Сведения об авторах

Авхимович Николь Вадимовна
Тверской государственный университет. Студент

Россия, 170100, Тверь, ул. Желябова, 33
E-mail: nicoleavkhimovich@mail.ru

Тверской государственный университет