УДК 519.218
AMS MSC2020: 60K25

Асимптотический анализ систем обслуживания с повторными вызовами при регенерирующем входящем потоке[1]

Афанасьева Л. Г., Баштова Е. Е.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Аннотация. Рассматривается многоканальная система с повторными вызовами и постоянной интенсивностью запросов с орбиты. Времена обслуживания требований имеют произвольное распределение, а входящий поток предполагается регенерирующим. На основе метода синхронизации и теорем о сильной гауссовской аппроксимации регенерирующих потоков мы устанавливаем аналог сильного принципа инвариантности Штрассена для количества требований в перегруженной системе.

Ключевые слова: системы обслуживания, повторные вызовы, условия стабильности, сильный принцип инвариантности.

Введение

Системы с повторными вызовами изначально представляли собой альтернативу классическим моделям телефонных систем, а именно систем с отказами, которые не учитывают возможности повторения вызовов от требований, получивших отказ. В системах с повторными вызовами можно рассматривать различные правила формирования потока вызовов с орбиты. Если предположить, что каждое блокированное требование независимо от других повторяет запросы через экспоненциально распределенные промежутки времени, то мы получим классическую политику повторов. Другой класс включает в себя системы с постоянной интенсивностью повторов. Эти системы

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00487.

возникли в работе [7] как модели телефонной связи. Далее произошел быстрый рост литературы (см. [4], [6] и литературу там), что в первую очередь связано с успешным применением систем этого класса при анализе коммуникационных и компьютерных сетей, где попытки повторов осуществляются процессором независимо от числа сообщений, хранящихся в узлах сети.

В работе [1] получено условие эргодичности для систем с повторными вызовами. В настоящей работе мы изучаем асимптотическое поведение количества требований в перегруженных системах и доказываем аналог сильного принципа инвариантности Штрассена для процесса, описывающего количество требований в системе.

1. Описание модели и основной результат

Имеется m одинаковых приборов. Времена обслуживания на каждом приборе — независимые одинаково распределенные случайные величины (н. о. р. с. в.) с функцией распределения $B(x)$. Если в момент поступления требования есть хотя бы один свободный прибор, то требование сразу начинает обслуживаться. Если же все приборы заняты, то оно отправляется на так называемую орбиту, откуда повторяет попытки попасть на обслуживание. Запросы с орбиты поступают через н. о. р. интервалы. Если в момент запроса есть свободный прибор, а на орбите есть требования, то одно из них отправляется на обслуживание. Такая модель называется моделью с постоянной интенсивностью запросов с орбиты.

Мы предполагаем, что входящий поток $X(\cdot)$ является регенерирующим.

Определение 1 (Регенерирующий поток). *Процесс $X(t)$ с неубывающими, непрерывными справа и имеющими предел слева траекториями называется регенерирующим потоком, если существует возрастающая последовательность $\{\theta_i, i \geqslant 0\}$, $\theta_0 = 0$ такая, что последовательность*

$$\{\kappa_j\}_{j=1}^{\infty} = \{X(\theta_{j-1}+t) - X(\theta_{j-1}), \theta_j - \theta_{j-1}, t \in [0, \theta_j - \theta_{j-1})\}_{j=1}^{\infty}$$

состоит из н. о. р. случайных элементов.

При этом случайная величина θ_j называется j-й точкой регенерации $X(t)$, а $\tau_j = \theta_j - \theta_{j-1}$ — j-м периодом регенерации. Основные свойства регенерирующих потоков приведены в [3]. Одним из них является тот факт, что если периоды регенерации τ_j и приращения ξ_j процесса $X(t)$ на этих периодах имеют конечное математическое ожидание, то существует интенсивность $\lambda = \lim\limits_{t\to\infty} X(t)/t$.

Мы изучаем процесс $Q(t)$ — число требований в системе (на орбите и на приборах вместе).

Введем дополнительное условие на входящий поток и времена обслуживания.

Условие 1. $\mathsf{P}(\xi_1 = 0, \tau_1 > 0) + \mathsf{P}(\xi_1 = 1, \tau_1 - t_1 > \eta_1) > 0$ *(здесь t_1 — момент поступления первого требования в систему).*

Пусть $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность н. о. р. с. в., представляющих собой интервалы между запросами с орбиты, $N(t)$ — процесс восстановления, построенный по последовательности $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$, его интенсивность $\nu = \lim\limits_{t\to\infty} N(t)/t$.

Условие 2. *Случайные величины ζ_n, $n \in \mathrm{N}$ имеют экспоненциальную фазу, то есть $\zeta_n = \zeta_n^{(1)} + \zeta_n^{(exp)}$, $\zeta_n^{(1)}$ и $\zeta_n^{(exp)}$ независимы, и $\zeta_n^{(exp)}$ имеют экспоненциальное распределение.*

Для формулировки результатов необходимо ввести вспомогательную систему M_0 с m приборами, входящим потоком $U(t) = X(t) + N(t)$ и отказами. Обозначим $n(t)$ — число занятых приборов в M_0, а t_k^0 — k-й момент поступления требования в M_0. В статье [1] показано, что при выполнении условий 1 и 2 существуют пределы

$$\lim_{k\to\infty} \mathsf{P}(n(t_k^0) = j) = P_j, \quad j = \overline{1, m},$$

и коэффициент загрузки системы равен

$$\rho = \frac{\lambda}{(\lambda + \nu)(1 - P_m)},$$

а также доказана следующая эргодическая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1 и 2.*
Если $\rho > 1$, то

$$Q(t) \xrightarrow{P} \infty \quad \text{при } t \to \infty.$$

Если $\rho < 1$, то $Q(t)$ стабилен, то есть при любом начальном состоянии существует

$$\lim_{t\to\infty} \mathsf{P}(Q(t) \leqslant x) = \Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения, не зависящая от начального состояния.
Если $\rho = 1$ и времена обслуживания также имеют экспоненциальную компоненту, то

$$Q(t) \xrightarrow{P} \infty \quad \text{при} \;\; t \to \infty.$$

Основной результат нашего доклада — сильная гауссовская аппроксимация длины очереди в ситуации, когда система перегружена.
Теорема 2. *Пусть $\rho > 1$, выполнены условия 1 и 2 и $\mathsf{E}\tau_i^r < \infty$, $\mathsf{E}\xi_i^r < \infty$, $\mathsf{E}\zeta_i^r < \infty$, для $r > 2$. Тогда на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ можно одновременно определить процесс Q, имеющий распределение числа требований в системе, и стандартный Винеровский процесс W так, что для некоторой константы $\sigma^2 > 0$*

$$\sup_{0 \leqslant u \leqslant t} \|Q(u) - (\rho - 1)u - \sigma W(u)\| = o(t^{1/r}), \;\; \text{п. н.},$$

при $t \to \infty$.

Доказательство основано на методе синхронизации [2], подходящем мажорировании, теоремах о гауссовской аппроксимации регенерирующих потоков [5] и дополнительной технике.

Заключение

Представленная теорема об аппроксимации с вероятностью единица процесса длины очереди имеет разнообразные следствия, такие как, например, сходимость в пространстве Скорохода и закон повторного логарифма. Кроме того, эта теорема позволит в дальнейшем, на основе наблюдения количества требований в системе, получить состоятельную оценку параметра σ^2, строить доверительные интервалы и проверять гипотезы о величине коэффициента загрузки, что является важным для приложений.

Список литературы

[1] *Афанасьева, Л. Г.* Условия стабильности системы с повторными вызовами при регенерирующем входящем потоке // Фундаментальная и прикладная математика. — 2018. — Т. 22, № 3. — С. 5–18.

[2] *Afanasyeva, L. G.* Asymptotic Analysis of Queueing Models Based on Synchronization Method // Methodology and Computing in Applied Probability. — 2020. — Vol. 22. — P. 1417–1438.

[3] *Afanasyeva, L. G.* Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server / L. G. Afanasyeva, E. E. Bashtova // Queueing Systems. — 2014. — Vol. 76. — P. 125–147

[4] *Artalejo, S. R.* Analysis of multiserver queues with constant retrial rate / S. R. Artalejo, A. Gómez-Corral, M. F. Neuts // European Journal of Operational Research. — 2001. — Vol. 135. — P. 569–581.

[5] *Bashtova, E.* Strong Gaussian approximation for cumulative processes with heavy tails / E. Bashtova, A. Shashkin. — URL: arXiv:2007.15481. — Загл. с титул. экрана.

[6] *Falin, G. I.* Retrial Queues / G. I. Falin, J. G. C. Templeton. — London : Chapman & Hall, 1997. — 320 p.

[7] *Fayolle, G.* A simple telephone exchange with delayed feedback // Proc. of the international seminar on Teletraffic Analysis in Computer Performance Evaluation / Eds. O. S. Boxma, S. W. Cohen, H. C. Tijms. — Amsterdam : Elsevier, 1986. — P. 245–253.

Библиографическая ссылка

Афанасьева, Л. Г. Асимптотический анализ систем обслуживания с повторными вызовами при регенерирующем входящем потоке / Л. Г. Афанасьева, Е. Е. Баштова // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 108–113.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-17

Сведения об авторах

1. Лариса Григорьевна Афанасьева
   Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Профессор

Россия, 119991, г. Москва, Ленинские Горы, 1
E-mail: *l.g.afanaseva@yandex.ru*

2. Елена Евгеньевна Баштова
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Доцент

Россия, 119991, г. Москва, Ленинские Горы, 1
E-mail: *bashtovaelenae@gmail.com*