УДК 510.644
AMS MSC2020: 03B22

Субституциональные логики[1]

Горбунов И. А.

Тверской государственный университет

Аннотация. Рассматривается вопрос о существовании субституциональных логик, отличных от классической логики. Доказано, что любая табличная логика, имеющая функционально полную систему связок, является субституциональной. Для этих логик доказано существование алгоритма, который по рекурсивной непротиворечивой аксиоматике теории строит для нее точную унифицирующую подстановку. Приведен эскиз алгоритма, который каждой конечно аксиоматизируемой теории табличной логики с полной системой связок ставит в соответствие точную унифицирующую подстановку. Рассмотрен вопрос существования несубституциональных логик, в частности, доказано, что интуиционистская логика является несубституциональной.

Ключевые слова: обращение подстановки, точная унифицирующая подстановка, субституциональные логики, табличные логики, интуиционистская логика.

Введение

Алфавитом языка пропозициональной логики будем называть набор, состоящий из счетного множества пропозициональных переменных $\Pi = \{p_i : i \geqslant 1\}$, не более чем счетного множества Σ конечноместных функциональных символов (которые мы будем называть символами логических связок) и множества вспомогательных символов $\Upsilon = \{(,),,\}$. Множество всех формул в этом языке обозначим посредством Φ.

Подстановкой будем называть гомоморфное продолжение отображения $\varepsilon : \Pi \to \Phi$ на множество всех формул. Поскольку это

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 21-18-00195.

продолжение единственно, то обозначать его будем тоже ε. Для любого множества формул Γ посредством $\varepsilon\Gamma$ будем обозначать результат применения подстановки ε ко всем формулам этого множества. Посредством $\mathbf{E}$ обозначим множество всех подстановок.

Л о г и к о й будем называть соответствие $\vdash\ \subseteq 2^{\Phi} \times \Phi$, которое удовлетворяет условиям:

$$
\begin{array}{ll}
\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi & \text{(рефлексивность);}\\
\Gamma \vdash \varphi \text{ и } \forall \psi \in \Gamma\ (\Delta \vdash \psi) \Rightarrow \Delta \vdash \varphi & \text{(транзитивность);}\\
\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \exists \Delta \subseteq \Gamma\ (\Delta \vdash \varphi \text{ и } \Delta \text{ — конечное}) & \text{(финитарность);}\\
\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \forall \varepsilon \in \mathbf{E}\ (\varepsilon(\Gamma) \vdash \varepsilon(\varphi)) & \text{(структурность).}
\end{array}
$$

Т е о р и е й данной логики будем называть множество формул, замкнутое относительно каждой секвенции логики. Теорию T будем называть н е п р о т и в о р е ч и в о й, если $T \neq \Phi$.

Если в логике есть секвенция вида $\varnothing \vdash \varphi$, то формулу φ будем называть т а в т о л о г и е й логики.

О б р а щ е н и е м п о д с т а н о в к и ε будем называть операцию взятия прообраза множества формул для отображения ε. Обозначать эту операцию будем ε^{-1}. Таким образом, для любого множества формул Γ имеем: $\varepsilon^{-1}(\Gamma) = \{\varphi : \varepsilon\varphi \in \Gamma\}$.

Известен следующий факт, который получил название лемма Сушко ([6], стр. 14): для любой пропозициональной логики верно, что прообраз всякой ее теории при всякой подстановке также является теорией данной логики.

Множество, состоящее из всех прообразов множества всех тавтологий, взятых относительно каждой из подстановок, образует некоторое множество теорий. Естественным образом возникает вопрос о том, как связаны между собой множество всех непротиворечивых теорий и множество всех прообразов множества тавтологий. Известно [1], что в случае классической логики эти множества совпадают, поскольку для каждой непротиворечивой T теории классической логики можно указать такую подстановку ε_T, при которой будет верно равенство $\varepsilon_T^{-1}(L) = T$, где L — множество всех тождественно истинных формул. Такую подстановку будем называть т о ч н о й у н и ф и ц и р у ю щ е й п о д с т а н о в к о й д л я т е о р и и T, а логики, имеющие точные унифицирующие подстановки для каждой непротиворечивой теории, будем называть с у б с т и т у ц и о н а л ь н ы м и логиками.

В работе [1] поставлены открытые вопросы о том, существуют ли субституциональные логики, отличные от классической, и существуют ли несубституциональные логики.

1. Логики и матрицы

Пару $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}, D\rangle$, где $\mathbf{A}$ — алгебра на некотором непустом множестве A и $D \subseteq A$, будем называть логической матрицей. Множество D будем называть выделенным множеством. Полагаем, что операции алгебры $\mathbf{A}$ конечноместны.

Посредством $F^{\mathbf{A}}$ обозначим множество всех функций, которые можно образовать с помощью суперпозиции базовых функций алгебры $\mathbf{A}$ с использованием множества переменных Π. Оценкой переменных на матрице $\mathbf{M}$ будем называть отображение $\nu : \Pi \to A$. При некоторой оценке переменных ν всякая функция $f \in F^{\mathbf{A}}$ принимает некоторое значение, которое будем обозначать $\nu(f)$. Множество всех оценок переменных на матрице $\mathbf{M}$ обозначим $\Theta^{\mathbf{M}}$.

Матрицу $\mathbf{M}$ будем называть подходящей матрицей для логики $\mathbf{L}$, если всякой связке этой логики в алгебре $\mathbf{A}$ поставлена в соответствие операция той же местности. Таким образом, на подходящей матрице всякой формуле φ логики $\mathbf{L}$ ставится в соответствие функция $f^{\varphi} \in F^{\mathbf{A}}$. Значением (оценкой) формулы φ при оценке переменных ν называем значение функции f^{φ} при оценке ν. Таким образом, $\nu(\varphi) = \nu(f^{\varphi})$. Далее, говоря о матрицах некоторой логики $\mathbf{L}$, имеем ввиду только подходящие матрицы этой логики.

Для всякого множества формул Γ посредством $\nu(\Gamma)$ будем обозначать множество всех значений, которые принимают формулы из этого множества при оценке ν.

Будем говорить, что матрица $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}, D\rangle$ характеризует логику $\mathbf{L}$ (или полна относительно логики $\mathbf{L}$), если для любого $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \Phi$ выполняется условие

$$\forall \nu \in \Theta^{\mathbf{M}}\ (\nu(\Gamma) \subseteq D \Rightarrow \nu(\varphi) \in D) \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi.$$

Такую матрицу будем называть характеристической матрицей логики и говорить, что она задает логику $\mathbf{L}$, а логику $\mathbf{L}$

будем называть *логикой матрицы* $\mathbf{M}$.[2]

Теорию T логики $\mathbf{L}$ будем называть *выполнимой на матрице* $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}, D \rangle$, если существует такая оценка ν, что $\nu(T) \subseteq D$. Из определения характеристической матрицы следует, что единственной невыполнимой теорией заданной ею логики является противоречивая теория Φ.

Логику будем называть *табличной*, если она характеризуется матрицей $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}, D \rangle$, в которой множество A конечно.

2. Множество оценок

Поскольку множество переменных Π линейно упорядоченно своими индексами, то каждая оценка переменных ν определяет последовательность $(\nu(p_i) : i \geqslant 1)$, которую будем обозначать тоже посредством ν. Далее мы будем отождествлять оценку и эту последовательность.

Для всякой последовательности α, длина которой не меньше n, посредством $[\alpha]_n$ будем обозначать начальный интервал этой последовательности длиною n.

Далее считаем, что матрица $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}, D \rangle$ задана, и множество всех оценок на этой матрице будем обозначать Θ.

Пусть $\alpha \subseteq A^n$; *коинициальным классом оценок слова (последовательности)* α будем называть множество оценок $\alpha^* = \{\nu : [\nu]_n = \alpha\}$.

Рассмотрим множество теорий логики $\mathbf{L}$, которая задается матрицей $\mathbf{M}$.

Всякой непротиворечивой теории T сопоставим множество всех оценок Θ_T, при которых истинны все формулы данной теории, и множество $\Theta_T(n) = \{\alpha \in A^n : \alpha^* \cap \Theta_T \neq \varnothing\}$.

Заметим, что для всякой теории T множество оценок Θ_T является *компактным*, то есть для него выполняется условие

$$\forall \nu \in \Theta(\nu \in \Theta_T \Leftrightarrow \forall i \geqslant 1(([\nu]_i)^* \cap \Theta_T \neq \varnothing)).$$

[2] Таким образом, множество тавтологий логики некоторой матрицы совпадает со множеством формул, истинных в этой матрице.

3. Граф оценок и граф теории

Пусть **L** — логика, имеющая непустое множество тавтологий L. Пусть, к тому же, **L** — табличная логика, которая задается матрицей $\mathbf{M} = \langle \mathbf{A}, D\rangle$.[3] Кроме того, считаем, что связки логики образуют функционально полную систему функций в алгебре **A**. (Вопросы полноты функций k-значных логик изложены в [3], или более детально в [4], п. 10 и 12.) Поскольку множество A — конечное, его элементы можно заиндексировать начальным отрезком множества натуральных чисел, поэтому будем считать, что $A = \{0, \dots, k-1\}$ для некоторого $k \geqslant 2$.

Посредством V обозначим множество всех непустых слов алфавита $\{0, \dots, k-1\}$. Положим, что отношение $E \subseteq V^2$ — это такое отношение, что $(\alpha, \beta) \in E$ тогда и только тогда, когда слово β продолжает слово α на один символ.

Для любой теории T и для любого слова $\alpha \in V \cup \{\Lambda\}$ (здесь Λ — пустое слово) определим множество $R(\alpha, T) \subseteq A$, которое будем называть *множеством разрешенных теорией T продолжений слова α*. Это множество мы определим следующим образом:

$$R(\alpha,T) = \{0 \leqslant a \leqslant k-1 : \exists \beta \in \Theta_T(h(\alpha)+1)([\alpha]_i = [\beta]_i, \beta_{h(\alpha)+1} = a)\}.$$

Заметим, что для любого слова $\alpha \in V \cup \{\Lambda\}$ и любой непротиворечивой тории T верно, что $R(\alpha, T) \neq \varnothing$.

Рассмотрим граф $G = \langle V, E\rangle$. Индукцией по высоте вершины $\alpha \in V$ определим отображение $r : V \to \{0, \dots, k-1\}$, которое будем называть *раскраской графа G в соответствии с теорией T*.

Пусть $h(\alpha) = 1$; тогда

$$r(\alpha) = \begin{cases} \alpha_1, & \text{если } \alpha^* \cap \Theta_T \neq \varnothing, \\ a \in R(\Lambda, T), & \text{если } \alpha^* \cap \Theta_T = \varnothing. \end{cases}$$

Пусть для всех вершин, высота которых меньше $h(\alpha) = i$, раскраска определена; тогда

$$r(\alpha) = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } (r([\alpha]_1), \dots, r([\alpha]_{i-1}), \alpha_i)^* \cap \Theta_T \neq \varnothing, \\ a \in R(\beta, T), & \text{если } (r([\alpha]_1), \dots, r([\alpha]_{i-1}), \alpha_i)^* \cap \Theta_T = \varnothing, \end{cases}$$

[3] Следовательно, в матрице **M** множество D не пусто.

где $\beta = (r([\alpha]_1), \dots, r([\alpha]_{i-1}))$ Граф G, раскрашенный в соответствии с некоторой теорией T, будем обозначать G_T и называть *графом теории* T.

4. Точная унифицирующая подстановка

Пусть T — фиксированная непротиворечивая теория. По графу G_T для каждого $n \geqslant 1$ определим функцию $f_n(p_1, \dots, p_n)$ следующим образом: для любой вершины α высоты n положим $f_n(\alpha) = r(\alpha)$. В силу полноты системы связок логики существует формула $\pi_n(p_1, \dots, p_n)$, представляющая эту функцию. Таким образом, для любой оценки ν и любого $i \geqslant 1$ верно, что $\nu(\pi_i) = r([\nu]_i)$.

Подстановку ε_T определим следующим образом: $\varepsilon_T p_i = \pi_i$ для любого $i \geqslant 1$.

Будет верна

Теорема 1. *Всякая непротиворечивая теория табличной логики с полной системой связок является прообразом множества всех тавтологий этой логики при некоторой подстановке.*

Функцию $\neg x = x + 1 \pmod k$ назовем *циклическим отрицанием*. Как известно, система функций $\{\neg x, \max(x, y)\}$ является полной для любой k-значной логики ([4], стр. 62), где $k \geqslant 2$. Таким образом, в силу Теоремы 1, всякая логика в языке со связками $\neg$ и $\max$, которая задается k-значной матрицей (где $k \geqslant 2$), с выделенным множеством $D = \{k - 1\}$, является субституциональной.

Заметим, что из условий, которым удовлетворяет функция раскраски, и Теоремы 1 следует, что верна

Теорема 2. *Если для теории T классической логики существует алгоритм, который по любой непустой конечной последовательности $\alpha \in V$ определяет, пусто ли множество $\alpha^* \cap \Theta_T$, то функция ε_T вычислима.*

5. Алгоритм поиска точной унифицирующей подстановки для конечно аксиоматизируемых теорий

Пусть теория T — конечно аксиоматизируемая теория k-значной логики. Не уменьшая общности, можно считать, что она аксиоматизируется конечным списком аксиом Γ от переменных $p_1, \dots, p_n$.

В силу конечности множества аксиом и конечности множества A^n, вопрос о принадлежности $\alpha \in A^n$ ко множеству $\Theta_T(n)$ рекурсивно разрешим. Таким образом, существует алгоритм, который ставит в соответствие этой теории точную унифицирующую подстановку.

В частности, можно предложить следующий алгоритм.

Для множества формул Γ составим общую таблицу истинности ∇_Γ.

Посредством ∇_Γ^D обозначим подтаблицу таблицы ∇_Γ, состоящую из всех строк таблицы ∇_Γ, в которых все формулы из Γ принимают значения из выделенного множества. Для любой таблицы ∇ посредством $S(\nabla)$ обозначим число строк в ∇.

Положим $m = \lceil \log_k S(\nabla_\Gamma^D) \rceil$. По таблице ∇_Γ^D определим таблицу Δ_Γ следующим образом:

- если $S(\nabla_\Gamma^D) = k^m$, то $\Delta_\Gamma = \nabla_\Gamma^D$;
- если $S(\nabla_\Gamma^D) < k^m$, то Δ_Γ получим добавлением к таблице ∇_Γ^D ее последней строки $k^m - S(\nabla_\Gamma^D)$ раз.

Каждой переменной p_i сопоставим функцию f_i, которая задается строкой ее значений, совпадающей со столбцом значений переменной p_i в таблице Δ_Γ.

Поскольку система связок языка, в котором мы рассматриваем логику, полна, то функции f_i можно сопоставить некоторую выражающую ее формулу, которую мы будем обозначать π_i.

Рассмотрим подстановку ε_Γ, которую определим следующим образом:

$$\varepsilon_\Gamma p_i = \begin{cases} \pi_i, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n, \\ p_i, & \text{если } i > n. \end{cases}$$

Несложно заметить, что эта подстановка является точной унифицирующей подстановкой для теории T.

6. Несубституциональные логики

Пусть логика $\mathbf{L}$ задана. Множество всех тавтологий этой логики обозначим посредством L. Множество всех теорий этой логики обозначим посредством $Th(\mathbf{L})$. Посредством $T(\Gamma)$ обозначим наименьшую теорию, содержащую множество формул Γ.

Как известно ([6], стр. 196, Теорема 3.1.5), всякая логика характеризуется множеством всех матриц Линденбаума, более того, матрица $\langle \Phi^*, L \rangle$ (где Φ^* — свободная алгебра формул) является характеристической для множества всех тавтологий логики **L**.

Теорема 3. *Всякая субституциональная логика имеет характеристическую матрицу.*

Доказательство. Пусть логика **L** субституциональна.

Пусть $\Gamma \not\vdash \varphi$. Тогда на матрице $\langle \Phi^*, L \rangle$ при оценке $\varepsilon_{T(\Gamma)}$ мы получим, что $\varepsilon_{T(\Gamma)}(\Gamma) \subseteq L$ и $\varepsilon_{T(\Gamma)}(\varphi) \notin L$. □

Таким образом, логика Йохансcона (Johansson) J_{min} ([6], стр. 134), в силу Теоремы 3.2.7 ([6], стр. 206), Теоремы 3.2.10 ([6], стр. 208) и Теоремы 3, субституциональной не является, так как не имеет характеристической матрицы.

Заметим, что утверждение, обратное Теореме 3, верным не является, поскольку верна

Теорема 4. *Интуиционистская логика не является субституциональной.*

Как известно, интуиционистская логика характеризуется бесконечной матрицей ([2], стр. 121 или [5], стр. 58).

Заключение

Мы доказали, что всякая табличная логика с функционально полной системой связок является субституциональной. Также было доказано, что любая субституциональная логика имеет характеристическую матрицу. При этом наличие у логики характеристической матрицы не обеспечивает ее субституциональности.

В связи с полученными в работе результатами возникают некоторые открытые вопросы.

Существуют ли несубституциональные табличные логики?

Верна ли следующая гипотеза?

Гипотеза 1. *Всякая теория интуиционистской логики является прообразом, при некоторой подстановке, наибольшей содержащейся в ней подтеории, замкнутой по всем подстановкам.*

Список литературы

[1] *Горбунов, И. А.* Обращение подстановки и теории классической пропозициональной логики // Сборник трудов конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». — Казань : Изд-во КФУ, 2019. — С. 98–100.

[2] *Драгалин, А. Г.* Математический интуиционизм введение в теорию доказательств. — М. : Наука, 1979. — 256 с.

[3] *Яблонский, С. В.* Введение в дискретную математику : учебник. — Изд. 4-е, стер. — М. : Высшая школа, 2003. — 384 с.

[4] *Яблонский, С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Сборник статей по математической логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. Тр. МИАН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142.

[5] *Chagrov, A.* Modal Logic / A. Chagrov, M. Zakharyaschev. — Oxford : Clarendon Press, 1997. — 605 с.

[6] *Wojcicki, R.* Lectures on Propositional Calculi: Basic Theory of Consequence Operations. — Wroclaw : Ossolineum, 1984. — 473 с.

Библиографическая ссылка

Горбунов, И. А. Субституциональные логики // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 132–140.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-21

Сведения об авторах

Горбунов Игорь Анатольевич
Тверской государственный университет. Доцент

Россия, 170100, Тверь, ул. Желябова, 33, ТвГУ
E-mail: i_gorbunov@mail.ru