УДК 510.652
AMS MSC2020: 03F30

Интерпретации в арифметиках Бюхи[1]

Запрягаев А. А.

НИУ «Высшая школа экономики»

Аннотация. Арифметиками Бюхи называются расширения арифметики Пресбургера дополнительным предикатом, зависящим от натурального параметра p, служащие для формализации принятия множеств натуральных чисел, представленных в p-ичной системе счисления, конечными автоматами. В настоящей работе рассматриваются многомерные интерпретации арифметик Бюхи в себе и друг в друге для различных значений p. Поднимается вопрос об отсутствии иных интерпретаций арифметик Бюхи в собственных стандартных моделях, кроме определимо изоморфных тождественной. Из утвердительного ответа на указанный вопрос следует выполнение для арифметик Бюхи гипотезы Виссера, являющейся аналогом рефлексивности для слабых арифметических теорий. Устанавливается невозможность интерпретации в арифметиках Бюхи плотного порядка, откуда следует изоморфностью всякой интерпретации такого вида тождественной (не обязательно изоморфная). Также описываются интерпретации между арифметиками Бюхи для различных значений параметра p.

Ключевые слова: формальные арифметики, арифметики Бюхи, конечный автоматы, интерпретации, линейные порядки.

Введение

Арифметики Бюхи (с параметром $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2$) называется расширение арифметики Пресбургера $\mathbf{Th}(\mathbb{N}, =, +)$ дополнительным предикатным символом $V_p(x, y)$ с семантикой «y — максимальная степень p, на которую делится x» [1]. Их предложил исследовать (в несколько ином виде) Р. Бюхи в 1960 г. в качестве формализации

[1]Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ.

принятия множеств натуральных чисел конечными автоматами. В самом деле, имеет место следующее фундаментальное соответствие:

Теорема 1 (V. Bruyère, 1985). *Множество $A \subseteq \mathbb{N}$, представленное в p-ичной системе счисления, принимается конечным автоматом тогда и только тогда, когда оно выразимо в арифметике Бюхи* $\mathbf{Th}(\mathbb{N}, =, +, V_p)$.

Мы исследуем интерпретации арифметик Бюхи в себе, а также друг в друге для различных величин параметра p.

Для богатых теорий, в которых возможно кодирование синтаксиса, интерес представляет понятие рефлексивности, которое вводится как способность теории доказывать непротиворечивость всех своих конечно аксиоматизируемых подтеорий. А. Виссер предложил рассматривать отсутствие интерпретаций теории в собственных конечно аксиоматизируемых подтеориях,которое следует из рефлексивности, в качестве аналога рефлексивности для слабых теорий, в том числе фрагментов арифметики Пеано. Это дает мотивировку к изучению интерпретаций арифметик Бюхи в себя. Отсутствие иных интерпретаций теории саму в себя, кроме доказуемо изоморфных тождественной, влечет предложенное свойство.

Для арифметики Пресбургера, на основе которой арифметики Бюхи определяются, доказуемый изоморфизм всех интерпретаций тождественной был ранее установлен автором и Ф. Пахомовым в работе [2].

1. Интерпретации

Определение 1. *Назовем m-мерной (непараметрической) интерпретацией ι некоторой сигнатуры первого порядка $\mathcal{K}_1$ в модели $\mathfrak{A}$ сигнатуры (возможно, другой) $\mathcal{K}_2$ совокупность следующих первопорядковых формул в сигнатуре $\mathcal{K}_2$:*

1) *$D_\iota(\overline{y})$, задающая $\mathbf{D}_\iota \subseteq \mathfrak{A}^m$ (область определения внутренней модели);*
2) *$P_\iota(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ в соответствие каждому предикатному символу $P(x_1, \ldots, x_n)$ арности n в сигнатуре $\mathcal{K}_1$, включая равенство;*
3) *$f_\iota(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{y})$, в соответствие каждому функциональному символу $f(x_1, \ldots, x_n)$ арности n в сигнатуре $\mathcal{K}_1$.*

Все векторы $\overline{x}$ здесь понимаются длины m, а f_ι должны задавать графики функций (после факторизации по интерпретации равенства).

Это определение легко обобщается на естественный перевод уже всех термов и формул в $\mathcal{K}_1$ на язык $\mathcal{K}_2$:

Определение 2. *Положим:*

1) $(y = f(x_1, \ldots, x_n))^\iota = f_\iota(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n, \overline{y})$;
2) $(P(x_1, \ldots, x_n))^\iota = P_\iota(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$;
3) *логические связки коммутируют;*
4) $(\forall x\, A(x))^\iota = \forall \overline{x}\, (D_\iota(\overline{x}) \to A^\iota)$;
5) $(\exists x\, A(x))^\iota = \exists \overline{x}\, (D_\iota(\overline{x}) \wedge A^\iota)$,

Естественным образом ι и $\mathfrak{A}$ порождают модель $\mathfrak{B}$ сигнатуры $\mathcal{K}_1$ с областью определения $\mathbf{D}_\iota/{\sim_\iota}$, где отношение эквивалентности $\sim_\iota$ определяется как $=_\iota (\overline{x}_1, \overline{x}_2)$. Эта $\mathfrak{B}$ называется внутренней моделью.

Определение 3. *Если $\mathfrak{B} \models \mathbf{T}$, то говорят, что ι — интерпретация теории $\mathbf{T}$ в $\mathfrak{A}$; аналогично, если даны две теории, $\mathbf{T}$ в $\mathcal{K}_1$ и $\mathbf{U}$ в $\mathcal{K}_2$, будем называть интерпретацией теории $\mathbf{T}$ в теории $\mathbf{U}$, если для всякой модели $\mathfrak{A}$ теории $\mathbf{U}$ все теоремы $\mathbf{T}$ истинны в соответствующей внутренней модели.*

Пусть теперь две интерпретации действуют в одну сигнатуру $\mathcal{K}_2$ (или теорию $\mathbf{U}$ в ней).

Определение 4. 1) *m_1-мерная интерпретация ι_1 и m_2-мерная интерпретация ι_2 (допустимо $m_1 \neq m_2$) называются изоморфными, если имеется изоморфизм f между соответствующими внутренними моделями;*

2) *Если f может при этом быть выражена $(m_1 + m_2)$-местной формулой F в $\mathcal{K}_2$, назовем этот изоморфизм определимым.*

Определение 5. 1) *Говорят, что интерпретация ι неотносительна, если формула $D_\iota(\overline{y})$, задающая область определения внутренней модели, тождественно истинна (областью определения является все $\mathfrak{B}^m$);*

2) *Говорят, что интерпретация ι имеет абсолютное равенство, если равенство в $\mathcal{K}_1$ интерпретируется как совпадение векторов в $\mathfrak{A}$.*

2. Основные результаты

Поскольку всякая арифметика Бюхи определяется как элементарная теория $(\mathbb{N}, =, +, V_n)$, не имеет значения, рассматриваются интерпретации в теории или в ее стандартной модели. Более того, без ограничения общности можно утверждать, что интерпретации всегда неотносительны и имеют абсолютное равенство:

Лемма 2. *Для любой интерпретации арифметики Бюхи в $\mathbb{N}$ как модель некоторой арифметики Бюхи существует определимо изоморфная ей неотносительная интерпретация с абсолютным равенством.*

Тем самым, всегда можно рассматривать эту новую интерпретацию вместо исходной.

Для арифметик Бюхи также имеет место известное описание порядкового типа нестандартных моделей арифметики Пеано:

Лемма 3. *Всякая нестандартная модель арифметики Бюхи, рассматриваемая как модель $(\mathbb{N}, <)$ ($<$ определимо в $\mathbb{N}, +$) имеет порядковый тип $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ — некоторый плотный линейный порядок без первого и последнего элементов.*

В частности, у всякой нестандартной модели всякой арифметики Бюхи порядковый тип плотен (содержит в качестве подпорядка $\mathbb{Q}$).

Мы доказываем:

Теорема 4. *Всякий линейный порядок, определимый в некоторой арифметике Бюхи, разрежен, то есть не содержит подпорядка, изоморфного $\mathbb{Q}$.*

Отсюда мы получаем, что при интерпретации арифметики Бюхи в $\mathbb{N}$, рассматриваемом как модель некоторой арифметики Бюхи, внутренняя модель может быть только стандартной. Тем самым:

Теорема 5. *Если интерпретация из некоторой арифметики Бюхи $\mathbf{Th}(\mathbb{N}, =, +, V_n)$ в себя существует, то она изоморфна тождественной.*

Мы выдвигаем гипотезу, что для $m = 1$ (одномерных интерпретаций) этот изоморфизм всегда определим в арифметике Бюхи $\mathbf{Th}(\mathbb{N}, =, +, V_k)$.

3. Интерпретации между арифметиками Бюхи для различных значений параметра

Определение 6. *Назовем числа $n, k \in \mathbb{N}$, $n, k \geqslant 2$ согласованными, если существуют $p, q \in \mathbb{N}$, $p, q > 0$ такие, что $n^p = k^q$.*

Это определение задает отношение эквивалентности на натуральных числах. Имеет место следующее:

Теорема 6. *Если числа n, k согласованы, то интерпретаций из $\mathbf{Th}(\mathbb{N}, =, +, V_n)$ в $\mathbf{Th}(\mathbb{N}, =, +, V_k)$ не существует.*

Если же n, k не согласованы, то существует интерпретация из $\mathbf{Th}(\mathbb{N}, =, +, V_n)$ в $\mathbf{Th}(\mathbb{N}, =, +, V_k)$ (в силу Теоремы 5, ее внутренняя модель стандартна).

Этот результат согласуется с теоремой Кобхэма – Семенова [1], согласно которой множество натуральных чисел, определимое в двух арифметиках Бюхи с несогласованными параметрами, определимо в арифметике Пресбургера.

Заключение

Дальнейшие исследования в области интерпретаций арифметик Бюхи будут концентрироваться в первую очередь на явном построении определения изоморфизма при одномерной интерпретации арифметики Бюхи в собственной стандартной модели. Текущая гипотеза состоит в том, что указанное определение можно построить, что дает доказательство гипотезы Виссера в одномерном случае.

Список литературы

[1] Logic and p-recognizable sets of integers / V. Bruyère, G. Hansel, C. Michaux, R. Villemaire // Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin. — 1994. — Vol. 1, №2. — P. 191–238.

[2] *Pakhomov, F.* Multi-dimensional interpretations of Presburger arithmetic in itself / F. Pakhomov, A. Zapryagaev // Journal of Logic and Computation. — 2020. — Vol. 30, №8. — P. 1681–1693.

Библиографическая ссылка

Запрягаев, А. А. Интерпретации в арифметиках Бюхи // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 156–161.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-23

Сведения об авторах

Александр Александрович Запрягаев
НИУ «Высшая школа экономики». Стажер-исследователь Международной лаборатории логики, лингвистики и формальной философии, аспирант Факультета математики

Россия, 119048, Москва, Усачева ул., д. 6, каб. 417
E-mail: azapryagaev@hse.ru