УДК 519.872
AMS MSC2020: 60K25

О стационарном распределении числа требований в одной системе массового обслуживания

Кондратенко А. Е.*, **Соболев В. Н.****

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
**Лаборатория ТВП

Аннотация. Рассматривается однолинейная система массового обслуживания с групповым поступлением требований, в которой длительности обслуживания имеют показательное распределение, число заявок в поступающей в систему группе требований ограничено, а число мест для ожидания не ограничено. Для данной системы массового обслуживания показано, что стационарные вероятности числа заявок в системе могут быть выражены через свертку аналогичных вероятностей вложенной цепи Маркова и нормированных хвостовых вероятностей числа заявок в поступающей в систему группы требований.

Ключевые слова: система массового обслуживания, групповое поступление, стационарное распределение, производящая функция вероятностей, вложенная цепь Маркова, процесс восстановления.

Введение

В системе массового обслуживания $GI^\nu|M_\mu|1|\infty$ моменты поступления требований $t_0 = 0$, $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ образуют процесс восстановления [1] с функцией распределения $\mathsf{P}\{X_n < t\} = G(t)$, где $X_n = t_n - t_{n-1}$, $n \geqslant 1$.

В каждый момент t_n поступает группа из ν_n требований, причем величины ν_n независимы, одинаково распределены и ограничены. Величины ν_n независимы от величин X_n.

В системе имеется один обслуживающий прибор, время обслуживания распределено по показательному закону с интенсивность обслуживания μ и функцией распределения $F(t) = 1 - e^{-\mu t}$, а число мест для ожидания неограниченно.

Пусть $\xi(t)$ — число требований в системе в момент t. В рамках данной системы в [3], с. 171–175, (подробнее см. [5], с. 97–108) было найдено стационарное распределение процесса

$$\mathsf{P}(z) = \lim_{t \to \infty} M z^{\xi(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n,$$

в котором искомое распределение определялось через стационарное распределение вложенной однородной цепи Маркова

$$\xi_n = \xi(t_n - 0), \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \xi_1 = 0$$

с производящей функцией

$$\pi(z) = \lim_{t \to \infty} M z^{\xi_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k.$$

При этом выражение $\mathsf{P}(z)$ через $\pi(z)$ носило чисто аналитический характер. Однако оказывается, что данной взаимосвязи можно придать вероятностную интерпретацию. Данные результаты и будут представлены ниже.

1. Основные определения

Определение 1. *Определим T как среднее время между поступлениями групп заявок в систему*

$$T = \mathsf{M} X_n = \int_0^{\infty} t \, dG(t). \tag{1}$$

Пусть $\alpha(z) = \mathsf{M} z^{\nu_n} = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_m z^m$, $\alpha_m \neq 0$ — производящая функция вероятностей $\alpha_k = \mathsf{P}\{\nu_n = k\}$, $k = 1, 2, \ldots, m$. Тогда

$$\nu = \mathsf{M}\nu_n = \alpha'(z)\big|_{z=1} = \sum_{k=1}^{m} k\alpha_k \tag{2}$$

является средним числом заявок в поступающей группе.

Для входящей группы требований можно определить [4], т. 1, с. 271, вероятности хвоста распределения

$$A_k = \mathsf{P}\{\nu_n \geqslant k\} = \mathsf{P}\{\nu_n > k-1\} = \sum_{l=k}^{m} \alpha_l, \quad k = 1, \ldots, m.$$

В силу равенства

$$\sum_{k=1}^{m} A_k = \sum_{k=1}^{m} (\alpha_k + \ldots + \alpha_m) = (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + m\alpha_m) = \nu$$

скалярные величины

$$q_k = \frac{A_k}{\nu}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

представляют собой распределение вероятностей с производящей функцией

$$A(z) = \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{m} A_k z^k = \sum_{k=1}^{m} q_k z^k. \tag{3}$$

Пусть случайная величина Y_n обозначает время обслуживания n-й заявки. Величины Y_n независимы друг от друга и от величин X_n, а также имеют одинаковое распределение.

В этом случае среднее время обслуживания n-й заявки τ конечно и равно

$$\tau = \mathsf{M} Y_n = \int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} x \mu e^{-\mu x}\, dx.$$

Пусть η_n — это число точек пуассоновского потока, с параметром μ, приходящих на интервале (t_n, t_{n+1}). Поскольку в системе имеется один обслуживающий прибор, а время обслуживания распределено по показательному закону с параметром μ, то величину η_n можно интерпретировать как количество заявок обслуженных за время $X_{n+1} = t_{n+1} - t_n$. Среднее число обслуженных на интервале (t_n, t_{n+1}) требований равно

$$\mathsf{M}\eta_n = \mu T = \frac{1}{\rho_0},$$

где $\rho_0 = \lambda/\mu$. Тогда нагрузка рассматриваемой системы массового обслуживания может быть найдена по формуле

$$\rho = \nu \rho_0. \tag{4}$$

2. Основные результаты

Для рассматриваемого стационарного распределения справедливы (см. также [2]) следующие представления.

Теорема 1. *Если выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и задается производящей функцией*

$$P(z) = \rho \pi(z) A(z) + 1 - \rho, \tag{5}$$

где $A(z)$ определяется равенством (3), а ρ — это нагрузка данной системы массового обслуживания.

Формула (5) показывает, что искомое распределение есть смесь вырожденного распределения и распределения представляющего собой сумму распределений: стационарного распределения вложенной цепи Маркова с распределением «хвоста» входящей группы требований.

Следствие 2. *Если для системы $M_\lambda^\nu|M_\mu|1|\infty$ выполнено условие $\rho < 1$, то стационарное распределение процесса $\xi(t)$ существует и совпадает со стационарным распределением последовательности $\xi(t_n - 0)$, а для их производящих функцией справедливо представление*

$$P(z) = \pi(z) = \frac{1-\rho}{1-\rho A(z)}. \tag{6}$$

Формально можно определить вероятности π_j для отрицательных индексов $j = -1, -2, \ldots, -m$. В силу того, что π_j — это вероятность того, что в системе в момент времени $(t_n - 0)$ находится j требований, то $\pi_{-1} = \ldots = \pi_{-n} = 0$.

Замечание 1. *Определение π_j для отрицательных индексов позволяет представить стационарные вероятности p_n как свертку*

$$p_n = \rho\big(A_1\pi_{n-1} + A_2\pi_{n-2} + \ldots + A_m\pi_{n-m}\big)$$

для любого натурального $n = 1, 2, \ldots$

Заключение

Введение в системе массового обслуживания $GI^{\nu}|M_{\mu}|1|\infty$ для распределения числа требований во входящей группе вероятностей хвоста данного распределения позволяет представить вероятности p_n как свертку двух распределений, одно из которых — распределение вложенной цепи Маркова, а другое — описанное выше хвостовое распределение.

Список литературы

[1] *Гнеденко, Б. В.* Лекции по теории массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. — Киев : [б. и.], 1963. —315 с.

[2] *Соболев, В. Н.* О законе стационарной очереди для одной системы массового обслуживания с групповым поступлением требований // Управление большими системами. — 2019. — Вып. 77. — С. 6–19.

[3] *Соловьев, А. Д.* Одна система массового обслуживания с групповым поступлением требований / А. Д. Соловьев, В. Н. Соболев // Аналитические и вычислительные методы в теории вероятностей и ее приложениях (АВМТВ-2017) = Analytical and Computational Methods in Probability Theory and its Applications (ACMPT-2017) : материалы Международной научной конференции. Россия, Москва, 23–27 октября 2017, под общ. ред. А. В. Лебедева. — М. : РУДН, 2017. —С. 171–175.

[4] *Феллер, В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2 томах. — М. : Мир, 1964. — 2 т.

[5] *Soloviev A.D.* One Server Queue with Bulk Arrivals / A. D. Soloviev, V. N. Sobolev // Analytical and Computational Methods in Probability Theory. ACMPT 2017 (Moscow, Russia, October 23–27). Lecture Notes in Computer Science. Vol. 10684. / Eds. V. V. Rykov, N. D. Singpurwalla, A. M. Zubkov. — Cham : Springer, 2017. — P. 97–108.

Библиографическая ссылка

Кондратенко, А. Е. О стационарном распределении числа требований в одной системе массового обслуживания / А. Е. Кондратенко, В. Н. Соболев // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 162–167.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-24

Сведения об авторах

1. Александр Евгеньевич Кондратенко
   Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Доцент

   Россия, 119991, г. Москва, Ленинские горы, д. 1
   E-mail: ae_cond@mech.math.msu.su

2. Виталий Николаевич Соболев
   Лаборатория ТВП. Научный сотрудник

   Россия, 117418, г. Москва, Нахимовский проспект, д. 47
   E-mail: sobolev_vn@mail.ru