УДК 004.93
AMS MSC2020: 68T27

Изоморфизм предикатных формул и его применение для выделения общих свойств сложных структурированных объектов в задачах ИИ[1]

Косовская Т. М.

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. Под сложным структурированным объектом понимается объект, являющийся совокупностью своих элементов, каждый из которых обладает некоторыми свойствами, и эти элементы могут находиться в заданных отношениях (не обязательно бинарных). Для таких объектов адекватным языком описания является язык исчисления предикатов. Рассматривается подход к решению ряда задач распознавания и анализа сложных структурированных объектов. Введенное автором понятие изоморфизма элементарных конъюнкций предикатных формул дает возможность решать следующие задачи: создание иерархического описания множества объектов, существенно уменьшающего вычислительную сложность распознавания объектов; построение на его основе предикатных сетей для распознавания сложных структурированных объектов; построение нечетких предикатных сетей, позволяющих определить, какая часть распознаваемого объекта в какой степени похожа на часть известного объекта; «распараллеливание» процесса распознавания объекта; создание полного описания объекта при мульти-агентном сборе информации; построение онтологии множества сложных структурированных объектов.

Ключевые слова: изоморфизм предикатных формул, предикатная сеть, мульти-агентное описание, онтология.

[1]Исследование поддержано Санкт-Петербургским государственным университетом, проект № 73555239.

Введение

Использование формул исчисления предикатов для описания и распознавания сложных структурированных объектов было предложено еще в 60-е годы XX века, например, в [7]. Под сложным структурированным объектом понимается объект, являющийся совокупностью своих элементов, каждый из которых обладает некоторыми свойствами, и эти элементы могут находиться в заданных отношениях (не обязательно бинарных).

Ранее было доказано, что при распознавании так описанных объектов возникающие задачи являются NP-трудными [1]. Однако это согласуется с тем, что несмотря на полиномиальность аналогичных задач при описании объектов строками бинарных или канечнозначных признаков, сами длины таких строк экспоненциальны от длины записи описаний на языке исчисления предикатов.

Введенное автором понятие изоморфизма элементарных конъюнкций предикатных формул (их совпадение с точностью до имен переменных и порядка конъюнктивных членов) полиномиально эквивалентно понятию изоморфизма графов [6], задача проверки которого является «открытой» задачей, для решения которой не известен полиномиальный алгоритм и не доказана ее NP-полнота.

В настоящей работе описаны задачи, решение которых основано на выделении изоморфных подформул, позволяющих находить общие свойства объектов из заданного множества.

1. Основные определения

Определение 1 (Сложный структурированный объект). *Сложный структурированный объект ω — это множество элементов $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_t\}$, на которых задан набор предикатов $p_1, \dots, p_n$, задающих свойства элементов и отношения между ними.*

Пример 1. *Четырехугольник, заданный четырьмя своими вершинами $\{A, B, C, D\}$, на множестве которых определены предикаты $adj(x, y)$: «x смежна с y», $p(x, y, z, u)$: «отрезок $[x, y]$ параллелен отрезку $[z, u]$», $eq(x, y, z, u)$: «длина отрезка $[x, y]$ равна длине отрезка $[z, u]$», $ang_{sh/b/s}(x, y, z)$: «угол xyz острый/тупой/прямой».*

Определение 2 (Описание сложного структурированного объекта). *Описанием сложного структурированного объекта ω называ-*

ется элементарная конъюнкция $S(\omega)$ литералов, истинных на этом объекте.

Пример 2. *Описанием квадрата $S(\{A, B, C, D\})$ является формула*

$$\begin{aligned} &adj(A, B) \mathbin{\&} adj(B, C) \mathbin{\&} adj(C, D) \mathbin{\&} \\ &\qquad \mathbin{\&} adj(D, A) \mathbin{\&} p(A, B, C, D) \mathbin{\&} p(B, C, A, D) \mathbin{\&} \\ &\qquad \mathbin{\&} eq(A, B, C, D) \mathbin{\&} eq(B, C, A, D) \mathbin{\&} ang_s(A, B, C) \mathbin{\&} \\ &\qquad\qquad \mathbin{\&} ang_s(B, C, D) \mathbin{\&} ang_s(C, D, A) \mathbin{\&} ang_s(D, A, B). \end{aligned}$$

Определение 3 (Описание множества объектов). *Описание множества объектов — это дизъюнкция элементарных конъюнкций с переменными в качестве аргументов, истинная для всех объектов этого множества и только для них.*

Пусть задано множество объектов Ω и его разбиение на K (возможно пересекающихся) классов $\Omega = \bigcup\limits_{k=1}^{K} \Omega_k$. $A_k(\overline{x})$[2] — описание множества Ω_k. Задача идентификации, принадлежит ли объект ω множеству Ω_k, сводится к проверке

$$S(\omega) \Rightarrow \exists \overline{x}_{\neq}\ A_k(\overline{x})^{3}. \tag{1}$$

Проверка логического следования (1) является NP-полной задачей, если количество переменных в $\overline{x}$ меньше количества элементов в ω и GI-полной, если количество переменных в $\overline{x}$ равно количеству элементов в ω [1, 6]. При этом верхние оценки сложности проверки (1) экспоненциально зависят от длины записи формулы $A_k(\overline{x})$.

Определение 4 (Изоморфизм элементарных конъюнкций). *Две элементарные конъюнкции атомарных формул исчисления предикатов $P(a_1, \dots, a_m)$ и $Q(b_1, \dots, b_m)$ называются изоморфными $P(a_1, \dots, a_m) \sim Q(b_1, \dots, b_m)$, если существуют такая элементарная конъюнкция $R(x_1, \dots, x_m)$ и подстановки аргументов $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ и $b_{j_1}, \dots, b_{j_m}$ формул $P(a_1, \dots, a_m)$ и $Q(b_1, \dots, b_m)$ соответственно вместо всех вхождений переменных $x_1, \dots, x_m$ формулы $R(x_1, \dots, x_m)$,*

[2] $\overline{x}$ — обозначение для списка элементов конечного множества x, соответствующего некоторой перестановке номеров его элементов.

[3] Обозначение $\exists \overline{x}_{\neq}$ означает, что производится проверка существования набора различных значений переменных.

что результаты этих подстановок $R(a_{i_1}, \dots, a_{i_m})$ и $R(b_{j_1}, \dots, b_{j_m})$ совпадают с формулами $P(a_1, \dots, a_m)$ и $Q(b_1, \dots, b_m)$ соответственно с точностью до порядка литералов.

При этом полученные подстановки $(a_{i_1} \to x_1, \dots, a_{i_m} \to x_m)$ и $(b_{j_1} \to x_1, \dots, b_{j_m} \to x_m)$ называются унификаторами формул $P(a_1, \dots, a_m)$ и $Q(b_1, \dots, b_m)$ с формулой $R(x_1, \dots, x_m)$ соответственно.

Определение 5. *Элементарная конъюнкция называется максимальной общей (с точностью до имен переменных) подформулой двух заданных элементарных конъюнкций формулой, если она изоморфна некоторым подформулам этих элементарных конъюнкций, но после добавления в нее любого литерала она не изоморфна ни одной подформуле хоть одной из них.*

Пример максимальной формулы, изоморфной подформулам двух заданных элементарных конъюнкций.

Пусть $P(a,b,c) = p_1(a,b) \,\&\, \neg p_1(a,c) \,\&\, p_2(b,c,a)$, $Q(a,b,c) = p_1(b,a) \,\&\, \neg p_1(a,c) \,\&\, p_2(a,c,b)$. Эти элементарные конъюнкции имеют две максимальные общие подформулы $R_1(a,c) = \neg p_1(a,c)$ с одним литералом и $R_2(x,y) = p_1(x,y) \,\&\, p_2(y,c,x)$, изоморфную подформулам формул $P(a,b,c)$ и $Q(a,b,c)$, так как $P(a,b,c) = R(a,b) \,\&\, p_1(a,c)$, $Q(a,b,c) = R(b,a) \,\&\, p_1(a,c)$.

Определение 6. *Максимальная общая подформула элементарных конъюнкций, задающих описания множества объектов, называется максимальным общим свойством этого множества объектов.*

2. Многоуровневое описание класса

Понятие максимальной формулы, изоморфной подформулам двух заданных элементарных конъюнкций, позволяет выделить из элементарных конъюнкций, входящих в $A_k(\overline{x})$, общие (с точностью до изоморфизма) подформулы [2]. Последовательное выделение общих (с точностью до изоморфизма) подформул $P_i^l(\overline{y}_i^l)$ $(l = 1, \dots, n_l)$ из уже выделенных подформул позволяет построить многоуровневое описание класса Ω_k. При этом вводятся новые предикаты p_i^1 и переменные x_i^l, определяемые равносильностями ${p_i}^l(x_i^l) \leftrightarrow P_i^l(\overline{y}_i^l)$. В элементарных конъюнкциях, входящих в $A_k(\overline{x})$, выделенные подформулы $P_i^l(\overline{y}_i^l)$ также заменяются на новые атомарные формулы

${p_i}^l(x_i^l)$.

Процесс проверки (1) сводится к последовательной проверке

$$S^l(\omega) \Rightarrow \exists \overline{y}^l_{i\neq}\ P^l_i(\overline{y}^l_i), \qquad (2)$$

где $S^l(\omega)$ получена из $S^{l-1}(\omega)$ добавлением найденных постоянных формул с предикатами ${p_i}^{l-1}$. При этом длины записи $P^l_i(\overline{y}^l_i)$ меньше, чем длины записи элементарных конъюнкций, входящих в $A_k(\overline{x})$.

3. Предикатные сети и «распараллеливание» процесса распознавания

Процесс распознавания объекта по построенному многоуровневому описанию класса по своей сути является обходом по ориентированному графу без циклов с одной корневой вершиной, то есть по сети. Исходную сеть можно построить по обучающей выборке (достаточно долгая процедура, экспоненциально зависящая от длин записи описаний объектов) [3]. Дообучение сети на новых объектах позволяет перестраивать сеть, изменяя количество слоев в ней и количество ячеек в слое, а также устанавливая новые связи между ячейками.

Сам процесс распознавания существенно ускорится за счет того, что, во-первых, длины записи формул, проверяемых в ячейках, существенно короче длины записи исходных, во-вторых, процесс обхода сети производиться параллельно.

Содержимое ячеек предикатной сети можно видоизменить и вместо проверки (2) находить максимальную формулу, изоморфную подформулам конъюнкции литералов из $S^l(\omega)$ и $P^l_i(\overline{y}^l_i)$. При этом вычислять доли совпадения аргументов. Подробное изложение построения нечеткой сети имеется в [8].

4. Мульти-агентное описание объекта

Рассматривается задача построения полного описания объекта при условии, что имеется m агентов, каждый из которых владеет информацией только о части этого объекта, причем настоящие имена элементов этого объекта этим агентам неизвестны и каждый из них может называть эти элементы по-своему. Однако свойства элементов объекта и отношения между ними агентами определены правильно [4].

Очевидно, что для объединения полученных описаний в одно необходимо, чтобы части объекта, описываемые разными агентами, пересекались. Чтобы определить, что два агента описали (в качестве части своего описания) именно общую часть исследуемого объекта, требуется выделить максимальную формулу, изоморфную подформулам их описаний.

Однако этого не достаточно, так как аргументы выделенной подформулы (например, выделен треугольник на контурном изображении, вершины которого в каждом из описаний связаны еще с некоторыми точками) в каждом из описаний могут находиться в разных отношениях с остальными аргументами (например, на одном изображении в вершинах треугольника находятся петли, а на другом — висячие отрезки). В связи с этим выделенные фрагменты описаний необходимо проверять на непротиворечивость.

5. Построение онтологии

С точки зрения математики онтология представляет собой ориентированный граф, в корневой вершине которого находится множество объектов, а в каждой дочерней вершине графа — подмножество объектов отцовской, обладающие некоторым максимальным общим свойством.

В [9] описан способ построения онтологии, основанный на выделении максимальных общих свойств сложных структурированных объектов. Он основан на попарном выделении максимальных общих свойств объектов в каждой вершине. Если на каком-то уровне уже построенного графа появляется вершина, максимальное общее свойства объектов в этой вершине уже присутствуют в графе, то граф перестраивается таким образом, что ранее построенная вершина отождествляется с новой.

Заключение

В работе описаны некоторые применения понятия изоморфизма элементарных конъюнкций предикатных формул к решению различных задач ИИ, связанных с исследованием сложных структурированных объектов.

В цитируемых источниках доказаны экспоненциальные оценки сложности для всех этих задач.

Список литературы

[1] *Косовская, Т. М.* Доказательства оценок числа шагов решения некоторых задач распознавания образов, имеющих логические описания // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 1. — 2007. — Вып. 4. — С. 82–90.

[2] *Косовская, Т. М.* Многоуровневые описания классов для уменьшения числа шагов решения задач распознавания образов, описываемых формулами исчисления предикатов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Сер. 10. — 2008. — Вып. 2. — С. 64–72.

[3] *Косовская, Т. М.* Самообучающаяся сеть с ячейками, реализующими предикатные формулы // Труды СПИИРАН. — 2015. — Вып. 6 (43). — С. 94–113.

[4] *Косовская, Т. М.* Мультиагентное описание сложного объекта по достоверной информации // Компьютерные инструменты в образовании. — 2016. — №4. — С. 5–18.

[5] *Косовская, Т. М.* Выделение наибольшей общей подформулы предикатных формул для решения ряда задач искусственного интеллекта / Т. М. Косовская, Д. А. Петров // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2017. — Т. 13, вып. 3. — С. 250–263.

[6] *Косовская, Т. М.* Полиномиальная эквивалентность задач изоморфизм предикатных формул и изоморфизм графов / Т. М. Косовская, Н. Н. Косовский // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. — 2019. — Т. 6, вып. 3. — С. 430–439.

[7] *Нильсон, Н.* Искусственный интеллект. Методы поиска решений. — М. : Мир, 1973. — 270 с.

[8] *Kosovskaya, T.* Fuzzy Recognition by Logic-Predicate Network // Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal. — 2020. — Vol. 5, №4. — P. 686–699.

[9] *Kosovskaya, T.* Extraction of isomorphic subformulas as a tool for logic ontology construction // Journal of Physics: Conference Series. — 2021. — Vol. 1864. — ID 012086.

Библиографическая ссылка

Косовская, Т. М. Изоморфизм предикатных формул и его применение для выделения общих свойств сложных структурированных объектов в задачах ИИ // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 168–175.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-25

Сведения об авторах

Татьяна Матвеевна Косовская
Санкт-Петербургский государственный университет. Профессор

Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9
E-mail: kosovtm@gmail.com