УДК 510.649
AMS MSC2020: 06F05

Принцип декомпозиции и алгоритмическая неразрешимость для моноидов Клини с делениями[1]

Кузнецов С. Л.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Аннотация. В работе рассматривается специальный класс моноидов с делениями и итерацией Клини — а именно, удовлетворяющих принципу декомпозиции итерации. Доказана Σ_1^0-полнота его инэквациональной теории; также показано, что существуют моноиды с делениями и итерацией, не удовлетворяющие принципу декомпозиции.

Ключевые слова: итерация Клини, алгоритмическая неразрешимость, алгебраическая логика.

Введение

Понятие решетки Клини с делениями, или решетки действий (action lattice, далее РКД), введенное в работах Пратта [7] и Козена [2], соединяет в себе структуру решетки, частично упорядоченного моноида, и операцию итерации Клини. Интерес представляют атомарные, или инэквациональные теории (то есть теории атомарных неравенств) классов РКД. Известно, что инэквациональная теория всех РКД, обозначаемая **ACT**, алгоритмически неразрешима, а точнее Σ_1^0-полна [3]; для более узкого класса $*$-непрерывных РКД (в которых итерация Клини определяется через предельный переход, а не как неподвижная точка) соответствующая теория Π_1^0-полна [1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента России, проект МК-1184.2021.1.1, и Российского фонда фундаментальных исследований, проект 20-01-00435.

В этой работе нас будет интересовать теория моноидов Клини с делениями (далее для краткости МКД), то есть структур, аналогичных РКД, но в которых частичный порядок не обязан быть решеткой (и, соответственно, в сигнатуре отсутствуют операции супремума и инфимума двух элементов).

В *-непрерывном случае результат о Π_1^0-полноте для МКД был доказан в работе автора [4], поэтому нас будет интересовать теория более широкого класса МКД. Более точно, данная работа представляет неразрешимость и Σ_1^0-полноту инэквациональной теории класса МКД, удовлетворяющих некоторому естественному условию, которое мы назовем принципом декомпозиции. Этот принцип верен во всех РКД и во всех *-непрерывных МКД. Однако в работе приводится пример МКД (не *-непрерывного), для которого этот принцип нарушается.

Эта работа переносит на случай с единицей (на моноиды) ранее полученные автором результаты для полугрупп с делениями и итерацией [5]. Отметим, что теории в случае полугрупп и моноидов существенно различаются (в частности, вторая не является консервативным расширением первой).

1. Основные определения

Определение 1 (МКД). *Моноидом Клини с делениями называется алгебраическая структура* $(\mathcal{A}; \cdot, \mathbf{1}, \preceq, /, \backslash, {}^*)$, *такая что:*

- $(\mathcal{A}; \cdot, \mathbf{1})$ — *моноид;*
- $\preceq$ — *отношение частичного порядка на* $\mathcal{A}$*;*
- *операции деления / и \ связаны с операцией умножения и отношением частичного порядка следующим образом:*

$$b \preceq a \backslash c \iff a \cdot b \preceq c \iff a \preceq c \,/\, b;$$

- *итерация Клини* a^* *определяется как наименьший, в смысле частичного порядка* $\preceq$, *элемент* b, *для которого* $\mathbf{1} \preceq b$ *и* $a \cdot b \preceq b$.

Если $\preceq$ задает структуру решетки (то есть всегда существуют $a \vee b = \sup_{\preceq}\{a, b\}$ и $a \wedge b = \inf_{\preceq}\{a, b\}$), то $\mathcal{A}$ является РКД.

Определение 2 (Теория). *Инэкваціональной теорией некоторого класса $\mathcal{K}$ МКД называется множество всех общезначимых в классе $\mathcal{K}$ утверждений вида $A \preceq B$, где A и B — термы в сигнатуре МКД.*

Определение 3 (Принцип декомпозиции). *МКД $\mathcal{A}$ удовлетворяет принципу декомпозиции, если $\mathbf{1} \preceq b$ и $a \cdot a^* \preceq b$ влечет $a^* \preceq b$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$.*

Легко видеть, что принципу декомпозиции удовлетворяют все РКД (за счет тождества $a^* = \mathbf{1} \vee a \cdot a^*$), а также все *-непрерывные МКД, то есть такие, что $a^* = \sup_{\preceq}\{a^n \mid n \geqslant 0\}$ для всех a.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Инэкваціональная теория класса МКД, удовлетворяющих принципу декомпозиции, Σ_1^0-полна (в частности, неразрешима).*

Доказательство. Изложим лишь общую схему доказательства. Следуя идее Бушковского [1], мы сопоставляем бесконечной работе машины Тьюринга (далее МТ) сначала тотальную (то есть задающую все непустые слова) контекстно-свободную грамматику, а затем — формулу вида $A \cdot B^* \cdot (A \cdot B^*)^* \preceq s$, где буквы исходного алфавита закодированы как AB^i, а сами формулы A и B взяты из [4] (модифицированная конструкция Сафиуллина [8]).

Собственно бесконечной работе МТ соответствует истинность этой формулы во всех *-непрерывных МКД. Однако есть МТ «застревает» в одной конфигурации («ловушке»), то формула будет истинной во всех МКД, удовлетворяющих принципу декомпозиции. Дальнейшее рассуждение, основанное на эффективной неотделимости, такое же, как и в случае решеток [3]. □

Отметим, что принцип декомпозиции в доказательстве теоремы 1 играет ключевую роль. А именно, с помощью этого принципа осуществляется разбор случаев в зависимости от длины начального отрезка исполнения МТ — достигла ли она уже «ловушки» или нет. Таким образом «разбирается» внешняя * в $(A \cdot B)^*$.

Теорема 2. *Существуют МКД, не удовлетворяющие принципу декомпозиции.*

Доказательство. Пример такого МКД можно построить явно, модифицируя конструкцию из [5]. Множество всех подмножеств

$\mathbb{N}$, с операцией (коммутативной) покомпонентного сложения, обозначаемого $\cdot$, и порядком — отношением «быть подмножеством», расширяется добавлением элементов ξ и η. При этом $\xi \prec \eta$, $\mathbb{N} \prec \eta$, $\xi \succ X$, если $X \subsetneq \mathbb{N}$, а ξ и $\mathbb{N}$ несравнимы. Далее, $\mathbf{1} = \{0\}$; $\xi \cdot X = \eta$ для $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \varnothing, \mathbf{1}$; $\xi \cdot \xi = \xi \cdot \eta = \eta \cdot \eta = \eta$; $\varnothing \cdot a = \varnothing$ для всех a.

Построенную структуру можно достроить до МКД. В частности, имеем $\{a\}^* = \mathbb{N} \not\preceq \xi$, но $\mathbf{1} \preceq \xi$ и $\{a\} \cdot \{a\}^* \preceq \xi$, что свидетельствует о нарушении принципа декомпозиции. □

Теорему 2 можно переформулировать в терминах инэкваициональных теорий:

Следствие 3. *Если задать инэкваициональную теорию всех МКД как расширение исчисления Ламбека с единицей [6] аксиомами для итерации (с правилом сечения), то в этом исчислении не будет выводимым правило декомпозиции* $\frac{\mathbf{1} \preceq B \quad A \cdot A^* \preceq B}{A^* \preceq B}$.

Заключение

В работе рассмотрен специальный класс моноидов Клини с делениями — а именно, удовлетворяющих принципу декомпозиции. Доказана Σ_1^0-полнота его инэкваициональной теории (теорема 1), а также показана его нетривиальность (теорема 2).

Вопрос об истинности теоремы 1 а также более тонкий вопрос о допустимости правила декомпозиции (в сравнении с выводимостью, следствие 3) в инэкваициональной теории всех МКД остаются открытыми.

Список литературы

[1] *Buszkowski, W.* Infinitary action logic: complexity, models and grammars / W. Buszkowski, E. Palka // Studia Logica. — 2008. — Vol. 89, № 1. — P. 1–18.

[2] *Kozen, D.* On action algebras // Logic and Information Flow / Ed. by J. van Eijck and A. Visser. — Cambridge, MA : MIT Press, 1994. — P. 78–88.

[3] *Kuznetsov, S.* Action logic is undecidable // ACM Transactions on Computational Logic. — 2021. — Vol. 2, № 10. — P. 1–26.

[4] *Kuznetsov, S.* Complexity of the infinitary Lambek calculus with Kleene star // Review of Symbolic Logic. — 2020. — P. 1–27.

[5] *Kuznetsov, S.* The 'long rule' in the Lambek calculus with iteration: undecidability without meets and joins // Proceedings of Advances in Modal Logic 2021 / Eds. N. Olivetti, R. Verbrugge, S. Negri and G. Sandu. — London : College Publications, 2020. — P. 425–449.

[6] *Lambek, J.* Deductive systems and categories II. Standard constructions and closed categories // Category Theory, Homology Theory, and their Applications I / Ed. by P. J. Hilton. — Berlin, Heidelberg : Springer, 1969. — P. 76–122.

[7] *Pratt, V.* Action logic and pure induction // Proceedings of JELIA 1990: Logics in AI / Ed. J. van Eijck. — Berlin, Heidelberg : Springer, 1991. — P. 97–120.

[8] *Сафиуллин, А. Н.* Выводимость допустимых правил с простыми посылками в исчислении Ламбека // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика. — 2007. — № 4. — С. 72–76.

Библиографическая ссылка

Кузнецов, С. Л. Принцип декомпозиции и алгоритмическая неразрешимость для моноидов Клини с делениями // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 176–180.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-26

Сведения об авторах

Степан Львович Кузнецов
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. Старший научный сотрудник

Россия, 119991, Москва, ГСП-1, ул. Губкина, 8, МИАН
E-mail: sk@mi-ras.ru