УДК 510.6, 519.7
AMS MSC2020: 03B44

Устранение операторов прошлого в троичной логике линейного времени на конечных трассах

Куцак Н. Ю., Подымов В. В.

Московский государственный университет им. М. В.Ломоносова

Аннотация. В работе рассматривается троичный вариант языка логики линейного времени (LTL), основанный на логике сильной неопределенности Клини, и предлагается подход к устранению операторов прошлого из этого языка с сохранением выразительных возможностей. Этот подход основан на особых преобразованиях троичных формул в двоичные и обратно с использованием известных результатов об устранении операторов прошлого в LTL.

Ключевые слова: темпоральная логика, логика линейного времени, троичная логика, операторы прошлого.

Введение

Для описания и анализа поведения систем, изменяющих свои состояния во времени, широко используются языки темпоральных логик. Одни из наиболее известных темпоральных логик — это логики линейного времени (linear temporal logic, LTL) [11]. Формулы LTL строятся над переменными и константами, обозначающими истинность или ложность заданных свойств системы в конкретные моменты времени, булевыми операциями и темпоральными операторами $\mathbf{U}$ («до тех пор пока»), $\mathbf{X}$ («в следующий момент времени»).

В некоторых случаях удобно использовать и темпоральные операторы, предназначенные для выражения прошлого поведения системы: $\mathbf{U}^-$ («с тех пор как»), $\mathbf{X}^-$ («в предыдущий момент времени»). Использование операторов прошлого не увеличивает выразительности LTL, но делает формулировку свойств более интуитивной и сами формулы экспоненциально короче [8]. Однако, выразить операторы прошлого через операторы будущего в LTL с помощью эквивалентных преобразований не представляется возможным. Методы устранения операторов прошлого из формулы устроены сложнее, чем применение одной эквивалентности для одного оператора прошлого: в [10] предложена теорема о разделении и технически непростой алгоритм перевода формулы LTL над операторами $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^-$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^-$ в формулу над $\mathbf{U}$, $\mathbf{X}$. В [9] предложен более эффективный алгоритм, согласно которому формула над $\mathbf{U}$, $\mathbf{U}^-$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^-$ последовательно переводится в автомат Бюхи, детерминированный автомат Мюллера, а затем счетчик автомата — в формулу LTL над $\mathbf{U}$, $\mathbf{X}$.

Ранее в [3] для спецификации диаграмм сигналов, получаемых на ранних этапах проектирования цифровых схем, мы предложили логику реального времени, названную логикой троичных сигналов (далее $\mathfrak{L}^s$). В рамках исследования выразительных возможностей $\mathfrak{L}^s$ в [1] было поставлено соответствие между $\mathfrak{L}^s$ и особой логикой дискретного времени (далее $\mathfrak{PL}^3$), предложенной нами как вариант LTL на конечных трассах [5], предназначенной для описания свойств троичных трасс с третьим истинностным значением в смысле неопределенности логики Клини [6].

В данной работе дается полное определение языка $\mathfrak{PL}^3$ (в отличие от тезисного описания в [1]) и предлагается подход к устранению операторов прошлого из $\mathfrak{PL}^3$ с сохранением выразительности языка.

1. Основные определения

Записью $\mathbb{N}_0$ обозначается множество всех натуральных чисел, включая ноль. Используются следующие виды интервалов: $[x, y] = \{z \mid z \in \mathbb{N}_0, x \leqslant z \leqslant y\}$; $[x, y) = \{z \mid z \in \mathbb{N}_0, x \leqslant z < y\}$; $(x, y] = \{z \mid z \in \mathbb{N}_0, x < z \leqslant y\}$.

Записью $\mathfrak{T}$ обозначено множество $\{0, *, 1\}$. Это множество используется в двух смыслах. В широком смысле, $\mathfrak{T}$ — множество значений, которыми оперируют троичные функции [4]. В узком смысле, $\mathfrak{T}$ — множество истинностных значений троичной логики Клини [6], согласно которой 0 трактуется как *ложь*, 1 — как *истина*, и $*$ — как *неопределенное* значение: либо истина, либо ложь, но неизвестно или неважно, что именно. *Троичной функцией* (местности n, где $n \in \mathbb{N}_0$) называется функция вида $\mathfrak{f} : \mathfrak{T}^n \to \mathfrak{T}$. На рисунке 1 изображены таблицы значений троичных функций,

$x \diagdown y$	$\neg x$	$\sim x$	$I_0(x)$	$I_*(x)$	$I_1(x)$	$x \vee y$			$x \& y$		
						0	$*$	1	0	$*$	1
0	$*$	1	1	0	0	0	$*$	1	0	0	0
$*$	1	$*$	0	1	0	$*$	$*$	1	0	$*$	$*$
1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	$*$	1

Рис. 1. Таблицы значений троичных функций

использующихся в работе: «зеркальное» отрицание Лукасевича ($\sim$), «циклическое» отрицание Поста ($\neg$), дизъюнкция ($\vee$), конъюнкция ($\&$) и индикаторы I_1, I_0, I_*. Система $\{\neg, \vee\}$ является *троичным базисом* [4], то есть набором функций, через которые выражаются любые троичные функции.

Двоичной функцией (местности n, где $n \in \mathbb{N}_0$) называется функция вида $f : (\mathfrak{T} \setminus \{*\})^n \to \mathfrak{T} \setminus \{*\}$. Таблицы значений двоичных функций получаются из таблицы 1 путем вычеркивания строк и столбцов, соответствующих значению $*$. Система $\{\sim, \vee\}$ является *двоичным базисом* [4].

2. Троичная логика линейного времени на конечных трассах

В работе представлен язык $\mathfrak{PL}^3$, введенный тезисно в [1] и являющийся «диалектом» известных языков логик линейного времени [5,7] и задающийся следующей формой Бэкуса–Наура (БНФ):

$$\varphi \;::=\; 1 \mid * \mid p \mid \mathfrak{f}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \mid \varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2 \mid \varphi_1 \mathbf{U}^- \varphi_2,$$

где: $1, *$ —константы; $p \in \mathsf{AP}^3$ — атомарное высказывание; $\mathfrak{f}$ — троичная функция местности $n, n \in \mathbb{N}_0$; $\mathbf{U}$ — темпоральный оператор «до тех пор пока»; $\mathbf{U}^-$ — его аналог в прошлом «с тех пор как»; $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — формулы.

Событием $\mathfrak{E}$ *троичной трассы* назовем отображение $\mathfrak{E} : \mathsf{AP}^3 \to \mathfrak{T}$. Конечную последовательность событий трассы, номер i-го элемента и длину этой последовательности назовем соответственно *конечной троичной трассой* (далее трасса), *моментом времени* i и *длиной трассы*.

Каждым формуле φ, трассе $\pi = (\mathfrak{E}_0, \mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{E}_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, и моменту времени i, $i \in [0, k]$, сопоставим значение $\varphi[\pi, i]$ множества $\mathfrak{T}$, которое назовем *значением формулы* φ *на трассе* π в момент времени i. Определим также значение $\varphi[\pi, \mathcal{I}]$ формулы φ на интервале натуральных чисел $\mathcal{I}$: $\varphi[\pi, \mathcal{I}] = v$ ($\varphi[\pi, \mathcal{I}] \neq v$), $v \in \mathfrak{T}$, если для любого момента времени i, $i \in \mathcal{I}$, верно $\varphi[\pi, i] = v$ ($\varphi[\pi, i] \neq v$).

Семантику формул $\mathfrak{PL}^3$ определим индуктивно по построению формулы следующими правилами:

$$c[\pi, i] = c, \text{ где } c \in \{1, *\}.$$

$$p[\pi, i] = \mathfrak{E}_i(p), \text{ если } p \in \mathsf{AP}^3.$$

$$\mathfrak{f}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)[\pi, i] = \mathfrak{f}(\varphi_1[\pi, i], \ldots, \varphi_n[\pi, i]).$$

$$(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2)[\pi, i] = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists i', i' \geqslant i : \varphi_2[\pi, i'] = \varphi_1[\pi, [i, i')] = 1; \\ *, & \text{если условие выше неверно и} \\ & \quad \exists i', i' \geqslant i : \varphi_2[\pi, i'] \neq 0 \text{ и } \varphi_1[\pi, [i, i')] \neq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$(\varphi_1 \mathbf{U}^- \varphi_2)[\pi, i] = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists i', i' \leqslant i : \varphi_2[\pi, i'] = \varphi_1[\pi, (i', i]] = 1; \\ *, & \text{если условие выше неверно и} \\ & \quad \exists i', i' \leqslant i : \varphi_2[\pi, i'] \neq 0 \text{ и } \varphi_1[\pi, (i', i]] \neq 0; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Формулы φ_1 и φ_2 *инициально эквивалентны*, если на каждой возможной трассе π верно $\varphi_1[\pi, 0] = \varphi_2[\pi, 0]$, обозначается $\varphi_1 =_i \varphi_2$.

Формулу $\mathfrak{L}^3$ определим как формулу $\mathfrak{PL}^3$ без оператора $\mathbf{U}^-$. Формулы $\mathfrak{PL}^2$ и $\mathfrak{L}^2$ определим соответственно как формулы $\mathfrak{PL}^3$ и $\mathfrak{L}^3$, в которых из синтаксиса и семантики удалены все части, относящиеся к значению $*$, и троичные функции заменены двоичными. Отметим, что язык $\mathfrak{L}^2$ совпадает с языком LTL_f [5], из которого удален оператор $\mathbf{X}$.

3. Основные результаты

В данном разделе предлагается проиллюстрированный на рис. 2 способ преобразования произвольной формулы $\mathfrak{PL}^3$ в инициально эквивалентную формулу $\mathfrak{L}^3$. Без потери общности рассуждений далее полагаем, что из всех троичных и двоичных функций в языках

$$\begin{tikzcd}
 & f_{=1}(\varphi) \arrow[r] & g\big(f_{=1}(\varphi)\big) \arrow[r] & h\big(g\big(f_{=1}(\varphi)\big)\big) \arrow[dr] & \\
\varphi \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \psi \\
 & f_{>0}(\varphi) \arrow[r] & g\big(f_{>0}(\varphi)\big) \arrow[r] & h\big(g\big(f_{>0}(\varphi)\big)\big) \arrow[ur] & \\
\mathfrak{PL}^3 & \mathfrak{PL}^2 & \mathfrak{L}^2 & \mathfrak{L}^3 & \mathfrak{L}^3
\end{tikzcd}$$

Рис. 2. Схема устранения оператора $\mathbf{U}^-$ из формулы $\mathfrak{PL}^3$

$\mathfrak{PL}^3, \mathfrak{L}^3, \mathfrak{PL}^2$ и $\mathfrak{L}^2$ используются только функции упомянутых выше троичного и двоичного базисов, а другие функции расцениваются как соответствующие сокращения.

Рассмотрим множество $\mathsf{AP}^2 = \{p_{=1} \mid p \in \mathsf{AP}^3\} \cup \{p_{>0} \mid p \in \mathsf{AP}^3\}$. Для троичной трассы $\pi^3 = (\mathfrak{C}_0^3, \mathfrak{C}_1^3, \ldots, \mathfrak{C}_k^3)$ определим взаимно соответствующую двоичную трассу $\pi^2 = (\mathfrak{C}_0^2, \mathfrak{C}_1^2, \ldots, \mathfrak{C}_k^2)$, где $\mathfrak{C}_i^2 : \mathsf{AP}^2 \to \mathfrak{T} \setminus \{*\}, i \in [0, k]$, следующим образом:

$$\mathfrak{C}_i^2(p_{=1}) = \begin{cases} 1, \text{если } \mathfrak{C}_i^3(p) = 1; \\ 0, \text{иначе}; \end{cases} \qquad \mathfrak{C}_i^2(p_{>0}) = \begin{cases} 0, \text{если } \mathfrak{C}_i^3(p) = 0; \\ 1, \text{иначе}. \end{cases}$$

Для формулы φ языка $\mathfrak{PL}^3$ определим две соответствующие формулы $f_{=1}(\varphi)$ и $f_{>0}(\varphi)$ языка $\mathfrak{PL}^2$:

$$\begin{aligned}
&f_{=1}(1) = 1, && f_{>0}(1) = 1, \\
&f_{=1}(*) = 0, && f_{>0}(*) = 1, \\
&f_{=1}(p) = p_{=1}, && f_{>0}(p) = p_{>0}, \\
&f_{=1}(\neg\varphi) = \sim (f_{=1}(\varphi) \vee \sim f_{>0}(\varphi)), && f_{>0}(\neg\varphi) = \sim f_{=1}(\varphi), \\
&f_{=1}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = f_{=1}(\varphi_1) \vee f_{=1}(\varphi_2), && f_{>0}(\varphi_1 \vee \varphi_2) = \\
& && \qquad f_{>0}(\varphi_1) \vee f_{>0}(\varphi_2), \\
&f_{=1}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2) = f_{=1}(\varphi_1) \mathbf{U} f_{=1}(\varphi_2), && f_{>0}(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2) = \\
& && \qquad f_{>0}(\varphi_1) \mathbf{U} f_{>0}(\varphi_2), \\
&f_{=1}(\varphi_1 \mathbf{U}^- \varphi_2) = f_{=1}(\varphi_1) \mathbf{U}^- f_{=1}(\varphi_2), && f_{>0}(\varphi_1 \mathbf{U}^- \varphi_2) = \\
& && \qquad f_{>0}(\varphi_1) \mathbf{U}^- f_{>0}(\varphi_2).
\end{aligned}$$

Лемма 1. *Для любой формулы φ языка $\mathfrak{PL}^3$, соответствующих друг другу троичной и двоичной трасс π^3 и π^2 длины $k+1$ и момента времени i, $i \in [0, k]$, верно*

$$\varphi[\pi^3, i] = 1 \Leftrightarrow f_{=1}(\varphi)[\pi^2, i] = 1,$$
$$\varphi[\pi^3, i] \neq 0 \Leftrightarrow f_{>0}(\varphi)[\pi^2, i] = 1.$$

Доказательство. Доказательство проводится индуктивно по построению формулы $\mathfrak{PL}^3$. Истинность леммы следует из определений семантических правил формул $\mathfrak{PL}^3$, $\mathfrak{PL}^2$ и функций $f_{=1}$, $f_{>0}$.

Подробно рассмотрим случай $\varphi = \neg\varphi_1$, остальные доказываются аналогично. По определению отрицания Поста верно

$$(\neg\varphi_1)[\pi^3, i] = 1 \Leftrightarrow \varphi_1[\pi^3, i] = * \Leftrightarrow \varphi_1[\pi^3, i] \neq 1 \text{ и } \varphi_1[\pi^3, i] \neq 0.$$

По индуктивному предположению для φ_1 верно

$$\varphi_1[\pi^3, i] \neq 1 \Leftrightarrow f_{=1}(\varphi)[\pi^2, i] \neq 1 \Leftrightarrow f_{=1}(\varphi)[\pi^2, i] = 0;$$
$$\varphi_1[\pi^3, i] \neq 0 \Leftrightarrow f_{>0}(\varphi)[\pi^2, i] = 1.$$

По определению функции $f_{=1}$ верно

$$f_{=1}(\neg\varphi_1)[\pi^2, i] = (\sim (f_{=1}(\varphi_1) \vee \sim f_{>0}(\varphi_1)))[\pi^2, i],$$

а значит,

$$f_{=1}(\neg\varphi_1)[\pi^2, i] = 1 \Leftrightarrow f_{=1}(\varphi_1)[\pi^2, i] = 0 \text{ и } f_{>0}(\varphi_1)[\pi^2, i] = 1,$$

то есть выполнена первая равносильность из условия леммы, вторая доказывается аналогично. □

Теорема 2 ([10]). *Для любой формулы φ языка $\mathfrak{PL}^2$ существует инициально эквивалентная формула $g(\varphi)$ языка $\mathfrak{L}^2$, то есть*

$$\varphi[\pi^2, 0] = 1 \Leftrightarrow g(\varphi)[\pi^2, 0] = 1.$$

Преобразуем формулы $\mathfrak{L}^2$ в формулы $\mathfrak{L}^3$ по правилу h:

$$\begin{aligned} h(1) &= 1, & h(\sim\varphi) &= I_0(\varphi) \vee \neg I_1(\varphi), \\ h(p_{=1}) &= I_1(p), & h(\varphi_1 \vee \varphi_2) &= h(\varphi_1) \vee h(\varphi_2), \\ h(p_{>0}) &= \sim I_0(p), & h(\varphi_1 \mathbf{U} \varphi_2) &= h(\varphi_1) \mathbf{U} h(\varphi_2). \end{aligned}$$

Лемма 3. *Для любой формулы φ языка $\mathfrak{L}^2$, соответствующих друг другу двоичной и троичной трасс π^2 и π^3 длины $k+1$ и момента времени i, $i \in [0,k]$, верно*

$$\varphi[\pi^2, i] = 1 \Leftrightarrow h(\varphi)[\pi^3, i] = 1,$$
$$\varphi[\pi^2, i] = 0 \Leftrightarrow h(\varphi)[\pi^3, i] = 0.$$

Доказательство. Следует из определения соответствия троичной и двоичной трассы и эквивалентностей для троичных функций. □

Лемма 4. *Для любых формулы φ языка $\mathfrak{PL}^3$ и трассы π^3 верно*

$$\varphi[\pi^3, 0] = 1 \Leftrightarrow (\chi_{=1} \vee *\&\chi_{>0})[\pi^3, 0] = 1,$$
$$\varphi[\pi^3, 0] \neq 0 \Leftrightarrow (\chi_{=1} \vee *\&\chi_{>0})[\pi^3, 0] \neq 0,$$

где $\chi_{=1} = h\big(g\big(f_{=1}(\varphi)\big)\big)$, $\chi_{>0} = h\big(g\big(f_{>0}(\varphi)\big)\big)$.

Доказательство. Пусть троичная трасса π^3 и двоичная трасса π^2 соответствуют друг другу. Из лемм 1 и 3, теоремы 2 следуют цепочки равносильностей:

$$\varphi[\pi^3, 0] = 1 \Leftrightarrow f_{=1}(\varphi)[\pi^2, 0] = 1 \Leftrightarrow g\big(f_{=1}(\varphi)\big)[\pi^2, 0] = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \chi_{=1}[\pi^3, 0] = 1 \Leftrightarrow (\chi_{=1} \vee *\&\chi_{>0})[\pi^3, 0] = 1;$$
$$\varphi[\pi^3, 0] \neq 0 \Leftrightarrow f_{>0}(\varphi)[\pi^2, 0] = 1 \Leftrightarrow g\big(f_{>0}(\varphi)\big)[\pi^2, 0] = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \chi_{>0}[\pi^3, 0] = 1 \Leftrightarrow (\chi_{=1} \vee *\&\chi_{>0})[\pi^3, 0] \neq 0. \quad \square$$

Из леммы 4 напрямую вытекает основной результат работы — следующая теорема.

Теорема 5. *Для любой формулы языка $\mathfrak{PL}^3$существует инициально эквивалентная формула языка $\mathfrak{L}^3$.*

Заключение

Мы показали, что языки троичных логик линейного времени без оператора **X** на конечных трассах с операторами прошлого ($\mathfrak{PL}^3$) и без них ($\mathfrak{L}^3$) одинаково выразительны. В дальнейшем предполагается совместить этот результат с полученными ранее в [1, 2], чтобы показать, что подавляющая часть темпоральных операторов логики троичных сигналов [3] может быть удалена из языка с сохранением выразительных возможностей.

Список литературы

[1] *Куцак, Н. Ю.* Дискретизация сигнальной логики // ЛОМОНОСОВ-2021. Сборник тезисов XXVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых / Отв. ред. И. А. Алешковский [et al.] — М. : МАКС Пресс, 2021. — С. 102–104.

[2] *Куцак, Н. Ю.* О выразимости операций логики троичных цифровых сигналов / Н. Ю. Куцак, В. В. Подымов // Научная конференция «Тихоновские чтения 2020»: Тезисы докладов. — 2020. — URL: https://istina.msu.ru/conferences/presentations/330784820/. — Загл. с титул. экрана.

[3] *Куцак, Н. Ю.* Формальная верификация диаграмм троичных цифровых сигналов / Н. Ю. Куцак, В. В. Подымов // Моделирование и анализ информационных систем. — 2019. — Т. 26, №3. — С. 332–350.

[4] *Яблонский, С. В.* Введение в дискретную математику. — М. : Наука, 1986. — 384 с.

[5] *De Giacomo, G.* Linear temporal logic and Linear Dynamic Logic on finite traces / G. De Giacomo, M. Vardi // International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI). — 2013. — P. 854–860.

[6] *Kleene, S. C.* On notation for ordinal numbers // The Journal of Symbolic Logic. — 1938. — Vol. 3, №4. — P. 150–155.

[7] *Konikowska, B.* A Three-Valued Linear Temporal Logic for Reasoning about Concurrency. — Warsaw, Poland, 1998. — 9 p. — (Tech. Rep. / ICS PAS; 01-237.)

[8] *Kupferman, O.* Once and for all / O. Kupferman, A. Pnueli, M. Vardi // Journal of Computer and System Sciences. — 2012. — Vol. 78, №3. — P. 981–996.

[9] *Markey, N.* Temporal Logic with Past is Exponentially More Succinct // Bulletin of the EATCS. — 2003. — Vol. 79. — P. 122–128.

[10] On the temporal analysis of fairness / D. Gabbay, A. Pnueli, S. Shelah, J. Stavi // In Conference Record of the 7th Annual ACM Symposium on Principles of Programming Languages (POPL'80). — New York, N. Y. : ACM Press, 1980. — P. 163–173.

[11] *Pnueli, A.* The temporal logic of programs // In Proceedings of the 18th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS'77). — Los Alamitos, CA : IEEE Computer Society Press, 1977. — P. 46–57.

Библиографическая ссылка

Куцак, Н. Ю. Устранение операторов прошлого в троичной логике линейного времени на конечных трассах / Н. Ю. Куцак, В. В. Подымов // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 181–189.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-27

Сведения об авторах

1. Нина Юрьевна Куцак
   Московский государственный университет им. М. В.Ломоносова. Аспирант

   Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 52, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, кафедра МК
   E-mail: nina_svetik@mail.ru

2. Владислав Васильевич Подымов
   Московский государственный университет им. М. В.Ломоносова. Доцент

   Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 52, 2-й учебный корпус, факультет ВМК, кафедра МК
   E-mail: valdus@yandex.ru