УДК 519.21
AMS MSC2020: 60J80, 81Q15, 65C05

Моделирование процессов с генерацией и транспортом частиц в случайной среде[1]

Куценко В. А., Яровая Е. Б.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Аннотация. Рассматриваются различные модели ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем по многомерной решетке. В основе процесса лежит симметричное, однородное по пространству, неприводимое случайное блуждание с конечной дисперсией скачков. Интенсивности размножения и гибели частиц в точках решетки предполагаются случайными. Для ветвящихся случайных блужданий в случайных средах характерно влияние редких флуктуаций, поэтому осредненное описание, типичное при классическом подходе, не всегда адекватно. В частности, для процессов в случайных средах характерно возникновение нерегулярных структур с выраженной неоднородностью пространственного распределения. В физической литературе для подобных явлений принят термин «перемежаемость». На основе результатов моделирования удалось показать, что эффект перемежаемости может наблюдаться и быть численно оценен в случайных средах даже на конечных временных интервалах.

Ключевые слова: ветвящееся случайное блуждание, многомерная решетка, случайная ветвящаяся среда, моменты численностей частиц, моделирование.

Введение

В этой работе основное внимание уделяется моделированию ветвящихся случайных блужданий (ВСБ) в случайной среде и, в частности, анализу явления перемежаемости моментов численностей частиц. Перемежаемость есть аномальное свойство предельного распределения поля моментов, возникающее в случайной среде. В [1, 5]

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00487.

явление перемежаемости было изучено для стационарной случайной среды на примере задачи Коши для оператора Андерсона со случайным потенциалом:

$$\partial u/\partial t = \varkappa\Delta u + V(x,\omega)u, \qquad u(t,x)|_{t=0} \equiv 1. \tag{1}$$

Здесь оператор Δ, задающий «диффузию» частиц, действует как разностный лапласиан на $\mathbf{Z}^d$: $(\Delta u)(x) = \sum_{x':|x-x'|=1}(u(x') - u(x))$, где $\varkappa > 0$ — коэффициент диффузии, а потенциал $V(x,\omega)$, отвечает наличию ветвления и представляет собой совокупность гауссовских независимых одинаково распределенных случайных величин. В [4] с помощью применения формулы Фейнмана–Каца доказаны существование и единственность решения уравнения (1) для некоторого класса неотрицательных функций на $\mathbf{Z}^d$ и дано строгое математическое определение перемежаемости. В работе [2] для ВСБ в однородной случайной среде получены предельные теоремы для моментов численности частиц и установлена перемежаемость поля моментов. Наконец, в [7] результаты обобщены для произвольных симметричных случайных блужданий с конечной дисперсией скачков и конечным числом центров генерации частиц на $\mathbf{Z}^d$.

Большинство результатов, полученных для ВСБ в случайных средах, являются асимптотическими. В то же время изучение ВСБ на конечных интервалах времени представляется сложной задачей, которая, насколько нам известно, ранее не исследовалась. В связи с этим, основная цель численного моделирования — продемонстрировать возможность получения результатов, предсказанных теоретически, за конечное время. Аналогичная задача рассматривалась в [3] для ВСБ в неслучайных средах. Первый шаг в подобном исследовании ВСБ в случайных средах был предпринят, по-видимому, в [6], где удалось показать наличие эффекта перемежаемости в случайных средах на конечных временных интервалах. В данной работе исследуются эффекты перемежаемости в зависимости от длины временного интервала и вводится способ его численной оценки.

1. Основные определения

Пусть в каждом узле решетки $x \in \mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, определен процесс рождения и гибели частиц. Соответствующие интенсивности задаются неотрицательными случайными величинами $\xi^+(x) = \xi^+(x, \omega)$ и $\xi^-(x) = \xi^-(x, \omega)$, определенными на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Математическое ожидание относительно меры $\mathbb{P}$ будет обозначаться $\langle \cdot \rangle$. Среда (то есть набор характеристик ветвления в точках решетки, называемых источниками ветвления) представляет собой совокупность пар случайных величин $(\xi^+(x), \xi^-(x))$. Будем предполагать, что пары $(\xi^+(x),\, \xi^-(x))$ независимы и одинаково распределены. При фиксированном $\omega \in \Omega$ (то есть при фиксированной реализации среды) механизм ветвления задается марковским процессом ветвления. Такая ветвящаяся среда называется однородной. Если ветвящийся процесс происходит в лишь конечном числе точек $x \in \mathbb{Z}^d$ и задается случайными величинами $\xi(x_i) := \xi(x_i, \omega) = (\xi^-(x_i, \omega), \xi^+(x_i, \omega))$, $i = 1, 2, \ldots, N$, то такая ветвящаяся среда называется неоднородной.

Транспорт частиц в моделях ВСБ описывается симметричным, однородным по пространству, неприводимым случайным блужданием, которое задается инфинитезимальной матрицей перехода $A = (a(x, y))_{x, y \in \mathbb{Z}^d}$, см. [7]. Однако в этой работе мы ограничимся рассмотрением простого симметричного случайного блуждания, в котором частица ждет время $Exp(\varkappa)$, а затем равновероятно перемещается в одну из соседних точек решетки. В [2] показано, что ВСБ с таким блужданием обладает всеми интересующими нас свойствами, в частности, перемежаемостью. Предположим, что в момент времени $t = 0$ на решетке находится ровно одна частица в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, которая являлась источником, то за время $[0, h)$, при $h \to 0$ частица может: прыгнуть в соседнюю точку y с вероятностью $\frac{\varkappa}{2d} h + o(h)$, произвести одного потомка с вероятностью $\xi^+(x) h + o(h)$, умереть с вероятностью $\xi^-(x) h + o(h)$, или, наконец, выжить без изменений с вероятностью $1 - \varkappa h - (\xi^+(x) + \xi^-(x)) h + o(h)$. Если же точка $x \in \mathbb{Z}^d$ не была источником ветвления, то за время $[0, h)$, при $h \to 0$, частица может прыгнуть в соседнюю точку y с вероятностью $p(h, x, y) = \frac{\varkappa}{2d} h + o(h)$ или остаться в точке x без изменений с вероятностью $1 - \varkappa h - (\xi^+(x) + \xi^-(x)) h + o(h)$. Эволюция частиц происходит независимо друга от друга и от всей предыстории. Состояние системы частиц на $\mathbb{Z}^d$ описывается числом частиц $\mu_{t,\omega}(y)$ в момент времени t в точке $y \in \mathbb{Z}^d$, а также общим числом частиц $\mu_{t,\omega} := \sum_{y\in\mathbb{Z}^d} \mu_{t,\omega}(y)$ на $\mathbb{Z}^d$ при начальных условиях $\mu_{0,\omega}(y) = \delta_y(x)$ и $\mu_{0,\omega} = 1$, соответственно. Для описания поведения $\mu_{t,\omega}(y)$ и $\mu_{t,\omega}(y)$ прибегают к вычислению их моментов. Первые «замороженные» моменты (quenched moments) (см. [2]) являются случайными и определяются как $m_1(t,x,y) := m_1(t,x,y,\omega) = \mathbb{E}_x\mu_{t,\omega}(y)$; $m_1(t,x) := m_1(t,x,\omega) = \mathbb{E}_x\mu_{t,\omega}$. Здесь ω относится к фиксированной («замороженной») реализации случайной среды, а x есть положение начальной частицы при $t = 0$. Первые «отожженые» моменты (annealed moments) определяются как $\langle m_1(t,x,y)\rangle$ и $\langle m_1(t,x)\rangle$, соответственно.

В неслучайной среде интенсивности ветвления предполагаются равными константе см., напр., [3] и библиографию в ней. В остальном, описание процесса такое же, как и в случайной среде. Однако в неслучайной среде нет понятия «замороженного момента». Моменты численностей частиц $m_1(t,x,y) = \mathbb{E}_x\mu_t(y)$ и $m_1(t,x) = \mathbb{E}_x\mu_t$, как в классической теории, неслучайны.

Как мы уже упоминали, перемежаемость есть аномальное свойство предельного распределения поля моментов. В общем случае определение этого понятия достаточно сложно, см. [2, 4]. Однако в рамках данной работы, перемежаемость можно определить как быстрый рост моментов: $\langle m^2\rangle \gg \langle m\rangle^2$, $\langle m^4\rangle \gg \langle m^2\rangle^2$ и т. д. Ключевой результат, показанный в [2, 7] гласит, что при некоторых достаточно общих ограничениях на интенсивности для отожженных моментов ВСБ в однородной и неоднородной среде поле замороженных моментов перемежаемо. В [6] с помощью численного моделирования продемонстрировано, что основной вклад в каждый отожженый момент вносят высокие и редкие «пики» случайного поля замороженных моментов. В данной работе исследуется возникновение перемежаемости в зависимости от длины временного интервала и вводится способ ее оценки.

2. Основные результаты

Для численного моделирования использовалась среда R v 3.6.3 и компьютерный кластер с 48 процессорными ядрами. Алгоритм использовал разложение ВСБ на композицию полиномиальных и экспоненциальных случайных величин. Подробное описание алгоритма см. в [6]. Этот алгорим позволяет генерировать значение общей численности $\mu_{t,\omega}$ на интервале времени $[0,T]$ для заранее заданных параметров модели и реализации среды ω.

Пусть выполнено M запусков алгоритма и получены численности $\mu_{t,\omega,1},\ldots,\mu_{t,\omega,M}$. Тогда оценить $m_1(t,\omega)=\mathbb{E}\mu_{t,\omega}$ можно с помощью метода Монте-Карло, положив $\hat{m}_1(t,\omega)=\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{M}\mu_{t,\omega,i}$. Пусть значения $\hat{m}_1(t,\omega_1),\ldots,\hat{m}_1(t,\omega_{M_1})$ оценены для различных $(\omega_1,\ldots,\omega_{M_1})$, соответственно. Тогда оценка отожженных моментов $\langle m_1(t)\rangle$ может быть вычислена как $\widehat{\langle m_1(t)\rangle}=\dfrac{1}{M_1}\displaystyle\sum_{k=1}^{M_1}\hat{m}_1(t,\omega_k)$.

В неслучайной среде значение $m_1(t)$ не является случайным, поэтому метод Монте-Карло может быть остановлен на первом шаге с моделированием M оценок. Однако для удобства сравнения случайных и неслучайных сред мы использовали «псевдотожженный» момент $\widehat{[m_1(t)]}$: $\widehat{[m_1(t)]}=\dfrac{1}{M_1}\displaystyle\sum_{k=1}^{M_1}\hat{m}_1(t)$.

При моделировании мы рассматривали простое случайное блуждание с $\varkappa=1$ и полагали $T=10$, $M=1000$ и $M_1=250$. В ВСБ в неслучайной среде для однородного и неоднородного случаев интенсивность гибели принималась равной 1, а интенсивность деления частиц — равной 2. ВСБ в случайной среде рассматривается для тех же случаев, но интенсивности описываются вейбулловскими случайными величинами с параметрами гибели $\mathbb{E}\,(\mathrm{Weib}(2,1.13))\approx 1$ и деления $\mathbb{E}\,(\mathrm{Weib}(2,2.26))\approx 2$ для удобства сравнения с неслучайной средой. На рисунке 1 показаны оценки первого момента общего числа частиц для этих моделей в моменты времени $t=1$ и $t=2$, при которых уже визуально выражена перемежаемость в однородной и неоднородной случайных средах. В неслучайной среде гипотезу о том, что оценки первого момента отклоняются от реализаций нормально распределенной случайной величины с помощью теста Шапиро – Уилка отвергнуть не удалось ($p>0.1$ в обоих случаях). При этом в случайной среде распределение замороженных моментов содержит редкие реализации большого размера.

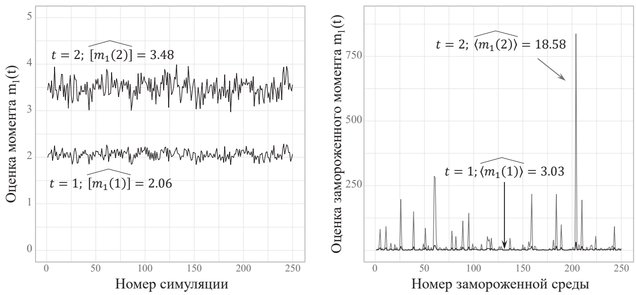

Рис. 1. Моменты для ВСБ в неоднородной среде неслучайной (слева) и случайной среде

Введем «меру» перемежаемости $R_k(t)$, несколько модифицированную по сравнению с введенной в [6]. Мера основана на интерпретации перемежаемости — как появлении «высоких пиков», влияние которых оценивается при помощи усеченного среднего. Значение первого момента численностей частиц, усеченного на уровне $k\%$, определяется как среднее, оцененное по выборке, без наименьших и наибольших $k\%$ наблюдений.

$$R_k(t) = \begin{cases} \widehat{[m_1(t)]} \Big/ \widehat{[m_1(t)]}_{k\%\text{ усеч.}} & \text{в неслучайной среде,} \\ \widehat{\langle m_1(t)\rangle} \Big/ \widehat{\langle m_1(t)\rangle}_{k\%\text{ усеч.}} & \text{в случайной среде.} \end{cases}$$

В неслучайных средах $R_1(t)$ и $R_5(t)$ для каждого $0 < t \leqslant 10$ равны 1 с точностью до второго знака после запятой. В то же время в случайной средах $R_1(t)$ и $R_5(t)$, как видно из рисунка 2, резко отличаются от единицы и $R_1(t) < R_5(t)$ для каждого $0 < t \leqslant 10$. Мы отдельно оценили монотонность функции $R_k(10)$ по k на равномерной решетке из 100 точек на отрезке $k \in [0.21, 5]$. Оказалось, что $R_k(10)$ монотонно возрастает при увеличении k. При минимальном урезании на одну траекторию $k = 0.21$ и $R_{0.21}(10) = 79 > 1$. Численно показано, что величина $R_k(10) \approx 1$ при $k \in [0.21, 5]$ для неслучайной среды, а для случайной среды $R_k(10)$ резко отличается от 1 и монотонно возрастает по k. Тот же эффект наблюдается для однородной «критической» случайной среды, когда интенсивности

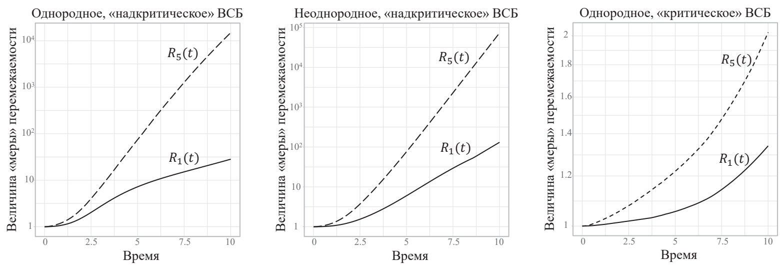

Рис. 2. «Мера» перемежаемости $R_k(t)$ для различных моделей

размножения и гибели частиц имеют одинаковое распределение с параметрами Weib$(2, 1.13)$.

Заключение

Перемежаемость может наблюдаться на конечных временных интервалах. С помощью функции $R_k(t)$ для каждого фиксированного k численно оценивается величина эффекта перемежаемости, которая увеличивается с ростом t в случайных средах.

Список литературы

[1] Перемежаемость в случайной среде / Я. Б. Зельдович, С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов // Успехи физических наук. — 1987. — Т. 152, вып. 1. — С. 3–32.

[2] Annealed Moment Lyapunov Exponents for a Branching Random Walk in a Homogeneous Random Branching Environment / S. Albeverio, L. Bogachev, S. Molchanov, E. Yarovaya // Markov Processes and Related Fields. — 2000. — №6. — P. 473–516.

[3] *Ermishkina, E.* Simulation of Branching Random Walks on a Multidimensional Lattice / E. Ermishkina, E. Yarovaya // Journal of Mathematical Sciences. — 2021. — Vol. 254, №4. — P. 469–484.

[4] *Gärtner J.* Parabolic problems for the Anderson model / J.Gärtner, S. A. Molchanov // Communications in Mathematical Physics. — 1990. — №132. — P. 613–655.

[5] Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium / I. B. Zel'dovich, S. A. Molchanov, A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokolov // Cambridge : Cambridge Scientific Publishers Limited, 1988. — 110 p.

[6] *Kutsenko, V.* Symmetric Branching Random Walks in Random Media: Comparing Theoretical and Numerical Results / V. Kutsenko, E. Yarovaya. — URL: arXiv:2109.09126. — Загл. с титул. экрана.

[7] *Yarovaya, E.* Symmetric Branching Walks in Homogeneous and non-homogeneous Random Environments // Communications in Statistics — Simulation and Computation. — 2012. — №7. — P. 1232–1249

Библиографическая ссылка

Куценко, В. А. Моделирование процессов с генерацией и транспортом частиц в случайной среде / В. А. Куценко, Е. Б. Яровая // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 190–198.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-28

Сведения об авторах

1. Владимир Александрович Куценко
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Аспирант

Россия, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Главное здание, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей
E-mail: vlakutsenko@ya.ru

2. Елена Борисовна Яровая
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Профессор

Россия, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Главное здание, механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей
E-mail: yarovaya@mech.math.msu.su