УДК 510.64
AMS MSC2020: 03B60, 03B42

Топологические модели логик HC и H4[1]

Оноприенко А. А.

Тверской государственный университет

Аннотация. Рассматривается пропозициональный фрагмент HC совместной логики задач и высказываний QHC, введенной С. А. Меликовым. Предлагаются топологические модели этой логики. Также рассмотрены топологические модели логики H4, являющейся расширением так называемой «lax logic». Для всех этих моделей доказана теорема о корректности и полноте.

Ключевые слова: неклассические логики, топологическая семантика.

Введение

В математике еще со времен Евклида было принято разделять утверждения на две группы: высказывания (теоремы, предположения) и задачи (геометрические построения, нахождение корней уравнения). Теоремы необходимо доказывать, а в задачах находить общий метод, приводящий к решению в любом частном случае. Таким образом, в математической науке имеются два вида знания: «знать, что нечто истинно» (то есть иметь знание об истинности некоторых утверждений) и «знать, как что-либо делать» (то есть знать общий метод решения задач).

А. Н. Колмогоров рассматривал интерпретацию интуиционистской логики высказываний как логики задач [1]. А. Н. Колмогоров критически исследовал интуиционистскую логику и указывал, что ее объекты — это, по существу, задачи, а не теоретические высказывания, и поэтому интуиционистская логика должна быть заменена исчислением задач. По замыслу А. Н. Колмогорова работа [1] должна

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 21-18-00195. Автор является стипендиатом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

была стать предпосылкой к созданию «единого логического аппарата», работающего одновременно с объектами двух типов: задачами и высказываниями.

С. А. Мелихов ввел в рассмотрение объединенную логику задач и высказываний QHC [3,4]. В этой логике каждый предикатный символ и каждая формула имеет один из двух сортов: высказывание либо задача. Формулы сорта высказывание (задача) подчиняются всем законам классического (интуиционистского) исчисления предикатов. Формулы разных сортов связаны друг с другом при помощи двух модальностей: ? и ! . Применив модальность ! к высказыванию p, мы получим задачу $!p$ — «доказать высказывание p». С другой стороны, применив модальность ? к задаче α, мы получим высказывание $?\alpha$ — «задача α имеет решение». Эти модальности связаны между собой следующими аксиомами и правилами вывода:

1) $!(p \to q) \to (!p \to !q)$;
2) $?(\alpha \to \beta) \to (?\alpha \to ?\beta)$;
3) $\dfrac{p}{!p}$;
4) $\dfrac{\alpha}{?\alpha}$;
5) $?!p \to p$;
6) $\alpha \to !?\alpha$;
7) $\neg !0$.

1. Топологические модели HC

Определим модели логики HC (пропозиционального фрагмента логики QHC) следующим образом.

- Зафиксируем топологическое пространство X и его всюду плотное подмножество A.
- Классическая часть интерпретируется на булевой алгебре подмножеств множества A.
- Интуиционистская часть интерпретируется на топологическом пространстве X стандартным образом [5].

- Интерпретация модальностей задается следующим образом: $|?\alpha| = A \cap |\alpha|$; $|!p| = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |p|)$.

Для данной семантики получены следующие результаты.

Теорема 1 (корректность). *Если замкнутая формула выводима в* HC, *то она истинна в любой топологической модели логики* HC.

Теорема 2 (полнота). *Если формула φ логики* HC *истинна в любой топологической модели логики* HC, *то φ выводима в* HC.

Замечание 1. *Приведенные модели являются обобщением моделей логики* QHC, *которые ввел С. А. Мелихов под названием «модели Эйлера – Тарского» [4].*

Замечание 2. *Если положить $A = X$ и рассматривать только классическую часть логики* HC *с производной модальностью $\Box = ?!$, то получатся топологические модели логики* S4.

2. Логика H4

Логика H4 — расширение интуиционистской пропозициональной логики модальностью ∇, для которой выполнены следующие аксиомы:

1) $\alpha \to \nabla\alpha$;
2) $\nabla\nabla\alpha \to \nabla\alpha$;
3) $\nabla\bot \to \bot$;
4) $\nabla(\alpha \to \beta) \to (\nabla\alpha \to \nabla\beta)$.

Определим топологические модели логики H4 следующим образом.

- Зафиксируем топологическое пространство X и его всюду плотное подмножество A.
- Интепретация интуиционистских связок и кванторов стандартна [5].
- Интерпретация модальности задается следующим образом: $|\nabla\varphi| = X \setminus \mathrm{Cl}(A \setminus |\varphi|)$.

Для данной семантики получены аналогичные результаты.

Теорема 3 (корректность). *Если замкнутая формула выводима в* H4, *то она истинна в любой топологической модели логики* H4.

Теорема 4 (полнота). *Если формула* φ *логики* H4 *истинна в любой топологической модели логики* H4, *то* φ *выводима в* H4.

Замечание 3. *Если рассматривать только интуиционистскую часть* HC *с производной модальностью* $\nabla = !?$, *то из топологических моделей логики* HC *получатся топологические модели логики* H4.

Заключение

В настоящей работе рассмотрена топологическая семантика совместной логики задач и высказываний HC, являющаяся обобщением топологических семантик классической логики, интуиционистской логики, логики S4, а также логики H4. Обозначим некоторые открытые вопросы в данной области исследования.

1) Выполнена ли теорема о полноте для логик HC и H4, если ограничиться топологическим пространством $\mathbb{R}$ и его всюду плотным подмножеством $\mathbb{Q}$?
2) Логика H4 является расширением так называемой «lax logic» [2] дополнительной аксиомой $\nabla\bot \to \bot$. Будет ли выполнена теорема о полноте для «lax logic», если исключить в определении топологической семантики требование о всюду плотности множества A?
3) Выполнена ли теорема о полноте для логик QHC и QH4 — предикатных вариантов логик HC и H4?

Список литературы

[1] *Колмогоров, А. Н.* Избранные труды. Математика и механика. — М. : Наука, 1985. — 470 с.

[2] *Fairtlough, M.* Quantified lax logic / M. Fairtlough, M. Walton. — Sheffield, 1997. — 78 p. — (Tech. Rep. / Department of Computer Science, University of Sheffield; CS-97-11.)

[3] *Melikhov, S. A.* A Galois connection between classical and intuitionistic logics. I: Syntax. — URL: arXiv:1312.2575. — Загл. с титул. экрана.

[4] *Melikhov, S. A.* A Galois connection between classical and intuitionistic logics. II: Semantics. — URL: arXiv:1504.03379. — Загл. с титул. экрана.

[5] *Tarski, A.* Der Aussagenkalkül und die Topologie // Fundamenta Mathematicae. — 1938. — Vol. 31. — P. 103–134.

Библиографическая ссылка

Оноприенко, А. А. Топологические модели логик HC и H4 // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 241–245.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-33

Сведения об авторах

Оноприенко Анастасия Александровна
Тверской государственный университет.

Россия, 170002, Тверь, Садовый пер., д. 35
E-mail: ansidiana@yandex.ru