УДК 510.643, 510.649
AMS MSC2020: 03B20, 03B25, 03B45

# Неразрешимость логик с унарным предикатом и двумя переменными[1]

**Рыбаков М. Н.*, Шкатов Д. П.****

*Тверской государственный университет
**Тверской государственный университет;
University of the Witwatersrand, Johannesburg

Аннотация. Обсуждается вопрос об алгоритмической сложности неклассических предикатных логик в языке с одной унарной предикатной буквой и двумя переменными. Показано, что если в логике нет формул, ограничивающих высоту (иногда и ширину) ее шкал Крипке, то, в зависимости от остальных ограничений, проблема принадлежности формул логике в таком языке будет неразрешима, неперечислима или даже неарифметична.

Ключевые слова: неклассические логики, логики первого порядка, разрешимость, рекурсивная перечислимость.

## Введение

Неклассические логики предикатов обычно содержат классическую логику первого порядка **QCl** как естественный фрагмент,[2] и следовательно, неразрешимы; более того, для их неразрешимости часто достаточно двух одноместных предикатных букв [5] или же двух предметных переменных [4]. Уменьшение числа предметных переменных до одной, как правило, приводит к разрешимости [2, 6], а вот уменьшение числа предикатных букв до одной — не обязательно [1, 3]. Авторам данной работы удалось установить, что во многих случаях при «соединении» этих двух условий (одна унарная

[1]Работа выполнена в Тверском государственном университете при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект 21-18-00195.

[2]Иногда не содержат в явном виде, но **QCl** погружается в них, как, например, происходит в случае суперинтуиционистских логик.

буква и две переменные) получается $\Sigma^0_1$-, $\Pi^0_1$- или даже $\Pi^1_1$-трудный фрагмент исходной логики [8–11], и цель данной работы — показать ключевую идею, лежащую в основе соответствующих доказательств.

## 1. Основные определения

Пусть интуиционистский предикатный язык содержит счетное множество предметных переменных, счетное множество предикатных букв любой валентности, связки $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\bot$, а также кванторные символы $\forall$ и $\exists$, а модальный предикатный язык содержит еще и модальность $\Box$. Определим $\neg$ и $\Diamond$ как обычные сокращения: $\neg\varphi = \varphi \to \bot$, $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$.

Шкалой Крипке называем пару $\mathfrak{F} = (W, R)$, где $W$ — непустое множество миров и $R$ — бинарное отношением достижимости на $W$. Предикатный шкалой называем набор $\mathfrak{F}_D = (\mathfrak{F}, D)$, где $\mathfrak{F}$ — шкала Крипке, $D$ — семейство предметных областей миров из $W$, содержащее для каждого $w \in W$ непустое множество $D_w$, причем $D_w \subseteq D_u$ для любого $u \in R(w)$; в случае когда $D_w = D_u$ для любых $w \in W$ и $u \in R(w)$, говорят, что $\mathfrak{F}_D$ — шкала с постоянными областями.

Модальная модель Крипке — это набор $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}_D, I)$, где $\mathfrak{F}_D$ — предикатная шкала, а $I$ — интерпретация предикатных букв в мирах из $W$, то есть функция, которая $n$-арной букве $P$ и миру $w \in W$ ставит в соответствие $n$-арный предикат $I(P, w) = P^{I,w}$ в $D_w$. Заметим, что если мы определим $I_w$, положив $I_w(P) = I(P, w)$, то пара $(D_w, I_w)$ будет классической моделью. Истинность $\models$ в мирах такой модели определяется стандартно, в частности,

$$\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi(\bar{a}) \iff \mathfrak{M}, w' \models \varphi(\bar{a}) \text{ для любого } w' \in R(w).$$

Интуиционистская модель Крипке — это набор $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}_D, I)$, где $\mathfrak{F}_D$ — предикатная шкала, отношение достижимости в которой рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, а $I$ — интерпретация предикатных букв в мирах из $W$, для которой выполнено условие наследственности: если $u \in R(w)$ и $P^{I,w}(\bar{a})$, то $P^{I,u}(\bar{a})$. Истинность $\Vdash$ в мирах такой модели также определяется стандартно, в частности,

$$\mathfrak{M}, w \Vdash \forall x\, \varphi(x, \bar{a}) \iff \mathfrak{M}, w' \Vdash \varphi(b, \bar{a}) \text{ для любых } w' \in R(w) \text{ и } b \in D_{w'}.$$

Истинность формулы в модели, предикатной шкале, шкале Крипке, классе шкал определяется стандартно. Шкалу называем конечной, если множество ее миров конечно; $L_{wfin}$ — логика класса конечных шкал логики $L$.

## 2. Модальные логики классов шкал неограниченной ширины и высоты

Если шкалы логики не ограничены по ширине,[3] то формулу вида $Q(x, y)$ можно промоделировать формулой $\Diamond(P_1(x) \wedge P_2(y))$; эта идея изложена в [5] и известна как трюк Крипке. За счет такого моделирования мы оставляем в формулах лишь унарные буквы: уже в классической логике все $n$-арные буквы моделируются одной бинарной, а бинарная моделируется в модальных логиках двумя унарными. Трюк Крипке работает не только в шкалах бесконечной ширины: важно, чтобы из текущего мира было достижимо достаточно много других миров.

Пусть $\varphi$ — формула, содержащая унарные буквы $P_1, \ldots, P_n$. Чтобы промоделировать формулы вида $P_1(x), \ldots, P_n(x)$, зафиксируем унарную букву $P$. Пусть $\mathfrak{F}_n = (W_n, R_n)$, где $W_n = \{0, \ldots, n\}$ и $R_n = \{(k, k+1) : k \in W_n \setminus \{n\}\}$.

Пусть $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}_D, I)$ — модель Крипке и $w$ — мир в ней. Для каждого элемента $a \in D_w$ определены значения $P_1^{I,w}(a), \ldots, P_n^{I,w}(a)$; возьмем в качестве предметных областей миров шкалы $\mathfrak{F}_n$ множество $D_w$, и определим модель $\mathfrak{M}_w$ на шкале $\mathfrak{F}_n$ с этими областями в соответствии с эквивалентностью

$$\mathfrak{M}_w, k \models P(a) \iff \mathfrak{M}, w \models P_k(a).$$

В результате получим, что $\mathfrak{M}_w$ моделирует мир $w$ модели $\mathfrak{M}$.

Проделаем это для каждого мира $w$ исходной модели $\mathfrak{M}$, беря каждый раз в описанной конструкции не саму шкалу $\mathfrak{F}_n$, а ее новую копию. Добавим получившиеся таким способом модели к исходной модели (объединим множества миров и отношения достижимости), а также для каждого мира $w$ модели $\mathfrak{M}$ сделаем достижимым корень модели $\mathfrak{M}_w$ из $w$.

[3] Высота тоже имеет значение, но фактически часто бывает достаточно шкал высоты два.

Теперь заметим, что корень модели $\mathfrak{M}_w$ описывается формулой $\alpha = \Diamond^n\Box\bot$, а миры исходной модели $\mathfrak{M}$ — формулой $\Diamond\alpha$. И тогда, чтобы сказать, что в $w$ истинно $P_k(a)$, достаточно сказать, что из корня модели $\mathfrak{M}_w$ за $k$ шагов достижим мир, где истинно $P(a)$; таким образом, $P_k(x)$ можно промоделировать формулой $\Diamond(\alpha \wedge \Diamond^k P(x))$.

Некоторые технические детали добавляются, когда отношение достижимости должно обладать дополнительными свойствами, например, рефлексивностью, симметричностью, транзитивностью. Первые два особых сложностей не представляют, а вот в транзитивном случае удается провести подобное моделирование лишь для моделей с условием наследственности[4] (чего оказывается достаточно для доказательства неразрешимости соответствующих логик). Наличие сразу всех трех указанных свойств приводит к ситуации, где похожее моделирование в мономодальном языке проделать не удалось (но можно в бимодальном).

В итоге получаем следующую теорему. Пусть *bf* — формула Баркан (семантически *bf* обеспечивает постоянство областей).

Теорема 1. *Пусть $L$ — логика, содержащая* **QK** *и содержащаяся в одной из логик* **QGL**, **QGrz**, **QKTB**. *Тогда логики $L$ и $L \oplus bf$ являются $\Sigma^0_1$-трудными в языке с одной унарной предикатной буквой и двумя предметными переменными, а логики $L_{wfin}$ и $L_{wfin} \oplus bf$ являются $\Pi^0_1$-трудными в языке с одной унарной предикатной буквой и тремя предметными переменными.*

Замечание 1. *В доказательстве этой теоремы оказывается не нужной полнота по Крипке, поэтому логики в указанных интервалах могут быть любыми; можно даже брать произвольные множества формул, удовлетворяющие указанному условию.*

## 3. Модальные логики классов шкал ограниченной ширины

Мы будем говорить здесь лишь о логиках линейных шкал (отношение достижимости при этом предполагается транзитивным); в случае, когда ширина шкал больше единицы, приведенная ниже аргументация также пройдет. Ситуация с логиками классов конечных шкал при этом особо не отличается от той, когда линейность не

[4]То есть $u \in R(w)$ и $P^{I,w}(\bar{a})$ влечет $P^{I,u}(\bar{a})$. Альтернативно можно взять условие $u \in R(w)$ и $P^{I,u}(\bar{a})$ влечет $P^{I,w}(\bar{a})$.

требовалась, и мы не будем ее рассматривать. В линейной шкале с бесконечной возрастающей цепью миров тоже проходит описанный выше трюк Крипке. Таким образом, мы снова можем отталкиваться от языка, содержащего лишь унарные предикатные буквы.

В этом случае моделирование формул $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ возможно, например, благодаря следующей несложной идее. Пусть, для простоты, у нас имеется шкала $(\mathbb{N}, <)$. Выделим миры вида $m \cdot (n+1)$ и будем смотреть на них как на миры исходной модели на шкале $(\mathbb{N}, <)$, между любыми двумя соседними из которых «вставлены» еще $n$ миров. Чтобы выделить эти миры, сделаем в мире $m \cdot (n+1)$ истинной фиксированную пропозициональную переменную $q$, а также $P(a_m)$, предварительно (до моделирования бинарных букв унарными) описав бинарное отношение $\lhd$, в соответствии с которым и выбраны элементы $a_i$ для $i \in \mathbb{N}$: $a_i \lhd a_{i+1}$. Теперь, чтобы промоделировать $P_k(a)$, в мире $m \cdot (n+1)$ достаточно выполнить условие типа $q \wedge P(a_m) \wedge \Diamond(P(a) \wedge \Diamond^k(q \wedge P(a_{m+1})) \wedge \neg\Diamond^{k+1}(q \wedge P(a_{m+1})))$.

Здесь мы видим три элемента ($a$, $a_m$ и $a_{m+1}$), но, тем не менее, можно обойтись формулами с двумя переменными. Дальнейшая детализация всей конструкции[5] требует некоторой технической работы, здесь мы излагаем лишь ключевую идею, лежащую в основе результатов, изложенных в [9].

Теорема 2. *Пусть $L$ — логика шкалы $(\mathbb{N}, R)$, где $R$ — бинарное отношение, лежащее между $<$ и $\leqslant$. Тогда логики $L$ и $L \oplus bf$ являются $\Pi^1_1$-трудными в языке с одной одноместной предикатной буквой, одной пропозициональной переменной и двумя предметными переменными.*

Замечание 2. *Этот результат можно распространить и на другие порядки, например, заменив $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$, но тогда вместо $\Pi^1_1$-трудности мы можем гарантировать лишь $\Sigma^0_1$-трудность при аналогичных ограничениях на средства языка. При переходе к темпоральным логикам типа* **QLTL**, **QCTL**, **QCTL**$^*$ *для обоснования $\Pi^1_1$-трудности пропозициональная переменная не требуется.*

[5] Нужно описать свойства отношения $\lhd$, связать их с отношением достижимости в шкале, использовать для моделирования неразрешимой проблемы.

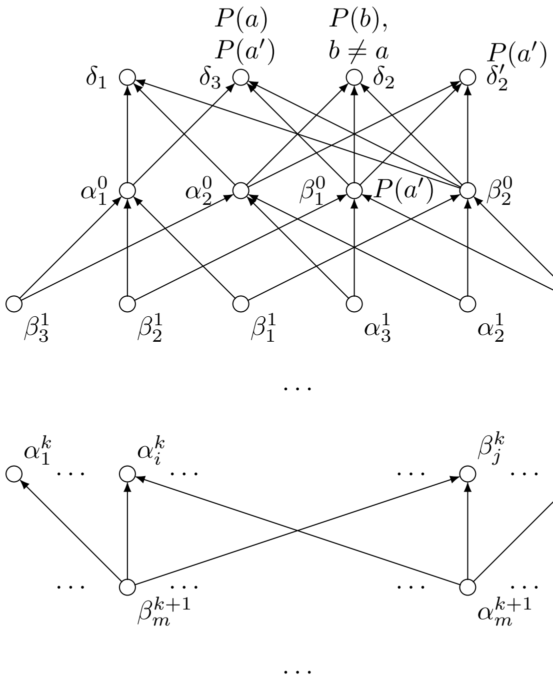


Рис. 1. Модель $\mathfrak{N}_a^w$

## 4. Суперинтуиционистские логики

Интуиционистская логика **QInt** неразрешима в языке с двумя предметными переменными [4], но нам важно, что в исходном доказательстве можно промоделировать константу $\perp$ позитивной формулой $\forall x\, Q(x)$. Это позволяет применить некоторую модификацию трюка Крипке, оставаясь в позитивном фрагменте **QInt**. Далее используем модификацию «пропозициональной» конструкции из [7], суть которой в следующем. Чтобы промоделировать в мире $w$ интуиционистской модели $\mathfrak{M}$ формулы $P_1(x), \ldots, P_n(x)$, для каждого $a \in D_w$ построим модель $\mathfrak{N}_a^w = (W_0, R_0, D^w, I_a)$, как на рис. 1, где $a'$ — некоторый фиксированный элемент, отличный от $a$, и $D_u^w = D_w$ для каждого $u \in W_0$.

Определим формулы, в некотором смысле[6] описывающие верхние миры этой модели:

$$
\begin{array}{lcl}
D_1 & = & \exists x\, P(x); \\
D_2(x) & = & \exists x\, P(x) \to P(x); \\
D_3(x) & = & P(x) \to \forall x\, P(x); \\
A_1^0(x) & = & D_2(x) \to D_1 \vee D_3(x); \\
A_2^0(x) & = & D_3(x) \to D_1 \vee D_2(x); \\
B_1^0(x) & = & D_1 \to D_2(x) \vee D_3(x); \\
B_2^0(x) & = & A_1^0(x) \wedge A_2^0(x) \wedge B_1^0(x) \to D_1 \vee D_2(x) \vee D_3(x); \\
A_1^1(x) & = & A_1^0(x) \wedge A_2^0(x) \to B_1^0(x) \vee B_2^0(x); \\
A_2^1(x) & = & A_1^0(x) \wedge B_1^0(x) \to A_2^0(x) \vee B_2^0(x); \\
A_3^1(x) & = & A_1^0(x) \wedge B_2^0(x) \to A_2^0(x) \vee B_1^0(x); \\
B_1^1(x) & = & A_2^0(x) \wedge B_1^0(x) \to A_1^0(x) \vee B_2^0(x); \\
B_2^1(x) & = & A_2^0(x) \wedge B_2^0(x) \to A_1^0(x) \vee B_1^0(x); \\
B_3^1(x) & = & B_1^0(x) \wedge B_2^0(x) \to A_1^0(x) \vee A_2^0(x).
\end{array}
$$

Формулы, описывающие остальные миры, определим рекурсивно. Миры $\alpha_i^k$ и $\beta_i^k$ называем мирами уровня $k$; число миров уровня $k$ равно $2n_k$, где $n_0 = 2$, $n_1 = 3$, $n_{k+1} = (n_k - 1)^2$. Пусть формулы, описывающие миры уровня $k$, где $k \geqslant 1$, определены. Пусть $i$, $j$ и $m$ таковы, что из $\alpha_m^{k+1}$ и $\beta_m^{k+1}$ достижимы $\alpha_i^k$ и $\beta_j^k$; тогда положим

$$
\begin{array}{lcl}
A_m^{k+1}(x) & = & A_1^k(x) \to B_1^k(x) \vee A_i^k(x) \vee B_j^k(x); \\
B_m^{k+1}(x) & = & B_1^k(x) \to A_1^k(x) \vee A_i^k(x) \vee B_j^k(x).
\end{array}
$$

Ключевым наблюдением здесь является следующее.

Лемма 3. *Для любого мира и модели $\mathfrak{N}_a^w$ верны следующие эквивалентности:*

$$
\begin{array}{lcl}
\mathfrak{N}_a, u \not\Vdash A_m^k(a) & \Longleftrightarrow & uR_0\alpha_m^k; \\
\mathfrak{N}_a, u \not\Vdash B_m^k(a) & \Longleftrightarrow & uR_0\beta_m^k.
\end{array}
$$

Это наблюдение позволяет промоделировать $P_k(x)$ формулой $A_k^{n+1}(x) \vee B_k^{n+1}(x)$ и повторить конструкцию, похожую на описанную для модального случая, при этом модель $\mathfrak{N}_a^w$ нужно брать для каждого набора $(w, a, k)$, когда $\mathfrak{M}, w \not\models P_k(a)$ или $k = n+1$. Отметим также, что фактически нужна не вся модель $\mathfrak{N}_a^w$, а лишь ее верхняя часть вплоть до уровня $n+1$, которая является конечной.

[6] См. лемму 3.

В итоге можно доказать следующую теорему. Пусть $cd$ — формула, требующая постоянства областей.

Теорема 4. *Пусть $L$ — логика, лежащая между* **QInt** *и* **QKC**. *Тогда логики $L$ и $L + cd$ являются $\Sigma^0_1$-трудными в языке с одной унарной предикатной буквой и двумя предметными переменными, а $L_{wfin}$ и $L_{wfin} + cd$ являются $\Pi^0_1$-трудными в языке с одной унарной предикатной буквой и тремя предметными переменными.*

## Список литературы

[1] *Маслов, Ю. Г.* Неразрешимость в конструктивном исчислении предикатов некоторых классов формул, содержащих только одноместные предикатные переменные / С. Ю. Маслов, Г. Е. Минц, В. П. Оревков // Доклады АН СССР. — 1965. — Т. 163, № 2. — С. 295–297.

[2] *Минц, Г. Е.* О некоторых исчислениях модальной логики // Логические и логико-математические исчисления. Тр. МИАН СССР. — 1968. — Т. 98. — С. 88–111.

[3] *Gabbay, D.* Semantical Investigations in Heyting's Intuitionistic Logic. — Dordrecht : Springer, 1981. — 287 p.

[4] *Kontchakov, R.* Undecidability of first-order intuitionistic and modal logics with two variables / R. Kontchakov, A. Kurucz, M. Zakharyaschev // Bulletin of Symbolic Logic. — 2005. — Vol. 11, №3. — P. 428–438.

[5] *Kripke, S.* The undecidability of monadic modal quantification theory // Zeitschrift für Matematische Logik und Grundlagen der Mathematik. — 1962. — №8. — P. 113–116.

[6] *Ono, H.* On some intuitionistic modal logics // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. — 1977. — Vol. 13, №3. — C. 687–722.

[7] *Rybakov, M.* Complexity of intuitionistic propositional logic and its fragments // Journal of Applied Non-Classical Logics. — 2008. — Vol. 18, №2-3. — P. 267–292.

[8] *Rybakov, M.* Undecidability of first-order modal and intuitionistic logics with two variables and one monadic predicate letter /

M. Rybakov, D. Shkatov // Studia Logica. — 2019. — Vol. 107, №4. — P. 695–717.

[9] *Rybakov, M.* Algorithmic properties of first-order modal logics of the natural number line in restricted languages / M. Rybakov, D. Shkatov // N. Olivetti, R. Verbrugge, S. Negri, G. Sandu, editors. Advances in Modal Logic. — 2020. — Vol. 13. — P. 523–539.

[10] *Rybakov, M.* Algorithmic properties of first-order modal logics of finite Kripke frames in restricted languages / M. Rybakov, D. Shkatov // Journal of Logic and Computation. — 2020. — Vol. 30, №7. — P. 1305–1329.

[11] *Rybakov, M.* Algorithmic properties of first-order superintuitionistic logics of finite Kripke frames in restricted languages / M. Rybakov, D. Shkatov // Journal of Logic and Computation. — 2021. — Vol. 31, №2. — P. 494–522.

## Библиографическая ссылка

*Рыбаков, М. Н.* Неразрешимость логик с унарным предикатом и двумя переменными / М. Н. Рыбаков, Д. П. Шкатов // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 246–254.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-34

## Сведения об авторах

1. Михаил Николаевич Рыбаков
   Тверской государственный университет. Доцент

   *Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33*
   *E-mail: m_rybakov@mail.ru*

2. Дмитрий Петрович Шкатов
   Тверской государственный университет;
   University of the Witwatersrand, Johannesburg. Senior Lecturer

   *South Africa, Johannesburg, WITS2050, Private Bag 3*
   *E-mail: shkatov@gmail.com*