УДК 510.624
AMS MSC2020: 03B70

Элиминация оператора частичной фиксированной точки[1]

Секорин В. С.

Тверской государственный университет

Аннотация. В работе рассмотрена семантика частичной фиксированной точки для бесконечных алгебраических систем. Для нее показано, что элиминировать оператор частичной фиксированной точки можно только в тех теориях, в которых любой такой оператор зацикливается за конечное число шагов.

Ключевые слова: частичная фиксированная точка, алгебраическая система, семантика.

Введение

Разнообразные методы математической логики находят все более широкое применение при решении задач проектирования и анализа программного обеспечения. Одним из разделов математической логики, который наиболее тесным образом связан с информатикой, является теория логических языков. Например, логические языки используются в системах управления базами данных. В них они применяются в качестве средства извлечения информации из базы данных. Но стоит отметить, что многие простые, но имеющие большое практическое значение [1] свойства являются невыразимыми в логике первого порядка.

Эта причина обосновывает тот факт, что логика первого порядка и различные ее расширения постоянно изучаются. Среди одних из самых распространенных расширений можно выделить оператор фиксированной точки. Существует несколько видов таких операторов: инфляционной фиксированной точки, наименьшей фиксированной точки и частичной фиксированной точки. Самым

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 20-01-00435.

общим из этих операторов является оператор частичной фиксированной точки (PFP-оператор). Отметим, что предложен этот оператор был Ю. Гуревичем в работе [2]. В книге [3] Л. Либкина содержится подробное изложение свойств PFP-оператора для конечных алгебраических систем.

Необходимо отметить, что операции базы данных могут выполняться не только над элементами самой базы данных, но и над произвольными элементами универсума. Это тоже может увеличить выразительные возможности языка первого порядка, но незначительно [4]. При совместном использовании этих двух возможностей возникает ситуация, при которой применение PFP-оператора происходит для бесконечных алгебраических систем. В данной работе мы рассмотрим семантику оператора частичной фиксированной точки, которая заключается в том, что формула считается истинной, когда набор принадлежит предикату на всех шагах, начиная с некоторого [5].

Возникает вопрос: в каких случаях можно элиминировать PFP-оператор. В качестве основного результата доказано утверждение о том, что в теории можно элиминировать PFP-оператор тогда и только тогда, когда любой PFP-оператор в этой теории зацикливается.

1. Основные определения

Определение 1 (Формула логики частичной фиксированной точки, [3], [5]). *Будем называть* ***формулой*** PFP-***логики*** *формулу, которая построена по правилам логики первого порядка с использование оператора частичной фиксированной точки* PFP*: если $\varphi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула со свободными переменными $\bar{x}$ и $\bar{y}$, содержащая несигнатурный предикатный символ Q, то $\mathrm{PFP}_{Q(\bar{y})}(\varphi)$ — формула исходной сигнатуры, содержащая свободные переменные $\bar{x}$ и $\bar{y}$. При этом длина $\bar{y}$ совпадает с местностью Q.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — это алгебраическая система. Зафиксируем значения переменных $\bar{x}$ как $\bar{d} \in |\mathfrak{A}|$. Построим последовательность множеств $Q_i^{\bar{d}}$ следующим образом. Пусть

$$Q_0^{\bar{d}} = \varnothing; \quad Q_{i+1}^{\bar{d}} = \{\bar{y} \in |\mathfrak{A}| \bigm| (\mathfrak{A}, Q_i^{\bar{d}}) \models \varphi(\bar{d}, \bar{y})\},$$

для $i \in \omega$.

Значением частичной фиксированной точки является следующее множество $Q^{\bar d}_{\forall}$. Множеству $Q^{\bar d}_{\forall}$ принадлежат только те $\bar y$, для которых существует i такой, что $\bar y \in Q_j$ для всех $j > i$. Следовательно, для этих $\bar y$ формула $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(\bar y)}(\varphi)(\bar d, \bar y)$ будет истинной.

Если существуют такие натуральные и неравные i, j, что выполнено $Q^{\bar d}_i = Q^{\bar d}_j$, то будем говорить, что $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор зацикливается или сходится.

Пример 1. *Рассмотрим алгебраическую систему, носителем которой является множество целых чисел, и одноместный функциональный символ $s^{(1)}$ обозначает число на единицу большее. Тогда следующая формула будет истинна тогда и только тогда, когда $v \leqslant w$ $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q(x)}(\theta)(v, w)$, где*

$$\theta(v, x) \equiv x = v \vee Q(x) \vee (\exists y)\big(Q(y) \wedge x = s(y)\big).$$

На первом шаге в предикат Q попадет только число v, то есть $Q_1 = \{v\}$. На всех последующих шагах будет выполнено:

$$Q_{i+1} = \{x \mid Q_i(x) \text{ или } (\exists y)\big(Q_i(y) \wedge x = s(y)\big)\},$$

таким образом на $i+1$-ом шаге в предикат попадут те и только те числа, которые были на предыдущем шаге или которые на единицу больше чисел предыдущего шага. То есть на $i+1$ шаге будет выполнено: $Q_{i+1} = \{v, \ldots, v+i\}$. Таким образом, данный $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор не зацикливается, не сходится, так как на каждом шаге мы добавляем новое число.

Определение 2 (Элиминация PFP-оператора). *Теория T допускает элиминацию PFP-оператора, если для любой формулы φ, содержащей PFP-операторы, существует эквивалентная ей в T формула ψ без PFP-операторов.*

2. Основные результаты

Основной результат, который мы докажем в этой части, заключается в том, что элиминация $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператора возможна в теории T тогда и только тогда, когда в этой теории любой $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор сходится.

Теорема 1. *Теория T допускает элиминацию* $\mathrm{PFP}^{\forall}$*-оператора тогда и только тогда, когда любой* $\mathrm{PFP}^{\forall}$*-оператор зацикливается в* T.

Доказательство. Докажем теорему в прямую сторону. Допустим, что $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор не сходится за конечное число шагов, то есть существует бесконечное количество попарно неравных множеств $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$

Пусть

$$\varphi'(\bar{y}) \equiv (\varphi)^{Q(\bar{t})}_{(\exists \bar{u},\bar{v}) P(\bar{t},\bar{u},\bar{v})}(\bar{y}).$$

Построим $\mathrm{PFP}_P(\eta)(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, где

$$\begin{aligned}
\eta(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) \equiv \varphi'(\bar{x}) \wedge \\
\wedge \big[(\forall \bar{s},\bar{t})\big(\varphi'(\bar{s}) \wedge \neg\varphi'(\bar{t}) \vee \neg\varphi'(\bar{s}) \wedge \varphi'(\bar{t}) \to \bar{y} = \bar{s} \wedge \bar{z} = \bar{t}\big) \vee \\
\vee (\exists \bar{s}) P(\bar{s},\bar{y},\bar{t})\big].
\end{aligned}$$

Множество P_i будет содержать тройку $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ тогда и только тогда, когда для некоторого натурального $j \leqslant i$ выполнено $Q_j(\bar{y}) \neq Q_j(\bar{z})$, то есть когда на этом или на одном из предыдущих шагов построения по Q один из этих наборов принадлежал множеству, а второй нет. Первый аргумент предиката P будет использован для сохранения значения Q. Для краткости при помощи R обозначим следующие множества: $R_0 = \overline{\varnothing}$, $R_i = (\exists \bar{x}) P_{i-1}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. Таким образом, множеству R_i будут принадлежать такие пары $(\bar{u},\bar{v})$, что на некотором шаге $j < i$ построения по предикату Q было выполнено $Q_j(\bar{u}) \neq Q_j(\bar{v})$.

Покажем, что R_i неограниченно возрастает. Допустим, что это не выполняется, то есть существует некоторое натуральное j_0 такое, что для всех $j \geqslant j_0$ выполняется $R_j = R_{j+1}$. Это возможно в том и только том случае, когда на $j-1$ шаге построения PFP по Q не нашлось новой пары $\bar{u}, \bar{v}$ такой, что $Q_{j-1}(\bar{u}) \neq Q_{j-1}(\bar{v})$. Каждый i-ый шаг построения по Q при $i < j_0$ разбивает носитель на две части: элементы, принадлежащие Q_i, и элементы, не принадлежащие Q_i. Таким образом, мы получим не более 2^{j_0} частей: $A_0, \ldots, A_{2^{j_0}-1}$. На всех последующих шагах $j > j_0$ множество Q_j будут являться объединением некоторых таких частей A. Всего таких объединений не больше чем 2^{2^j}. Следовательно, на шаге $j_0 + 2^{2^j} + 1$ будет получено множество Q, совпадающее с одним из предыдущих. Из этого следует, что и дальше они будут повторяться. Получили противоречие с тем, что существует бесконечно много различных множеств Q_i.

Тогда R задает дискретный предпорядок на $(\bar{x}, \bar{y})$: будем считать $(\bar{x}, \bar{y}) < (\bar{u}, \bar{v})$, если существует такой i, что $(\bar{x}, \bar{y}) \in R_i$ и $(\bar{u}, \bar{v}) \notin R_i$. Покажем, как такой предпорядок можно определить при помощи PFP$^\forall$-оператора. Пусть

$$\eta'(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \equiv \big(\eta\big)^{P(\bar{r}, \bar{s}, \bar{t})}_{(\exists \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) S(\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}).$$

Тогда $(\bar{x}, \bar{y}) < (\bar{u}, \bar{v}) \Leftrightarrow (\exists \bar{r}, \bar{s}, \bar{t})\big(\,\mathrm{PFP}^\forall_S(\xi)(\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})\big)$, где

$$\begin{aligned}
\xi(\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v}) \equiv \eta'(\bar{r}, \bar{s}, \bar{t}) \wedge \\
\wedge \big[(\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d})\big((\exists \bar{g})\eta'(\bar{g}, \bar{c}, \bar{d}) \wedge \neg(\exists \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{k}) S(\bar{e}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{k}) \wedge \\
\wedge (\exists \bar{e}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{k}) S(\bar{e}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{h}, \bar{k}) \to \bar{x} = \bar{a} \wedge \bar{y} = \bar{b} \wedge \bar{u} = \bar{c} \wedge \bar{v} = \bar{d}\big) \vee \\
\vee (\exists \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) S(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}, \bar{v})\big]
\end{aligned}$$

Используя R_i, определим формулу $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ истинную тогда и только тогда, когда не выполнено $R_i(\bar{x}, \bar{y})$ для всех R_i. Допустим, что формула ψ эквивалентна некоторой формуле θ, которая не содержит PFP-оператора. Рассмотрим множество формул

$$B = \{\neg\theta(\bar{x}, \bar{y})\} \cup \{\neg R_i(\bar{x}, \bar{y}) \mid \text{для всех } i\}.$$

Покажем, что это множество конечно совместно. Так как в любом конечном подмножестве найдется формула $\neg R_i(\bar{x}, \bar{y})$ с максимальным i. При помощи j обозначим максимальный из этих i. Тогда найдется такая пара $(\bar{u}, \bar{v})$, что она будет принадлежать множеству R_{j+1}, но не будет принадлежать множествам R_i с меньшими номерами. Следовательно, любое конечное подмножество B будет иметь модель, тогда само множество является конечно совместным. Таким образом, по теореме компактности мы получаем, что множество формул B имеет модель. В этом случае выполнена формула $\neg\theta(\bar{x}, \bar{y})$, говорящая о том, что хотя бы одна из формул вида $R_i(\bar{x}, \bar{y})$ выполнена, и одновременно выполнены формулы $\neg R_i(\bar{x}, \bar{y})$ для всех i, то есть ни одна из формул вида $R_i(\bar{x}, \bar{y})$ не выполнена. Противоречие.

Теперь докажем теорему в обратную сторону. Любой PFP$^\forall$-оператор зацикливается в T, рассмотрим произвольный из них.

Тверской государственный университет

Пусть n — это максимальное число шагов, за которое зацикливается выбранный $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор на любом наборе аргументов. Заметим, что количества шагов, необходимые для зацикливания на некотором наборе, не могут неограниченно возрастать, так как в этом случае по теореме компактности нашелся бы набор, для которого количество шагов было бы бесконечным. Таким образом, мы получили, что произвольно выбранный $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор не сходится, что противоречит тому, что любой такой оператор зацикливается. Следовательно, существует конечно много попарно неравных $Q_i : Q_0, \ldots, Q_n$. Тогда $Q_{n+1} = Q_k$ для некоторого натурального $k \leqslant n$. Покажем, что любой зацикливающийся $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор, можно элиминировать формулой $\chi(\bar{x}) \equiv \bigvee\limits_{k=0}^{n} \big((\forall \bar{y})(Q_k(\bar{y}) \leftrightarrow Q_{n+1}(\bar{y})) \wedge \bigwedge\limits_{i=k}^{n+1} Q_i(\bar{x})\big)$. Для этого докажем, что для произвольного сходящегося $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператора выполнено $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q}(\varphi)(\bar{a}) \Leftrightarrow \chi(\bar{a})$. Если выполнено $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q}(\varphi)(\bar{a})$, то $\bar{a} \in Q_i$ для всех i начиная с некоторого. Следовательно, $\bar{a} \in Q_i$ для всех i входящих в цикл, начинающегося с некоторого шага $k \leqslant n$, тогда получаем, что выполнено $\bigwedge\limits_{i=k}^{n+1} Q_i(\bar{a})$. Получаем, что выполнено $\chi(\bar{a})$. Если выполнено $\chi(\bar{a})$, то есть $\bar{a}$ принадлежит всем Q в некотором цикле. Следовательно, не существует такого натурального $l > n$, что $\bar{a} \notin Q_l$. Тогда получаем, что по определению $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператора выполнено $\mathrm{PFP}^{\forall}_{Q}(\varphi)(\bar{a})$. Таким образом, мы показали, что если $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор зацикливается в T за n шагов, то можно его элиминировать в теории T. $\square$

Заключение

Мы продемонстрировали, что $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор можно элиминировать в некоторой теории T тогда и только тогда, когда в этой теории T любой $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор зацикливается. В качестве вопросов, которые могут представлять интерес для изучения в будущих работах по данной тематике, можно выделить поиск других свойств теорий при которых $\mathrm{PFP}^{\forall}$-оператор будет возможно или невозможно элиминировать.

Список литературы

[1] *Aho, A. V.* Universality of data retrieval languages / A. Aho, J. D. Ullman // Proc. of 6th Symp. on Principles of Programming Languages. — New York, N. Y. : ACM Press, 1979. — P. 110–120.

[2] *Gurevich, Y.* Fixed-point extensions of first-order logic / Y. Gurevich, S. Shelah // Annals of Pure and Applied Logic. — Vol. 32. — 1986. — P. 265–280.

[3] *Libkin, L.* Elements of Finite Model Theory. — Berlin : Springer, 2004. — 314 p.

[4] *Дудаков, С. М.* Трансляционные результаты для языков запросов в теории баз данных / С. М. Дудаков, М. А. Тайцлин // Успехи математических наук. — 2006. — Т. 61, вып. 2 (368). — С. 3–66.

[5] *Секорин, В. С.* Об эквивалентности двух семантик PFP-оператора // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. — 2020. — № 3. — С. 41–49.

Библиографическая ссылка

Секорин, В. С. Элиминация оператора частичной фиксированной точки // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 255–261.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-35

Сведения об авторах

Всеслав Станиславович Секорин
Тверской государственный университет. Аспирант

Россия, 170100, г. Тверь, Тверская обл., ул. Желябова, 33
E-mail: *vssekorin@gmail.com*

Тверской государственный университет