УДК 519.216
AMS MSC2020: 60G18

Асимптотические оценки вероятности переполнения большого буфера телекоммуникационной системы для случая неоднородного входящего потока

Сидорова О. И.[*], Суслов Л. В.[**], Хохлов Ю. С.[**]

[*]Тверской государственный университет
[**]Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Аннотация. В данной работе получена асимптотическая верхняя граница для самоподобного трафика, являющегося суммой n независимых фрактальных броуновских движений с разными показателями Херста $H_1 < H_2 < \ldots < H_n$.

Ключевые слова: фрактальное броуновское движение, неоднородный трафик, вероятность переполнения буфера.

Введение

Современный сетевой трафик имеет сложную структуру, что затрудняет перераспределение ресурсов для его эффективного обслуживания. Потери данных из-за переполнения буферов и увеличение времени задержки в трансляции негативно сказываются на качестве передаваемой видео и аудио-информации. Поэтому исследование влияния трафика на данные характеристики является важной задачей для сетевого конфигурирования.

Теоретические и практические исследования [5] показали, что фрактальное броуновское движение (ФБМ) адекватно описывает современный трафик. ФБМ — это самоподобный процесс с длинной памятью и легкими хвостами.

Оценка асимптотической нижней границы для вероятности переполнения конечного буфера в условиях ФБМ получена в работе [4].

В статьях [3, 5] приведены верхние границы для такой вероятности. В работе [6] описана асимптотика вероятности переполнения в условиях большого буфера.

В рамках данной статьи будет использован метод, предложенный в [1].

1. Основные определения

Определение 1. *Случайный процесс $X = (X(t),\ t \geqslant 0)$ называется самоподобным с параметром Херста $H > 0$, если он удовлетворяет условию*

$$X(t) \stackrel{d}{=} c^{-H} X(ct),\ \forall t \geqslant 0,\ \forall c > 0,$$

где $\stackrel{d}{=}$ означает равенство конечномерных распределений.

Определение 2. *Дробным броуновским движением с параметром H называется гауссовский процесс $(B_H(t), t \geqslant 0)$ с нулевым средним и ковариационной функцией*

$$\gamma(t,s) = \frac{\sigma^2}{2}\left(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}\right), \quad 0 < H < 1. \tag{1}$$

При $H = 1/2$ имеем обычное броуновское движение с корреляционной функцией

$$\gamma(t,s) = \sigma^2 \min\{t,s\}.$$

2. Основные результаты

Рассмотрим систему массового обслуживания, на которую подается следующий входящий поток:

$$A(t) = mt + \sigma B_H(t), \tag{2}$$

где $(B_H(t),\ t \in R^1)$ — ФБМ с параметром $1/2 < H < 1$, m — средняя интенсивность потока, $\sigma > 0$ — масштабный параметр.

В системе имеется одного устройство, с постоянной скоростью обслуживания $C > 0$. Тогда интенсивность трафика равна $r =$

$C - m > 0$ и у процесса нагрузки $Q(t) = \sup\limits_{t \geqslant s} (A(t) - A(s) - C(t-s))$ существует стационарное распределение

$$Q \stackrel{d}{=} \sup_{t \geqslant 0} (A(t) - Ct). \qquad (3)$$

Нас интересует в е р о я т н о с т ь п е р е п о л н е н и я

$$\varepsilon(b) := P[Q > b], \qquad (4)$$

где $b > 0$ — некоторый пороговый уровень, например, размер буфера.

Обозначим через $B_{1/2}(t)$ — стандартное броуновское движение и положим $\gamma = (2H-2)^{-1}$, $b^* = b \cdot (\sigma / r^H)^{2\gamma}$. В силу автомодельности процесса $B_H(t)$, неравенства Слепяна и теоремы 3.1 из [1] справедливо

$$P\left(\sup_{t \geqslant 0}\{\sigma B_H(t) - rt\} > b\right) = P\left(\sup_{t \geqslant 0}\{B(t) - t\} > b^*\right) \leqslant$$

$$\leqslant P\left(\sup_{t \geqslant 0}\{B_{1/2}(t^{2H}) - t\} > b^*\right) \leqslant \int\limits_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t^{2H}}} \exp\left(-\frac{(t+b^*)^2}{2t^{2H}}\right) dt \sim$$

$$\sim \sqrt{\frac{H}{1-H}} \cdot e^{-c(H,\sigma,r) \cdot b^{2-2H}}, \quad b \to \infty, \qquad (5)$$

где $c(H, \sigma, r)$ есть некоторая явно вычисляемая константа, а $\sim$ означает асимптотику.

Пусть теперь

$$A(t) = mt + \sum_{i=1}^n \sigma_i B_i(t) = (m_1 + \ldots + m_n)t + \sum_{i=1}^n \sigma_i B_i(t), \qquad (6)$$

где $m_i, \sigma_i > 0,\ i = \overline{1,n}$ — средние интенсивности и масштабные параметры потоков, $(B_i(t) = B_{H_i}(t),\ t \in R^1)$ — независимые ФБМ с параметрами $1/2 < H_1 < \ldots < H_n < 1$.

Воспользуемся методом разделения потоков (de-multiplexing) трафика на отдельные очереди с $b_i = b/n$, $r_i = C_i - m_i$, $\overline{1,n}$, $C = C_1 + \ldots + C_n$. Имеем

$$P[Q > b] \leqslant \sum_{i=1}^n P\left(\sup_{t \geqslant 0}\{\sigma_i B_i(t) - r_i t\} > b_i\right). \qquad (7)$$

Теорема 1. *В рамках описанной выше неоднородной модели верхняя асимптотическая граница для вероятности переполнения имеет следующий вид:*

$$P[Q > b] \leqslant \sqrt{\frac{H_n}{1 - H_n}} \cdot e^{-c(H_n,\sigma,r_n)\cdot b^{2-2H_n}}, \quad b \to \infty, \tag{8}$$

где

$$c(H,\sigma,r) = \frac{r^{2H}}{H^{2H} n^{2-2H} (1-H)^{2-2H} \sigma^2}.$$

Заключение

В данной работе получена асимптотическая верхняя граница для вероятности переполнения большого буфера в условиях неоднородного самоподобного входящего потока, являющегося суммой независимых фрактальных броуновских движений. Данная оценка имеет простое аналитическое выражение, что облегчает ее практическое применение. Полученные результаты могут быть полезны при разработке механизмов управления и контроля для современных высокоскоростных сетей телекоммуникации.

Список литературы

[1] *Dębicki, K.* On the supremum from Gaussian processes over infinite horizon / K. Dębicki, Z. Michna, T. Rolski // Probability and Mathematical Statistics. — 2001. — Vol. 18. — P. 83–100.

[2] Is network traffic approximated by stable Levy motion or fractional Brownian motion? / Th. Mikosch, S. Resnick, H. Rootzen, A. Stegeman // The Annals of Applied Probability. — 2002. — Vol. 12, №1. — P. 23–68.

[3] *Lukashenko, O. V.* On the overflow probability asymptotics in a Gaussian queue / O. V. Lukashenko, E. V. Morozov, M. Pagano // Informatics and Applications. — 2014. — Vol. 8, №2. — P. 28–38.

[4] *Norros, I.* A Storage Model with Self-Similar Input // Queueing Systems. — 1994. — Vol. 16. — P. 387–396.

[5] *Rizk, A.* Sample path bounds for long memory fbm traffic / A. Rizk, M. Fidler // 29th Conference on Information Communications,

INFOCOM'10 Proceedings. — Piscataway, NJ, USA : IEEE Press, 2010. — P. 61–65.

[6] *Питербарг, В. И.* Двадцать лекций о гауссовских процессах. — М. : МЦНМО, 2015. — 188 с.

Библиографическая ссылка

Сидорова, О. И. Асимптотические оценки вероятности переполнения большого буфера телекоммуникационной системы для случая неоднородного входящего потока / О. И. Сидорова, Л. В. Суслов, Ю. С. Хохлов // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 267–271.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-37

Сведения об авторах

1. Оксана Игоревна Сидорова
Тверской государственный университет. Доцент

Россия, 170002, г. Тверь, Садовый переулок, д. 35
E-mail: oksana.i.sidorova@yandex.ru

2. Лев Владимирович Суслов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Аспирант

Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, д. 1, стр. 52-2, ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: suslov.lev@mail.ru

3. Юрий Степанович Хохлов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Профессор

Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, д. 1, стр. 52-2, ВМК МГУ им. М. В. Ломоносова
E-mail: yskhokhlov@yandex.ru