УДК 510.643
AMS MSC2020: 03B45

О полноте модальных предикатных логик в семантике Крипке

Шехтман В. Б.

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН;
НИУ «Высшая школа экономики»;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Аннотация. В работе дан обзор известных и новых результатов о полноте и неполноте в семантике Крипке для минимальных предикатных расширений пропозициональных модальных логик.

Ключевые слова: модальная логика, логика предикатов, модель Крипке, полнота по Крипке.

Введение

Около 50 лет назад было замечено, что, в отличие от логик высказываний, многие модальные логики предикатов неполны в семантике Крипке. Хотя имеются общие теоремы о полноте о предикатных логиках с постоянными областями (см. [3]), для логик с расширяющимися областями подобные результаты неизвестны. В данной работе рассматриваются логики вида $\mathbf{Q\Lambda}$ — минимальные предикатные расширения пропозициональных логик $\mathbf{\Lambda}$; уже для них проблема полноты нетривиальна. Мы даем обзор состояния дел по этой теме.

1. Основные определения

Как и в [3], модальные предикатные формулы рассматриваются в сигнатуре без равенства со счетным множеством предикатных символов каждой из валентностей $0, 1, \ldots$; базовые связки: $\bot, \to, \Box$. *Модальная предикатная логика* — множество формул, содержащее аксиомы модальной пропозициональной логики $\mathbf{K}$, аксиомы классического исчисления предикатов и замкнутое относительно правил Modus Ponens, $A/\forall xA$, $A/\Box A$ и предикатной подстановки. $\mathbf{Q\Lambda}$ — минимальное предикатное расширение пропозициональной логики $\mathbf{\Lambda}$.

Предикатная шкала Крипке над пропозициональной шкалой $F = (W, R)$ — это пара $\mathbf{F} = (F, D)$, где $D = (D_u)_{u\in W}$, все области D_u непусты и $D_u \subseteq D_v$ при uRv. Оценка ξ на $\mathbf{F}$ — функция, переводящая каждый n-местный предикатный символ P_k^n в семейство n-местных отношений на D_u, то есть $\xi(P_k^n) = (\xi_u(P_k^n))_{u\in W}$, где $\xi_u(P_k^n) \subseteq D_u^n$ для $n \neq 0$ и $\xi_u(P_k^0) \in \{0,1\}$. Пара $M = (\mathbf{F}, \xi)$ — модель Крипке над $\mathbf{F}$.

Истинность D_u-предложения (замкнутой формулы с константами из D_u) в точке u из M определяется стандартно, по рекурсии. В частности,

$$M, u \vDash P_k^n(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_n) \in \xi_u(P_k^n),$$
$$M, u \vDash P_k^0 \Leftrightarrow \xi_u(P_k^0) = 1,$$
$$M, u \vDash \forall x A(x) \Leftrightarrow \forall a \in D_u \ M, u \vDash A(a),$$
$$M, u \vDash \Box A \Leftrightarrow \forall v \in R(u) \ M, v \vDash A.$$

Формула $A(\mathbf{x})$ общезначима на $\mathbf{F}$, если ее универсальное замыкание $\forall \mathbf{x} A(\mathbf{x})$ истинно во всех точках всех моделей Крипке над $\mathbf{F}$. Модальной логикой класса шкал $\mathcal{C}$ называется множество всех формул, общезначимых на всех шкалах из $\mathcal{C}$. Такие логики называются полными по Крипке.

Данная работа посвящена проблеме полноты для логик вида $\mathbf{Q\Lambda}$. Перечислим пропозициональные логики и аксиомы, которые здесь упоминаются.

$$\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \Box p \to \Box\Box p, \qquad \mathbf{S4} = \mathbf{K4} + \Box p \to p,$$
$$\Box{\cdot}\mathbf{T} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \to p), \qquad \mathbf{SL4} = \mathbf{K4} + \Box p \leftrightarrow \Diamond p,$$
$$\mathbf{K4.2} = \mathbf{K4} + \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p, \quad \mathbf{S4.2} = \mathbf{K4.2} + \Box p \to p,$$
$$\mathbf{K4.3} = \mathbf{K4} + \Box(p \wedge \Box p \to q) \vee \Box(q \wedge \Box q \to p),$$
$$\mathbf{S4.3} = \mathbf{K4.3} + \Box p \to p, \qquad Ad_n = \bigwedge_{i=1}^{n} \Diamond p_i \to \Diamond(\bigwedge_{i=1}^{n} \Diamond p_i),$$
$$\mathbf{GL} = \mathbf{K} + \Box(\Box p \to p) \to \Box p, \quad \mathbf{K05} = \mathbf{K} + \Diamond\Diamond p \to \Box\Diamond p,$$

$$\mathbf{Alt_n} = \mathbf{K} + \bigwedge_{i=1}^{n+1} \Diamond p_i \to \bigvee_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} \Diamond (p_i \wedge p_j).$$

Шкалы Крипке для **K05** задаются условием «густоты»: $R^{-1} \circ R^2 \subseteq R$, для $\mathbf{Alt_n}$ — условием ограниченного ветвления: $\forall x\, |R(x)| \leqslant n$, для $\mathbf{K} + Ad_n$ — условием n-плотности: $\bigcap\limits_{i=1}^{n} R(x_i) \subseteq R^{-1}(\bigcap\limits_{i=1}^{n} R(x_i))$.

2. Теоремы о неполноте по Крипке

Теорема 1 (см. [4]). *Для* $\mathbf{\Lambda} \supseteq \mathbf{S4}$, *логика* $\mathbf{Q\Lambda}$ *может быть полной только если* $\mathbf{\Lambda} \supseteq \mathbf{S5}$ *или* $\mathbf{\Lambda} \subseteq \mathbf{S4.3}$.

Теорема 2 (см. [7]). *Если* $\Box{\cdot}\mathbf{T} \subseteq \mathbf{\Lambda} \subseteq \mathbf{SL4}$, *то логика* $\mathbf{Q\Lambda}$ *неполна.*

Теорема 3 (см. [5]). *Логика* **QGL** *неполна.*

3. Теоремы о полноте по Крипке

Определение 1. *Односторонняя PTC-логика — это модальная пропозициональная логика, которая аксиоматизируется формулами вида* $\Box p \to \Box^n p$, *а также замкнутыми пропозициональными формулами.*

Теорема 4 (см. [3]). *Если* $\mathbf{\Lambda}$ *— односторонняя PTC-логика, то* $\mathbf{Q\Lambda}$ *полна.*

Теорема 5 (см. [1], [3]). *Логика* **QS4.2** *полна.*

Теорема 6 (см. [2]). *Логики* **QS4.3**, **QK4.3**, $\mathbf{QK4.3} + Ad + \Diamond\top$ *полны.*

Теорема 7 (см. [6]). $\mathbf{Q\Lambda}$ *полна для следующих логик* $\mathbf{\Lambda}$:
$\mathbf{K4} + Ad_n$, $\mathbf{K} + Ad_n$, $\mathbf{K4.2}$, $\mathbf{K4.2} + Ad_n$.

Теорема 8 (см. [8]). *Логика* $\mathbf{QAlt_n}$ *полна.*

Теорема 9. *Логика* $\mathbf{QK05} + \Box^3\bot$ *полна.*

Для доказательства двух последних теорем применяются «квазиканонические модели». Напомним сначала определение канонических моделей [3].

Определение 2. *Зафиксируем счетное множество констант* S^*. *L-плейс — это максимальная L-непротиворечивая теория Хенкина в сигнатуре с дополнительными константами из некоторого подмножества* S^* *с бесконечным дополнением.*

Каноническая модель VM_L *модальной предикатной логики* L *имеет вид* (VP_L, R_L, D_L, ξ_L), *где*

- VP_L — *множество всех* L*-плейсов,*
- $\Gamma R_L \Delta$, *если для всех* A *из* $\Box A \in \Gamma$ *следует* $A \in \Delta$,
- $(D_L)_\Gamma$ *(обозначается* D_Γ*) — множество всех констант из* Γ,
- $VM_L, \Gamma \vDash A$ *тогда и только тогда, когда* $A \in \Gamma$ *для атомарных* D_Γ*-предложений* A.

Теорема 10 (О канонической модели). *Для любого* L*-плейса* Γ *и* D_Γ*-предложения* A, $VM_L, \Gamma \vDash A$ *тогда и только тогда, когда* $A \in \Gamma$.

Следующие определения несколько отличаются от [3].

Определение 3. *Модель Крипке* $M' = (W', R', D', \xi')$ *называется слабой селективной подмоделью модели Крипке* $M = (W, R, D, \xi)$, *если*

- $W' \subseteq W$; $R' \subseteq R$; *для всех* $w \in W'$, $D_w = D'_w$; $\xi'_w = \xi_w$,
- *для всех* D_w*-предложений* A,

$$M, w \not\vDash \Box A \Longrightarrow \exists u \in R'(w)\, M, u \not\vDash A.$$

Определение 4. *Квазиканоническая модель логики* L — *это слабая селективная подмодель ее канонической модели.*

Теорема 11. *Для любого* L*-плейса* Γ *из квазиканонической модели* M *и* D_Γ*-предложения* A $\quad M, \Gamma \vDash A \Leftrightarrow A \in \Gamma$.

Для доказательства теоремы 8 квазиканоническая модель, содержащая данный L-плейс, последовательно строится следующим образом. Если уже построено Γ, то для каждой формулы $\Diamond A \in \Gamma$ добавляется L-плейс $\Delta \in R_L(\Gamma)$, содержащий A (если такого нет среди уже построенных). $\mathbf{Alt_n}$ обеспечивает ограниченное ветвление.

Для доказательства теоремы 9 квазиканоническая модель, содержащая данный L-плейс Γ, строится в 2 этапа. Пусть $\{\Diamond A_1, \Diamond A_2, \ldots\}$ — список всех формул из Γ, начинающихся с $\Diamond$. На первом этапе для каждой формулы $\Diamond_i A$ добавляется L-плейс $\Delta_i \in R_L(\Gamma)$, содержащий A (если такого нет среди $\Gamma, \Delta_1, \ldots, \Delta_{i-1}$). При этом L-плейсы Δ_i должны быть разделены, то есть $D_{\Delta_i} \cap D_{\Delta_j} = D_\Gamma$ при $i \neq j$; это условие всегда можно обеспечить в конструкции Хенкина.

На втором этапе для каждого i и формулы $\Diamond B \in \Delta_i$ строится содержащий ее L-плейс из $\bigcap_j R_L(\Delta_j)$. Такой плейс всегда существует, благодаря непротиворечивости теорий

$$\{B\} \cup \bigcup_j \{A \mid \Box A \in \Delta_j\}.$$

Непротиворечивость устанавливается с использованием аксиомы **K05** и разделенности теорий Δ_j.

Заключение

Таким образом, для логик $\mathbf{Q\Lambda}$ сохраняется прежняя картина: полные логики — островки в океане неполных. Во многих случаях вопрос о полноте открыт: например, для $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{K05} + \Box^4\bot$ или когда $\mathbf{\Lambda}$ — логика конечного дерева (со строгим порядком).

Список литературы

[1] *Corsi, G.* Directed frames / G. Corsi, S. Ghilardi // Archive for Mathematical Logic. — 1989. — Vol. 29. — P. 53–67.

[2] *Corsi, G.* Quantified modal logics of positive rational numbers and some related systems // Notre Dame Journal of Formal Logic. — 1993. — Vol. 34. — P. 263–283.

[3] *Gabbay, D.* Quantification in nonclassical logic, v. 1. / D. Gabbay, V. Shehtman, D. Skvortsov. — Amsterdam : Elsevier, 2009. — 615 p.

[4] *Ghilardi, S.* Incompleteness results in Kripke semantics // Journal of Symbolic Logic. — 1991. — Vol. 56, №2. — P. 517–538.

[5] *Montagna, F.* The predicate modal logic of provability // Notre Dame J. of Formal Logic. — 1984. — Vol. 25, №2. — P. 179–189.

[6] *Shehtman, V.* On Kripke completeness of some modal predicate logics with the density axiom // Advances in Modal Logic. — College Publications, 2018. — Vol. 12. — P. 559–576.

[7] *Shehtman, V.* Kripke completeness of modal predicate logics around quantified **K5**. — 2021, submitted.

[8] *Shehtman, V.* Semiproducts, products, and modal predicate logics / V. Shehtman, D. Shkatov. — In preparation.

Библиографическая ссылка

Шехтман, В. Б. О полноте модальных предикатных логик в семантике Крипке // Всероссийская научная конференция «Математические основы информатики и информационно-коммуникационных систем». Сборник трудов. — Тверь : ТвГУ, 2021. — С. 279–284.
https://doi.org/10.26456/mfcsics-21-39

Сведения об авторах

Валентин Борисович Шехтман
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН;
НИУ «Высшая школа экономики»;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова.
Главный научный сотрудник; профессор

Россия, 127051, Москва, Б. Каретный, 19 стр. 1
E-mail: vshehtman@gmail.com