СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 40, 2011

Scientia unescamus

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 40, 2011

Теория функций

32

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Ф3

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 40 (2011). С. 3–171

УДК 517.9

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ФУНКЦИЙ МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

© 2011 г. А. Ю. ПОПОВ, А. М. СЕДЛЕЦКИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Интегральные представления, асимптотики и оценки функций Миттаг-Леффлера . 6
1.1. Интегральные представления функции Миттаг-Леффлера 6
1.2. Основные теоремы об асимптотическом поведении функций Миттаг-Леффлера 11
1.3. Полное асимптотическое разложение одного интеграла 14
1.4. Асимптотическое разложение функции Миттаг-Леффлера порядка $\rho \geqslant 3/4$ 18
1.5. Асимптотическое разложение функции Миттаг-Леффлера порядка $\rho \leqslant 3/4$ 25
Глава 2. Асимптотические свойства нулей функции Миттаг-Леффлера 33
2.1. Асимптотические формулы для нулей 33
2.2. Согласование асимптотики и нумерации нулей 48
Глава 3. Задача о вещественности всех корней функции Миттаг-Леффлера порядка, меньшего 1/2 56
3.1. Основные результаты главы 56
3.2. Идейное содержание доказательств теорем 3.1.1–3.1.3 59
3.3. Первый корень функции Миттаг-Леффлера 61
3.4. Некоторые неравенства для гамма-функции и ее производных 65
3.5. Доказательство леммы 3.1.1 68
3.6. Доказательство теоремы 3.1.1 в случае $0.4 \leqslant \rho < 0.5$ 69
3.7. Доказательство теоремы 3.1.1 в случае $0.25 < \rho < 0.4$ 71
3.8. Доказательство теоремы 3.1.1 в случае $1/6 < \rho \leqslant 1/4$ 73
3.9. Окончание доказательства теоремы 3.1.1 (случай $0 < \rho \leqslant 1/6$). Доказательство теоремы 3.1.2 75
3.10. Доказательство теоремы 3.1.3 85
3.11. Доказательство теоремы 3.1.4 95
3.12. Доказательство теоремы 3.1.5 96
Глава 4. Неасимптотические свойства нулей 101
4.1. Вещественные корни 101
4.2. Распределение нулей в углах 106
4.3. Случай $\rho = 1/2$ 113
4.4. Отсутствие кратных нулей 121
4.5. Нули функции $E_1(z;\mu)$, неполной гамма-функции, функции ошибок 123
Глава 5. Нули преобразований Лапласа и вырожденной гипергеометрической функции . . . 127
5.1 Постановка задачи 127
5.2. Нули финитных преобразований Лапласа 128
5.3. Нули вырожденной гипергеометрической функции 136
Глава 6. Действительные корни функции Миттаг-Леффлера порядка $\rho \in (1/2, 1)$ 143
6.1. Постановка задачи и основные результаты 143
6.2. Доказательство теоремы 6.1.2 146
6.3. Несколько неравенств 150
6.4. Наличие действительных корней при некоторых специальных значениях параметра $\mu > 1/\rho$ 154
6.5. Доказательство теоремы 6.1.1 158
6.6. Доказательство теоремы 6.1.3 161

6.7. План доказательства теоремы 6.1.4 . . . 162
6.8. Завершение доказательства теоремы 6.1.4 . . . 165
6.9. Доказательство утверждения 1) теоремы 6.1.5 . . . 169
Список литературы . . . 170

ПРЕДИСЛОВИЕ

В 1903 г. в связи с открытым им методом суммирования степенных рядов шведский математик Миттаг-Леффлер [39] ввел в анализ новую (целую) функцию

$$E_{1/\rho}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+n\rho)}, \quad \rho > 0,$$

впоследствии и получившую его имя.

Появление новой функции не осталось незамеченным. Показательно, что уже в первых работах о ней авторов интересовал вопрос распределения ее нулей. Так, Виман (см. [45]) доказал, что при $\rho \geqslant 2$ все ее нули (корни) вещественны, отрицательны и просты. Позже Пойа (см. [42]) с помощью другого приема передоказал этот факт для случая $2 \leqslant \rho \in \mathbb{N}$.

С течением времени функция $E_{1/\rho}(z)$ завоевывала все новые позиции в теории функций. Вместе с этим получило разумное расширение и само ее определение с помощью дополнительного параметра μ. Расширение это состояло в переходе к более общей функции

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu+n/\rho)}, \quad \rho > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

которую мы также будем называть *функцией Миттаг-Леффлера* ($E_{1/\rho}(z) = E_\rho(z;1)$). Этот термин и обозначение $E_\rho(z;\mu)$ – не единственные из встречающихся в литературе. Например, встречаются обозначения $E_{1/\rho}(z;\mu)$, $E_{1/\rho,\mu}(z)$ и термины «обобщенная функция Миттаг-Леффлера», «функция типа Миттаг-Леффлера». Функция $E_\rho(z;1) = E_{1/\rho}(z)$ будет у нас выступать как *классическая функция Миттаг-Леффлера*.

В нашей стране интерес к функции $E_\rho(z;\mu)$ в значительной степени был стимулирован выходом в свет монографии [4] Джрбашяна. Мы придерживаемся обозначения (1), принятого в этой книге.

Из определения (1) сразу вытекают формулы

$$E_1(z;1) = e^z, \quad E_1(z;-m) = z^{m+1}e^z, \; m \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

$$E_{1/2}(z;1) = \operatorname{ch}\sqrt{z}, \quad E_{1/2}(z;-(2m-1)) = z^m \operatorname{ch}\sqrt{z}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$E_{1/2}(z;2) = \frac{(\operatorname{sh}\sqrt{z})}{\sqrt{z}}, \quad E_{1/2}(z;-2m) = z^{m+1/2}\operatorname{sh}\sqrt{z}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

$$E_1(z;c) = \frac{\Phi(1,c;z)}{\Gamma(c)}, \; c \notin -\mathbb{Z}_+ \tag{3}$$

где $\Phi(a,c;z) = F_1(a,c;z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция. Эти формулы лишний раз свидетельствуют о широте класса целых функций (1).

Позже мы увидим, что, за исключением случаев (2), функция $E_\rho(z;\mu)$ имеет бесконечное множество нулей.

Одно из важных направлений, связанных с функциями (1) — это теория интегральных преобразований типа Фурье—Лапласа с ядрами Миттаг-Леффлера. Некоторый намек на возможность построения таких преобразований содержится в первой формуле (2). А содержательная, аналитическая часть этой теории опирается на асимптотические оценки функций (1). К настоящему моменту указанные теория и оценки с наибольшей полнотой представлены в [4].

В последнее время сфера применений функции $E_\rho(z;\mu)$ значительно расширилась. Например, она активно используется в теории случайных процессов; здесь укажем лишь на (наиболее характерные) работы [36, 37].