

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ**

**П. А. Головинский**

**ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА  
И АНАЛИЗ  
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

**2**

**Многообразие  
нелинейностей**

**От автоколебаний и борьбы  
за существование  
до бифуркаций, солитонов  
и зарождения турбулентности**

**Анализ сложных систем**

**Как ориентироваться в шумах  
и хаосе, распознавать образы  
с помощью искусственных  
нейронов, планировать сети  
и принимать решения  
при ограниченной информации**



Мод. 137

П. А. Головинский

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
МОДЕЛИ  
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА  
И АНАЛИЗ  
СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

**От нелинейных колебаний  
до искусственных нейронов  
и сложных систем**

Л. Ж.



URSS  
МОСКВА

Тверской государственный университет



Научная библиотека 00294812

93-2

# Оглавление

Введение . . . . .	10
<b>Нелинейные колебания и волны</b>	<b>11</b>
<i>Глава 1. Усреднение</i> . . . . .	13
Автоколебания. . . . .	13
Движение под действием быстропеременной силы. . . . .	17
Маятник Капицы. . . . .	18
<i>Глава 2. Структура фазовых траекторий</i> . . . . .	19
Траектории и фазовый поток. . . . .	19
Классификация особых точек. . . . .	21
Предельные циклы. . . . .	24
Индексы Пуанкаре. . . . .	25
<i>Глава 3. Устойчивость динамических систем</i> . . . . .	25
Виды устойчивости. . . . .	25
Локальный критерий устойчивости. . . . .	26
Глобальная устойчивость и функции Ляпунова. . . . .	28
Бифуркации. . . . .	29
Тангенциальная бифуркация . . . . .	29

Смена устойчивости. . . . .	30
Бифуркация удвоения (типа "вилка"). . . . .	31
<i>Глава 4. Химические и биохимические процессы</i> . . . . .	34
Химическая кинетика. . . . .	34
Хиральность биохимических систем. . . . .	37
<i>Глава 5. Борьба за существование</i> . . . . .	39
Модель Лотки—Вольтерра. . . . .	39
Модель брюсселятора. . . . .	43
<i>Глава 6. Бегущие волны</i> . . . . .	44
Простейшие нелинейные волны. . . . .	44
Опрокидывание волн. . . . .	45
Уравнение Бюргерса. . . . .	46
<i>Глава 7. Волны на мелкой воде</i> . . . . .	49
Уравнение Кортевега—де Вриза. . . . .	49
Солитоны. . . . .	50
Уравнение КдВ и вариационный принцип. . . . .	53
<i>Глава 8. Движение дислокаций</i> . . . . .	54
Описание движения дислокаций. . . . .	54
Континуальное приближение. . . . .	57
<i>Глава 9. Метод обратной задачи</i> . . . . .	60
Стационарное уравнение Шредингера. . . . .	60
Обратная задача рассеяния. . . . .	62
<i>Глава 10. Взаимодействие волн</i> . . . . .	64
Метод медленно меняющихся амплитуд. . . . .	64
Генерация гармоник. . . . .	66

Оглавление	5
<i>Глава 11. Нелинейная квазиоптика</i> . . . . .	69
Уравнение пучка с самовоздействием. . . . .	69
Стационарные волны. . . . .	71
Самофокусировка и самоканализация волн. . . . .	72
<i>Глава 12. Автомодельные режимы</i> . . . . .	74
Нестационарная волна разрежения. . . . .	74
Точечный взрыв. . . . .	76
Тепловая стадия ядерного взрыва. . . . .	77
<i>Глава 13. Устойчивость</i> . . . . .	80
Неустойчивость течения жидкости. . . . .	80
Абсолютная и конвективная неустойчивость. . . . .	82
<i>Глава 14. Турбулентность и странные аттракторы</i> . . . . .	84
Модель Лоренца . . . . .	84
Аттракторы. . . . .	85
Последовательность бифуркаций. . . . .	86
Метод сложения импульсов для расчета потоков. . . . .	87
<b>Сложные и иерархические системы</b>	<b>89</b>
<i>Глава 15. Вероятность и распределения</i> . . . . .	91
Понятие вероятности. . . . .	91
Случайные величины. . . . .	93
Математическое ожидание. . . . .	95
Производящие функции. . . . .	95
Зависимость случайных величин. . . . .	96
Регрессия. . . . .	96

Метод наименьших квадратов. . . . .	98
Общие требования при регрессионном анализе. . . . .	100
<i>Глава 16. Энтропия и информация</i> . . . . .	100
Информация. . . . .	100
Энтропия. . . . .	103
Теоремы Шеннона. . . . .	106
<i>Глава 17. Марковские процессы</i> . . . . .	107
Случайные процессы и диффузия. . . . .	107
Кинетическое уравнение . . . . .	109
Мера Винера . . . . .	110
<i>Глава 18. Системы массового обслуживания</i> . . . . .	112
Потоки в системах обслуживания. . . . .	112
Марковские процессы обслуживания. . . . .	113
Стационарный режим обслуживания. . . . .	116
<i>Глава 19. Случайные блуждания</i> . . . . .	117
Уравнение Ланжевена. . . . .	117
Броуновское движение. . . . .	119
Задача о первом достижении границ. . . . .	120
Уравнение Фоккера—Планка многомерной задачи. . . . .	121
Броуновское движение гармонического осциллятора. . . . .	122
Броуновское движение при фазовых переходах. . . . .	123
Стохастический интеграл. . . . .	124
<i>Глава 20. Шумы в линейных системах</i> . . . . .	126
Эргодичность. . . . .	126
Математическое описание линейных систем. . . . .	127

---

Отклик линейной системы на шумовое воздействие. . . . .	128
<i>Глава 21. Случайные процессы и поля . . . . .</i>	<i>131</i>
Стационарный случайный процесс. . . . .	131
Дробовой шум. . . . .	135
Обнаружение сигнала на фоне шума. . . . .	137
Уравнение Винера—Хопфа. . . . .	139
Случайное поле. . . . .	140
Моменты. . . . .	141
Спектральные разложения. . . . .	143
Дифракция случайной волны. . . . .	145
<i>Глава 22. Фракталы и разрушение . . . . .</i>	<i>146</i>
Размерность Хаусдорфа. . . . .	146
Определение фрактала. . . . .	149
Связь с ренормализационной группой. . . . .	149
Фрактальная гриффитсова трещина. . . . .	151
<i>Глава 23. Графы и сети . . . . .</i>	<i>155</i>
Общие свойства графов. . . . .	155
Пути и связность в графе. . . . .	159
Деревья. . . . .	160
Задача построения минимального остова (порождающего де- рева). . . . .	160
Задача о кратчайшем маршруте между выбранными верши- нами. . . . .	162
Максимальные потоки в сетях . . . . .	162
О реализации сетей в трехмерном пространстве. . . . .	166
Феномен «тесного мира». . . . .	166

---

<i>Глава 24. Нейронные сети</i> . . . . .	167
Искусственные нейроны. . . . .	167
Сети прямого распространения. . . . .	169
Приближение функций. . . . .	170
<i>Глава 25. Ассоциативная память</i> . . . . .	177
Сеть Хопфилда. . . . .	177
Обучение сети. . . . .	177
Функционирование сети. . . . .	178
Энергетическая интерпретация. . . . .	179
Гетероассоциативные сети Коско. . . . .	180
Симметрия при распознавании образов. . . . .	181
<i>Глава 26. Автоматы</i> . . . . .	184
Автоматные модели. . . . .	184
Задание автоматов. . . . .	185
Представление автоматов. . . . .	188
<i>Глава 27. Квантовый поиск</i> . . . . .	190
Квантовый нейрон. . . . .	190
Принцип распознавания. . . . .	191
Подготовка данных. . . . .	192
<i>Глава 28. Генетический алгоритм</i> . . . . .	195
Генетические понятия. . . . .	195
Популяции и хромосомы. . . . .	195
Эволюция. . . . .	196
Кроссинговер. . . . .	198
Отбор. . . . .	199



---

<i>Глава 29. Нечеткие множества и рассуждения</i> . . . . .	200
Нечеткие множества. . . . .	200
Основные характеристики нечетких множеств. . . . .	201
Операции над нечеткими множествами. . . . .	203
Логические операции над нечеткими множествами. . . . .	203
Нечеткие и лингвистические переменные. . . . .	204
Нечеткие правила вывода. . . . .	205
Модель нечеткого вывода. . . . .	206
Фаззификация и дефаззификация. . . . .	207
Модель Мамдани—Заде как универсальный аппроксиматор	208
<i>Глава 30. Игры</i> . . . . .	208
Конфликты как игры. . . . .	208
Основное неравенство и игра с седловой точкой. . . . .	210
Игры с вероятностным выбором стратегии. . . . .	211
Связь с линейным программированием. . . . .	212
Выбор стратегии. . . . .	213
Заключение . . . . .	217
Литература . . . . .	219
Предметный указатель . . . . .	224